

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIDADE ACADÊMICA DE ENGENHARIA QUÍMICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA QUÍMICA

ANÁLISE COMPARADA DA ESTABILIDADE ROBUSTA NA
PERSPECTIVA DETERMINÍSTICA E ESTOCÁSTICA

ALISSON CASTRO DO NASCIMENTO

Campina Grande - Paraíba

2016

ALISSON CASTRO DO NASCIMENTO

ANÁLISE COMPARADA DA ESTABILIDADE ROBUSTA NA
PERSPECTIVA DETERMINÍSTICA E ESTOCÁSTICA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Química da Universidade Federal de Campina Grande, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Engenharia Química.

Orientador: Prof. Dr. João Teotônio Manzi

Campina Grande - Paraíba

2016

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL DA UFCG

N244a Nascimento, Alisson Castro do.
Análise comparada da estabilidade robusta na perspectiva determinística e estocástica / Alisson Castro do Nascimento. – Campina Grande, 2016.

113 f. : il.

Dissertação (Mestrado em Engenharia Química) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia.

"Orientação: Prof. Dr. João Teotônio Manzi".

Referências.

1. Engenharia - Estatística. 2. Estatística Clássica. 3. Estabilidade Robusta. I. Manzi, João Teotônio. II. Título.

CDU 66.0:311(043)

ALISSON CASTRO DO NASCIMENTO

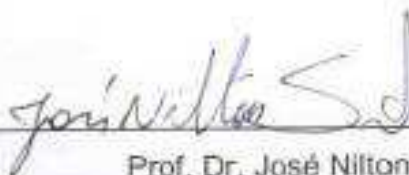
ANÁLISE COMPARADA DA ESTABILIDADE ROBUSTA NA
PERSPECTIVA DETERMINÍSTICA E ESTOCÁSTICA

DISSERTAÇÃO APROVADA EM: 14 de abril de 2016

COMISSÃO EXAMINADORA:



Prof. Dr. João Teotônio Manzi
Orientador – UAEQ – CCT - UFCG



Prof. Dr. José Nilton Silva
Examinador Interno – UAEQ – CCT - UFCG



Prof. Dr. Bruno Barbosa Albert
Examinador Externo – UAEE – CEEI - UFCG

Campina Grande – Paraíba

2016

Aos meus pais, irmãos,
amigos e em especial a minha noiva
Tássila Neves.

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais Amélia Castro e Severino Nascimento, por acreditarem na minha capacidade.

Aos meus irmãos Acácio Nascimento, Amanda Nascimento e Antônio Neto.

A minha noiva Tassila Neves que tem sido um grande ponto de equilíbrio nesta jornada e por me aguentar todo esse tempo.

A toda minha família, tios, tias, primas, primos, agregados que viraram família, em especial a minha avó que tanto quero bem.

Ao orientador Prof. Dr. João Manzi pela orientação e pelo apoio e suporte, e por todas conversas que resultaram neste trabalho.

A todos os professores da Universidade Federal de Campina Grande por terem passado seus conhecimentos durante a graduação, e agora na pós-graduação.

A Universidade Federal de Campina Grande – UFCG.

A todos que compõem a Unidade Acadêmica de Engenharia Química – UAEQ, entre professores, funcionários e técnico-administrativos.

Aos colegas de Laboratório (LARCA – GSQ), e a todos os outros que contribuíram ao longo dessa caminhada.

Aos meus amigos Thiago Baracho, Rafael Melo, José Silva, Nagel Alves, Cristiano Furtado, Marcelo Batista, Eranildo Pereira, Thássio Nobrega, Heleno Bispo e Helder Fernandes e as minhas amigas Thalita Fernanda, Iane Nascimento e Krsthianna Palitot.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo financiamento da pesquisa.

Obrigado a todos!!!

Se não puder voar, corra.
Se não puder correr, ande.
Se não puder andar, rasteje, mas
continue em frente de qualquer jeito.

Martín Luther King.

Sumário

1. INTRODUÇÃO	18
1.1. Motivação do trabalho proposto	18
1.2. Justificativa	21
1.3. Organização do trabalho	22
2. OBJETIVOS	23
2.1. Objetivo Geral	23
2.2. Objetivos específicos	23
3. METAS	Erro! Indicador não definido.
4. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	24
4.1. Contextualização histórica	24
4.2. Conceito de estabilidade clássica	26
4.3. Estabilidade e o local das raízes	28
4.4. Estabilidade de Lyapunov	31
4.4.1. Funções de Lyapunov – Definições	32
4.5. Estabilidade entrada-saída	35
4.6. Controladores PID	38
5. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	43
5.1. Associação entre estabilidade robusta determinística e a estabilidade sobre a ótica estatística.	43
5.2. A estabilidade robusta do ponto de vista estatístico	44
5.3. Distância Euclidiana e distância estatística	45
5.4. Cálculo da Estabilidade do Sistema	51
5.5. Robustez da estabilidade	53
5.6. Robustez do Desempenho	56

6. RESULTADOS E DISCUSSÃO	60
6.1. Planilha computacional Excel/VBA	60
6.2. Análise comparativa entre as teorias de probabilidade estabilidade.	65
6.2.1. Metodologia Distribuição Normal Multivariada - 3 Sigma	66
6.2.2. Função Erro	70
6.2.3. Resultados Comparativos	72
7. ESTUDOS DE CASO	73
7.1. Sistema Não Reativo – Destilação Flash	73
7.1.1. Resultados para o processo Não Reativo	74
7.2. Sistema Reativo – Produção de Propileno Glicol	82
7.2.1. Resultados para o processo Reativo	83
8. CONCLUSÕES	89
9. BIBLIOGRAFIA	92
10. SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	91
Anexo I	96
Anexo II	103
Anexo III	105
Anexo IV	107
Anexo V	110
Anexo VI	111
Apêndice 01	112
Apêndice 02	113
Apêndice 03	112
Apêndice 04	113

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

FIGURA 1: REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DO LOCAL DAS RAÍZES FORMA DA ELIPSE, PROVÁVEL LOCAL DA RAIZ ESTÁVEL.	27
FIGURA 2– REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DAS DEFINIÇÕES DE ESTABILIDADE.	28
FIGURA 3- LOCALIZAÇÃO DE RAÍZES TÍPICAS DA EQUAÇÃO CARACTERÍSTICA.....	29
FIGURA 4– DIAGRAMA DA DISTRIBUIÇÃO UNIFORME.	30
FIGURA 5– SISTEMA BÁSICO DE CONTROLE EM MALHA ÚNICA	30
FIGURA 6- REPRESENTAÇÃO DA DEFINIÇÃO 01	32
FIGURA 7 - ESTABILIDADE ASSINTÓTICA UNIFORME CONFORME DEFINIÇÃO 05.....	34
FIGURA 8– REPRESENTAÇÃO DE UM SISTEMA CANÔNICO REALIMENTADO.....	36
FIGURA 9 – PROCESSO QUÍMICO COM REPRESENTAÇÃO DE ENTRADAS E SAÍDAS E POSSÍVEIS DISTÚRBIOS.	38
FIGURA 10 - O COMPORTAMENTO DAS AÇÕES PROPORCIONAL, INTEGRAL E DERIVATIVA.	41
FIGURA 11- A) REPRESENTAÇÃO DA REGIÃO CONJUNTA BIVARIADA. B) FUNÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO UNIFORME BIVARIADA (FDCP).	44
FIGURA 12- REPRESENTAÇÃO DE DISPERSÃO GERAL DE VARIABILIDADE.....	45
FIGURA 13- CONJUNTO DE PONTOS QUE REPRESENTAM UMA ELIPSE SEM PERDER A GENERALIDADE	47
FIGURA 14 - DIAGRAMA DE BLOCOS PARA O SISTEMA DE CONTROLE EM MALHA FECHADA DE UM SISTEMA DE CONTROLE GENÉRICO.	51
FIGURA 15– DISPERSÃO DAS RAÍZES NO PLANO COMPLEXO	53
FIGURA 16– DISPERSÃO DAS RAÍZES NO NOVO SISTEMA DE COORDENADAS	54
FIGURA 17– REDUÇÃO DA ROBUSTEZ DA ESTABILIDADE.	56
FIGURA 18 – RESPOSTAS DA SAÍDA DO PROCESSO A PARTIR DO CONTORNO DA ELIPSE.	56
FIGURA 19 – PERDA DA ROBUSTEZ DA ESTABILIDADE.....	ERRO! INDICADOR NÃO DEFINIDO.
FIGURA 20 – REPRESENTAÇÃO DAS RAÍZES NO PLANO COMPLEXO.	61
FIGURA 21 - REPRESENTAÇÃO DA DISPERSÃO GERAL DE VARIABILIDADE ROTACIONADA.....	62
FIGURA 22 - REGIÃO DE CONFIABILIDADE DAS VARIÁVEIS NORMALIZADAS.....	63
FIGURA 23 – RESPOSTAS DA SAÍDA DO PROCESSO A PARTIR DO CONTORNO DA ELIPSE.	63
FIGURA 24 – REGIÃO DE ESTABILIDADE ROBUSTA, PARA PARÂMETROS DO CONTROLADOR PID.	65
FIGURA 25 - DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADE DAS MÉDIAS, REPRESENTAÇÃO GRÁFICA UMA DISTRIBUIÇÃO NORMAL	66
FIGURA 26 - REPRESENTAÇÃO DAS AMOSTRAS 3 SIGMA, PARA VÁRIOS MÉTODOS DE DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADE	67
FIGURA 27 – RESULTADOS DA REGIÃO DE ESTABILIDADE OBTIDOS PARA FUNÇÃO 3 SIGMA.....	69
FIGURA 28 – RESULTADOS DA REGIÃO DE ESTABILIDADE OBTIDOS PARA FUNÇÃO ERRO ($\varepsilon = 2\%$)....	71
FIGURA 29 – REPRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS OBTIDOS DA COMPARAÇÃO ENTRE AS PERSPECTIVAS DETERMINÍSTICA E ESTOCÁSTICA	72
FIGURA 30 – FLASH COM VALVULA DE CONTROLE DE PRESSÃO.	73
FIGURA 31 – FLASH COM TEMPERATURA DE ALIMENTAÇÃO CONTROLADA.....	74
FIGURA 32– REPRESENTAÇÃO DO TANQUE FLASH - SISTEMA NÃO REATIVO – SIMULAÇÃO ASPENPLUS® NO ESTADO ESTACIONÁRIO	75
FIGURA 33– REPRESENTAÇÃO DO SISTEMA DINÂMICO - SISTEMA NÃO REATIVO – SIMULAÇÃO ASPENPLUS®;.....	75
FIGURA 34– REPRESENTAÇÃO DO MODELO IDENTIFICADO E DO MODELO EXPERIMENTAL APÓS UM DISTÚRBO DE 10% NO TEMPO 5 MINUTOS.	77
FIGURA 35– REPRESENTAÇÃO DA FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA $G_{p1}(s)$ SUBMETIDA A UM DEGRAU COM A VARIAÇÃO SUPERIOR E INFERIOR	78

FIGURA 36 – REPRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS OBTIDOS DA COMPARAÇÃO ENTRE AS PERSPECTIVAS DETERMINÍSTICA E ESTOCÁSTICA PARA O SISTEMA NÃO REATIVO	81
FIGURA 37– ESQUEMA DO MODELO DE PRODUÇÃO DO PROPILENO GLICOL.	83
FIGURA 38– SIMULAÇÃO DO PROCESSO DE PRODUÇÃO DO PROPILENO GLICOL NO ESTADO ESTACIONÁRIO	83
FIGURA 39– SIMULAÇÃO DO PROCESSO DE PRODUÇÃO DO PROPILENO GLICOL NO ESTADO DINÂMICO.	84
FIGURA 40– REPRESENTAÇÃO DO MODELO IDENTIFICADO E DO MODELO EXPERIMENTAL APÓS UM DISTÚRBO DE 10% NO TEMPO 5 MINUTOS	85
FIGURA 41 - REPRESENTAÇÃO DA FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA $G_{p1}(s)$ SUBMETIDA A UM DEGRAU COM A VARIAÇÃO SUPERIOR E INFERIOR	86
FIGURA 42 – REPRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS OBTIDOS DA COMPARAÇÃO ENTRE AS PERSPECTIVAS DETERMINÍSTICA E ESTOCÁSTICA PARA O SISTEMA REATIVO	88
FIGURA 43- DIAGRAMA DE BLOCO PARA O SISTEMA DE CONTROLE EM MALHA FECHADA	96
FIGURA 44– DIAGRAMA REPRESENTATIVO DO PONTO P NO NOVO SISTEMAS DE EIXOS	103
FIGURA 45– REPRESENTAÇÃO DO PONTO P NOS DOIS SISTEMAS DE EIXOS.	103
FIGURA 46– REPRESENTAÇÃO DO PONTO P NOS DOIS SISTEMAS DE EIXOS	104
FIGURA 47- REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DA DENSIDADE DE PROBABILIDADE χ^2 :.....	105
FIGURA 48- SIGNIFICADO FÍSICO DA MATRIZ DE AUTOVALORES	109
FIGURA 49– REAPRESENTAÇÃO DA SIMULAÇÃO DO PROCESSO DE PRODUÇÃO DO PROPILENO GLICOL NO ESTADO DINÂMICO.	112
FIGURA 50– VALORES OBTIDOS ATRAVÉS DA SIMULAÇÃO DO PROCESSO DE PRODUÇÃO DO PROPILENO GLICOL.	113

LISTA DE TABELAS

TABELA 1- REPRESENTAÇÃO DA PLANILHA DE ENTRADA DE DADOS GENÉRICOS DOS PARÂMETROS DO SISTEMA.	60
TABELA 2- DADOS UTILIZADOS DOS VALORES DA DISTRIBUIÇÃO CHI-QUADRADO	64
TABELA 3– VALORES USADOS PARA DELIMITAR A FUNÇÃO 3SIGMA.....	68
TABELA 4– VALORES USADOS PARA DELIMITAR A FUNÇÃO ERRO COM $\varepsilon = 2\%$	70
TABELA 5– REPRESENTAÇÃO DA PLANILHA DE ENTRADA DE DADOS DO PROCESSO NÃO REATIVO	79
TABELA 6– REPRESENTAÇÃO DA PLANILHA DE ENTRADA DE DADOS DO PROCESSO REATIVO.	87
TABELA 7– DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADE CHI-QUADRADO	105

Lista de Símbolos e Abreviaturas

D , Matriz diagonal;

G_p , Funções de transferência do processo;

G_c , Funções de transferência do controlador;

G_v , Funções de transferência do atuador;

G_m , Funções de transferência do sensor;

k_c Ganho proporcional do controlador;

P , Matriz diagonal;

s , Variável complexa do domínio de Laplace;

$t(1 - \alpha, \nu)$, variável aleatória de distribuição *t-student*;

ν , grau de liberdade;

X_i , variável aleatória;

\bar{y} , valor média na saída do processo;

Ω , população

α , nível de significância;

χ^2 , distribuição chi-quadrado;

μ , média populacional;

Σ , matriz de covariância;

μ_{x_i} , média amostral;

σ , desvio padrão populacional;

$\sigma^2_{x_i}$, variância amostral de variável aleatória x_i ;

τ , constante de tempo da função característica;

τ_i , parâmetro de tempo integral;

τ_D , parâmetro de tempo derivativo;

F^e Vazão volumétrica de entrada ($L s^{-1}$)

V Volume do reator (L)

n_{op} , Número de mole do óxido de Propileno (mol)

C_{op}^e Concentração de entrada do óxido de Propileno ($mol L^{-1}$)

C_{op} Concentração do óxido de Propileno (mol L^{-1})

n_w Número de mole da água (mol)

C_w^e Concentração de entrada da água (mol L^{-1})

C_w Concentração da água (mol L^{-1})

n_m Número de mole do metanol (mol)

C_m^e Concentração de entrada do metanol (mol L^{-1})

C_m Concentração do metanol (mol L^{-1})

n_{pg} , Número de mole do Propileno Glicol (mol)

C_{pg}^e Concentração de entrada do Propileno Glicol (mol L^{-1})

C_{pg} Concentração do Propileno Glicol (mol L^{-1})

r Taxa de reação ($\text{mol L}^{-1} \text{s}^{-1}$)

t Tempo (s)

h Entalpia especifica (J g^{-1})

H Entalpia do sistema (J)

\tilde{H} Entalpia Molar Parcial (J mol^{-1})

\dot{H} Fluxo Entalpico ($\text{J s}^{-1} \text{g}^{-1}$)

h^e Entalpia especifica de entrada (J g^{-1})

S Entropia especifica ($\text{J g}^{-1} \text{K}^{-1}$)

S Entropia do sistema (J K^{-1})

\tilde{S} Entalpia Molar Parcial ($\text{J mol}^{-1} \text{K}^{-1}$)

\dot{S} Fluxo Entropico ($\text{J s}^{-1} \text{g}^{-1} \text{K}^{-1}$)

s^e Entropia especifica de entrada ($\text{J g}^{-1} \text{K}^{-1}$)

ξ Coeficiente de amortecimento

Abreviaturas

SISO – Simple Input and Simple Output;

MIMO – Multiple inputs and multiple outputs;

PID – *Proportional Integral Derivative*;

MIT - *Massachusetts Institute of Technology*;

VBA - Visual Basic for Applications;

BIBO - *Bounded Input, Bounded Output*

CSTR - *Continuous Stirred Tank Reactor*

FCDP – *Função conjunta densidade de probabilidade*

LTI - *Linear Invariante no Tempo*

AEE - *Análise Estatística de Estabilidade*

RESUMO

Este trabalho apresenta uma metodologia baseada em princípios da estatística clássica para determinar as regiões de estabilidade robusta de sistemas lineares ou não lineares, com um nível de conservadorismo muito menor que àqueles apresentados pelas metodologias determinísticas. O caráter aleatório das raízes da equação característica do sistema, representado pelas distribuições de probabilidades diz respeito ao universo de todos os resultados possíveis para o fenômeno, sendo assim possível estabelecer o mapeamento das raízes através da métrica da distância estatística associada a função chi-quadrado para um nível de significância α . Desta forma, as raízes podem ser coletadas, gerando as distribuições de probabilidade, bem como também determinada a região no plano complexo que as contém. Um dos problemas da metodologia determinista reside em não considerar as interações entre as variáveis, como também o assim chamado “problema inverso”. Ainda no âmbito da análise determinística, pode-se observar que tal análise considera as raízes da equação característica distribuídas de acordo com a distribuição uniforme. Comparações com os métodos clássicos de análise da estabilidade como o lugar das raízes, o conceito de entrada limitada/saída limitada, ou ainda a teoria de estabilidade definida por Liapunov, também estão inclusas nas análises realizadas neste trabalho. Tais comparações têm indicado que os resultados obtidos através da metodologia desenvolvida são menos conservativos, e conseqüentemente produz uma análise e mapeamento da região de estabilidade robusta mais realista, pois considera todas as variáveis, os parâmetros e as interações simultâneas entre eles, sem a necessidade de avaliar contribuições isoladas relativas a análise de estabilidade. O método proposto permite também monitorar continuamente a região de estabilidade, avaliando a sua tendência, e com isso determinando a necessidade de tomada de decisão, em tempo hábil, a fim de restaurar tal região. A fim de analisar o comportamento da metodologia e os efeitos que a descreve, é utilizado um sistema reativo e outro sistema não reativo.

Palavras-chave: Estabilidade, Análise do lugar das raízes, Equação característica, Estatística clássica, PID.

Abstract

This work presents a methodology based on classical statistics principles with a view to determining the regions of robust stability of linear or non-linear systems, with a reduced level of conservatism relative to deterministic methods. The random nature of the roots of the characteristics equation of the system represented by their probability distributions is with regard to the universe of all possible outcomes for the phenomenon. This means that it is possible to map the roots by using the statistical distance as a metric associated with the chi-squared function to a level of significance α . Thus, the roots can be collected, thereby generating the probability distributions. In addition, the region in the complex plane that contains them is thereby established. One of the problems of deterministic methodology lies in not considering interactions between variables and another problem is the so-called "inverse problem". Within the scope of deterministic analysis, it is observed that such an analysis considers the roots of the characteristic equation are distributed uniformly. Comparisons with the classical methods of analysis of stability such as the root-locus, the concept of bounded input/bounded output and Lyapunov stability theory, are also included in the analysis made in this article. Such comparisons have indicated that the results obtained using the methodology presented are less conservative, and therefore producing an analysis and mapping of robustness of stability more realistically, because it considers all variables, parameters and simultaneous interactions between them, without the need to assess the individual contributions of each variable, related to stability analysis. The proposed method also allows a check on the stability region to be run continuously, thus assessing its tendency, and therefore determining the need for decision-making, in a timely manner, in order to restore such a region. In work is used a reactive system and other non-reactive system, in order to evaluate the behavior of the methodology and its effects.

Keywords: Stability, Analysis of the place of the roots, Classical, Statistical characteristic equation, PID.

1. INTRODUÇÃO

1.1. Motivação do trabalho proposto

A estabilidade é uma das características mais importantes dos sistemas de controle (Ogata, 2010). A análise da estabilidade deve ser aplicada não somente em relação a dinâmica do sistema de controle, mas também em relação as etapas iniciais dos projetos de tais sistemas. De acordo com Nerendra e Annaswamy (2012), o primeiro passo para verificar a estabilidade de um sistema seria o desenvolvimento de modelos do processo adequados para descrever o comportamento do sistema dinâmico.

Visto que estabilidade está relacionada com a análise dos efeitos das forças perturbadoras em um sistema, desde que tais forças estão invariavelmente presentes em todos os sistemas físicos, o estudo da estabilidade é de vital importância tanto por razões teóricas, mas, sobretudo devido às razões de natureza prática.

Os trabalhos acadêmicos no âmbito de sistemas de controle têm tratado as incertezas, em sua maioria, como determinísticas ou vinculadas à estimação de probabilidade associada aos métodos clássicos de otimização. Nesse sentido, as perturbações introduzidas a um sistema estão associadas às raízes da equação característica, que são consideradas variáveis aleatórias, havendo, portanto, uma distribuição de probabilidade vinculada a cada uma delas.

Diferentes metodologias têm sido utilizadas para análise de estabilidade robusta e essas metodologias têm recebido particular atenção de engenheiros e profissionais envolvidos com o controle do processo, devido basicamente aos efeitos das incertezas presentes nos sistemas, as quais podem exercer um papel fundamental no desempenho e na estabilidade dos sistemas de controle.

Tais metodologias têm como principal objetivo a obtenção de uma melhor relação custo/benefício, buscando o maior rendimento industrial com a minimização dos impactos ambientais e utilizando sistemas estáveis com baixo custo energético. Entretanto, as metodologias mencionadas tratam os sistemas do ponto de vista determinístico, analisando a estabilidade para cada distúrbio isoladamente e, portanto,

sendo não apropriadas para tratar vários distúrbios simultaneamente, revelando-se, por isso, conservadoras.

Doyle (1982) afirma que a limitação mais séria dos métodos baseados em valores singulares, está associada com o tratamento limitado que é aplicado a classe das incertezas, uma vez que, não há nenhum mecanismo sistemático para a exploração de informações sobre a estrutura de uma perturbação.

Ribeiro (2013) afirma que para determinar um método para obter uma região de confiança, o primeiro passo seria determinar o caminho a percorrer e em seguida calcular a direção, desse modo, o método apresentaria grandes dificuldades para se trabalhar com perturbações em um determinado sistema.

Este trabalho apresenta os conceitos de estabilidade clássica com uma visão determinística e com o seu correspondente tratamento matemático, o qual não apenas considera as efetivas interações entre as variáveis analisadas, mais essencialmente a estabilidade do ponto de vista estatístico, procedimento esse que pode estabelecer a estabilidade do sistema para qualquer conjunto de perturbação ocorrida no mesmo.

Vale salientar que o tratamento estatístico diz respeito ao universo de todos os resultados possíveis para o fenômeno. Diferente de outros métodos de análise da estabilidade, que requerem a estimação de probabilidade, baseada no método de Monte Carlo em sua essência, a estabilidade fundamentada em princípios estatísticos é direcionada a estabelecer a região de confiança para cada raiz da equação característica do processo (SILVA et al, 2012a).

Para identificar a condição de estabilidade do sistema, inclusive sob o aspecto dinâmico, este trabalho visa estabelecer o mapeamento do lugar onde se encontram as raízes no plano complexo, determinando a região de estabilidade do sistema, além de estabelecer um comparativo entre as metodologias clássica e estatística, associando a uma estrutura de auto sintonia dos parâmetros do controlador PID, onde esse controlador PID possui a robustez necessária para a determinação da estabilidade.

Um dos objetivos de um projeto de sistemas de controle robusto é garantir o desempenho do sistema na presença de perturbações no processo. Sendo a robustez uma característica desejável de sistemas de controle, o sistema deve operar satisfatoriamente, ainda que em condições operacionais distintas daquelas

consideradas no projeto inicial, absorvendo as perturbações aplicadas a ele, e também que as condições de robustez possam ser utilizadas com o objetivo de adotar um modelo de projeto mais simples, assim facilitando a sua análise, reduzido a complexidade do controlador final (Morari e Zafiriou, 1989).

Inicialmente, foi construída uma planilha computacional que recebe os dados gerados aleatoriamente, organizando-os em pontos, os quais são tratados fornecendo uma equação característica. Em seguida, essa equação passa por um tratamento matemático, estabelecido pela metodologia proposta, e os resultados obtidos são comparados com as regiões de estabilidade estabelecida a partir de outras metodologias como a metodologia Distribuição Normal Multivariada ou simplesmente 3 Sigma (utiliza três vezes o desvio padrão) e a Função Erro.

A fim de comprovar a eficácia do procedimento, foram simulados processos industriais reativos (produção de Propileno Glicol) e não reativos (separação de Água-Metanol via Flash) no software Aspen Plus®. Os dados gerados na simulação são lidos por uma ferramenta do software Matlab® e identificados em equações características. Após tratamentos matemáticos, de acordo com o método proposto, é gerada a região de estabilidade para cada um dos sistemas e, a leitura de dados desses sistemas é feita via planilha computacional Excel®/VBA.

1.2. Justificativa

Uma vez que nem todos os distúrbios de um sistema podem ser considerados em uma análise, pois muitos desses distúrbios são completamente desconhecidos, outros apresentam efeitos diminutos e alguns possuem contribuições significativas, cabe a Análise de Estabilidade de Sistemas a investigação da contribuição desses distúrbios para o processo.

Visto que diferentes conceitos de estabilidade são encontrados na literatura, o uso de cada um deles depende do contexto. Pesquisas recentes vêm estudando problemas de estabilidade por meio de conceitos estatísticos e apresentando bons resultados, tornando essa uma ferramenta bastante útil para a análise de estabilidade robusta.

Do ponto de vista teórico, tem sido demonstrado a possibilidade de determinar a região de estabilidade robusta não só apenas para o estado estacionário, mas também para uma abordagem dinâmica.

O que faz esse trabalho relevante, é que se propõe a apresentar uma metodologia capaz de prever a ocorrência da perda de estabilidade, com a tendência de o sistema perder a estabilidade e, caso seja necessário, tomar uma decisão a fim de restituir a região robusta de estabilidade.

Diferente das clássicas abordagens determinística via Valor Singular Estruturado ou a Teoria do Pequeno Ganho ou ainda a Estabilidade por Liapunov, entre outros, nas quais cada distúrbio é considerado isoladamente, o uso do ferramental estatístico permite analisar os distúrbios conjuntamente e isso é substancialmente vantajoso, pois pode reduzir o conservadorismo da análise, aproximando-se da realidade.

É importante salientar que a ciência estatística tem como base inferências tomada do universo de resultados possíveis, haja vista que as metodologias desenvolvidas na análise estatística permitem a reconstrução de tal universo a partir de poucas amostras. Desse modo, tanto a parte real como a parte imaginária das raízes da equação característica são variáveis aleatórias, que podem ter um índice de tendência central dada pela distância estatística diferente em cada variável e nas frações as dispersões nos eixos coordenados complexos não são uniformes. Logo, a métrica

estatística representa melhor tal dispersão, sendo capaz de gerar uma região de estabilidade robusta para o sistema considerado.

1.3. Organização do trabalho

- O trabalho está dividido em tópicos, de forma a facilitar a cronologia das atividades realizadas.
- O tópico 1, consiste na introdução e justificativa para o presente trabalho
- O tópico 2, foram desenvolvidos o objetivo geral, e os objetivos específicos e as metas para o presente trabalho;
- O tópico 3, apresenta as metas esperadas para o presente trabalho;
- O tópico 4, é composto de uma revisão bibliográfica sobre os temas controle de processo, estabilidades clássicas, teorias de robustez e Modelos de distribuição estatísticos a serem comparados.
- Já no tópico 5, consiste na apresentação da estabilidade baseada em princípios estatísticos, com todos os desenvolvimentos matemáticos para a obtenção da região de confiabilidade robusta do controlador clássico PID – Proporcional, integral e derivativo.
- O tópico 6, é apresentado o modo que foi construída uma planilha computacional, com dados aleatórios onde é obtida a equação característica. Como também são testadas todas formulações matemáticas apresentadas anteriormente, e a comparação entre os métodos.
- No tópico 7, dois estudos de caso são apresentados, ambos simulados através do Aspen Plus® e suas equações características formuladas através do Matlab®, e os resultados apresentados neste tópico.
- Finalmente no tópico 8 são apresentadas as conclusões deste trabalho.

2. OBJETIVOS

2.1. Objetivo Geral

Aplicar o conceito de estabilidade robusta baseada em princípios estatísticos aos sistemas reativos e não reativos para controladores do tipo PID, com apresentação da saída de resultados através de planilhas computacionais, obtendo assim os dados relativos à estabilidade robusta dos sistemas, comparando com as metodologias.

2.2. Objetivos específicos

- Desenvolver planilhas computacionais - Excel/VBA (*Visual Basic for Applications*), para aplicar a metodologia apresentada obtendo a saída de dados relativos à robustez da estabilidade;
- Associar os conceitos de estabilidade robusta determinística e estabilidade sobre a ótica estatística;
- Analisar a dificuldade para usar os métodos determinísticos para determinação da estabilidade;
- Implementar a metodologia apresentada para análise de estabilidade e de desempenho em sistemas de controle com controladores PID.
- Aplicar a metodologia de obtenção da região de estabilidade apresentados, a fim de obter a região de estabilidade robusta, a partir de dados simulados através do software Aspen Plus® com as equações características obtidas através do software Matlab®, utilizando o conceito de distância estatística;
- Comparar os resultados obtidos pela metodologia com resultados obtidos com outras metodologias, a exemplo da 3 Sigmas e Função Erro.

3. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

3.1. Contextualização histórica

Com o objetivo de apresentar o histórico das técnicas de Controle, surgem fatos que ajudam no entendimento do controle moderno com o uso de algumas técnicas embrionárias de controle que nasceram na Grécia e em Alexandria descritos em alguns documentos.

Segundo Mayr (1970) a estratégia por retroalimentação teve sua origem com os reguladores de nível dos mundos Helênico e Árabe usados para controlar tais dispositivos.

Já nos séculos XVII e XVIII vários dispositivos de controle foram criados visando resolver algumas dificuldades práticas. O primeiro sistema de controle por retroalimentação europeu independente foi o regulador de temperatura de Cornelius Drebbel (1572-1633). Mas foi a revolução industrial no século XVIII, com o desenvolvimento de processos industriais, que deu o impulso ao desenvolvimento das técnicas de controle, onde ficava cada vez mais claro para os pesquisadores que os sistemas de controle eram propensos a instabilidade, o que levou a uma pesquisa teórica da razão destes desempenhos irregulares.

Na tentativa de resolver alguns problemas James Watt, no ano de 1788, desenvolve o regulador mecânico para a pressão do vapor, a máquina passou a ter um uso industrial importante, com isso a pressão do vapor era regulada automaticamente por um aparelho, esse sistema de controle foi chamado pêndulo de Watt, isto permitia o controle em malha fechada da velocidade controlado a injeção de vapor em máquinas a vapor.

Em 1868, James Clerk Maxwell publicou um trabalho avaliando o desempenho dinâmico dos sistemas de controle. A abordagem usada foi a modelagem do sistema por equações diferenciais. No entanto, Maxwell comprovou que para determinadas faixas de valores dos parâmetros, as soluções das equações eram instáveis.

Nesta mesma época, Edward John Routh na Inglaterra e Adolf Hurwitz na Suíça desenvolveram técnicas que permitiam determinar diretamente a estabilidade do sistema sem a necessidade da solução das equações. Esse método fornece

informações sobre a estabilidade sem precisar calcular os polos do sistema em malha fechada (NISE, 2002).

Um dos mais importantes trabalhos sobre a teoria da Estabilidade deve-se ao russo Alexander Liapunov. Coughanowr e Kopell (1986), afirmam que é devido ao teorema de Liapunov que a teoria linear de controle tem sido tão bem-sucedida no projeto de sistemas de controle.

Inicialmente a análise da estabilidade foi tratada como um ramo da matemática. Pouco publicado no ocidente, o trabalho de Lyapunov continuou a ser desenvolvido na então União Soviética, o que proporcionou aos pesquisadores soviéticos grandes avanços notadamente na teoria de sistemas não-lineares e uma liderança no campo que se manteve até os anos 1950.

O surgimento do avião acrescentou uma nova dimensão para o problema de estabilização. Já nos anos 1920, engenheiros dos Laboratórios Bell, entre eles Harry Nyquist e Hendrik Wade Bode, trabalhavam com o problema de comunicação a longa distância nos Estados Unidos. O problema de reforço de sinais através de amplificadores levou ao desenvolvimento de técnicas no domínio da frequência. No início da Segunda Guerra mundial pesquisadores do MIT (*Instituto de Tecnologia de Massachusetts*) foram estimulados a efetuar pesquisas em sistemas de controle para o uso militar.

A análise teórica de Nicholas Minorsky (1885-1970) verifica que o controle não estava vinculado apenas ao erro atual, mas também ao erro passado e erro futuro. Surge assim os termos de controle PID, sendo aplicados em processos industriais da década de 1930, impulsionando a necessidade de sistema de controle de alto desempenho para armas.

A teoria de controle, ao final dos anos 1950, já versava de um corpo de conhecimento estabilizado, com forte ênfase em técnicas baseadas no uso de métodos, de frequências e com muitas aplicações industriais. No entanto a demanda por novas técnicas, de maneira especial no florescente setor aeroespacial, incentivou o desenvolvimento do chamado controle moderno. O controle moderno retomou muitas das ideias de Lyapunov, usando técnicas no domínio do tempo.

Já os primeiros trabalhos publicados sobre a análise da estabilidade, para sistemas de controle, datam a década de 60, onde tratavam sempre do Teorema do Pequeno Ganho, os resultados garantiam condições necessárias e suficientes para a estabilidade de um conjunto de sistemas lineares. Os distúrbios envolviam perturbações lineares invariantes no tempo (LTI), limitadas matematicamente e sem estrutura. O que se pode inferir dessa técnica é que ela se mostra muito conservadora, motivada pela utilização de valores singulares e trata as incertezas mistas como uma só incerteza não estruturada baseada nesta constatação, encontrar controladores que apresentem robustez na presença de incerteza é um dos maiores desafios das teorias de controle moderno.

3.2. Conceito de estabilidade clássica

A análise de estabilidade de um sistema tem sido normalmente realizada por duas teorias clássicas para equacionar os problemas derivados de tal análise: a teoria da estabilidade devida a Lyapunov e a teoria da estabilidade Entrada-Saída, as quais são baseadas em técnicas de análise funcional (NERENDRA e ANNASWAMY 2012).

Decorrentes de tais teorias surgem os conceitos para estabilidade de Lyapunov, que considera a estabilidade como uma propriedade interna do sistema e trata o efeito de perturbações momentâneas, resultando em mudanças nas condições iniciais.

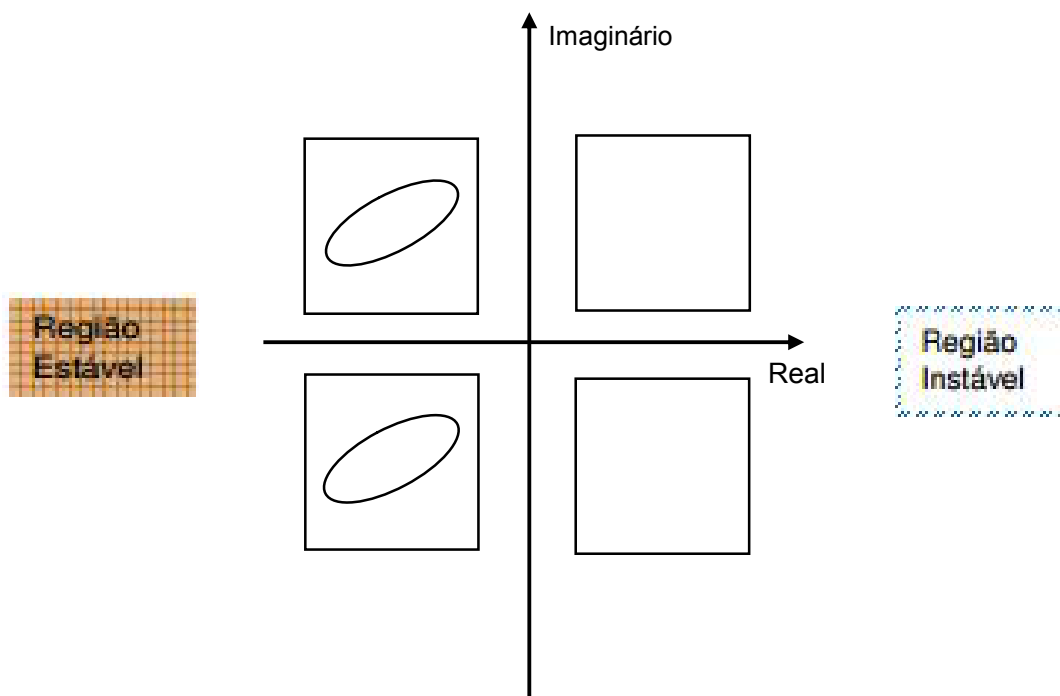
Já as definições para a teoria da estabilidade Entrada-Saída, como o nome sugere, considera o efeito de perturbações externas sobre o sistema. Em alguns casos considera-se que as perturbações introduzidas na entrada e o erro da entrada deve ser menor que o erro da saída.

A definição de limites previamente estabelecidos para as variáveis de interesse, dentro dos quais o sistema deve permanecer estável, também tem sido adotado como uma estratégia para se garantir a estabilidade do sistema dinâmico. Entretanto, tais estratégias têm se mostrado substancialmente conservadoras.

Com o avanço dos estudos envolvendo a estabilidade, surgem alguns conceitos que a define. Um dos conceitos básicos de estabilidade dos sistemas de controle provém da consideração de que a estabilidade de um sistema linear em malha fechada é determinada pela localização dos polos da equação característica no plano complexo. Se qualquer um destes polos estiver no semi-plano direito do plano complexo, considera-se que o sistema é instável caso contrário tem-se um sistema estável.

A Figura 1 representa bem as afirmações e mostra a possível área de estabilidade robusta, onde o contorno da elipse é determinado com base nos princípios estatísticos que fazem uma junção do conceito de distância estatística em conjunto com a distribuição chi-quadrado.

Figura 1: Representação gráfica do local das raízes forma da elipse, provável local da raiz estável.



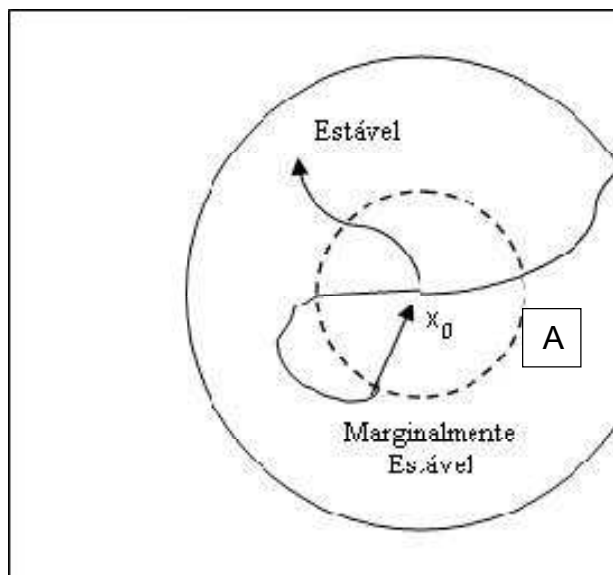
Um sistema qualquer é estável se e somente se para toda e qualquer entrada limitada, a saída correspondente também for limitada. Segundo NISE (2002) esse enunciado de definição de estabilidade entrada-limitada saída-limitada é também chamado de estabilidade BIBO (Bounded Input, Bounded Output).

Outra definição surge quando se tem sistemas lineares e invariantes no tempo, um sistema linear, invariante no tempo e com parâmetros concentrados é estável se e

somente se o módulo de sua resposta ao impulso unitário for integrável em um intervalo infinito, ou seja, um sistema é estável se a resposta natural tender a zero quando o tempo tender a infinito, e também um sistema é dito instável se a resposta natural tender a infinito quando o tempo tender a infinito.

Na Figura 02, é ilustrado outros conceitos usados para definir estabilidade: todo sistema é estável quando possui suas raízes dentro do círculo A; instável quando alguma de suas raízes ultrapassa os limites do círculo A e marginalmente estável quando alguma de suas raízes retorna ao valor de x_0 .

Figura 2— Representação gráfica das definições de estabilidade.

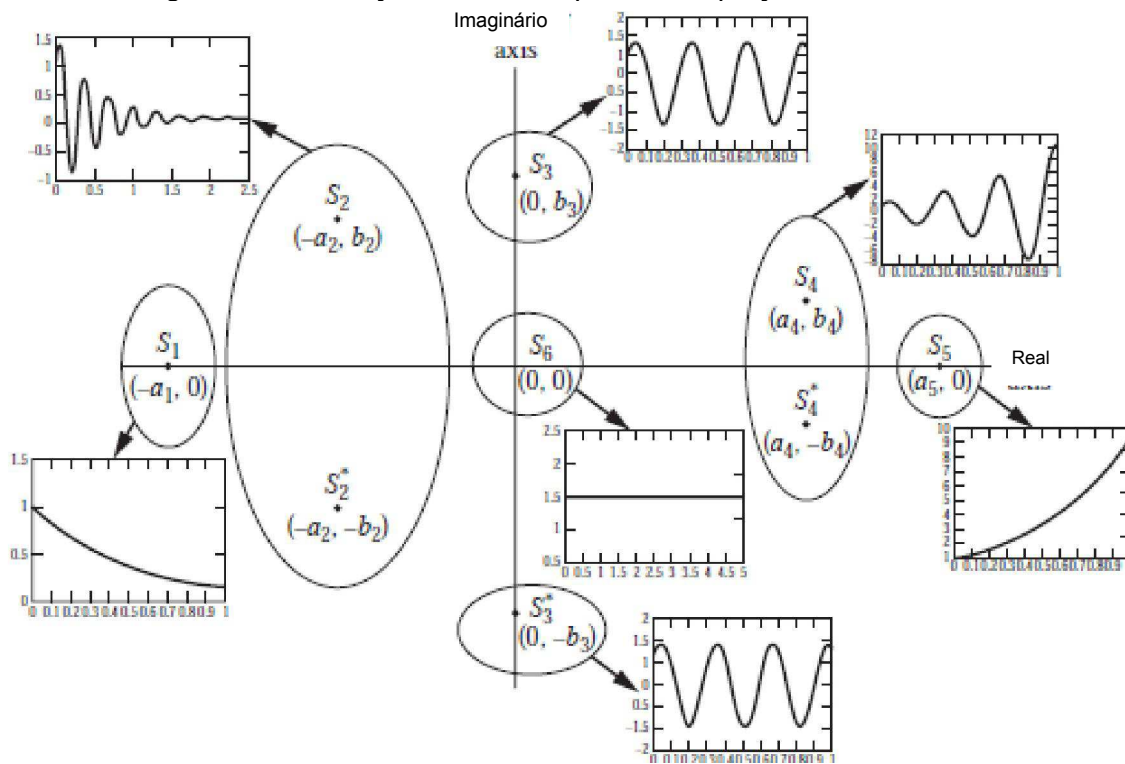


Fonte: Adaptado de Narendra e Annaswamy (1989)

3.3. Estabilidade e o local das raízes

As definições de estabilidade estão bem estabelecidas e exploradas não só do ponto de vista acadêmico, mas também como resultado da implementação prática. Entretanto, visando ilustrar tais conceitos, a Figura 3 representa bem essas definições no plano complexo, no qual as raízes típicas estão localizadas e descritas com as suas coordenadas.

Figura 3- Localização de raízes típicas da equação característica

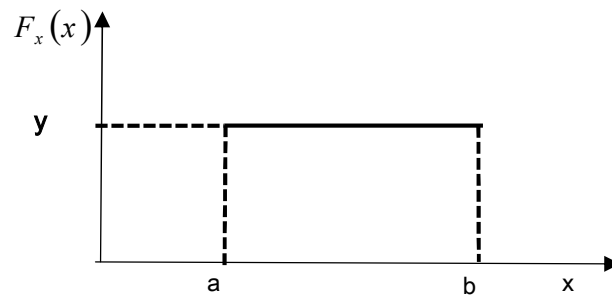


Fonte: (Coughanowr e Koppel 1965)

Assim, a definição de estabilidade para sistemas lineares pode ser resumida com a seguinte declaração: um sistema de controle linear é instável se qualquer das raízes de sua equação característica estiver sobre o eixo imaginário ou a sua direita. Caso contrário, o sistema é estável (Coughanowr e Koppel 1965).

Um dos problemas da metodologia determinística reside em não considerar as interações entre as variáveis como também o assim chamado “problema inverso”, podendo-se ainda observar que as raízes do sistema estão claramente associadas ao modelo probabilístico com densidade de probabilidade uniforme, mostrada na Figura 4. Desta forma, as raízes da equação característica podem ser estabelecidas com a definição de sua localização.

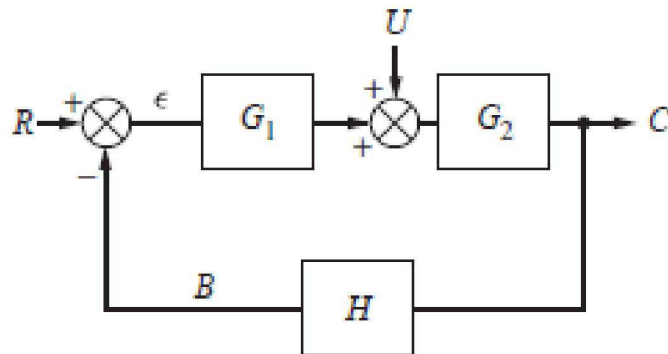
Figura 4– Diagrama da distribuição uniforme.



Outra desvantagem da análise do lugar das raízes está em não conseguir lidar com o atraso de tempo. Assim, usa-se uma aproximação mais simples a fim de aproximar uma função dada por funções mais simples, é chamada de aproximação de Padé, requerendo também soluções iterativas da equação característica não linear e não racional tornando-se muito complexo para resolução.

Um sistema básico de controle com malha única é mostrado na Figura 5, cujo objetivo é determinar a função característica e as suas raízes. A partir dessas raízes, determinar a estabilidade do sistema. Mesmo sendo um sistema básico, ao resolvê-lo é encontrado alguns problemas para a sua implementação e identificação da estabilidade, qualquer distúrbio U que entre no sistema faz com que todas as raízes sejam recalculadas, afim de verificar se o sistema continua estável ou se torna instável.

Figura 5– Sistema básico de controle em malha única



Fonte - Conughanowr e Koppel (1965)

3.4. Estabilidade de Lyapunov

Alexander M. Lyapunov (1857-1918) formou-se em matemática na universidade de São Petersburgo em 1880. No ano de 1884, Lyapunov defendeu sua Dissertação de Mestrado com o título “ *On the stability of ellipsoidal forms of equilibrium of rotating fluids*” (Sobre a estabilidade de Formas Elipsoidais de Equilíbrio de Fluídos Rotativos) tema sugerido por seu professor Chebyshev. Em 1892, Lyapunov defendeu sua Tese de Doutorado intitulada “*General Problem of Stability of Motion*” (Problema Geral de Estabilidade do Movimento). Lyapunov é conhecido pelo desenvolvimento da teoria de estabilidade de um sistema dinâmico e suas contribuições à física-matemática e teoria de probabilidade.

O método de Lyapunov, também conhecido como método direto, caracteriza-se por não necessitar conhecer a solução do sistema e equações, uma vez que sabendo o ponto crítico do sistema tem-se conclusões sobre estabilidade ou instabilidade, esse resultado é obtido através da função de Lyapunov (Kreider, 1972).

As funções de Lyapunov foram descobertas para serem usadas em sistemas de energia não conservativos, ou seja, sistemas onde a energia não é preservada pela trajetória.

O interesse principal está na estabilidade de sistemas adaptativos, representado pelo vetor não-linear de equações diferenciais da forma da Equação 01. Em tais casos, temos de assegurar a existência de soluções para todas as condições iniciais (x_0, t_0) onde $x_0 \in \mathcal{R}^n$ e $t_0 \in \mathcal{R}^+$. A origem do espaço estado $x = 0$ é um estado de equilíbrio da Equação **Erro! Fonte de referência não encontrada.** e a preocupação principal será com suas propriedades de estabilidade (Narendra e Annaswamy, 1989).

$$\dot{x} = f(x, t)$$

$$f(0, t) = 0, \forall t \geq t_0$$

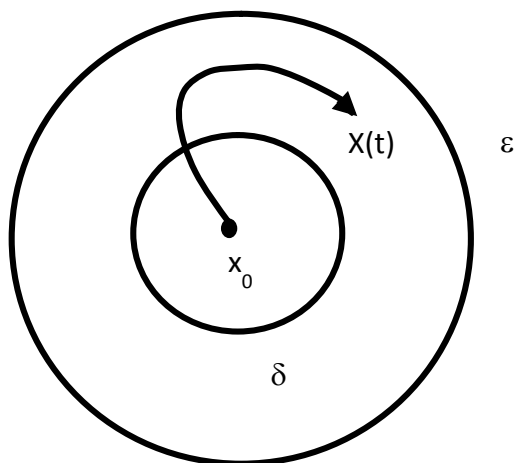
01

3.4.1. Funções de Lyapunov – Definições

Partindo de um sistema descrito pela equação diferencial não-linear, Equação 01, onde $x(t_0)=x_0$ e $f:\mathcal{R}^+ \rightarrow \mathcal{R}^n$ existe uma solução $x(t,x_0,t_0)$ para todo $t \geq t_0$. Desde $f(0,t) \equiv 0$, isto implica que a origem é um estado de equilíbrio. As definições apresentadas referem-se a noções básicas da estabilidade segundo Lyapunov em estado de equilíbrio.

Definição 01. O estado de equilíbrio ($x=0$) da Equação 01 é estável se para cada $\varepsilon > 0$ e $t_0 \geq 0$, desde que exista um $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$ tal que $\|x_0\| < \delta$ implicando em $\|x(t; x_0, t_0)\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0$, resultado apresentado na Figura 6, onde pode-se verificar a estabilidade.

Figura 6- Representação da definição 01



Fonte: Adaptação Narendra e Annaswamy 1989

Essencialmente, a definição 01 afirma que pequenas perturbações resultam em pequenos desvios do estado de equilíbrio, ou mais precisamente, que podemos manter a trajetória perto da origem, iniciando-se suficientemente perto.

Definição 02 O estado de equilíbrio ($x=0$) da Equação 01 é dito ser Atrativo se para alguns $\rho > 0$ e cada $\eta > 0$, existe um número $T(\eta; x_0, t_0)$ tais que $\|x_0\| < \rho$ implica que $\|x(t; x_0, t_0)\| < \eta$ para todos os $t \geq t_0 + T$.

Atratividade é um conceito importante pois corresponde a facilidade de um sistema ser “atraído” para a origem, implica que todas as trajetórias começando de uma vizinhança da origem eventualmente aproximam da origem (Narendra e Annaswamy, 1989).

Se o vetor inicial x_0 tem uma norma inferior a ρ , então durante todo o tempo t maior do que a $t_0 + T$. A trajetória é inferior a uma distância de η a partir da origem, Mas a atratividade e estabilidade foram mostrados para ser conceitos independentes.

Definição 03. O estado de equilíbrio ($x=0$), da Equação 01 é dito ser assintoticamente estáveis se é estável e atrativa.

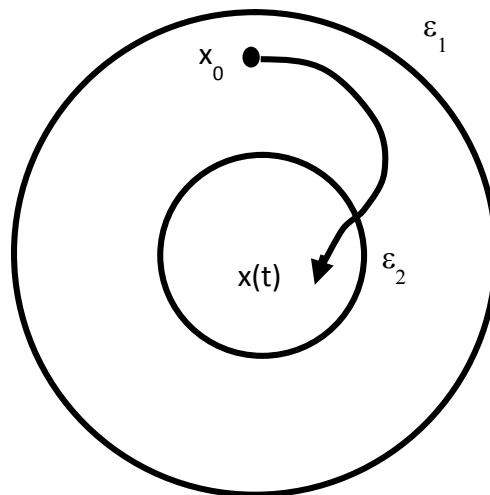
As propriedades de estabilidade de muitos sistemas não dependem do tempo inicial t_0 . Sistemas autônomos e sistemas periódicos são exemplos típicos para autônoma e alguns sistemas periódicos são exemplos típicos. Isso motiva as definições de estabilidade uniforme e estabilidade uniforme assintótica.

Definição 04. O estado de equilíbrio ($x=0$) da Equação 01 **Erro! Fonte de referência não encontrada.** é dito ser uniformemente estável se na definição 01, ρ é independente do tempo inicial t_0 .

Definição 05. O estado de equilíbrio ($x=0$) da Equação 01 é uniformemente estável assintoticamente (u.a.s.) se é uniformemente estável e por alguns $\varepsilon_1 > 0$ e cada $\varepsilon_2 > 0$,

que exista um $T(\varepsilon_1, \varepsilon_2) > 0$ tal que, se $\|x_0\| < \varepsilon_1$, então $\|x(t; x_0, t_0)\| < \varepsilon_2$ para todos os $t \geq t_0 + T$. Conforme a Figura 7:

Figura 7 - Estabilidade assintótica uniforme conforme Definição 05.



Fonte: Adaptação Narendra e Annaswamy (1989)

Definição 06. O estado de equilíbrio $x = 0$, da Equação 01 é exponencialmente estável se existem constantes $a > 0$ e $b > 0$ tal que $\|x(t; x_0, t_0)\| < a \exp\{-b(t - t_0)\} \|x_0\|$, $\forall t \geq t_0$ para todo t_0 e em uma determinada vizinhança β da origem.

3.4.2. Método direto de Lyapunov e Estabilidade exponencial.

Estabilidade para sistemas não-lineares dada pela teoria de Lyapunov. Consideremos o seguinte sistema:

$$x(t_0) = x_0$$

02

Kreider (1972) afirma que a técnica para determinar o comportamento das trajetórias da equação 01 nas vizinhanças da origem, tem denominação de o método direto de Lyapunov, com mínimo local.

Uma versão mais geral do Teorema de Lyapunov consistir em usa-lo, parcialmente, para mostrar a conexão entre estabilidade exponencial e observabilidade para sistemas lineares (Sastry e Bodson, 2011).

Considerando o sistema linear com propriedades uniformes, representado pela Equação 04:

$$\dot{x} = A x \qquad x(t_0) = x_0 \qquad 03$$

Teorema 01. Lyapunov:

- a) Todos os autovalores A remetem ao semiplano esquerdo aberto;
- b) Sendo $x = 0$ um ponto de equilíbrio estável exponencialmente da Equação 01;
- c) Para todos os $C \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ (com m arbitrário), tal que o par $[C, A]$ é observável,

existe uma matriz simétrica positiva definida $P \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ que satisfaz;

$$A^T P + P A = -C^T C$$

- d) Para alguns $C \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ (com m arbitrário), tal que o par $[C, A]$ está sendo observado, existe uma matriz simétrica positiva definida $P \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ satisfazendo a Equação 03.

Todas as definições remetem a condição de não determinar analiticamente as equações diferenciais, essas definições analisam qualitativamente as equações sem de fato resolve-las.

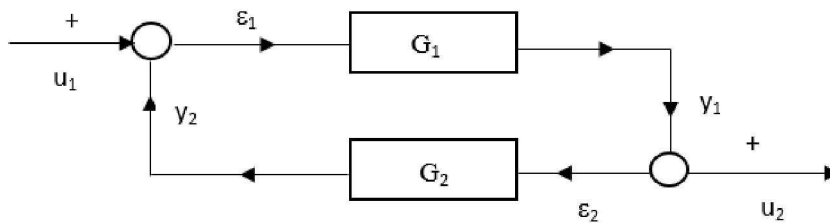
3.5. Estabilidade entrada-saída

Outra abordagem geral da estabilidade é baseada nas técnicas de análise funcional, usada por Popov e posteriormente desenvolvida por Sandberg e Zames (Nerendra e Annaswamy, 2012). Os resultados obtidos com esse método de entrada e

saída, apresentam uma grande semelhança aos resultados obtidos pelo método de Lyapunov.

A Figura 8 mostra um diagrama de um sistema por realimentação na sua forma canônica, a partir do qual uma análise mais detalhada da configuração resulta nas expressões descritas abaixo. Tal formalismo mostra-se particularmente útil na análise de estabilidade de sistemas interconectados, apresentando o problema típico do sistema determinístico por realimentação.

Figura 8– Representação de um sistema canônico realimentado



A partir da análise da Figura 8, pode-se obter as seguintes equações:

$$y_1 = G_1 \varepsilon_1 \quad 02$$

$$y_2 = G_2 \varepsilon_2 \quad 03$$

$$\varepsilon_1 = u_1 - y_2 \quad 06$$

$$\varepsilon_2 = u_2 - y_1 \quad 07$$

Com isso encontra-se as seguintes expressões para y_1, y_2, ε_1 e ε_2 ;

$$\|y_1\| \leq \gamma_1 \varepsilon_1 + B_1 \quad 04$$

$$\|y_2\| \geq \gamma_2 \varepsilon_2 + B_2 \quad 05$$

$$\|\varepsilon_1\| = \|u_1 - y_2\| \leq \|u_1\| + \|y_2\| \quad 6$$

$$\|\varepsilon_1\| \leq \|u_1\| + \gamma_2 \|\varepsilon_2\| + B_1 \quad 7$$

Substituindo o valor de ε_2 na Equação 7, encontra-se as seguintes correlações:

$$\|\varepsilon_1\| \leq \|u_1\| + \gamma_2 (\|u_2\| - \|y_1\|) + B_1 \quad 8$$

$$\|\varepsilon_1\| \leq \|u_1\| + \gamma_2 (\|u_2\| - \|\gamma_2 \varepsilon_2 + B_2\|) + B_1 \quad 9$$

Onde:

$$\|\varepsilon_1\| \leq \|u_1\| + \gamma_2 (\|u_2\| - \|\gamma_2 \varepsilon_2 + B_2\|) + B_1 \quad 10$$

$$\|\varepsilon_1\| \leq \|u_1\| + \gamma_2 \|u_2\| - \gamma_2 \gamma_1 \|\varepsilon_1\| + \gamma_2 B_2 + B_1 \quad 11$$

$$(1 - \gamma_2 \gamma_1) \|\varepsilon_1\| \leq \|u_1\| + \gamma_2 \|u_2\| + \gamma_2 B_2 + B_1 \quad 12$$

$$\|\varepsilon_1\| \leq \frac{1}{(1 - \gamma_2 \gamma_1)} [\|u_1\| + \gamma_2 \|u_2\| + \gamma_2 B_2 + B_1] \quad 13$$

Realizando as considerações das Equações 18 e 19 para a resolução do problema e lembrando que ε_1 e ε_2 são variáveis aleatórias, então:

$$\varepsilon_T = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \quad 14$$

$$\|\varepsilon_T\| = \|\varepsilon_1\| + \|\varepsilon_2\| \quad 15$$

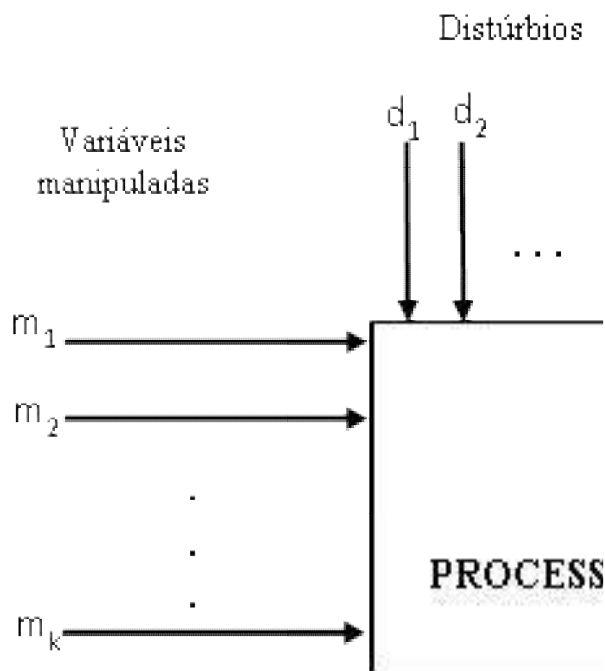
$$\gamma_1 \gamma_2 = 1 \quad 16$$

Portanto, considerar $\gamma_2 \gamma_1 \cong 1$ implica em uma região instável para o sistema realimentado, desde que a Equação 16 tende a infinito. A estabilidade só será mantida caso $\gamma_2 \gamma_1 \neq 1$. Vale ressaltar que tal resultado é alcançado para os casos onde nenhuma correlação entre as variáveis é verificada.

A Figura 9 representa um processo químico, com as entradas e saídas, esta representação demonstra toda dificuldade em quantificar todas as variáveis envolvidas em um processo. Cada variável de entrada ou de saída tem sua função de transferência e quando sofre algum distúrbio essas funções de transferência sofrem alterações, e será necessário analisar a estabilidade novamente. No Anexo 01

(Demonstração da resposta de y em malha fechada, em termos de variável desvio, no domínio tempo) verifica-se a dificuldade de encontrar a função de transferência de um sistema de controle.

Figura 9 – Processo químico com representação de entradas e saídas e possíveis distúrbios.



Fonte: Adaptado de STEPHANOPOULOS (1984)

3.6. Controladores PID

A planta química é um conjunto de unidades processadoras (reatores, trocadores de calor, bombas, colunas de destilação absorvedores, evaporadores, tanques etc.), integradas umas com as outras de maneira sistemática e racional. O objetivo principal

da planta é converter materias primas em produtos com maior valor agregado, por intermédio do uso mais econômico das fontes de energia disponíveis (Stephanopoulos, 1984).

A aplicação de controladores em plantas químicas tem como objetivo principal a redução de custos e uma operação mais estável.

A introdução de um controlador em um determinado sistema tem como principal objetivo a modificação de sua dinâmica, manipulando a relação entrada/saída através da atuação sobre um ou mais dos seus parâmetros, com o objetivo de agregar certas especificações com relação a sua resposta (Ogata, 2010). Os parâmetros do sistema de controle que sofrem uma ação direta de um controlador, são designadas de variáveis manipuladas (MV), enquanto que os parâmetros para o qual se deseja obter as modificações que agradem as dadas especificações, denominam-se variáveis controladas (CV).

Diversas técnicas de controle podem ser empregadas em um sistema, a qual a mais utilizada é a do controle proporcional, integral e derivativo (PID). A ampla aceitação e popularidade dos controladores PID está ligado à sua simplicidade funcional, permitindo assim ser aplicado no sistema de forma simples e direta e também ao seu desempenho e robustez em muitas condições de funcionamento. Seborg et. al (2011) afirma que cerca de 97% dos sistemas de controle existentes utilizam o controle PID.

No ano de 1935, Ralph Clarridge da *Taylor Instrument Companies* criou o controlador de três termos, ao utilizar um controlador que antecipava a variação no sinal de erro para solucionar um problema de oscilação de uma malha de controle de temperatura em uma indústria de celulose. Chamada inicialmente de pelos engenheiros da empresa de *pré-act*, a ação derivativa foi testada apenas em casos especiais até o ano de 1939, quando uma versão totalmente reprojeta do controlador Proporcional-Integral-Derivativo PID Fulscope foi oferecida como padrão nos sistemas de controle comerciais da empresa.

A estrutura de um controlador PID é a combinação do controle proporcional, controle integral e controle derivativo. O cálculo do controlador PID envolve três

parâmetros: Proporcional, Integral e Derivativo. A expressão do controlador PID é dada pela Equação 21:

$$f_{c(t)} = k_c e_{(t)} + \frac{k_c}{\tau_i} \int_0^{\infty} e_{(t)} dt + k_c \tau_d \frac{de_{(t)}}{dt} \quad 17$$

onde:

- $f_{c(t)}$ Saída do controlador em relação ao tempo.
- $e_{(t)}$ O erro entre o processo e o ponto de operação;
- k_c É a constante proporcional;
- τ_i É a constante tempo integral;
- τ_d É a constante tempo derivativo.

Essa função do controlador PID produz um valor na saída proporcional ao erro obtido na Realimentação. O problema efetivo do controlador proporcional é a geração de *offset*. O controle proporcional é meramente uma resposta proporcional ao erro de controle, que é dado pela diferença entre o valor desejado e o valor da variável de processo a ser controlada. Quando o controle proporcional é usado de forma individual pode gerar um erro estacionário, ou seja, pode encontrar um ponto de equilíbrio em que existe um desvio entre o valor desejado e a variável a ser controlada (CAMPOS e TEIXEIRA, 2010).

Já o controle integral está inteiramente relacionado com a exatidão do sistema, ele é responsável pelo erro zero no estado estacionário. Por causa da ação integral, o controlador consegue fazer a saída do processo acompanhar os sinais de referências, minimizar o desvio do processo em relação ao *ponto de operação*. Uma desvantagem da ação integral é o fenômeno conhecido como *reset windup*, se um erro de controle persistir o termo integral se tornará grande fazendo com que a saída do controlador fique saturada.

A função derivativa representa a antecipação ao erro, aumentando a velocidade de resposta do sistema caso a presença do erro seja detectado, diferença entre a saída do processo e o valor desejado, o que pode tornar o controlador mais eficiente.

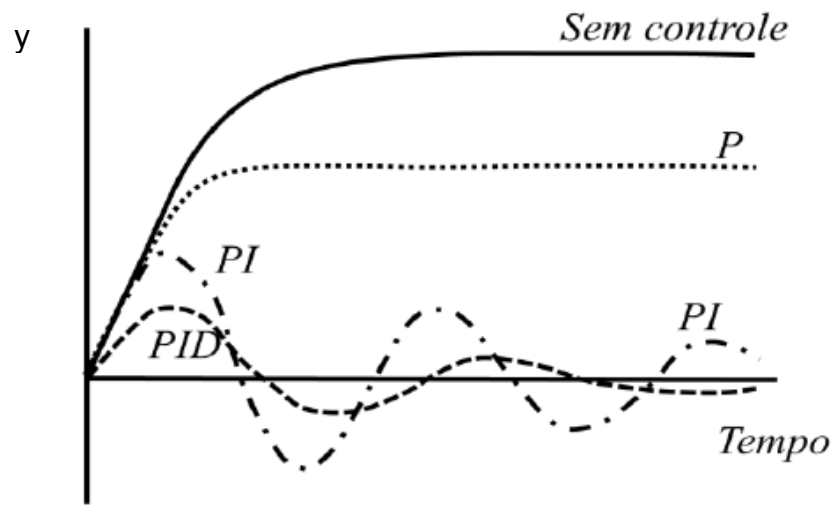
Logo, em sistemas de resposta lenta como controle de temperatura, a ação derivativa permite antecipar o aumento do erro e aumentar a velocidade de resposta do sistema. Todavia, desde que o operador $\frac{de(t)}{dt}$ representa quão rápido $e(t)$ varia, a função derivada pode causar sérios problemas principalmente quando a oscilação é muito pronunciada, pois, nesse caso o valor do operador torna-se muito alto, fazendo aumentar a saída do processo, gerando o erro bem próximo a zero.

Essa função pode diminuir o "overshoot" da função anterior e pode melhorar a estabilidade do controlador. Desta forma a ação de controle derivativa compensa o efeito saturador da ação integral, porque tende a aumentar a estabilidade relativa do sistema e ao mesmo tempo torna a resposta do sistema mais rápida, devido ao seu efeito de antecipação.

A ação derivativa atua calculando a tangente em cada instante da variável do processo, fazendo com que ocorra antecipação do comportamento da ação do controlador. A ação antecipativa evita previamente que o desvio se torne maior quando o processo se caracteriza por ter uma correção lenta comparada com a velocidade do desvio. A desvantagem desta ação é o fato de amplificar os sinais de ruído, o que pode causar um efeito de saturação nos atuadores do sistema.

A associação das três ações de controle resulta um tipo de controlador que reúne vantagens individuais de cada tipo de ação e por isto, é comumente utilizada para diversas estratégias de controle de processo (ROLLINS, 1999). Ao unir as três técnicas de controle, consegue-se obter o controle básico do proporcional, com a eliminação do erro da integral e com a redução de oscilações do derivativo, sendo que é necessário o ajuste da intensidade de cada um dos termos através de um processo chamado de sintonia de controladores PID. O comportamento das ações proporcional, integral e derivativa é apresentado na Figura 10

Figura 10 - O comportamento das ações proporcional, integral e derivativa.



Adaptado de Seborg et, al 2011.

4. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

4.1. Associação entre estabilidade robusta determinística e a estabilidade sobre a ótica estatística.

A estabilidade robusta determinística pode ser associada ao conceito de distribuição uniforme, que revela uma distribuição de máxima entropia, e cujas as variáveis aleatórias são uniformemente distribuídas. Como uma função densidade de probabilidade, que é constante sob o intervalo em consideração.

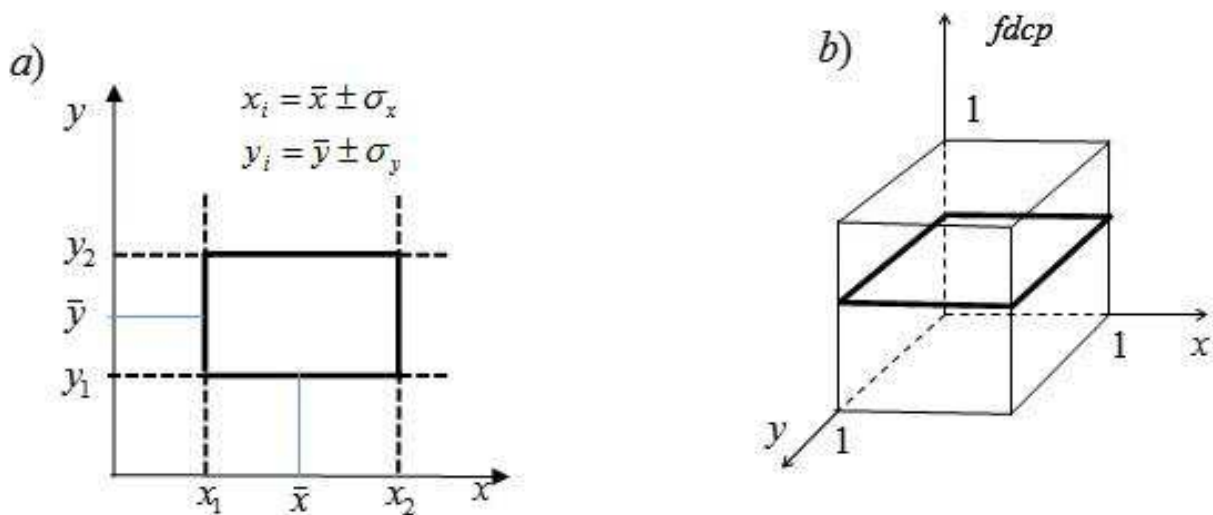
Na distribuição uniforme a sua visualização pode permitir a conclusão de que a falta de informação é máxima, com isso pode-se revelar a associação desta distribuição com a distribuição de máxima entropia, o que pode designar a falta de informação de uma determinada variável aleatória.

Na análise da estabilidade do ponto de vista determinístico para sistemas de várias variáveis, estabelece-se a faixa de variação de cada variável pelo cruzamento dos limites extremos de cada variável e para tal especificação são determinadas as condições do processo para se manter estável, ou seja, a região de estabilidade robusta seria para duas variáveis, por exemplo, dada pelo retângulo da Figura 11(b).

Igualmente pode ser observado que a Figura 11 (a) reflete o mesmo comportamento apresentado pela distribuição uniforme bivariada, ou seja, dizer que as variáveis não têm grau algum de interação pode ser semelhante dizer que obedecem a uma distribuição uniforme de acordo com a Figura 11 (b) do ponto de vista estatístico, visto que não há contração de espaços. Entretanto, não é razoável assumir que as variáveis aleatórias sejam sempre distribuídas uniformemente. Portanto, a análise do ponto de vista determinístico mostra-se ser um caso particular da análise de estabilidade sob ótica estatística.

A Figura 11 (b) representa a função de distribuição conjunta de probabilidade (*fdcp*), onde admite-se a independência das variáveis. Ela mostra também a forma de uma superfície plana limitada pelos eixos x e y , cuja representação revela a correspondência com a Figura 11(a).

Figura 11- a) Representação da região conjunta bivariada. b) Função de distribuição uniforme bivariada (*fdcp*).



4.2. A estabilidade robusta do ponto de vista estatístico

De forma diferente de outros métodos que requerem a estimação de probabilidade em suas estratégias, baseada no método de Monte Carlo com implicações na previsão dos resultados, a estabilidade com base em princípios estatísticos é direcionada a estabelecer a região de confiança para cada raiz da equação característica do processo em questão. Outra observação é a dependência da eficiência do método de Monte Carlo com o número de amostras, o que é um fator limitante. (Tempo et al., 1997). Esse fator limitante também pode ser melhorado usando o método de Monte Carlo modificado.

Stengel e Ray (1991) garantem que a robustez do sistema de controle é definida como a capacidade de manter as características de estabilidade ou um desempenho satisfatório do sistema na presença variações nos parâmetros.

A técnica empregada neste trabalho considera a relação existente entre a métrica euclidiana e a distância estatística. A distância estatística tem essa denominação uma vez que utiliza variância e covariância das amostras.

Para tornar possível a determinação dos contornos da elipse, região de confiança, as formas quadráticas são estabelecidas. Esses resultados se originam das partes reais e imaginárias de números complexos vinculados à distribuição chi-quadrado (Silva et. al, 2012b).

4.3. Distância Euclidiana e distância estatística

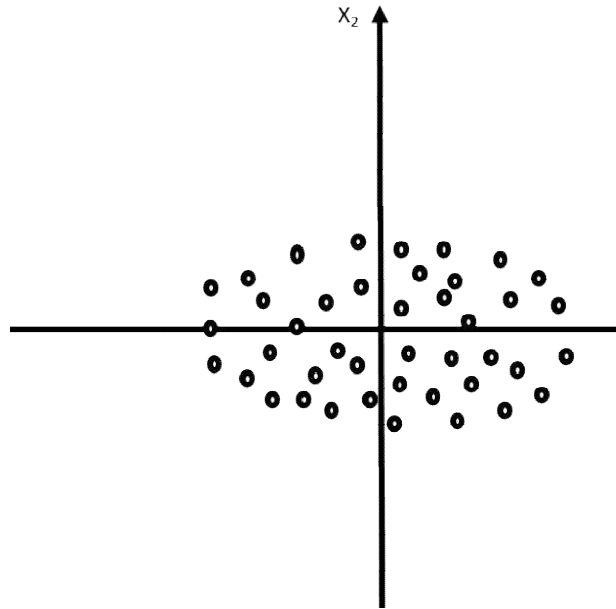
Partindo de um plano complexo com a sua parte real (x_1) e imaginária (x_2) como coordenadas toma-se qualquer ponto **P**. A distância Euclidiana de P para origem O, é dada por:

$$d(O, P) = \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2}$$

18

A Equação 18 é tida como imprópria para a maior parte das finalidades estatísticas, já que na maioria dos casos, as dispersões das coordenadas axiais, que representam a variabilidade não são iguais como é mostrado na Figura 12 (Johnson e Wichern, 1992).

Figura 12- Representação de dispersão geral de variabilidade



Considerando tal dispersão e normalizando as coordenadas a Equação 23 representa a distância estatística:

$$d(O, P) = \sqrt{\left(\frac{x_1}{\sigma_{x_1}}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{\sigma_{x_2}}\right)^2} \quad 19$$

A Equação 24 representa a distância estatística de forma geral, em notação vetorial:

$$d^2(O, P) = X' \Sigma^{-1} X \quad 20$$

Com σ_{x_i} indicando a variância de componentes do vetor $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, onde $X' = [x_1, x_2]$. A Equação 25 é apresentada como sendo a matriz de variância-covariância.

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{x_1}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{x_2}^2 \end{bmatrix} \quad 21$$

A Equação 20 representa uma elipse centrada na origem, sendo assim uma forma quadrática. Quando $\sigma_x = \sigma_y$ é observado um caso particular, onde a distância estatística transforma-se na distância Euclidiana.

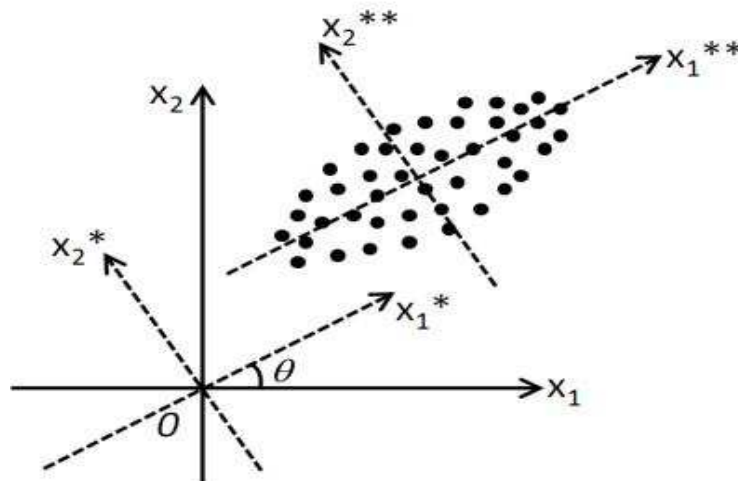
No caso de uma elipse, que está centrada no valor esperado da variável aleatória X , um ponto diferente da origem, e considerando também Σ como a matriz de variância-covariância, a Equação 20 pode ser generalizada para originar a Equação 26:

$$d^2(O, P) = (X - \mu_X)' \Sigma^{-1} (X - \mu_X) \quad 22$$

A Equação 26, descreve os contornos de uma elipse centrado em $\mu(\mu_x, \mu_y)$, para uma variável aleatória bidimensional X , os eixos não são necessariamente na mesma direção que o plano de coordenadas.

O gráfico da Equação 22 para o plano x_1 e x_2 , pode ser ilustrado na Figura 13, que apresenta o primeiro passo para rotacionar e translatar os pontos da equação característica:

Figura 13- Conjunto de pontos que representam uma elipse sem perder a generalidade



Sabendo que x_1 e x_2 estão interligados, o que corresponde a uma matriz com valores não nulos, desse modo, por meio de movimentos ajustados de translação e

rotação dos eixos após uma transformação linear, é possível eliminar a expressão de covariância cruzada da Equação 22.

A Equação 27 representa a transformação linear a ser usada na translação e rotação expressa por:

$$(X - \bar{X}) = \mathbf{P}(X^* - \bar{X}^*) \quad 23$$

Desde que P seja uma matriz, que aplicando conceitos de geometria elementar, demonstrados no Anexo II, a transformação linear pode ser obtida, resultando em uma matriz ortogonal dada pela Equação 28, que também satisfaz a identidade $PP^T = P^T P = I$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad 24$$

Com a análise da matriz Equação 24 surge dois casos particulares, primeiro a chamada matriz de reflexão, cujo o determinante é igual a -1, este caso ocorre desde que a matriz ortogonal (2x2) escrita na forma $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ onde a é um número real no intervalo [-1, 1], ou seja, $a = \cos\theta$, $\forall \theta \in \Re$, gerando assim a matriz da Equação 24 que é uma matriz de rotação com determinante igual a 1.

Os eixos (x_1^*, x_2^*) são rotacionados por um certo ângulo θ a partir dos pontos de origem (x_1, x_2) . Deve-se observar que o valor do determinante de $P(\det P)$ é igual a 1, o que assegura o movimento de rotação.

Substituindo a Equação 23 na Equação 22, é obtida a Equação 29:

$$d^2(\mu, P) = [\mathbf{P}(X^* - \mu_{X^*})]' \sum^{-1} \mathbf{P}(X^* - \mu_{X^*}) \quad 25$$

Que pode ser reescrita na forma da Equação 30

$$d^2(\mu, P) = [(X^* - \mu_{X^*})]' P' \Sigma^{-1} P (X^* - \mu_{X^*}) \quad 26$$

Todas matrizes (2x2) podem ser diagonalizáveis, e sua demonstração é com facilidade executada (Poole, 2005). Uma matriz $A_{n \times n}$ é diagonalizável se e somente se ela possui n autovetores linearmente independentes. O método para obtenção dos autovalores e autovetores estão demonstradas no Anexo IV.

Em seguida, uma vez que a matriz Σ^{-1} é simétrica e P é uma matriz ortogonal, tal matriz pode diagonalizar Σ^{-1} resultando em uma matriz diagonal D conforme a Equação 31:

$$D^{-1} = P' \Sigma^{-1} P \quad 27$$

Substituindo a Equação 27 na Equação 26, é obtida a Equação 32:

$$d^2(\mu, P) = (X^* - \mu_{X^*})' D^{-1} (X^* - \mu_{X^*}) \quad 28$$

A Equação 28 é a forma quadrática de uma elipse centrada no valor esperado da variável aleatória X^* sem o termo covariância cruzada. Já a Equação 28 pode ser reescrita para duas dimensões conforme mostrado na Equação 33:

$$d^2(\mu_{X^*}, P) = \frac{(x_1^* - \mu_{x_1^*})^2}{\sigma_{x_1^*}^2} + \frac{(x_2^* - \mu_{x_2^*})^2}{\sigma_{x_2^*}^2} \quad 29$$

Vale salientar a definição da variável aleatória χ^2 (chi-quadrado) dada pela Equação 34;

$$U_i^2 = \left(\frac{X_i - \mu_i}{\sigma_i} \right)^2 \quad 30$$

A Equação 34 denota o cálculo dos quadrados das variáveis normais padrão U_i^2 , é o seu somatório. Deste modo define uma nova variável aleatória chamada de chi-quadrado (HIMMELBLAU, 1970), a qual de modo geral pode ser escrita na forma da Equação 35:

$$\chi^2 = U_1^2 + U_2^2 + \dots + U_v^2 = \sum_{i=1}^v U_i^2 = \sum_{i=1}^v \left(\frac{X_i - \mu_i}{\sigma_i} \right)^2 \quad 31$$

Onde:

- v Denota os graus de liberdade;
- U Uma variável normal padronizada.

Assim é notório que a Equação 29 possui uma distribuição χ^2 , ou seja, é igual a χ^2 com v graus de liberdade. Também é importante observar que a diferença $(X_i - \mu_i)$ é relacionada com a média correspondente a translação onde a origem da elipse pode ser encontrada em qualquer posição com a relação ao sistema cartesiano

A importância da distribuição χ^2 é descrita por Schwaab (2007). Ele mostra que a distribuição χ^2 tem enorme importância prática, porque, ela permite impor limites precisos sobre a região de confiança onde deve estar a variância verdadeira, a partir de valores amostrados.

Soong (1986) garante que a distribuição Chi-quadrado é um dos principais instrumentos na área de inferência estatística e teste de hipóteses

É fundamental observar que a diferença $(X_i - \mu_i)$ está associada com a média de acordo com a instrução da Equação 36. Desta forma obtém-se a Equação 36:

$$d^2(\mu_{\chi^*}, P) = \frac{(x_1^* - \mu_{x_1^*})^2}{\sigma_{x_1^*}^2} + \frac{(x_2^* - \mu_{x_2^*})^2}{\sigma_{x_2^*}^2} \cong \chi_{2,\alpha}^2 \quad 32$$

A Equação 32 expõe o fato de que $d^2(\mu_{\chi^*}, P) \cong \chi_{2,\alpha}^2$ pode ser considerado como o contorno de uma elipse que contém $(1-\alpha)100\%$ da probabilidade, para a qual, α corresponde à nível de significância e $v = 2$.

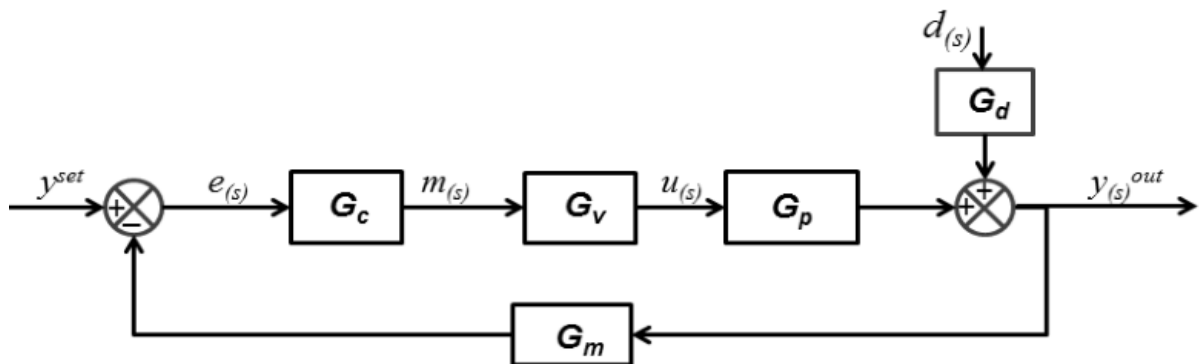
Deste modo x_1^* e x_2^* podem descrever as coordenadas retangulares dos pontos que representam as raízes da equação característica de um sistema de segunda

ordem, que nos dão a primeira indicação sobre a estabilidade do sistema, então, a elipse estabelecida está relacionada com a robustez da estabilidade.

4.4. Cálculo da Estabilidade do Sistema

Partindo do diagrama mostrado na Figura 14 é representado uma estratégia de controle adotada no presente estudo, isto é:

Figura 14 - Diagrama de blocos para o sistema de controle em malha fechada de um sistema de controle genérico.



Fonte - Adaptado de Lathi (1998)

A resposta em malha fechada para o processo considerado pode ser dada pela Equação 37:

$$\bar{y}(s) = \frac{G_p G_c G_v}{1 + G_p G_c G_v G_m} \bar{y}_{sp}(s) + \frac{G_d}{1 + G_p G_c G_v G_m} \bar{d}(s) \quad 33$$

O critério clássico de estabilidade afirma que o sistema em malha fechada é considerado estável se todas as raízes da sua equação característica estão localizadas à esquerda do eixo imaginário do plano complexo, com isso a Equação 38 deve satisfazer tais exigências.

$$1 + G_p G_c G_v G_m = 0 \quad 34$$

Analisando as funções de transferências do sensor e atuador unitário, e o processo de primeira ordem, considerando a função de transferência do controlador, podemos assumir que a equação acima pode se aproximar de um sistema de segunda ordem, sem perda de generalidade, dada pela Equação 39:

$$\tau^2 s^2 + 2\xi\tau s + 1 = 1 + \frac{k_p}{\tau_p s + 1} \left(k_c + \frac{k_c}{\tau_i s} + k_c \tau s \right) = 0 \quad 35$$

Onde:

- τ é a constante de tempo, ou seja, o tempo natural de oscilação que determina a velocidade de resposta do sistema do sistema;
- ξ é o fator de amortecimento, que mostra o grau de oscilação em uma resposta do processo depois de uma perturbação.

A constante de tempo é o fator de amortecimento podem ser obtidos a partir da Equação 40 e da Equação 41, que resultam nas Equações 42 e 43:

$$\tau = \sqrt{\frac{\tau_p \tau_i}{k_p k_c} + \tau_d \tau_i} \quad 36$$

$$\xi = \frac{(\tau_i)^{1/2}}{2(\tau_p / k_p k_c + \tau_d)^{1/2}} (1/k_p k_c + 1) \quad 37$$

Deste modo assumindo as seguintes condições, tem-se:

- Se $\xi^2 - 1 > 0$, onde as raízes apresentam apenas parte real Equação 42:

$$s = -\frac{\xi^2}{\tau} \pm \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\tau} \quad 38$$

II. Se $\xi^2 - 1 < 0$, onde as raízes são complexas, Equação 43:

$$s = -\frac{\xi^2}{\tau} \pm j \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\tau} \quad 39$$

Como os parâmetros ξ e τ podem ser expressos como uma função de k_c , τ_i , e τ_d , pode ser observado nas Equações 38 e 39, são os parâmetros de sintonia de um controlador PID, desde que sejam considerados variáveis aleatórias, então, ξ e τ também são variáveis aleatórias, tendo como características básica a distribuição de probabilidade associada com cada uma deles.

Para o procedimento analítico as considerações de que ambas as partes real e imaginária de cada raiz complexa são, por consequência estocástica quando representadas no plano complexo, resultando em pontos dispersos em torno do valor médio.

Considerando a distância estatística antes abordada como uma métrica, os contornos do elipsóide que limitam a região da robustez de estabilidade, com um nível particular de significância podem ser mapeados.

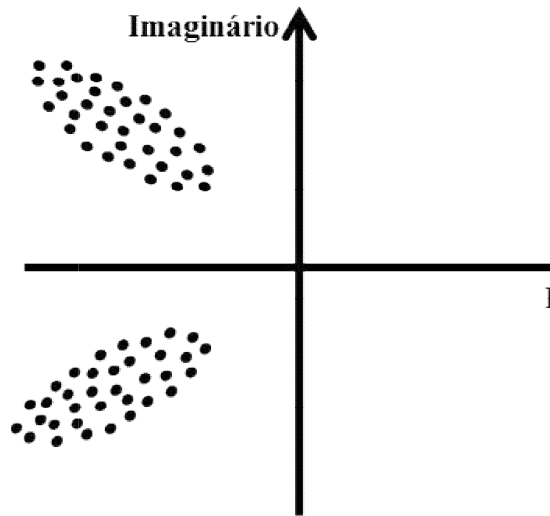
Embora o modelo probabilístico seja interessante, deve ser observado que a metodologia de controle robusto visa muito mais os limites de incerteza do que a sua distribuição de probabilidade.

4.5. Robustez da estabilidade

Normalmente A robustez da estabilidade e do desempenho tem sido tratadas de forma determinística, sendo avaliada apenas a variabilidade imposta aos parâmetros de interesse do sistema de controle, sem levar em conta uma distribuição de probabilidade para esses parâmetros (SILVA 2013).

Uma vez que as raízes da equação característica de segunda ordem podem ser obtidas de acordo com as Equações 38 e 39, considerando a natureza estocástica do processo, uma dispersão das mesmas pode ser observada no plano complexo, como mostra a Figura 15.

Figura 15– Dispersão das raízes no plano complexo



De certa forma, tanto os parâmetros do sistema de controle quanto os distúrbios externos e internos, influenciarão nas incertezas aplicada ao sistema de controle. Como mostrado na Equação 32, o contorno da região de confiança ao nível de significância α pode ser determinado.

$$d^2(\mu_{X^*}, P) = \frac{(x_1^* - \mu_{x_1^*})^2}{\sigma_{x_1^*}^2} + \frac{(x_2^* - \mu_{x_2^*})^2}{\sigma_{x_2^*}^2} \cong \chi_{2,\alpha}^2 \quad 40$$

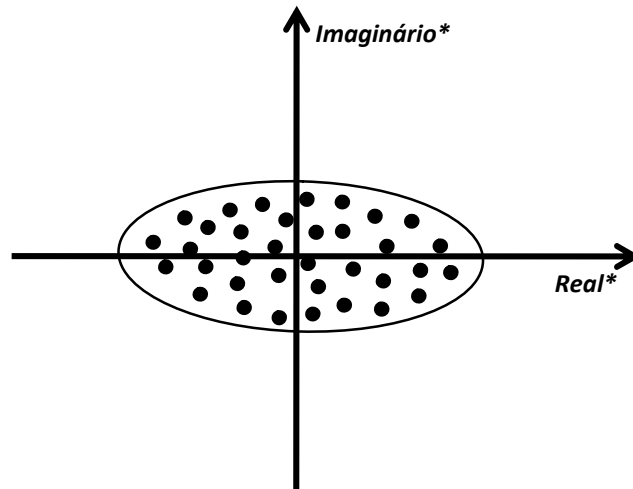
Do ponto de vista estatístico, mapear a região de confiabilidade das raízes no plano complexo consiste em determinar os contornos dessa dispersão, resultando na quantificação da variabilidade global do sistema de controle em tempo real, além de avaliar a tendência do comportamento da estabilidade do sistema. Desta maneira, a região pode ser denominada de região robusta de estabilidade.

A região robusta de estabilidade obtida a partir da Equação 45, onde será aplicando as conversões de coordenadas apropriadas, como segue:

$$X^* = P^{-1}(X - \bar{X}) \quad 41$$

Com a Equação 41 é obtido um novo sistema de coordenadas usando os dados originais, chamadas de X^* (Real*, Imag.*), como é mostrado na Figura 16.

Figura 16– Dispersão das raízes no novo sistema de coordenadas



Permitindo calcular a variância $\sigma_{X^*}^2$. Com a dispersão está centrada em $X_c^*(0,0)$, os semi-eixos podem ser determinados pela Equação 46:

$$X_r^* = (\sigma_{X^*}^2 \chi_{2,\alpha}^2)^{(1/2)}$$

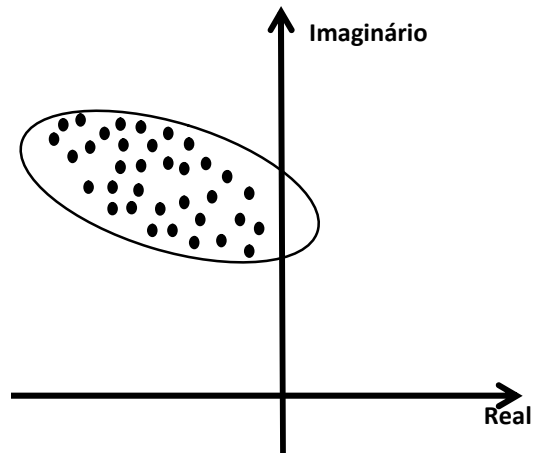
42

A Equação 46 pode ser utilizada para determinação da borda da elipse, referente aos dados das posições das raízes na nova orientação no plano complexo, o retorno a coordenadas originais resultará no mapeamento desejado para a estabilidade robusta. A volta ao sistema de coordenada originais é efetuada através de uma nova rotação e translação, ou seja, os pontos são centrados na origem para serem mapeados, com o mapeamento realizado, retomando aos dados originais tem-se os dados mapeados, podendo assim recalcular as bordas da elipse, agora mapeada.

A medida da robustez da estabilidade pode sofrer redução, tal redução pode ser avaliada pelo acompanhamento do contorno da região de confiabilidade da dispersão das raízes, ou seja, a medida que o contorno da elipse sofre deslocamento, este deslocamento pode ser entendido como afastamento da região de confiabilidade.

A Figura 17 mostra o exemplo de descolamento com perda de robustez da estabilidade, a migração do contorno da elipse cruzando o eixo imaginário para o semi-plano real positivo, antes mesmo que as raízes, indicará que alguma irregularidade no sistema está ocorrendo e poderá levar a instabilidade (Silva et. al, 2012a).

Figura 17– Redução da robustez da estabilidade.



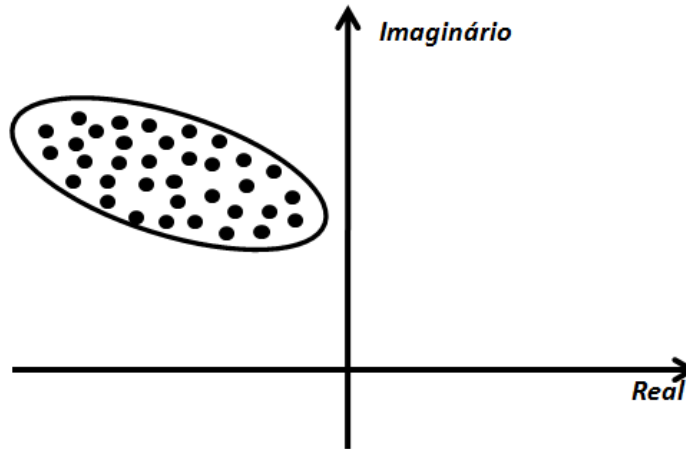
A leitura da equação característica que é função de vários parâmetros, fornece sempre o par de raízes, que podem ser mapeadas mostrando a tendência do sistema ser estável ou instável.

4.6. Robustez do Desempenho

A atuação de um controlador pode ser avaliada pela sua capacidade de manter a variável controlada próximo ao valor desejado, mesmo em presença de perturbações externas (Luyben, 1990).

Quando é obtido o contorno da robustez da estabilidade, é possível obter ao mesmo tempo as respostas para o desempenho sugestivo a esse contorno, também é obtida a distribuição de probabilidade para a saída do processo, facilitando a determinação da variação do processo. A Figura 18 mostra os contornos da elipse como saída de dados dos processos.

Figura 18 – Respostas da saída do processo a partir do contorno da elipse.



A determinação dos parâmetros de sintonia do controlador referente às bordas da elipse pode ser determinada pelas seguintes equações:

- Se $\xi^2 - 1 > 0$, onde as raízes apresentam apenas parte real, então para cada valor de S_p da região especificada, teremos que encontrar três valores (k_c, τ_i, τ_d), ou seja, teremos duas equações e três variáveis, Equação 47.

$$s = -\frac{\frac{(\tau_i)^{1/2}}{2(\tau_p/k_p k_c + \tau_d)^{1/2}} (1/k_p k_c + 1)^2}{\sqrt{\frac{\tau_p \tau_i}{k_p k_c} + \tau_d \tau_i}} \pm \frac{\sqrt{\left(\frac{(\tau_i)^{1/2}}{2(\tau_p/k_p k_c + \tau_d)^{1/2}} (1/k_p k_c + 1)\right)^2 - 1}}{\sqrt{\frac{\tau_p \tau_i}{k_p k_c} + \tau_d \tau_i}} \quad 43$$

- Se $\xi^2 - 1 < 0$, onde as raízes são complexas, para o par (Real, Img) da região especificada, teremos que encontrar três valores (k_c, τ_i, τ_d) ρ , ou seja, teremos três equações e três variáveis Equações 48 e Equação 49.

$$S_{real} = -\frac{\left(\frac{(\tau_i)^{1/2}}{2(\tau_p/k_p k_c + \tau_d)^{1/2}} (1/k_p k_c + 1)\right)^2}{\sqrt{\frac{\tau_p \tau_i}{k_p k_c} + \tau_d \tau_i}} \quad 44$$

$$s_{img} = \pm \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{(\tau_i)^{1/2}}{2(\tau_p / k_p k_c + \tau_d)^{1/2}} (1/k_p k_c + 1) \right)^2}}{\sqrt{\frac{\tau_p \tau_i}{k_p k_c} + \tau_d \tau_i}} i$$

45

Devido ao grau de complexidade de não-linearidade das equações 46 a 48, um método que possibilita a resolução desses sistemas é o de Levenberg-Marquardt (Nocedal e Wright, 1999).

Segundo Silva (2013), as respostas da saída são obtidas para as bordas da elipse e para a dispersão das raízes gerada pelo processo, sendo possível obter a região de robustez da performance associada a região de robustez da estabilidade. A base para a performance pode ser escolhida em função dos critérios desejados para o processo, por exemplo, *overshoot*, velocidade de resposta, taxa de decaimento ou tempo de resposta, etc. ou também outro índice que necessite da variabilidade da saída do processo.

Como exemplo, toma-se como base a saída processo no domínio tempo de acordo com a Equação Anexo I.15, gerada pelas raízes para $\frac{t}{\tau_p}$ igual a 1. Além das respostas geradas pela borda da região de robustez da estabilidade, uma distribuição da mesma pode ser obtida, caracterizando assim a variabilidade da saída do sistema em função das incertezas do processo.

A resposta da saída do processo em $t/\tau_p = 1$, caracterizada como variável aleatória, considerando distribuição de probabilidade não conhecida.

Deste modo é apresentado o teorema e o Teorema Central do Limite, usado para amostras aleatórias independente (X_1, X_2, \dots, X_n) retiradas de uma população com média μ_x e variância σ^2 , a distribuição amostral da média \bar{X} aproxima-se de uma distribuição normal com média μ_x e variância $\frac{\sigma^2}{n}$, quando n tende ao infinito (Montgomery, 2003). Na prática pede-se um $n > 5$, isto é;

$$\bar{X} \rightarrow N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right), \text{ quando } n \rightarrow \infty$$

46

Uma maneira de calcularmos uma estimativa de um parâmetro desconhecido é construir um intervalo de confiança para o parâmetro desconhecido com uma probabilidade $(1 - \alpha)\%$ (nível de confiança) de que um intervalo contenha o verdadeiro parâmetro. Observa-se que $(1 - \alpha)\%$ pode ser igual a 99%, 95%, 90% , 80%, etc. Desta maneira α corresponde ao nível de significância, isto é, o erro que é cometido ao afirmar que, por exemplo, 95% das vezes o intervalo $\hat{g}_1 < g < \hat{g}_2$ contém g será de 5%.

O Teorema Central de Limite e o intervalo de confiança de $(1 - \alpha)\%$ para a média populacional μ , para uma amostra de $n > 30$, os limites de confiança da média podem ser expresso pela Equação 51:

$$L_{\bar{y}} = \mu_{\bar{y}} \pm t_{(n-1)} \frac{S_y}{\sqrt{n}}$$

47

Sendo $t_{(n-1)}$ o valor crítico *t-student* com $n-1$ grau de liberdade e erro $\alpha\%$. Com isso, tanto os limites de confiança quanto a distribuição da saída do processo podem ser obtidos.

5. RESULTADOS E DISCUSSÃO

5.1. Planilha computacional Excel/VBA

A estrutura computacional para saída dos dados do sistema foi desenvolvida em ambiente Excel/VBA. A escolha de planilha computacional foi motivada pelo desejo de comprovar que a metodologia utilizada neste trabalho não requer aparatos computacionais sofisticados, ou seja, computadores que contenha um simples editor de planilha é suficiente para utilizar a metodologia.

Para elaboração da planilha, inicialmente foi criada uma entrada de dados aleatórios, usando uma função randômica, e limitadas por desvios estipulados. A criação dessa entrada de dados tem como objetivo simular a captura de dados de um controlador PID, a Tabela 1 exemplifica a entrada de dados utilizada.

Tabela 1- Representação da planilha de entrada de dados genéricos dos parâmetros do sistema.

	Parâmetros do sistema						
Desvio	k_p	τ_p	k_v	k_m	k_c	τ_i	τ_d
δk_p	10	1	100	1	10	10	100
0,1	10,024	0,981	99,248	1,000	9,202	10,000	99,797
$\delta \tau_p$	9,993	1,013	100,612	0,999	10,000	10,098	100,000
0,02	10,464	1,017	100,968	1,000	9,901	9,932	100,000
δk_v	10,532	1,000	99,707	0,995	10,000	9,979	100,810
0,01	9,293	0,998	99,946	1,005	9,329	10,000	100,000
δk_m	10,000	1,014	99,232	0,995	10,000	10,087	100,000
0,01	9,930	0,985	100,000	1,000	10,811	10,000	100,776
δk_c	9,899	1,013	100,000	1,000	10,000	10,000	99,324
0,1	10,075	1,015	99,310	1,000	9,957	10,083	100,000
$\delta \tau_i$	10,902	0,986	100,805	0,995	9,521	10,000	100,000
0,01	10,171	0,998	100,000	1,008	10,095	10,026	99,662
$\delta \tau_d$	9,998	0,984	100,602	0,992	10,671	9,908	100,000
0,01	10,291	1,018	100,588	1,000	10,000	9,986	99,669

A entrada de dados através da Tabela 01 são essenciais para o cálculo das raízes no plano complexo. Para esse cálculo é necessário calcular a Constante de Tempo (τ) e a Constante de Amortecimento (ζ), calculados através das Equações genéricas para as constantes de um controlador PID são dadas pelas Equações 52 e 53:

$$\tau = \sqrt{\frac{(\tau_p + k_p k_c \tau_d k_v k_m) \tau_i}{k_p k_c k_v k_m}} \quad 48$$

$$\zeta = \frac{(k_p k_c k_v k_m + 1) \tau_i}{2 \tau k_p k_c k_v k_m} \quad 49$$

Com os resultados obtidos através das Equações 48 e 49 é calculado os valores das raízes no plano complexo:

$\zeta^2 - 1 \geq 0$: as raízes apresentam apenas parte real :

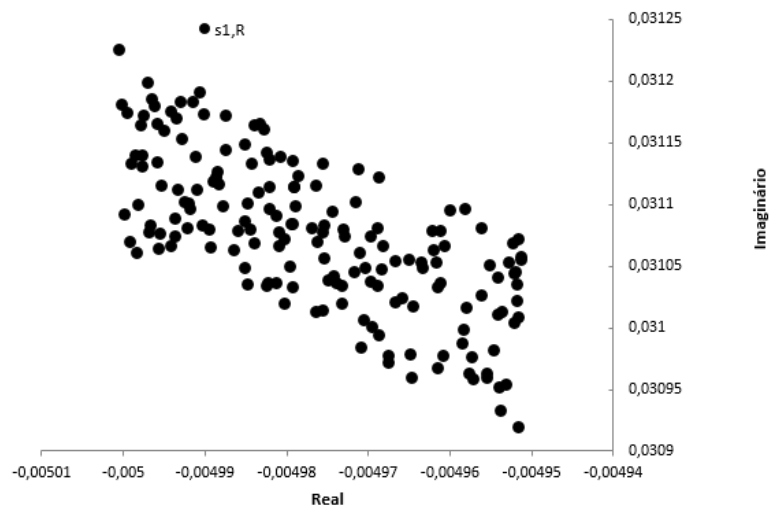
$$s = \frac{-\zeta \pm \sqrt{(\zeta^2 - 1)}}{\tau} \quad 50$$

$\zeta^2 - 1 < 0$: as raízes apresentam parte real e imaginária :

$$s = \frac{-\zeta \pm j \sqrt{1 - \zeta^2}}{\tau}$$

Após aplicação das Equações 51 a 53 com os dados da Tabela 1, obtém-se como resultado o gráfico apresentado na Figura 19:

Figura 19 – Representação das raízes no plano Complexo.



Após o cálculo das raízes da equação característica, foi efetuado o cálculo da matriz de covariância através da Equação 55, do ângulo de rotação dado pela Equação 56 a 59 e dos autovetores e autovalores – equações apresentadas no Anexo II cálculo do ângulo de rotação e Anexo IV cálculos dos autovetores e autovalores:

$$S = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix}, \text{ onde } s_{ij} = \frac{n \sum_{k=1}^n x_{ij} x_{jk} - \sum_{k=1}^n x_{ik} \sum_{k=1}^n x_{jk}}{n(n-1)} \quad 51$$

$$\begin{bmatrix} x_1^{**} \\ x_2^{**} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - \mu_{x_1} \\ x_2 - \mu_{x_2} \end{bmatrix} \quad 52$$

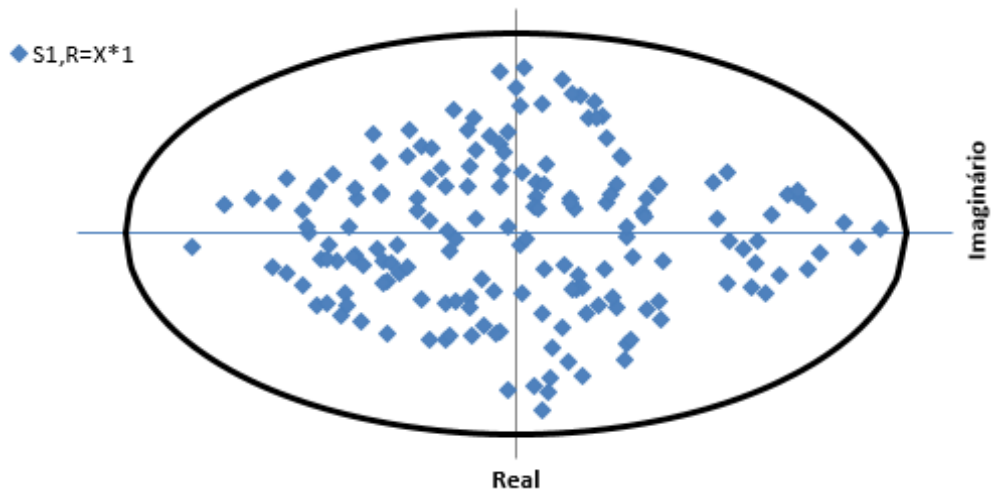
$$\theta = \text{ArcCos}(v_{11}) \quad 53$$

$$x_1^{**} = \text{Cos}(\theta)(x_1 - \mu_{x_1}) - \text{Sin}(\theta)(x_2 - \mu_{x_2}) \quad 54$$

$$x_2^{**} = \text{Sin}(\theta)(x_1 - \mu_{x_1}) + \text{Cos}(\theta)(x_2 - \mu_{x_2}) \quad 55$$

Com os movimentos de rotação e translação os pontos coincidem com a origem dessa maneira pode-se calcular a representação da dispersão geral de variabilidade que pode ser visualizado na Figura 20.

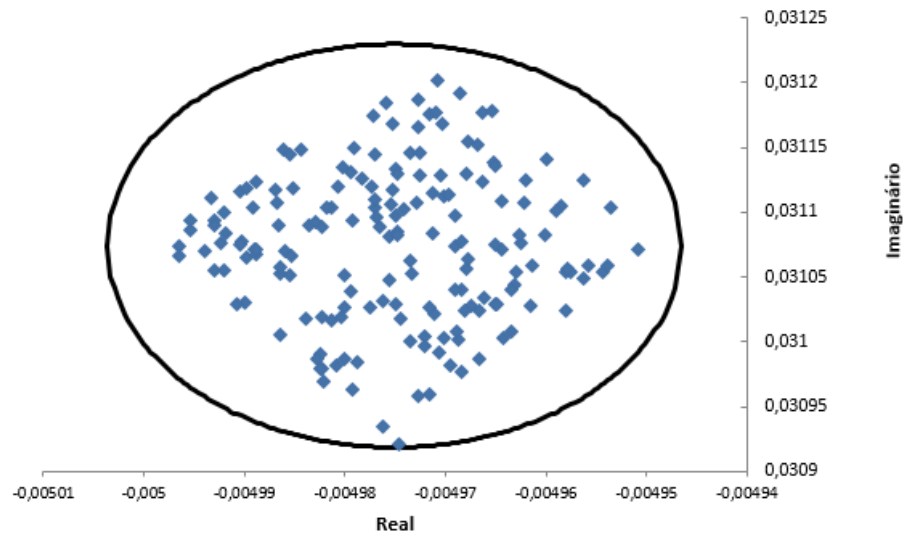
Figura 20 - Representação da dispersão geral de variabilidade rotacionada e transladada para origem.



A rotação e a translação são necessárias para eliminar a correlação entre as variáveis. Após ter obtido as distâncias, pode-se então calcular a região de

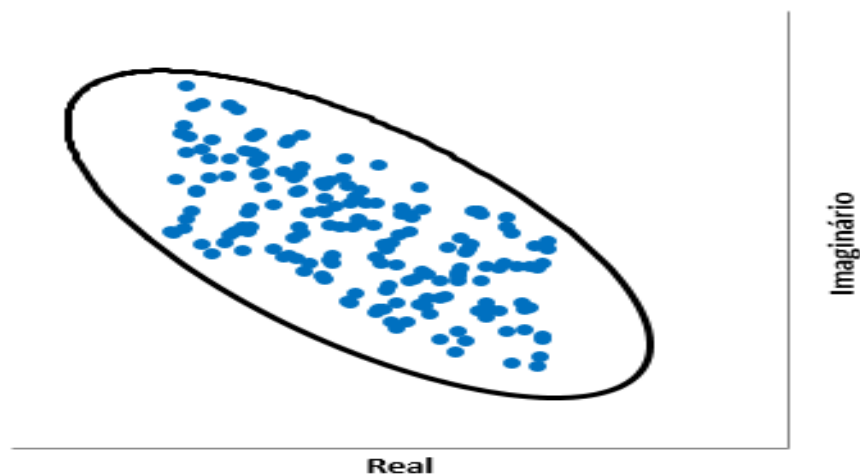
confiabilidade variáveis normalizadas, representado pela Figura 21, que considera a volta dos pontos da equação característica a seu valor original:

Figura 21 - Região de confiabilidade das variáveis normalizadas.



Com a rotação e translação aplicadas de maneira inversa, os pontos retornam para sua posição original, que é mostrado na Figura 22.

Figura 22 – Respostas da saída do processo a partir do contorno da elipse.



Os contornos da elipse são calculados através da equação de distância estatística, dada pela Equação 60:

$$d^2(\mu^{**}, P) = \frac{(x_1^{**} - \mu_{x_1}^{**})^2}{\sigma_{x_1}^{2**}} + \frac{(x_2^{**} - \mu_{x_2}^{**})^2}{\sigma_{x_2}^{2**}} \cong \chi_{2,\alpha}^2 \quad 56$$

Assim com as médias já definidas e rearranjando a Equação 56, pode-se então definir os contornos da elipse, com as Equações de 61 a 67:

$$(x_2^{**} - \mu_{x_2}^{**})^2 \cong \sigma_{x_2}^{2**} \left(\chi_{2,\alpha}^2 - \frac{(x_1^{**} - \mu_{x_1}^{**})^2}{\sigma_{x_1}^{2**}} \right) \quad 57$$

$$(x_2^{**} - \mu_{x_2}^{**}) \cong \pm \sqrt{\sigma_{x_2}^{2**} \left(\chi_{2,\alpha}^2 - \frac{(x_1^{**} - \mu_{x_1}^{**})^2}{\sigma_{x_1}^{2**}} \right)} \quad 58$$

$$x_2^{**} \cong \mu_{x_2}^{**} \pm \sqrt{\sigma_{x_2}^{2**} \left(\chi_{2,\alpha}^2 - \frac{(x_1^{**} - \mu_{x_1}^{**})^2}{\sigma_{x_1}^{2**}} \right)} \quad 59$$

Considerando:

$$x_1^{**} = 0, \mu_{x_1}^{**} = 0, \mu_{x_2}^{**} = 0: \quad 60$$

Tem-se:

$$x_2^{**} \cong \pm \sqrt{\sigma_{x_2}^{2**} \chi_{2,\alpha}^2} \quad 61$$

$$x_{2 \min}^{**} = -\sqrt{\sigma_{x_2}^{2**} \chi_{2,\alpha}^2} \quad 62$$

$$x_{2 \max}^{**} = \sqrt{\sigma_{x_2}^{2**} \chi_{2,\alpha}^2} \quad 63$$

Para obter os valores requeridos, são utilizados os dados apresentados na Tabela 2:

Tabela 2- Dados utilizados dos valores da distribuição chi-quadrado

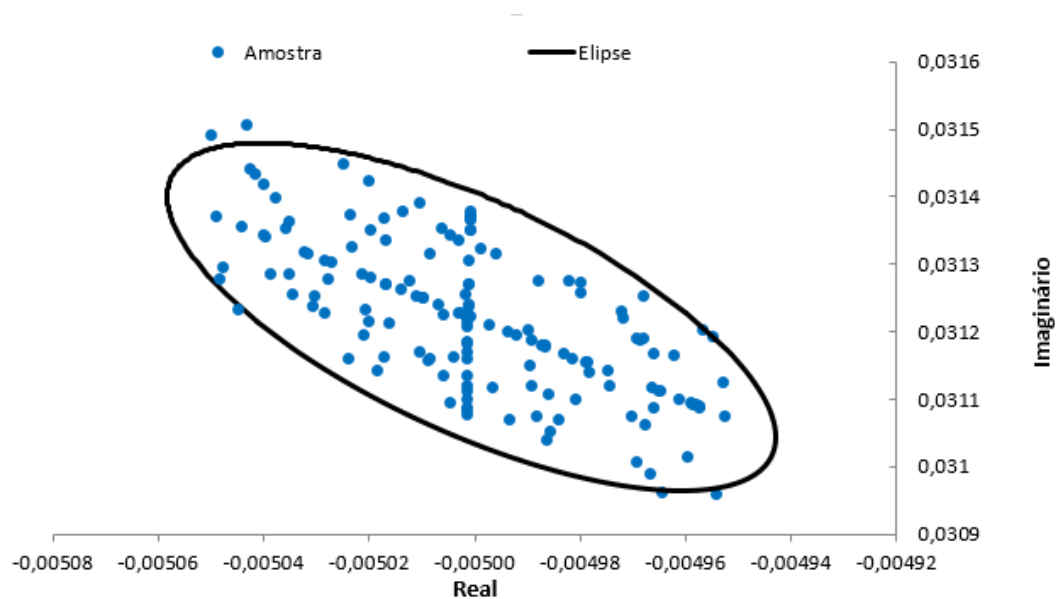
Intervalo de confiança (1-α), % =	95
Nível de significância (α), % =	5
Número de variáveis, ν =	2
$\chi_{2,\alpha}^2 =$	5,991

Os dados da Tabela 2 indicam que a cada 100 testes 95% das vezes os pontos encontrados estarão representados pela elipse com nível de significância de 5%, isto

para duas variáveis, com isso pode-se determinar o valor de $\chi^2_{2,\alpha}$ (distribuição chi-quadrado) que são tabelados e apresentados no Anexo III.

Após normalização das variáveis é determinado a região de confiabilidade das variáveis normalizadas. É nesta etapa que acontece a transformação linear com o movimento de rotação e translação. A Figura 23 apresenta o resultado obtido com a aplicação da metodologia desenvolvida, definida como região de estabilidade robusta gerados a partir de um controlador PID, com parâmetros genéricos.

Figura 23 – Região de estabilidade robusta, para parâmetros do controlador PID.



O resultado confirma que a teoria proposta é de fácil aplicação e que o resultado obtido tem grande importância para a determinação da estabilidade de um sistema.

Os valores podem estar diferentes em cada figura apresentada devido a função Randômica usada na planilha.

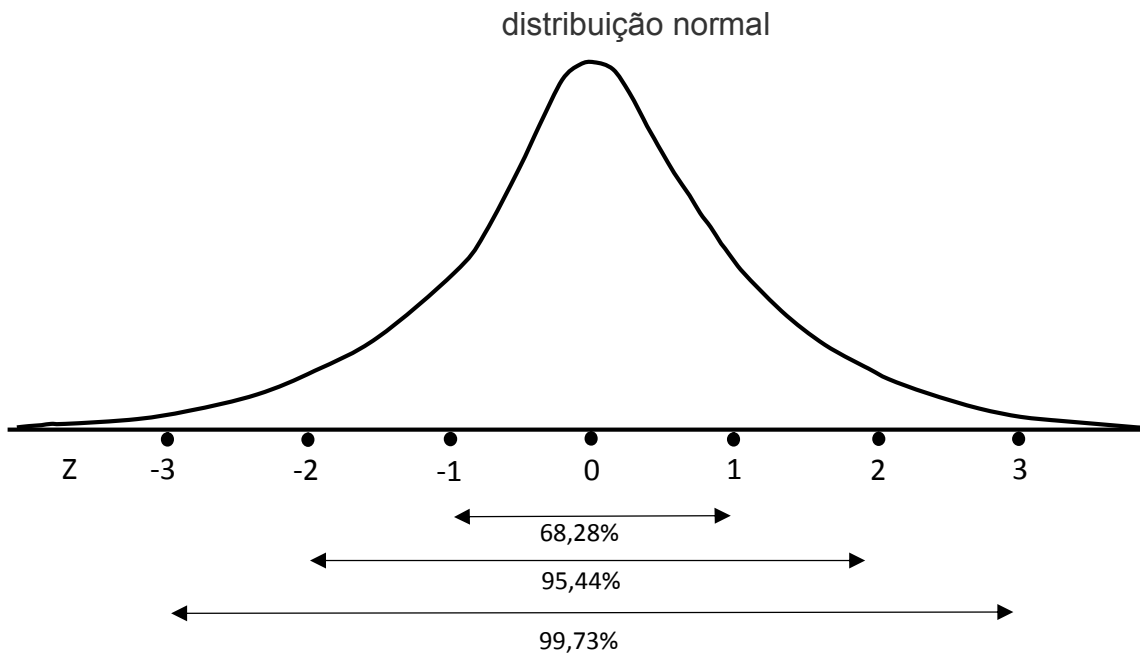
5.2. Análise comparativa entre as teorias de probabilidade estabilidade (Estatística, 3 Sigmas e Função Erro).

Nesta seção o comparativo entre três teorias é estabelecido e verificado, com objetivo de verificar se a metodologia proposta apresenta vantagens sobre as demais. Deste modo duas funções são apresentadas com perspectivas determinísticas, a da 3 Sigmas (três vezes o desvio padrão) e Função Erro, comparadas com os resultados obtidos com a perspectiva estocástica.

5.2.1. Metodologia Distribuição Normal Multivariada - 3 Sigma

Partindo da análise da Figura 24, observa-se que 99,73% dos resultados possíveis estão dentro do intervalo de confiança da metodologia, ou seja, apenas 0,27% dos resultados possíveis não são representados pela análise.

Figura 24 - Distribuição de probabilidade das médias, representação gráfica uma



Os limites da distribuição dos valores individuais são chamados de limites naturais e os limites da distribuição de probabilidade das médias são chamados de limites de controle.

A distribuição é limitada, por necessidade, visto à impossibilidade de trabalhar com valores de $-\infty$ e ∞ , e esses limites são intervalos de confiança em torno da

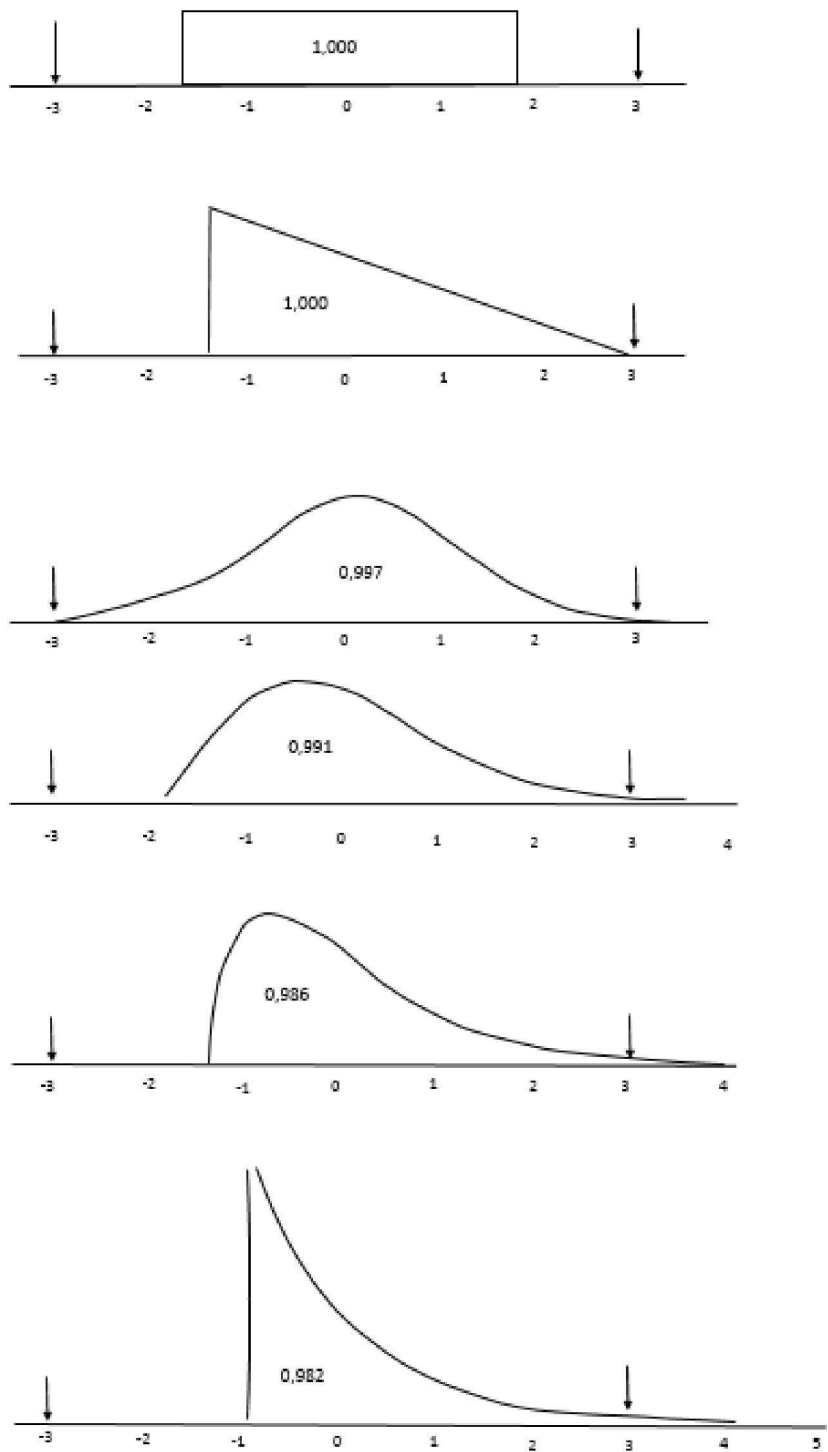
média. Como a análise do processo é realizada através de amostragem, a estimativa da média e da variabilidade do processo é realizada através de uma estrutura intervalar que proporciona um intervalo no qual se admite que esteja a verdadeira média e variabilidade populacional.

Como não se sabe ao certo onde estará o verdadeiro parâmetro populacional, deve ser usada uma atribuição probabilística do intervalo em que o verdadeiro valor possa estar. Como já debatido na seção anterior, esse intervalo chama-se intervalo de confiança, e a confiança associada é $1 - \alpha$, onde α é a probabilidade do erro. Um intervalo de confiança de $100(1-\alpha)\%$ é estabelecido a partir de dois limites, tais que a probabilidade do valor verdadeiro do parâmetro possa estar.

Uma vez identificada a distribuição dos valores individuais calcula-se os limites naturais. Caso a distribuição dos valores individuais seja Normal, os limites naturais são calculados considerando-se a extensão de seis desvios-padrões (6σ). Dessa forma, os limites compreendem 99,73% dos valores, ou seja, teoricamente 99,73% das raízes da equação característica estarão dentro dos limites e 0,27% estarão fora dos limites.

Outro motivo associado ao uso da análise 3 Sigma está na Figura 25. Wheeler e Chambers (1992) afirmam que a maior parte das distribuições estão com um certo nível de significância da região de confiança para vários métodos de distribuição de probabilidade.

Figura 25 - Representação das amostras 3 Sigma, para vários métodos de distribuição de probabilidade



Fonte
 –
 Adaptado
 de
 Wheeler e
 Chambers
 (1992)

N

a
 Tabela 3
 está
 o os
 limites
 s
 que
 esta
 bele
 cem
 o
 local
 em
 que
 a
 Função 3
 Sigma

a assume no universo dos pontos da equação característica.

Tabela 3– Valores usados para delimitar a Função 3Sigma

Distribuição uniforme $3\sigma=S_A$				
$3\text{Sigma} = 3S_A$				
μ_R	$L1,R$	$L1,Im$	$L2R$	$L2,Im$
-0,00499742	-0,004931344	0,03094	-0,00506	0,03094
μ_{Im}	-0,004931344	0,03121	-0,00506	0,03121
0,031209758	-0,004931344	0,03148	-0,00506	0,03148
$3\sigma_R$	$L1,R$	$L1,Im$	$L2R$	$L2,Im$
6,60757E-05	-0,004931344	0,03148	-0,00506	0,03094
$3\sigma_{Im}$	-0,00499742	0,03148	-0,005	0,03094
0,000270697	-0,005063496	0,03148	-0,00493	0,03094

Na Figura 26 são apresentados os resultados da região de estabilidade, destacado em vermelho, para a função 3 Sigma;

Figura 26 – Resultados da região de estabilidade obtidos para função 3 Sigma.

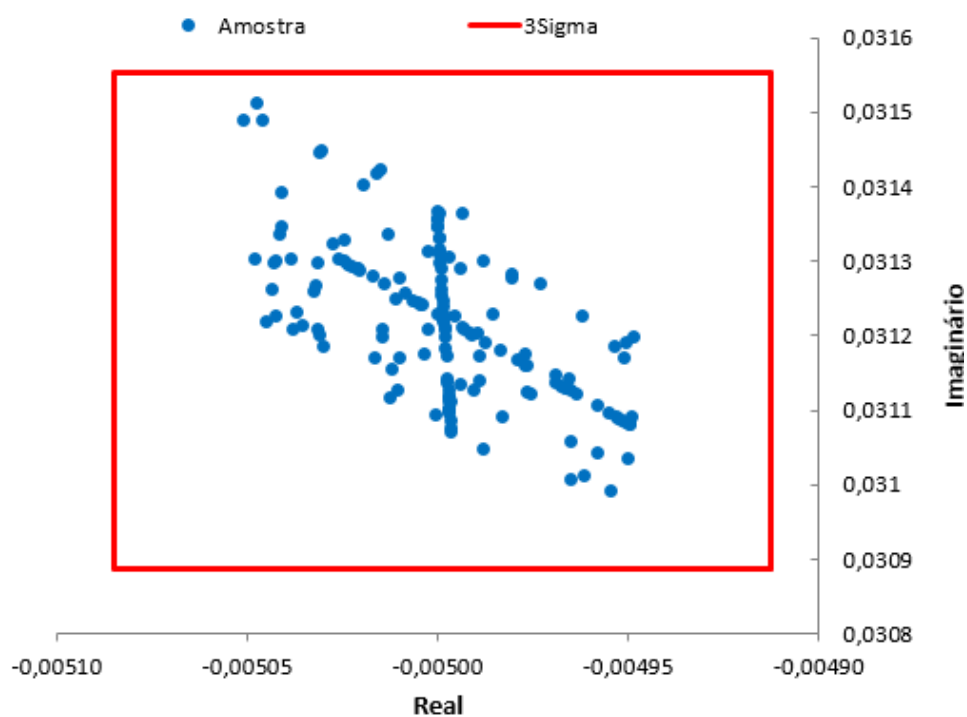
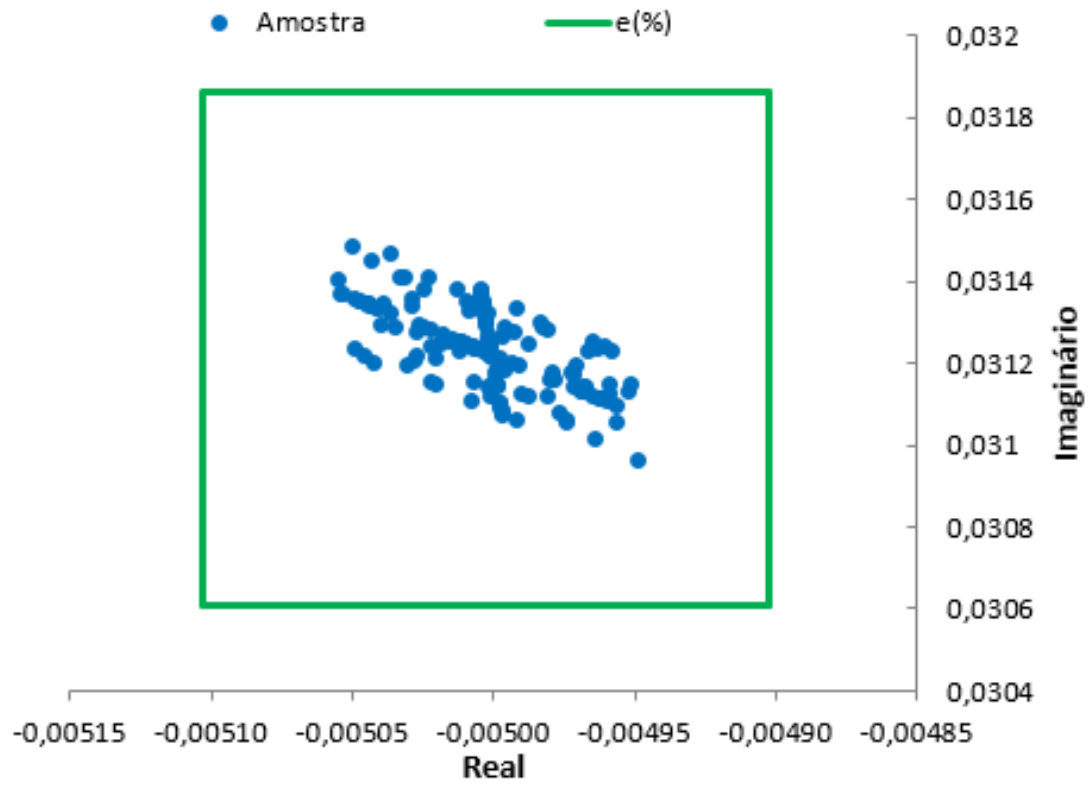


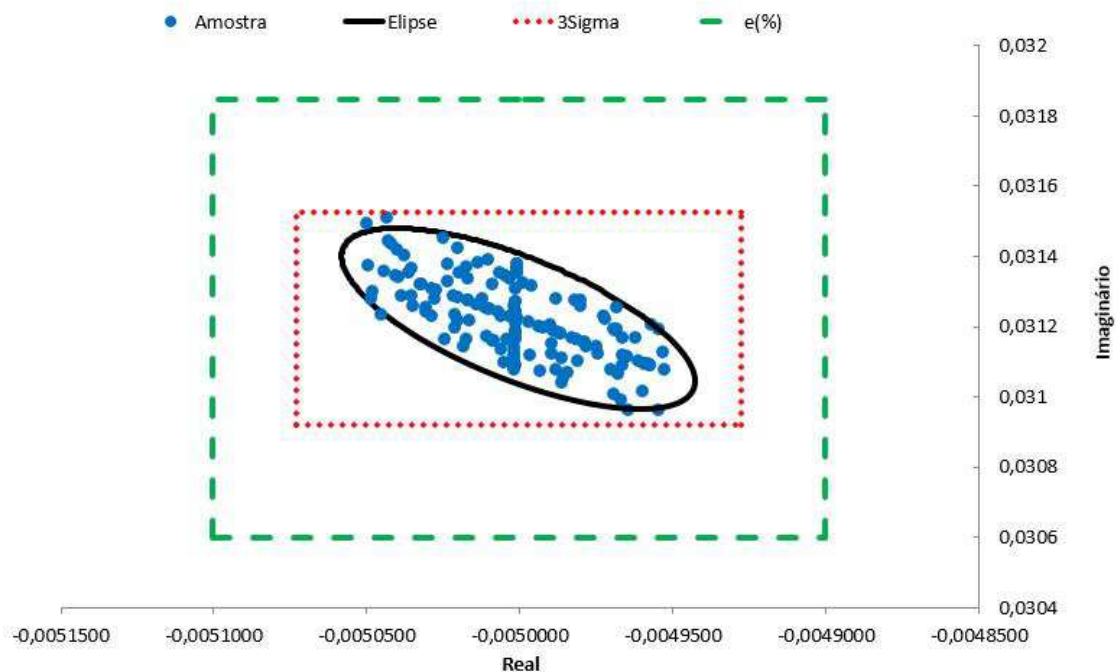
Figura 27 – Resultados da região de estabilidade obtidos para função erro ($\varepsilon = 2\%$).



5.2.3. Resultados Comparativos

A Figura 28 representa os resultados obtidos pela comparação entre as perspectivas determinística e estocástica, indicando que os resultados obtidos com a metodologia proposta devem-se ao seu menor nível de conservadorismo, e isso pode ser observado facilmente nos resultados.

Figura 28 – representação dos resultados obtidos da comparação entre as perspectivas determinística e estocástica



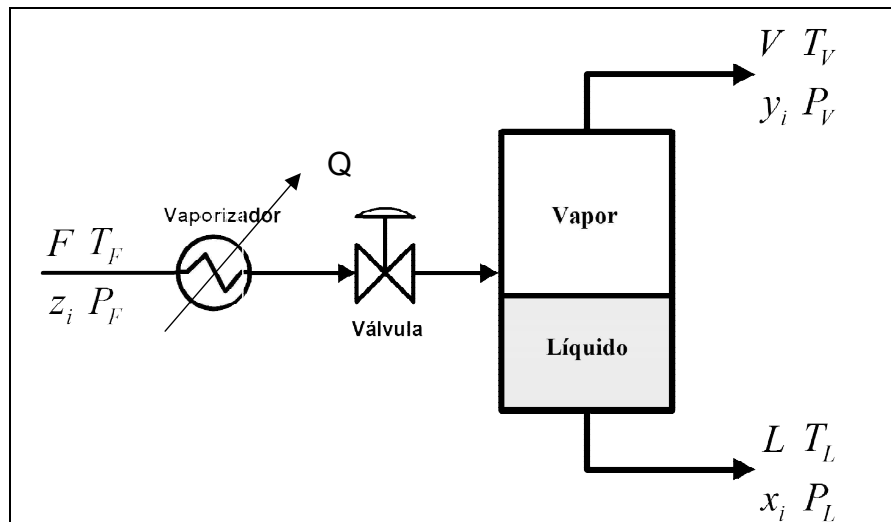
As comparações entre as perspectivas têm indicado que os resultados obtidos através da metodologia desenvolvida e mostrados na Figura 28 são menos conservativos, e conseqüentemente produz uma análise e mapeamento da região de estabilidade robusta mais realista.

6. ESTUDOS DE CASO

6.1. Sistema Não Reativo – Destilação Flash

A introdução de alguns conceitos básicos se faz necessária para utilização do processo de separação através de uma destilação com Tanque Flash. O processo de separação Metanol - Água foi escolhido como estudo de caso para um sistema não reativo. A Figura 29 ilustra que Calor (Q) é adicionado para a vaporização parcial da alimentação líquida e a Figura 30 esboça que vaporização parcial da alimentação líquida ou condensação parcial da alimentação superaquecida, ambas consideram os tipos de alimentação, dispositivos de controle e suas possíveis variáveis para uma destilação flash.

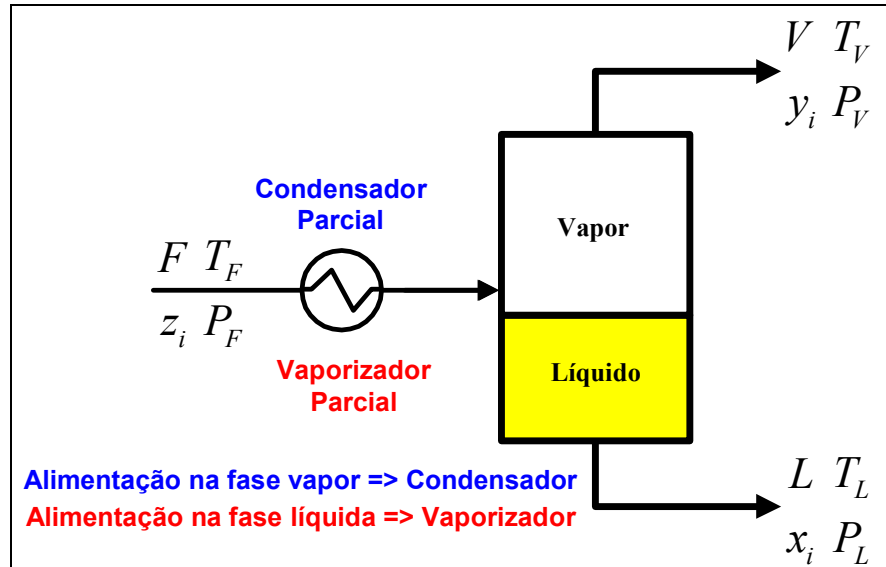
Figura 29 – Flash com valvula de controle de pressão.



Fonte: Adaptação notas de aula professor Nagel Alves 2009

Um flash corresponde a um estágio de uma coluna de destilação, no qual a alimentação é parcialmente vaporizada para sair na parte superior em forma de vapor, que é o componente mais volátil (SMITH et al. 2007). Dessa maneira, uma alimentação líquida é aquecida sob pressão e após passar pela válvula, tem a sua pressão reduzida. Se o aquecimento (ou a redução de pressão) for suficiente uma nova fase (vapor) aparecerá. O tanque flash tem a finalidade de separar as duas fases.

Figura 30 – Flash com temperatura de alimentação controlada.



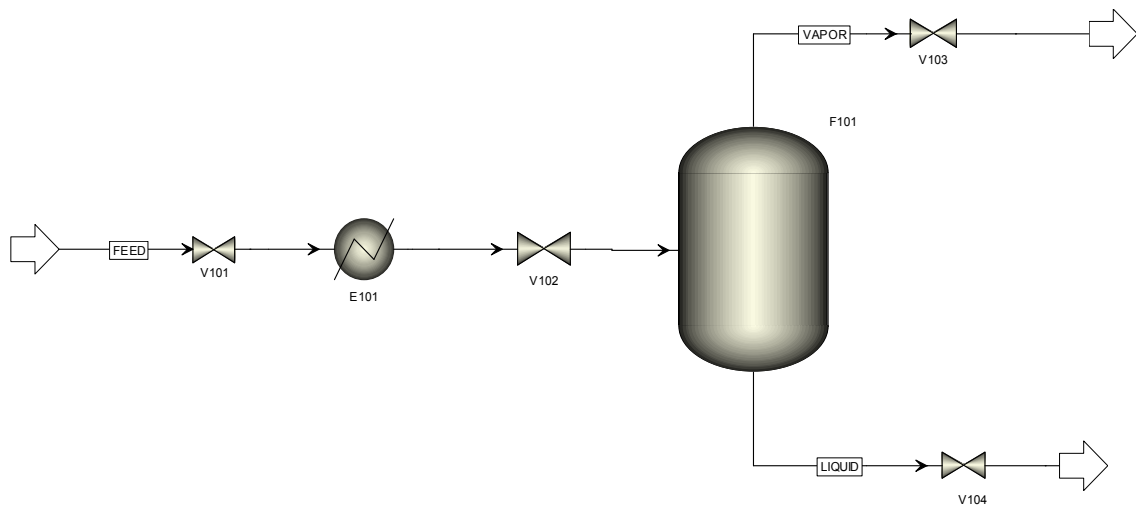
Fonte: Adaptação notas de aula professor Nagel Alves 2009

6.1.1. Resultados para o processo Não Reativo

Com o uso do AspenPlus®, simula-se o processo “Não Reativo”, a separação Água – Metanol, inicialmente no estado estacionário conforme a Figura 31, após obter resultado relativos a simulação no estado estacionário, analisar se os resultados obtidos são condizem com os resultados esperados, tais como composição da fase vapor e na fase líquida. No sistema de separação Água – Metanol espera-se que na saída da fase vapor só exista o componente mais volátil (espera-se metanol), e que na saída da fase líquida só exista o componente menos volátil (espera-se água) que nessa aplica é a Água.

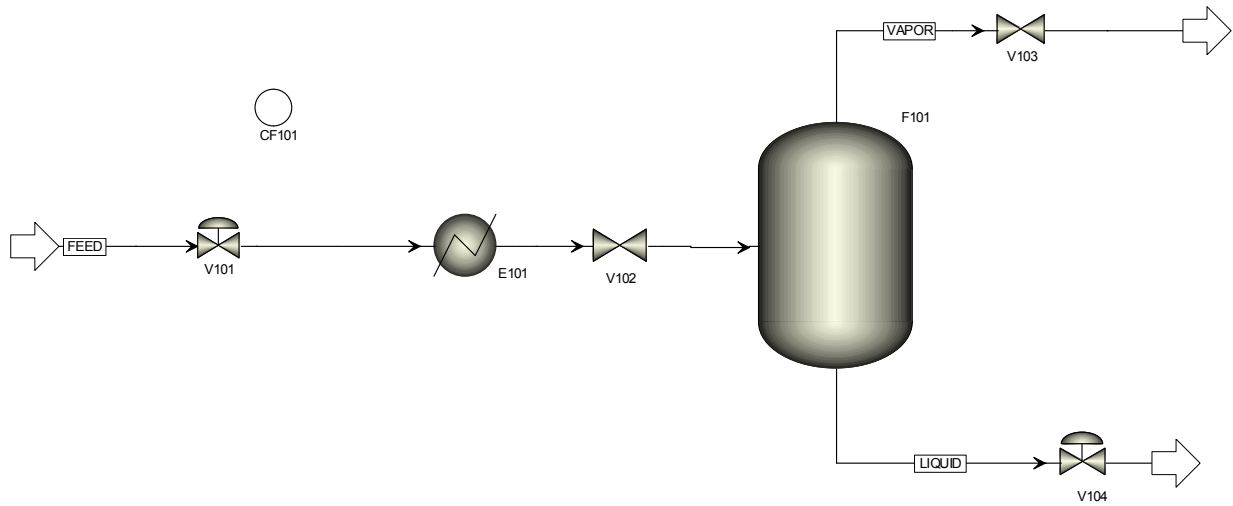
Outros resultados esperados na simulação estão na análise, do gasto energético do processo de separação, um gasto energético muito alto pode ser inviável para o processo de separação ser efetuado conforme representado na Figura 31, onde está simulado o processo de separação Água – Metanol no estado estacionário.

Figura 31– Representação do Tanque flash - Sistema não reativo – Simulação no estado estacionário



A simulação dinâmica do processo “Não Reativo” – separação Água-Metanol, é mostrado na Figura 32, foi realizado com o uso do AspenPlus®. Nessa etapa são colocados os controladores PID na simulação, afim de obter os seus parâmetros. Com o sistema de separação funcionando, são obtidos os pontos que são usados nas etapas da identificação, da equação característica que rege o processo, ou seja, a função de transferência que rege o sistema.

Figura 32– Representação do Sistema Dinâmico - Sistema não reativo – Simulação AspenPlus®;



No processo de identificação da função de transferência. Os valores para a função de transferência encontrada estão apresentados na Equação 69. Para encontrar a função de transferência foi usado a função *Ident* no software Matlab®, que está detalhada no Anexo V.

$$G_{p1}(s) = \frac{k_{p1}}{\tau s + 1} \tag{69}$$

$$G_{p1}(s) = \frac{0.04965 \pm \sigma_{k_{p1}}}{s + 0.9624 \pm \sigma_{\tau_{p1}}}$$

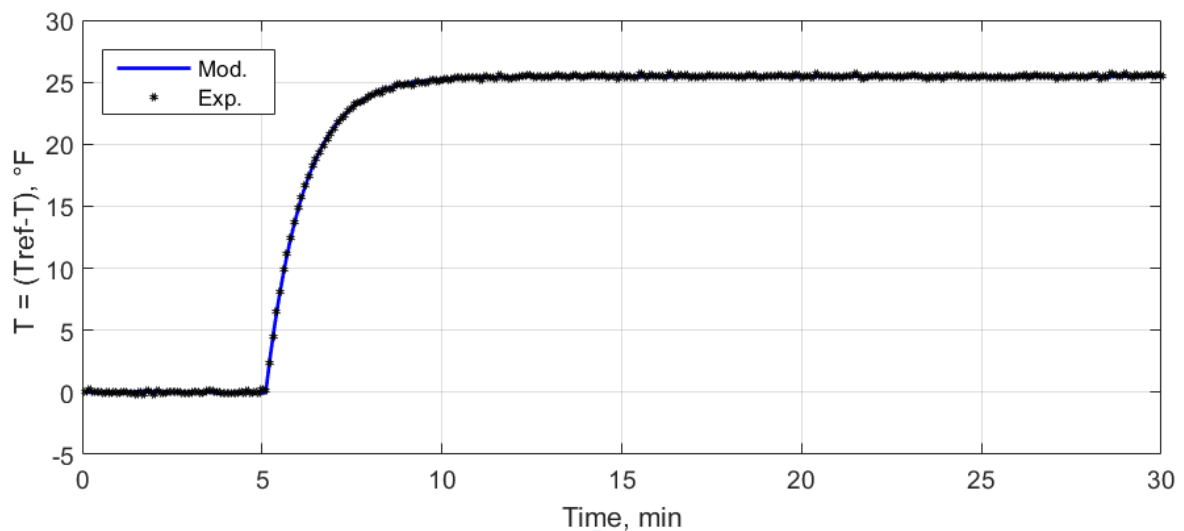
Nota-se que com os valores de $k_{p1} = 0,04965$ e $\tau s = 0,9624$, foi gerado o valor de $G_{p1}(s)$, e uma vez gerado o valor de $G_{p1}(s)$ pode-se estimar os valores que compõem o limite superior e o limite inferior, representados por $\pm \Delta k_{p1}$ e $\pm \Delta \tau_{p1}$. Desta forma resulta a Equação 70 e a Equação 71, representada na Figura 34.

$$G_{p1}(s) = \frac{0.04965 \pm \sigma_{k_{p1}}}{s + 0.9624 \pm \sigma_{\tau_{p1}}} = \frac{\frac{0.04965}{0.9624} \pm \Delta k_{p1}}{\left(\frac{1}{0.9624} \pm \Delta \tau_{p1} \right) s + 1} \tag{70}$$

$$G_{p1}(s) = \frac{0.0516 \pm \Delta k_{p1}}{(1.0391 \pm \Delta \tau_{p1}) s + 1} \tag{71}$$

A Figura 33 representa o modelo do sistema não reativo, onde foi gerado um distúrbio após o tempo 5 minutos, a fim de ser comparado com o modelo experimental. É possível observar que o valor do modelo encontrado coincide com os valores do modelo experimental, essa informação demonstra que o modelo identificado está bem próximo do modelo experimental, e também que o sistema chega ao seu set point estabilizado.

Figura 33– Representação do modelo identificado e do modelo experimental após um distúrbio de 10% no tempo 5 minutos.



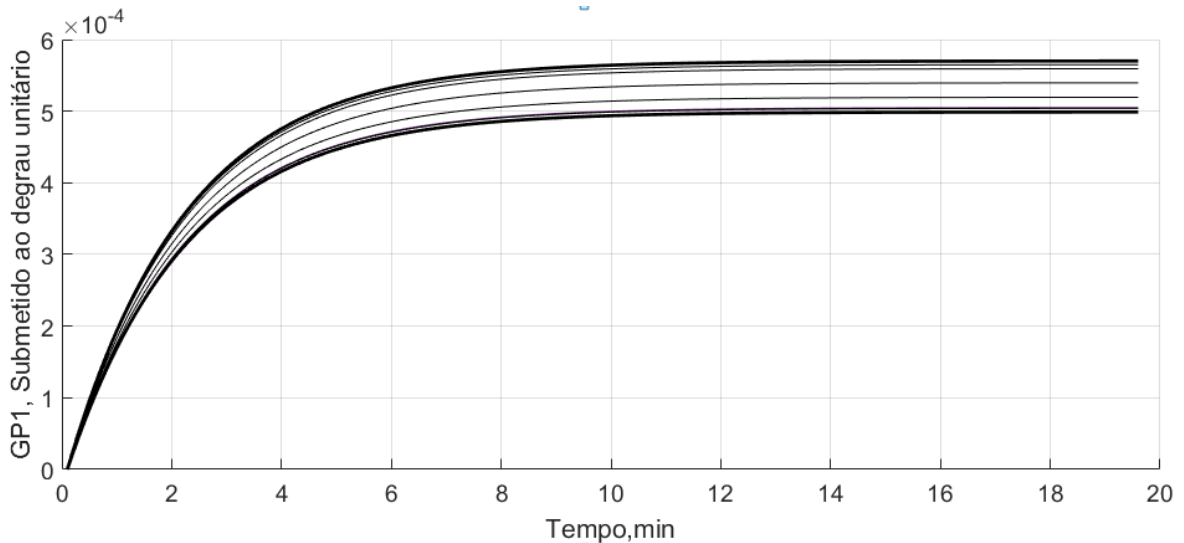
Para simular os valores para um $\pm \Delta k_{p1}$ e $\pm \Delta \tau_{p1}$, submete-se $G_{p1}(s)$ a um degrau de 10 % do valor inicial, onde encontramos os valores máximos para a diferença entre o menor valor e o maior valor. A Figura 34 mostra a função $G_{p1}(s)$ submetida à essa variação;

As mesmas simulações foram executadas para a temperatura e para a pressão, onde a função característica $G_{p2}(s)$ (Equação 72) com o intuito de ter uma segunda prova para a estabilidade.

$$G_{p2}(s) = \frac{k_{p2}}{\tau_{p2}s + 1}$$

$$G_{p2}(s) = \frac{0.01602 \pm \sigma_{k_{p2}}}{s + 0.857 \pm \sigma_{\tau_{p2}}} = \frac{\frac{0.01602}{0.857} \pm \Delta k_{p2}}{\left(\frac{1}{0.857} \pm \Delta \tau_{p2}\right)s + 1} = \frac{0.01869 \pm \Delta k_{p2}}{(1.1669 \pm \Delta \tau_{p2})s + 1} \quad 72$$

Figura 34– Representação da função de transferência $G_{p1}(s)$ submetida a um degrau com a variação superior e inferior .



6.1.2. Cálculos da estabilidade a partir da função de transferência

Com os valores da função de transferência calculados, é possível mostrar que o sistema de separação Água Metanol simulados são ou não estáveis. De forma análoga ao procedimento com dados aleatórios mostrados no Tópico 6 (Resultados e Discussão), são efetuadas as entradas de dados, conforme mostrado na Tabela 5. Nesta tabela estão o exemplo de alguns dados de entrada para o cálculo da região de estabilidade.

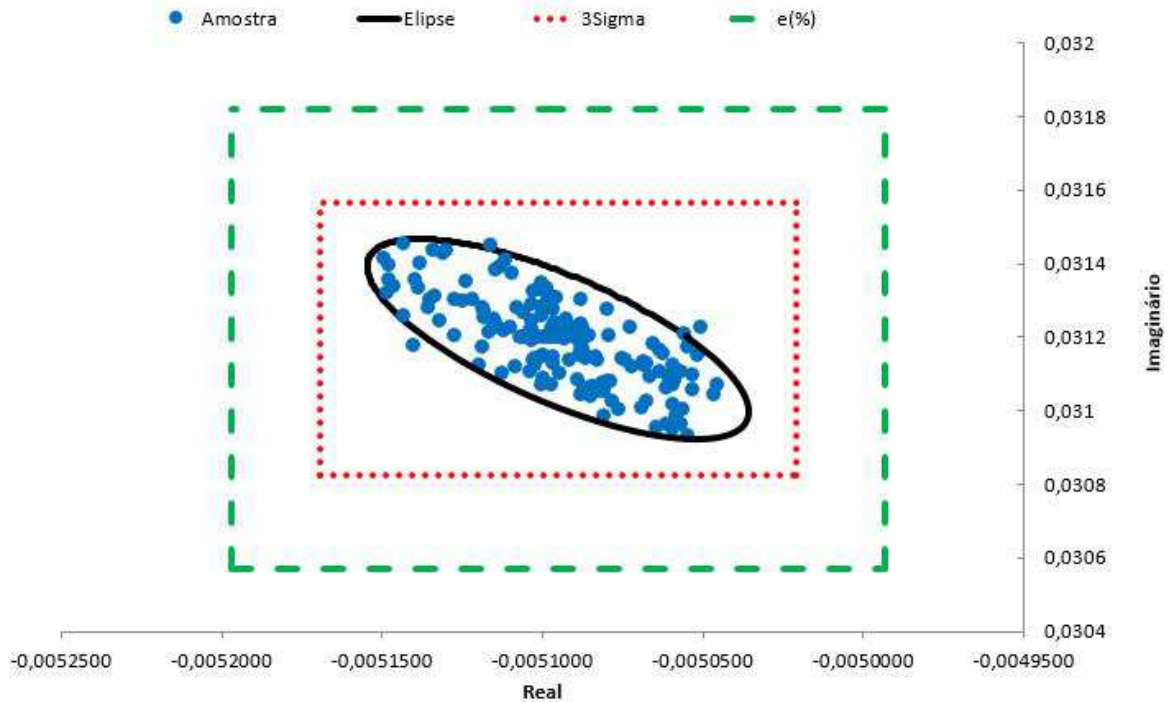
Tabela 5– Representação da planilha de entrada de dados do processo não reativo

	Parâmetros do sistema						
Desvio	$kp(\%)$	τp	kv	km	kc	τi	τd
δkp	0,0516	1,0391	100	1	10	10	100
0,1	0,04874	1,0391	100	0,99241	10	10,0976	99,3533
$\delta \tau p$	0,05242	1,0391	100,885	1	10	10,0921	100
0,02	0,0516	1,02545	100	1,0008	9,0099	10	99,2844
δkv	0,05471	1,03279	100,145	1	10	10,0808	100
0,01	0,0516	1,03463	99,4526	1,00131	10	10	99,1341
δkm	0,0548	1,05281	99,3251	1	10,54	9,9253	100,211
0,01	0,0516	1,04876	100,623	1	10	9,90585	100
δkc	0,05524	1,02204	100,364	1	10	10,0499	100,013
0,1	0,05046	1,0391	100	1	10,7008	10,0853	99,2468
$\delta \tau i$	0,05428	1,0391	100,638	1,00438	9,41445	10	100
0,01	0,05267	1,04813	100,451	0,99008	10,1778	10	99,7729
$\delta \tau d$	0,05106	1,03378	100,348	0,99782	10,3229	9,95365	100,079
0,01	0,0516	1,04476	100,179	1	10,1847	9,91556	99,808

Com os dados de entrada efetuados através da Tabela 5, e com o processamento matemático já desenvolvido no Tópico 6, a planilha é novamente executada apresentando os resultados para todos os passos. Os resultados têm sido suprimidos uma vez que todos os passos já foram demonstrados e só será apresentado como resultado a comparação entre as perspectivas determinística e estocástica.

A Figura 35 representa os resultados obtidos pela comparação entre as perspectivas determinística e estocástica, indicando que os resultados obtidos com a utilização da metodologia proposta, baseada em princípios estocásticos, representa o seu menor nível de conservadorismo, o que pode ser observado facilmente nos resultados.

Figura 35 – Representação dos resultados obtidos da comparação entre as perspectivas determinística e estocástica para o sistema Não Reativo



Mais uma vez as comparações entre as perspectivas têm indicado que os resultados obtidos através da metodologia desenvolvida, mostrados na Figura 35, são menos conservativos, e conseqüentemente produz uma análise e mapeamento da região de estabilidade robusta mais realista.

No Apêndice 01 é apresentada a densidade de probabilidade para o sistema não reativo de separação Água - Metanol, onde pode-se observar a semelhança com uma distribuição uniforme.

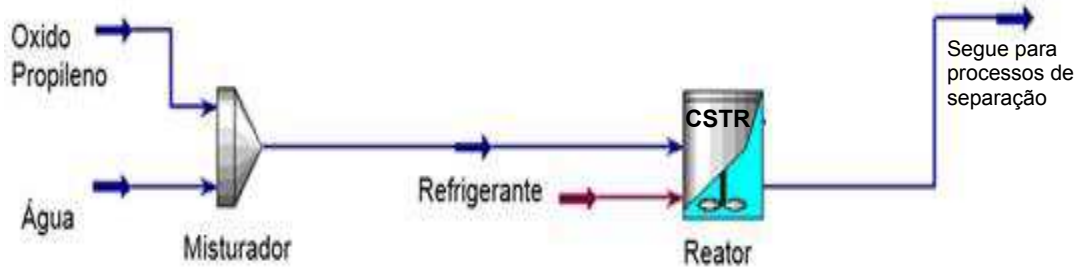
6.2. Sistema Reativo – Produção de Propileno Glicol

Uma das características principais do Propileno Glicol é ser um excelente solvente para uma grande gama de produtos orgânicos insolúveis em água. Entre suas propriedades estão: líquido claro, incolor, ligeiramente viscoso e completamente miscível com água. Por Propileno Glicol oferecer diversas maneiras de ser usado, ele se tornou uma ótima opção para as indústrias de cosméticos, alimentos e produtos farmacêuticos. Algumas das aplicações do Propileno Glicol mais comuns incluem (THE DOW CHEMICAL COMPANY, 2000):

- Solvente para aromas na indústria de aromas, essências e fragrâncias.
- Umectante para resinas naturais;
- Solvente para xaropes e preparações farmacêuticas contendo ingredientes solúveis em água;
- Agente de acoplamento em formulações de filtros solares, xampus, cremes de barbear e outros produtos similares;
- Um meio de transferência de calor para baixas temperaturas em sistemas de resfriamento em cervejarias e indústrias de laticínios, assim como outros equipamentos de refrigeração possuindo serpentinas de resfriamento em contato direto com alimentos ou bebidas;
- Em solução aquosa, apresenta excelentes propriedades anticongelantes;
- Solvente para tintas de impressão;
- Estabilizador de espumas em cremes de barbear;
- Solvente e acoplador para muitas outras aplicações;
- Umectante em coco ralado.

O Propileno glicol é resultado da reação do Óxido de Propileno e a água catalisada pelo ácido sulfúrico, conforme disposto na Figura 36. Após a reação no reator CSTR, os produtos seguem para as etapas de purificação, através de torres de destilação. A reação de produção do Propileno glicol foi escolhida como exemplo de um sistema reativo para a análise através da metodologia de análise estatística de estabilidade (AEE), exposta neste trabalho.

Figura 36– Esquema do Modelo de produção do Propileno Glicol.

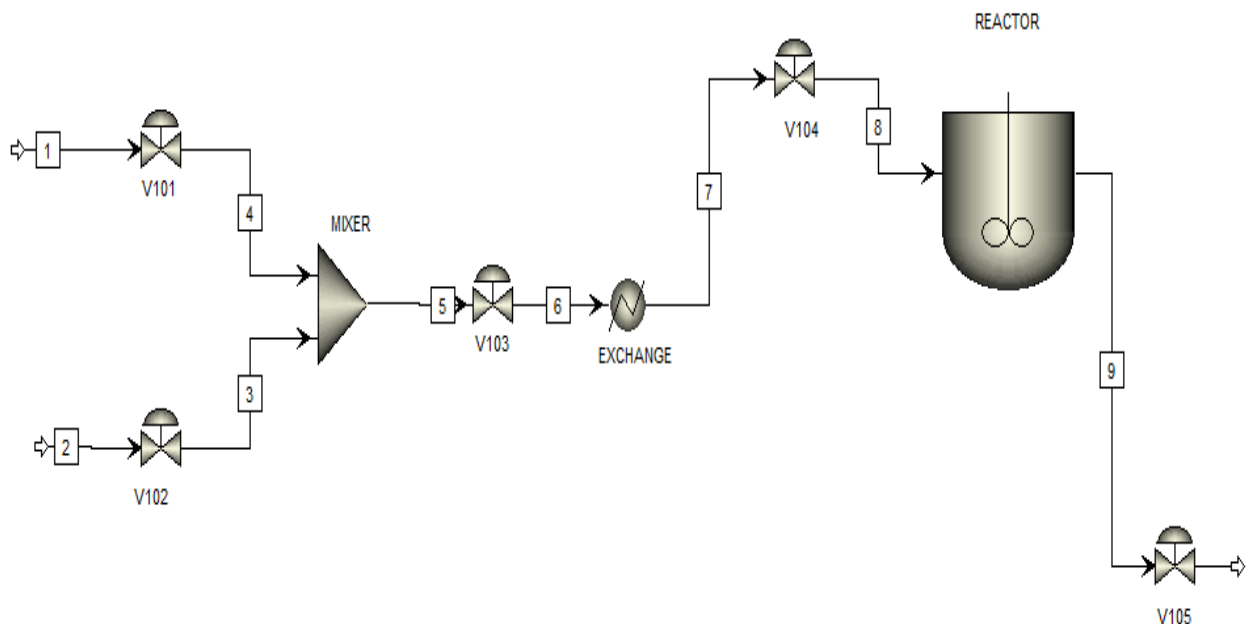


Fonte: Modelos Aspen Plus®

6.2.1. Resultados para o processo Reativo

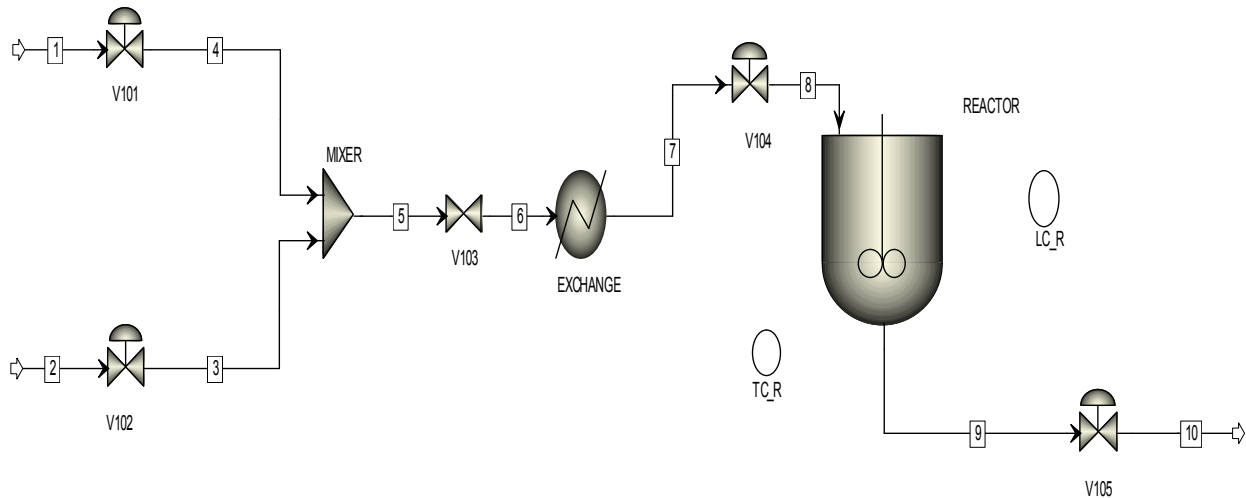
Os resultados foram obtidos através de uma simulação do processo de fabricação do Propileno glicol. A Figura 37 ilustra o processo simulado no estado estacionário, sem os controladores PID. Os valores obtidos no processo de produção do Propileno glicol no estado estacionário encontram-se disposto no Apêndice 4.

Figura 37– Simulação do processo de produção do Propileno Glicol no estado Estacionário



A Figura 38 apresenta a simulação do processo de produção do Propileno glicol gerada através do AspenPlus®. Nesta figura o processo encontra-se com todos os controladores PID em funcionamento, e com isso pode-se determinar as equações características que regem esse processo de produção. A Figura 39 encontra-se novamente no Apêndice 3 ampliada para uma melhor visualização,

Figura 38– Simulação do processo de produção do Propileno Glicol no estado dinâmico.



No processo de identificação da função de transferência, a função *Ident* do software Matlab® foi utilizada - detalhado no Anexo VI- os valores para a função de transferência encontrada estão apresentados na Equação 73.

$$G_{p1}(s) = \frac{k_{p1}}{\tau s + 1} \tag{73}$$

$$G_{p1}(s) = \frac{0.01398 \pm \sigma_{k_{p1}}}{s + 0.7781 \pm \sigma_{\tau_{p1}}}$$

Observa-se que com os valores de $k_{p1} = 0,01398$ e $\tau = 0,7781$, é possível gerar o valor de $G_{p1}(s)$, uma vez gerado o valor de $G_{p1}(s)$ pode-se estimar os valores que compõem o limite superior e o limite inferior, representados por $\pm \Delta k_{p1}$ e $\pm \Delta \tau_{p1}$. Desta

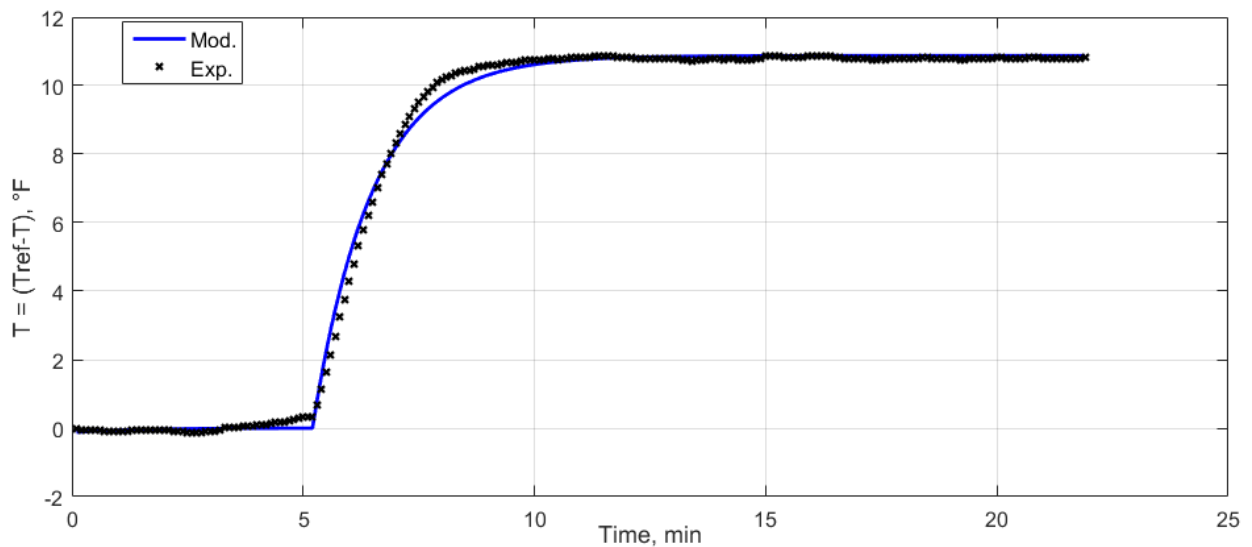
forma tem-se a Equação 74 e Equação 75, as quais encontra-se reproduzidas na Figura 40;

$$G_{p1}(s) = \frac{\frac{0.01398}{0.7781} \pm \Delta k_{p1}}{\left(\frac{1}{0.7781} \pm \Delta \tau_{p1}\right)s + 1} \quad 74$$

$$G_{p1}(s) = \frac{0.01798 \pm \Delta k_{p1}}{(1.2852 \pm \Delta \tau_{p1})s + 1} \quad 75$$

Para o sistema reativo de produção de Propileno glicol, foi utilizado o procedimento análogo ao realizado no processo de separação Água – Metanol, gerando um distúrbio no processo após cinco minutos, que permite a comparação com o modelo experimental, (Figura 39), esta informação ratifica que o modelo identificado está bem próximo do modelo experimental, e também que o sistema chega ao seu *set point* estabilizado.

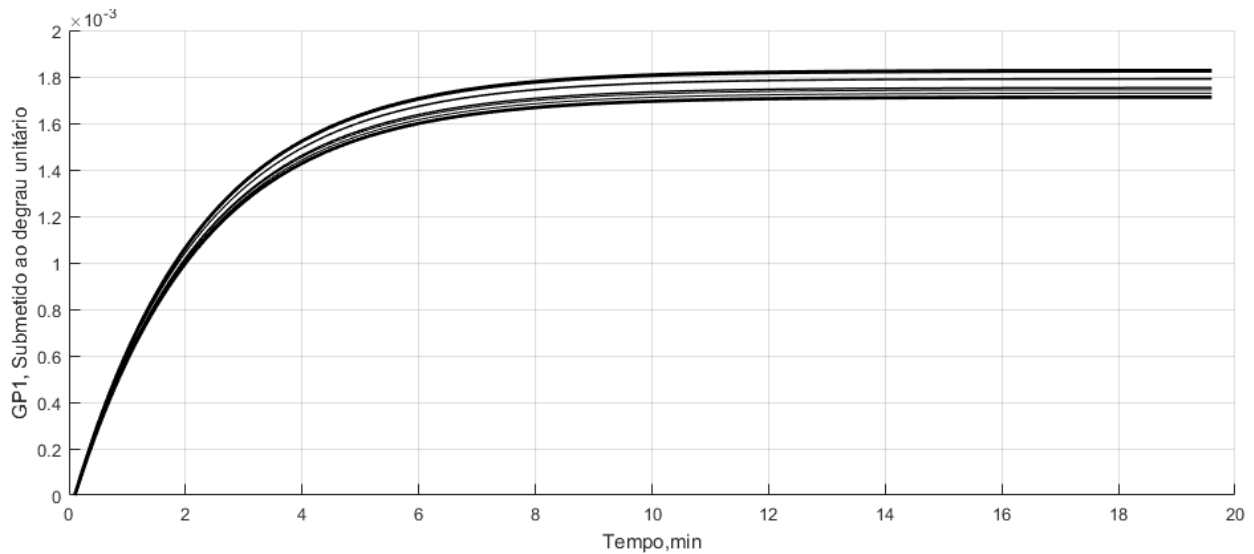
Figura 39– Representação do modelo identificado e do modelo experimental após um distúrbio de 10% no tempo 5 minutos



A metodologia foi aplicada ao sistema reativo de modo análogo ao utilizado para o sistema não reativo. Assim para simular os valores para um $\pm \Delta k_{p1}$ e $\pm \Delta \tau_{p1}$ submete-

se $G_{p1}(s)$ a um degrau, onde encontra-se os valores para a diferença entre o menor valor e o maior valor. A Figura 40 mostra a função $G_{p1}(s)$ submetida à essa variação, podendo ser observado que a função mantém-se estável para todo limite de variação;

Figura 40 - Representação da função de transferência $G_{p1}(s)$ submetida a um degrau com a variação superior e inferior



7.2.1.2. Cálculos da estabilidade a partir da função de transferência

Com os valores da função de transferência calculados, é possível mostrar que o sistema de produção de Propileno glicol simulados são ou não estáveis. De forma análoga ao procedimento com dados aleatórios mostrados no Tópico 6 (Resultados e Discussão). São efetuadas as entradas de dados, conforme mostrado na Tabela 6. Nesta tabela estão o exemplo de alguns dados de entrada para o cálculo da região de estabilidade.

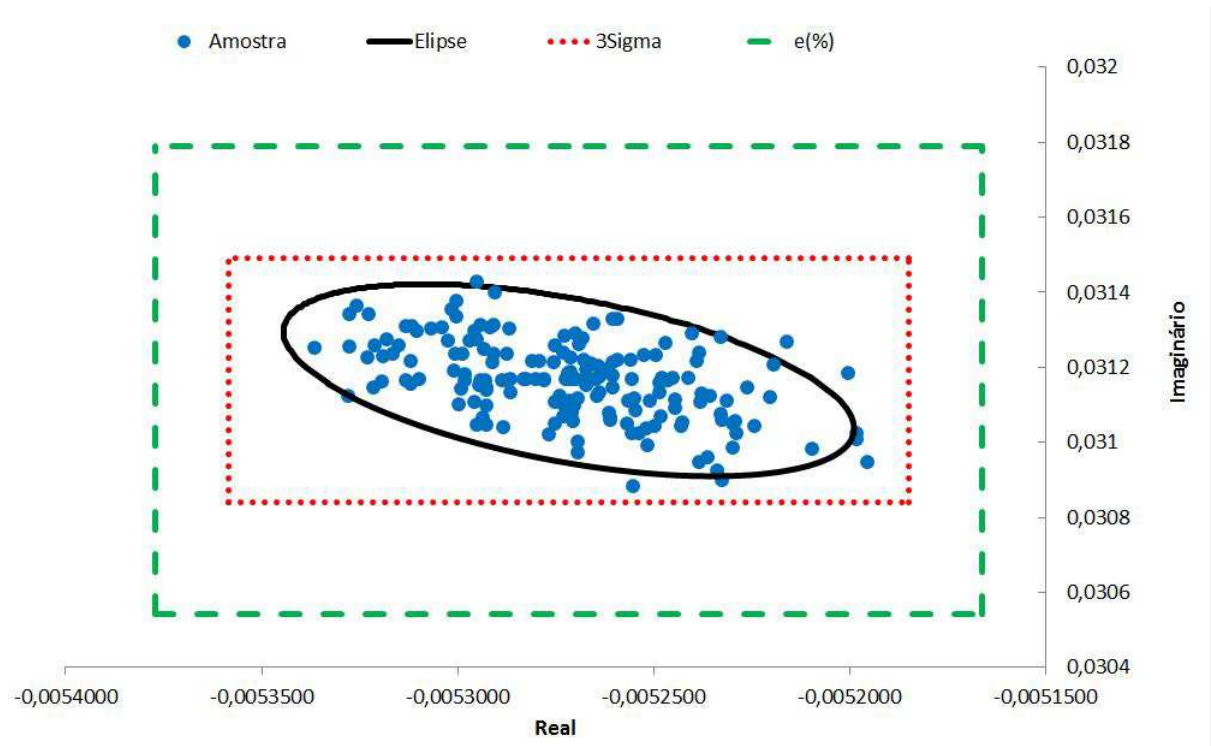
Tabela 6– Representação da planilha de entrada de dados do processo reativo.

	Parâmetros do sistema						
Desvio	$kp(\%)$	τp	kv	km	kc	τi	τd
δkp	0,01798	1,2852	100	1	10	10	100
0,1	0,0163982	1,2694	100	0,9973	9,7371	10,077	100
$\delta \tau p$	0,01798	1,2919	99,742	1	10,552	10	100
0,02	0,0188132	1,2852	100	1,001	9,8126	10	99,58
δkv	0,01798	1,2852	99,483	1,0056	10,333	10,087	100,25
0,01	0,0165209	1,2852	99	0,9946	10,355	10	100
δkm	0,0174818	1,2852	100	1,0054	10,787	10,049	99,1
0,01	0,0184589	1,2897	100,33	1,0045	10,108	10	100,1
δkc	0,01798	1,2852	100	1	9,5947	10	99,353
0,1	0,0170052	1,2672	100	0,9998	10,061	10,086	100,98
$\delta \tau i$	0,0178829	1,2685	99,733	0,9964	10	9,9978	100,98
0,01	0,0172473	1,2827	100	0,998	10	10	100
$\delta \tau d$	0,0171156	1,2862	99,127	1,0087	10	10	100
0,01	0,01798	1,3059	99,15	1,001	10,887	9,9301	99,395

Com os dados de entrada efetuados através da Tabela 6, e com o processamento matemático já desenvolvido no Tópico 6, a planilha é novamente executada apresentando os resultados para todos os passos. Os resultados têm sido suprimidos uma vez que todos os passos já foram demonstrados e só será apresentado como resultado a comparação entre as perspectivas determinística e estocástica.

A Figura 41 representa os resultados obtidos pela comparação entre as perspectivas determinística e estocástica, indicando que os resultados obtidos com a metodologia proposta baseada em princípios estatísticos representam um menor nível de conservadorismo, e isso pode ser observado facilmente nos resultados.

Figura 41 – Representação dos resultados obtidos da comparação entre as perspectivas determinística e estocástica para o sistema Reativo



Mais uma vez as comparações entre as perspectivas têm indicado que os resultados obtidos através da metodologia desenvolvida (Figura 42) são menos conservativos, por conseguinte, produz uma análise e mapeamento da região de estabilidade robusta mais realista.

No Apêndice 02 é apresentada a densidade de probabilidade para o sistema reativo de produção do Propileno glicol, onde pode-se observar a semelhança com uma variável aleatória.

8. CONCLUSÕES

Desde que a estabilidade robusta determinística está associada a estabilidade na ótica estatística, pode ser observado que a estabilidade robusta determinística segue o modelo da distribuição uniforme, onde a probabilidade das raízes características é a mesma durante todo intervalo, enquanto o modelo estatístico apresenta a determinação da região de estabilidade robusta levando em consideração as interações entre todas as variáveis consideradas no processo. Isto tem permitido mapear a região de estabilidade do sistema, com possibilidade de monitoramento do sistema.

Diferente das clássicas abordagens determinísticas, nas quais cada distúrbio é considerado isoladamente, o uso do ferramental estatístico permite analisar os distúrbios conjuntamente e isso é substancialmente vantajoso, pois pode reduzir o conservadorismo da análise, aproximando-se da realidade, conforme apresentado nos resultados.

O trabalho usa uma metodologia baseada em princípios da estatística clássica tendo como objetivo de estimar a região robusta de confiança para a estabilidade de um sistema e, conseqüentemente, mapear os contornos das elipses resultantes associadas com as raízes aleatórias da equação característica.

Tal metodologia, denotada por análise estatística de estabilidade (AEE), estabelece os limites para as variáveis de interesse, raízes do sistema, com base nos princípios estatísticos e, com isso, a região de confiança robusta. A estratégia implica em uma associação do conceito de distância estatística com a distribuição Chi-quadrado.

A metodologia AEE baseia-se na medida da distância estatística denominada métrica estatística, sendo a distância euclidiana um caso particular desta e, ao aplicá-las aos processos Reativo e Não reativo, obteve-se a região de confiança para esses sistemas observados.

Ao comparar a metodologia AEE com os métodos determinísticos 3 Sigma e Função Erro, obtém-se como resultado a redução do conservadorismo da análise, visto que a região a ser analisada é bem menor e diminuindo possíveis erros na análise dos dados, aproximando-se da realidade do sistema em estudo.

O método AEE oferece resultados satisfatórios, com grau de confiança maior que os obtidos com os métodos deterministas citados. Nos sistemas analisados, as regiões geradas a partir dos métodos 3 Sigma e Função Erro, quando comparadas a região obtida pelo método AEE, apresentaram valores mais conservadores, logo, mais distante da realidade.

A aplicação do ferramental estatístico usado neste trabalho gera resultados com o mínimo esforço computacional, partindo da utilização de uma planilha computacional juntamente com as equações características explicitadas. Desse modo, os resultados obtidos permitem uma tomada de decisão mais rápida e eficiente, visto que o contorno da elipse (região gerada) indica a tendência de o sistema continuar estável ou torna-se instável com mais confiabilidade.

9. SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

- Simular mais equipamentos, afim de verificar a estabilidade destes equipamentos;
- Usar controladores MPC, com objetivo de usar a metodologia proposta neste trabalho, e comprovar o seu possível uso.
- Comparar os resultados obtidos com os Controladores PID e os resultados obtidos com o MPC;

10. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFIAS

ÅSTRÖM, Karl Johan; HÄGGLUND, Tore. **Advanced PID control**. ISA-The Instrumentation, Systems, and Automation Society; Research Triangle Park, NC 27709, 2006

Alves, N, Notas de aula professor. Documento interno Universidade Federal de Campina Grande – UFCG. Campina Grande, 2009.

BLONDEL, Vincent D.; TSITSIKLIS, John N. **A survey of computational complexity results in systems and control**. Automatica, v. 36, n. 9, p. 1249-1274, 2000.

CAMPOS, M. C. M. M.; TEIXEIRA, H. C. G., **Controles Típicos de equipamentos e processos industriais**, Editora Blucher, 2010.

COUGHANOWR, Donald R.; KOPPEL, Lowell B. **Process systems analysis and control**. New York: McGraw-Hill, 1965.

DOYLE, John. **Analysis of feedback systems with structured uncertainties**. In: IEE Proceedings D (Control Theory and Applications). IET Digital Library, 1982. p. 242-250

HIMMELBLAU, David Mautner. **Process analysis by statistical methods**. 1970.

JOHNSON, R. A. and WICHERN, D. W., **Applied multivariate statistical analysis**. Prentice-Hall, NJ, USA, 6 ed., 1992.

KREIDER, Donald L. et al. **Equações diferenciais**. 1972.

KWONG, W., K., **Introdução ao controle de processos químicos com Matlab** - São Carlos, SP- Ed. EDUFSCar., 2002.

LATHI, Bhagwandas Pannalal. **Modern Digital and Analog Communication Systems** 3e Osece. Oxford university press, 1998.

LU, Wei-Min; DOYLE, John C. Robustness analysis and synthesis for nonlinear uncertain systems. **Automatic Control, IEEE Transactions on**, v. 42, n. 12, p. 1654-1662, 1997.

LUYBEN, W.L. and LUYBEN, M.L.: **Essentials of Process Control**, McGrawHill, NY, 1997.

LUYBEN, W.L. **Process Modeling, Simulation and Control for Chemical Engineers**. 2nd ed. New York: McGraw-Hill International Editions, 1990.

MAYR, Otto. **The origins of feedback control**. Scientific American, v. 223, n. 4, p. 110-118, 1970.

MONTGOMERY, D.C., RUNGER, G.C., “**Applied Statistics and Probability for Engineers**”, John Wiley and Sons, 2003.

MORARI, Manfred; ZAFIRIOU, Evangelos. **Robust process control**. Morari, 1989.

NARENDRA, Kumpati S.; ANNASWAMY, Anuradha M. **Stable adaptive systems**. Courier Dover Publications, 2012.

NISE, Norman S. **Engenharia de Sistemas de Controle**, 3ª edição, Rio de Janeiro: LTC, 2002

NOCEDAL, J. and WRIGHT, S.J., “**Numerical Optimization**,” Springer, New York, 1999.

O'CONNELL, John P.; HAILE, James M. **Thermodynamics: fundamentals for applications**. Cambridge University Press, 2005

OGATA, K. **Engenharia de Controle Moderno**, 5.ed. São Paulo: Prentice Hall 2010.

POOLE, David **Linear Algebra**. Thomson Brooks, 2005.

RAY, L. R. and STENGEL, R. F. **A Monte Carlo Approach to the Analysis of Control System Robustness**. Automatica, vol 29.No. 1, pp. 229-236, 1993.

RIBEIRO, Ademir Alves; KARAS, Elizabeth Wegner. **Otimização Contínua: aspectos teóricos e computacionais**. Cengage Learning, São Paulo, Brazil, in press (in Portuguese), 2013.

ROLLINS, L., **Robust Control Theory**, Carnegie Mellow University, 18-849b Dependable Embedded Systems, Spring, 1999. Institutional communication.

SASTRY, Shankar; BODSON, Mark. **Adaptive control: stability, convergence, and robustness**, 2011.

SCHWAAB, MARCIO. **Análise de Dados Experimentais: I. Fundamentos de Estatística e Estimação de Parâmetros**. Editora E-papers, 2007.

SEBORG, Dale; EDGAR, Thomas F.; MELLICHAMP, Duncan. **Process dynamics & control**. John Wiley & Sons, 2006.

SILVA, J. N. **Determinação da região robusta de estabilidade e de desempenho inspirada nos princípios da estatística clássica**, Tese (Doutorado em Engenharia Química) Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, Campina Grande 2013.

SILVA, J., N., BISPO, H. J., BRITO, R. P. e MANZI, J. T., **Análise estatística aplicada à estabilidade robusta**. XIX Congresso Brasileiro de Automática, CBA 2012, Campina Grande/PB. ISBN: 978-85-8001-069-5, 2012a.

SILVA, N., BISPO, H., BRITO, R. and MANZI, J. (2014), **Robust stability analysis inspired by classical statistical principles**. Can. J. Chem. Eng., 92: 82–89. doi: 10.1002/cjce.21825

SILVA. J. N BISPO. H. BRITO R. MANZI. J. **Joint confidence region for tuning parameters of the PID controller**. In IFAC Conference on Advanced in PID control, 2012 Brescia. IFAC – PID'12 – Book of abstract Brescia University of Brescia 2012b v1.

SMITH, J. M., VAN NESS, H. C., ABBOTT, M. M. **Introdução à Termodinâmica da Engenharia Química**, 7ª edição, LTC, 2007.

SOONG, T. T. **Modelos Probabilísticos em Engenharia e Ciências**. Trad. Alfredo Alves de Farias – Rio de Janeiro. Ed. LTC – Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 1986.

STENGEL, R. F. and RAY, L. R. **Stochastic Robustness of Time-invariant Systems**.IEEE Trans. on Aut.Control, 36, 82-87, 1991.

STEPHANOPOULOS, G., **Chemical Process Control**. An Introduction to Theory and Practice, Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall, 1984.

TEMPO, R., BAI, E. W., and DABENE, F., **Probabilistic robustness analysis: explicit bounds for the minimum number of samples**. Systems and Control Letters, 30:237–242, 1997.

WALAS, Stanley M. **Phase equilibria in chemical engineering**. Butterworth-Heinemann, 2011

WHEELER, Donald J. et al. **Understanding statistical process control**. SPC press, 1992.

THE DOW CHEMICAL COMPANY, **Dow Propileno Glicol USP/PE** United States of American, 2000.

Copyright (c) 1981-2015 by Aspen Technology, Inc. All rights reserved. Aspen Plus®, Aspen Properties®, Aspen Engineering Suite™, AspenTech™, ModelManager™, the aspen leaf logo and Plantelligence are trademarks or registered trademarks of Aspen Technology, Inc., Cambridge, MA.

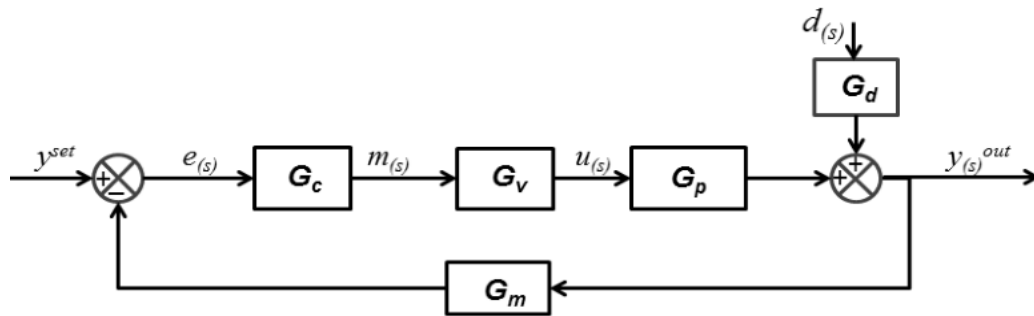
ANEXOS

Anexo I

Demonstração da resposta de y em malha fechada, em termos de variável desvio, no domínio tempo.

Partindo do diagrama de blocos mostrado na Figura 42, onde são apresentadas as variáveis e parâmetros envolvidos no sistema de controle:

Figura 42- Diagrama de bloco para o sistema de controle em malha fechada



Fonte - Adaptado de Lathi (1998)

A resposta em malha fechada pode ser obtida como mostra o resultado na Equação I-01:

$$\bar{y}(s) = \frac{G_p G_c G_v}{1 + G_p G_c G_v G_m} \bar{y}_{sp}(s) + \frac{G_d}{1 + G_p G_c G_v G_m} \bar{d}(s) \quad \text{I-01}$$

A equação característica pode assumir a seguinte forma:

$$1 + G_p G_c G_v G_m = 0 \quad \text{I-02}$$

Uma vez que podemos assumir um processo de primeira ordem, e a função transferência para o clássico PID, como segue nas equações seguintes respectivamente.

$$G_p = \frac{k_p}{\tau s + 1} \quad \text{I-03}$$

$$G_c = k_c + \frac{k_c}{t_i s} + k_c \tau_d s \quad \text{I-04}$$

Considerando as funções de transferência do sensor e atuador como sendo $G_v = k_v$ e $G_m = k_m$, ou seja, apenas proporcionais. A substituição dessas considerações na Equação 01, resulta na Equação I-05, a partir da seguinte demonstração:

$$\bar{y}(s) = \frac{\left(\frac{k_p}{\tau s + 1}\right) \left(k_c + \frac{k_c}{t_i s} + k_c \tau_d s\right) k_v}{1 + \left(\frac{k_p}{\tau s + 1}\right) \left(k_c + \frac{k_c}{t_i s} + k_c \tau_d s\right) k_v k_m} \bar{y}_{sp}(s) + \frac{G_d}{1 + \left(\frac{k_p}{\tau s + 1}\right) \left(k_c + \frac{k_c}{t_i s} + k_c \tau_d s\right) k_v k_m} \bar{d}(s)$$

$$\bar{y}(s) = \frac{\left(\frac{k_p}{(\tau s + 1)} k_c + \frac{k_p}{(\tau s + 1)} \frac{k_c}{t_i s} + \frac{k_p}{(\tau s + 1)} k_c \tau_d s\right) k_v}{1 + \left(\frac{k_p}{(\tau s + 1)} k_c + \frac{k_p}{(\tau s + 1)} \frac{k_c}{t_i s} + \frac{k_p}{(\tau s + 1)} k_c \tau_d s\right) k_v k_m} \bar{y}_{sp}(s) + \frac{G_d}{1 + \left(\frac{k_p}{(\tau s + 1)} k_c + \frac{k_p}{(\tau s + 1)} \frac{k_c}{t_i s} + \frac{k_p}{(\tau s + 1)} k_c \tau_d s\right) k_v k_m} \bar{d}(s)$$

$$\bar{y}(s) = \frac{\frac{k_p k_c k_v t_i s + k_p k_c k_v + k_p k_c k_v \tau_d s t_i s}{(\tau s + 1) t_i s}}{(\tau s + 1) t_i s + k_p k_c k_v k_m t_i s + k_v k_m k_p k_c + k_v k_m k_p k_c \tau_d s t_i s} \bar{y}_{sp}(s) + \frac{G_d}{(\tau s + 1) t_i s + k_p k_c k_v k_m t_i s + k_v k_m k_p k_c + k_v k_m k_p k_c \tau_d s t_i s} \bar{d}(s)$$

$$\bar{y}(s) = \frac{\frac{k_p k_c k_v t_i s + k_p k_c k_v + k_p k_c k_v \tau_d s t_i s}{(\tau s + 1) t_i s + k_p k_c k_v k_m t_i s + k_v k_m k_p k_c + k_v k_m k_p k_c \tau_d s t_i s} \bar{y}_{sp}(s) + \frac{G_d ((\tau s + 1) t_i s)}{(\tau s + 1) t_i s + k_p k_c k_v k_m t_i s + k_v k_m k_p k_c + k_v k_m k_p k_c \tau_d s t_i s} \bar{d}(s)$$

$$\bar{y}(s) = \frac{\frac{k_p k_c k_v \tau_d t_i s^2 + k_p k_c k_v t_i s + k_p k_c k_v}{(k_v k_m k_p k_c \tau_d t_i + \tau_i) s^2 + (t_i + k_p k_c k_v k_m t_i) s + k_v k_m k_p k_c} \bar{y}_{sp}(s) + \frac{G_d ((\tau s + 1) t_i s)}{(k_v k_m k_p k_c \tau_d t_i + \tau_i) s^2 + (t_i + k_p k_c k_v k_m t_i) s + k_v k_m k_p k_c} \bar{d}(s)$$

$$\bar{y}(s) = \frac{\frac{k_p k_c k_v \tau_d t_i s^2}{k_p k_c k_v} + \frac{k_p k_c k_v t_i s}{k_p k_c k_v} + \frac{k_p k_c k_v}{k_p k_c k_v}}{\frac{(k_v k_m k_p k_c \tau_d t_i + \tau_i) s^2}{k_v k_p k_c} + \frac{(t_i + k_p k_c k_v k_m t_i) s}{k_v k_p k_c} + \frac{k_v k_m k_p k_c}{k_v k_p k_c}} \bar{y}_{sp}(s) + \frac{G_d((\tau s + 1)t_i s)}{\frac{(k_v k_m k_p k_c \tau_d t_i + \tau_i) s^2}{k_v k_p k_c} + \frac{(t_i + k_p k_c k_v k_m t_i) s}{k_v k_p k_c} + \frac{k_v k_m k_p k_c}{k_v k_p k_c}} \bar{d}(s)$$

Resultando em:

$$\bar{y}(s) = \frac{\tau_d t_i s^2 + t_i s + 1}{(k_m \tau_d t_i + \frac{\tau_i}{k_v k_p k_c}) s^2 + (\frac{t_i}{k_v k_p k_c} + k_m t_i) s + k_m} \bar{y}_{sp}(s) + \frac{G_d \left\{ \frac{(\tau s + 1)t_i s}{k_v k_p k_c} \right\}}{(k_m \tau_d t_i + \frac{\tau_i}{k_v k_p k_c}) s^2 + (\frac{t_i}{k_v k_p k_c} + k_m t_i) s + k_m} \bar{d}(s) \quad \text{I-05}$$

Como pode-se ver, a Equação I-05 pode ser reescrita como segue:

$$\bar{y}(s) = \frac{a_1 s^2 + a_2 s + a_3}{b_1 s^2 + b_2 s + b_3} \bar{y}_{sp}(s) + \frac{G_d \left\{ \frac{(\tau s + 1)t_i s}{k_v k_p k_c} \right\}}{b_1 s^2 + b_2 s + b_3} \bar{d}(s) \quad \text{I-06}$$

Onde:

$$\begin{aligned} a_1 &= \tau_d t_i, & b_1 &= (k_m \tau_d t_i + \frac{\tau_i}{k_v k_p k_c}), \\ a_2 &= t_i, & b_2 &= (\frac{t_i}{k_v k_p k_c} + k_m t_i), \\ a_3 &= 1, & b_3 &= k_m. \end{aligned} \quad \text{e}$$

Aplicando o método das frações parciais e do mascaramento (Heaviside) (Lathi, 1998), Equação I-07, a função $y(s)$, onde pode ser escrita como somatório de termos de primeira e de segunda ordem.

$$X(s) = K \frac{\prod_{h=1}^{h=m_r} (s + z_h) \prod_{i=1}^{i=m_c} (s + z_i)(s + z_i^*)}{\prod_{j=0}^{j=n_r} (s + p_j) \prod_{k=1}^{k=n_c} (s + p_k)(s + p_k^*)} = \sum_{j=1}^{j=n_r} \frac{A_j}{s + p_j} + \sum_{k=1}^{k=n_c} \frac{B_k + sC_k}{(s + \text{Re}\{p_k\})^2 + \text{Im}^2\{p_k\}} \quad \text{I-07}$$

A correspondência com o domínio tempo e o domínio de Laplace pode ser obtida por:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[t^n e^{it} u(t)] &\Leftrightarrow \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{n!}{(s-\lambda)^{n+1}} u(s)\right] \\ \mathcal{L}\left[e^{-at}\left[A \cos bt + \frac{B-Aa}{b} \operatorname{sen} bt\right] u(t)\right] &\Leftrightarrow \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{As+B}{s^2+2as+c} u(s)\right] \\ \mathcal{L}\left[re^{-at} \cos(bt+\theta) u(t)\right] &\Leftrightarrow \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{As+B}{s^2+2as+c} u(s)\right] \end{aligned} \quad \text{I-08}$$

$$r = \sqrt{\frac{A^2c + B^2 - 2ABa}{c - a^2}}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{Aa - B}{A\sqrt{c - a^2}}\right)$$

$$b = \sqrt{c - a^2}$$

Considerando $\bar{d}(s) = 0$, rearranjando para isolar os termos s^2 , uma vez que um degrau permita estimular a função 08, onde $\bar{y}_{sp}(s) = \frac{k^{set}}{s}$, a Equação I-06 resulta em:

$$\bar{y}(s) = \left(\frac{a_1}{b_1}\right) \frac{\left(s^2 + \frac{a_2}{a_1}s + \frac{a_3}{a_1}\right) k^{set}}{\left(s^2 + \frac{b_2}{b_1}s + \frac{b_3}{b_1}\right) s} \quad \text{I-09}$$

Aplicando o método das frações parciais:

$$\bar{y}(s) = \left(\frac{a_1}{b_1}\right) \frac{k^{set}}{s} \frac{\left(s^2 + \frac{a_2}{a_1}s + \frac{a_3}{a_1}\right)}{\left(s^2 + \frac{b_2}{b_1}s + \frac{b_3}{b_1}\right)} = \left(\frac{a_1}{b_1}\right) k^{set} \left[\frac{K_1}{s} + \frac{As+B}{s^2 + \frac{b_2}{b_1}s + \frac{b_3}{b_1}} \right]$$

Aplicando o método Heaviside:

- I. Para K_1 , onde $s = 0$, multiplicando ambos os membros por s :

$$\frac{1 \left(s^2 + \frac{a_2}{a_1} s + \frac{a_3}{a_1} \right)}{s \left(s^2 + \frac{b_2}{b_1} s + \frac{b_3}{b_1} \right)} s = \left[\frac{K_1}{s} s + \frac{A s + B}{s^2 + \frac{b_2}{b_1} s + \frac{b_3}{b_1}} s \right]$$

Obtém-se:

$$K_1 = \frac{a_3 b_1}{a_1 b_3}$$

I-10

II. Para A e B, multiplicando ambos os membros por $\left(s^2 + \frac{b_2}{b_1} s + \frac{b_3}{b_1} \right)$:

$$\frac{1 \left(s^2 + \frac{a_2}{a_1} s + \frac{a_3}{a_1} \right)}{s \left(s^2 + \frac{b_2}{b_1} s + \frac{b_3}{b_1} \right)} \left(s^2 + \frac{b_2}{b_1} s + \frac{b_3}{b_1} \right) = \left[\frac{K_1}{s} \left(s^2 + \frac{b_2}{b_1} s + \frac{b_3}{b_1} \right) + \frac{A s + B}{s^2 + \frac{b_2}{b_1} s + \frac{b_3}{b_1}} \left(s^2 + \frac{b_2}{b_1} s + \frac{b_3}{b_1} \right) \right]$$

$$\frac{\left(s^2 + \frac{a_2}{a_1} s + \frac{a_3}{a_1} \right)}{s} = \left[\frac{K_1}{s} \left(s^2 + \frac{b_2}{b_1} s + \frac{b_3}{b_1} \right) + A s + B \right]$$

$$s^2 + \frac{a_2}{a_1} s + \frac{a_3}{a_1} = K_1 \left(s^2 + \frac{b_2}{b_1} s + \frac{b_3}{b_1} \right) + A s^2 + B s$$

$$s^2 + \frac{a_2}{a_1} s + \frac{a_3}{a_1} = K_1 s^2 + K_1 \frac{b_2}{b_1} s + K_1 \frac{b_3}{b_1} + A s^2 + B s$$

$$s^2 + \frac{a_2}{a_1} s + \frac{a_3}{a_1} = \frac{a_3 b_1}{a_1 b_3} s^2 + \frac{a_3 b_1}{a_1 b_3} \frac{b_2}{b_1} s + \frac{a_3 b_1}{a_1 b_3} \frac{b_3}{b_1} + A s^2 + B s$$

$$s^2 + \frac{a_2}{a_1} s + \frac{a_3}{a_1} = \left(\frac{a_3 b_1}{a_1 b_3} + A \right) s^2 + \left(\frac{a_3 b_2}{a_1 b_3} + B \right) s + \frac{a_3}{a_1}$$

Resultando em:

$$A = 1 - \frac{a_3 b_1}{a_1 b_3}$$

I- 11

$$B = \frac{a_2}{a_1} - \frac{a_3 b_2}{a_1 b_3}$$

I-12

Reescrevendo em termos de constantes K1, K2, A, B, a e c, tem-se:

$$K_1 = \frac{a_3 b_1}{a_1 b_3}, \quad K_2 = \left(\frac{a_1}{b_1} \right) k^{set}, \quad A = 1 - \frac{a_3 b_1}{a_1 b_3}, \quad B = \frac{a_2}{a_1} - \frac{a_3 b_2}{a_1 b_3}, \quad a = \frac{1}{2} \frac{b_2}{b_1} \quad e \quad c = \frac{b_3}{b_1}$$

$$\bar{y}(s) = \left(\frac{a_1}{b_1} \right) k^{set} \frac{\left(s^2 + \frac{a_2}{a_1} s + \frac{a_3}{a_1} \right)}{\left(s^2 + \frac{b_2}{b_1} s + \frac{b_3}{b_1} \right)} = \frac{K_2 K_1}{s} + K_2 \frac{A s + B}{s^2 + 2as + c}$$

I-13

O denominador do segundo termo da Equação I-13 pode também ser escrita na forma dos polos da equação característica, $p = \alpha \pm i\beta$, como segue:

$$s^2 + 2as + c = (s - p)(s - p^*)$$

$$(s - p)(s - p^*) = (s - \alpha - i\beta)(s - \alpha + i\beta) = (s - \alpha)^2 + (s - \alpha)i\beta - (s - \alpha)i\beta - i^2 \beta^2$$

$$s^2 + 2as + c = s^2 - 2s\alpha + \alpha^2 + \beta^2$$

$$a = -\alpha;$$

$$c = \alpha^2 + \beta^2$$

Aplicando as definições do sistema de equações 08, a resposta ao processo pode ser escrita por:

$$\mathcal{L}^{-1}[\bar{y}(s)] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{K_2 K_1}{s} + K_2 \frac{A s + B}{s^2 + 2as + c} \right]$$

$$\mathcal{L}^{-1}[\bar{y}(s)] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{K_1 K_2}{s} \right] + \mathcal{L}^{-1} \left[K_2 \frac{A s + B}{s^2 + 2as + c} \right]$$

$$y(t) = K_1 K_2 + K_2 e^{-at} \left[A \cos(bt) + \frac{B - Aa}{b} \text{sen}(bt) \right]$$

Portanto, a resposta no domínio tempo para o sistema em questão é definido por:

$$y(t) = \frac{a_3}{b_3} k^{set} + \left(\frac{a_1}{b_1} \right) k^{set} e^{-at} \left[\left(1 - \frac{a_3 b_1}{a_1 b_3} \right) \cos(bt) + \frac{\left(\frac{a_2}{a_1} - \frac{a_3 b_2}{a_1 b_3} \right) - \left(1 - \frac{a_3 b_1}{a_1 b_3} \right) a}{b} \text{sen}(bt) \right] \quad \text{I-15}$$

ou ainda:

$$y(t) = \frac{a_3}{b_3} k^{set} + \left(\frac{a_1}{b_1} \right) k^{set} \left[r e^{-at} \cos(bt + \theta) \right] \quad \text{I-16}$$

Que pode ser reescrita da forma abaixo:

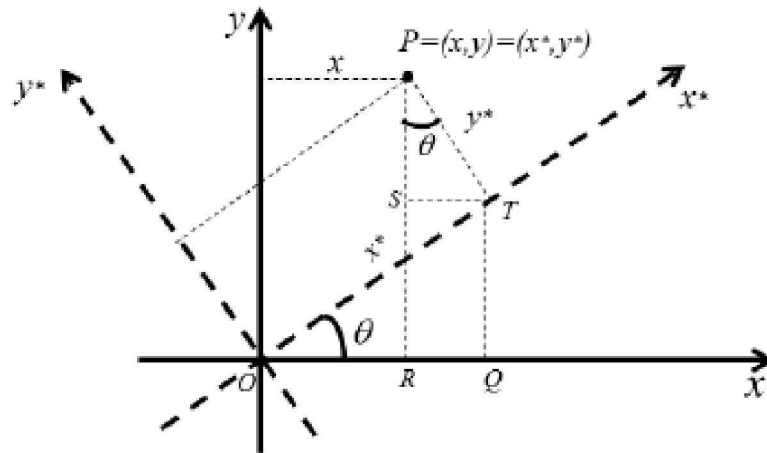
$$r = \sqrt{\frac{\left(1 - \frac{a_3 b_1}{a_1 b_3}\right)^2 \frac{b_3}{b_1} + \left(\frac{a_2}{a_1} - \frac{a_3 b_2}{a_1 b_3}\right)^2 - 2 \left(1 - \frac{a_3 b_1}{a_1 b_3}\right) \left(\frac{a_2}{a_1} - \frac{a_3 b_2}{a_1 b_3}\right) \frac{1}{2} \frac{b_2}{b_1}}{\frac{b_3}{b_1} - \frac{1}{2} \frac{b_2}{b_1}}}$$

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{\left\{1 - \frac{a_3 b_1}{a_1 b_3}\right\} \frac{1}{2} \frac{b_2}{b_1} - \left(\frac{a_2}{a_1} - \frac{a_3 b_2}{a_1 b_3}\right)}{\left(1 - \frac{a_3 b_1}{a_1 b_3}\right) \sqrt{c - a^2}} \right) e \quad b = \sqrt{\frac{b_3}{b_1} - \left(\frac{1}{2} \frac{b_2}{b_1}\right)^2}$$

Anexo II

Considerando o sistema ortogonal (x, y) , a rotação de ângulo θ pode ser realizada com a finalidade de obter um novo sistema (x^*, y^*) . A representação de um ponto P pode ser obtido considerando a relação angular entre os dois sistemas de eixo como mostra a Figura 43.

Figura 43– Diagrama representativo do ponto P no novo sistemas de eixos

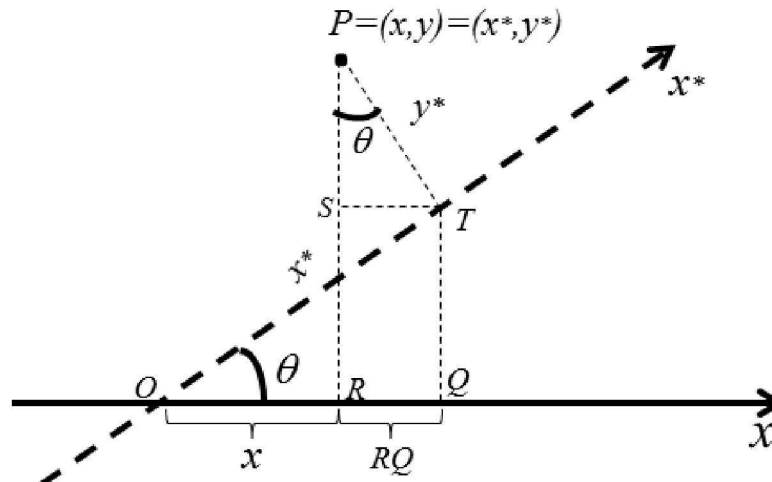


Os segmentos dos eixos podem ser expressos por:

$$OR = x, OT = x^*, PR = y \text{ e } PT = y^* .$$

Por sua vez os mesmos podem ser representados pela dependência angular.

Figura 44– Representação do ponto P nos dois sistemas de eixos.



Para x , podem ser considerados os segmentos mostrados na Figura 43, onde:

$$OR = x = OQ - RQ = OT \cos \theta - PT \operatorname{sen} \theta$$

$$= x^* \cos \theta - y^* \operatorname{sen} \theta$$

Assim, x pode ser reescrito em relação a x^* , y^* e θ :

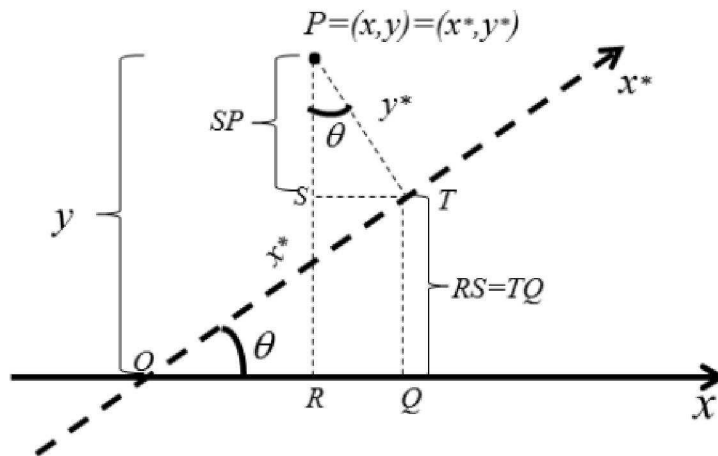
$$x = x^* \cos \theta - y^* \operatorname{sen} \theta$$

Já para y , são considerados os segmentos mostrados na Figura 45 onde:

$$PR = y = RS + SP = OT \operatorname{sen} \theta - PT \cos \theta$$

$$= x^* \operatorname{sen} \theta - y^* \cos \theta$$

Figura 45– Representação do ponto P nos dois sistemas de eixos



Dessa maneira, y pode ser reescrito em relação a x^* , y^* e θ :

$$y = x^* \operatorname{sen} \theta - y^* \cos \theta$$

Com as equações obtidas para x e y , o sistema de equações define bem o ponto

P:

$$\begin{cases} y = x^* \operatorname{sen} \theta - y^* \cos \theta \\ x = x^* \cos \theta - y^* \operatorname{sen} \theta \end{cases}$$

Que também pode ser reescrita na forma matricial:

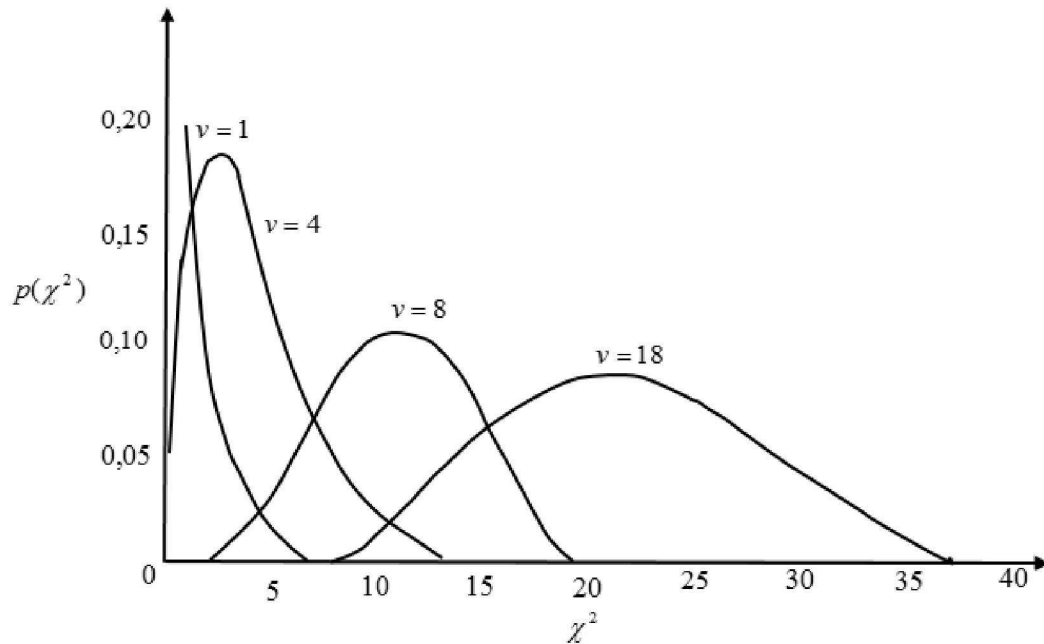
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^* \\ y^* \end{bmatrix}$$

Que é a chamada matriz rotacional.

Anexo III

Representação da função Chi-quadrado

Figura 46- Representação gráfica da densidade de probabilidade χ^2 :



Fonte: Adaptado de Himmelblau (1970)

Tabela 7– Distribuição de probabilidade Chi-quadrado

$P(\chi_n^2)$ - Probabilidade													
ν	0,005	0,01	0,025	0,05	0,1	0,25	0,5	0,75	0,9	0,95	0,975	0,99	0,995
1	0,00	0,0002	0,001	0,004	0,02	0,10	0,46	1,32	2,71	3,84	5,02	6,64	7,88
2	0,01	0,02	0,05	0,10	0,21	0,58	1,39	2,77	4,61	5,991	7,38	9,21	10,60
3	0,07	0,12	0,22	0,35	0,58	1,21	2,37	4,11	6,25	7,82	9,35	11,35	12,84
4	0,21	0,30	0,48	0,71	1,06	1,92	3,36	5,39	7,78	9,49	11,14	13,28	14,86
5	0,41	0,55	0,83	1,15	1,61	2,68	4,35	6,63	9,24	11,07	12,83	15,09	16,75
6	0,68	0,87	1,24	1,64	2,20	3,46	5,35	7,84	10,65	12,59	14,45	16,81	18,55
7	0,99	1,24	1,69	2,17	2,83	4,26	6,35	9,04	12,02	14,07	16,01	18,48	20,28
8	1,34	1,65	2,18	2,73	3,49	5,07	7,34	10,22	13,36	15,51	17,54	20,09	21,96
9	1,74	2,09	2,70	3,33	4,17	5,90	8,34	11,39	14,68	16,92	19,02	21,67	23,59
10	2,16	2,56	3,25	3,94	4,87	6,74	9,34	12,55	15,99	18,31	20,48	23,21	25,19
11	2,60	3,05	3,82	4,58	5,58	7,58	10,34	13,70	17,28	19,68	21,92	24,73	26,76
12	3,07	3,57	4,40	5,23	6,30	8,44	11,34	14,85	18,55	21,03	23,34	26,22	28,30
13	3,57	4,11	5,01	5,89	7,04	9,30	12,34	15,98	19,81	22,36	24,74	27,69	29,82

14	4,08	4,66	5,63	6,57	7,79	10,17	13,34	17,12	21,06	23,69	26,12	29,14	31,32
----	------	------	------	------	------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

(Continuação) – Distribuição de probabilidade Chi-quadrado

15	4,60	5,23	6,26	7,26	8,55	11,04	14,34	18,25	22,31	25,00	27,49	30,58	32,80
16	5,14	5,81	6,91	7,96	9,31	11,91	15,34	19,37	23,54	26,30	28,85	32,00	34,27
17	5,70	6,41	7,56	8,67	10,09	12,79	16,34	20,49	24,77	27,59	30,19	33,41	35,72
18	6,27	7,02	8,23	9,39	10,87	13,68	17,34	21,61	25,99	28,87	31,53	34,81	37,16
19	6,84	7,63	8,91	10,12	11,65	14,56	18,34	22,72	27,20	30,14	32,85	36,19	38,58
20	7,43	8,26	9,59	10,85	12,44	15,45	19,34	23,83	28,41	31,41	34,17	37,57	40,00
21	8,03	8,90	10,28	11,59	13,24	16,34	20,34	24,94	29,62	32,67	35,48	38,93	41,40
22	8,64	9,54	10,98	12,34	14,04	17,24	21,34	26,04	30,81	33,92	36,78	40,29	42,80
23	9,26	10,20	11,69	13,09	14,85	18,14	22,34	27,14	32,01	35,17	38,08	41,64	44,18
24	9,89	10,86	12,40	13,85	15,66	19,04	23,34	28,24	33,20	36,42	39,36	42,98	45,56
25	10,52	11,52	13,12	14,61	16,47	19,94	24,34	29,34	34,38	37,65	40,65	44,31	46,93
26	11,16	12,20	13,84	15,38	17,29	20,84	25,34	30,44	35,56	38,89	41,92	45,64	48,29
27	11,81	12,88	14,57	16,15	18,11	21,75	26,34	31,53	36,74	40,11	43,20	46,96	49,65
28	12,46	13,57	15,31	16,93	18,94	22,66	27,34	32,62	37,92	41,34	44,46	48,28	50,99
29	13,12	14,26	16,05	17,71	19,77	23,57	28,34	33,71	39,09	42,56	45,72	49,59	52,34
30	13,79	14,95	16,79	18,49	20,60	24,48	29,34	34,80	40,26	43,77	46,98	50,89	53,67
40	20,71	22,16	24,43	26,51	29,05	33,66	39,34	45,62	51,81	55,76	59,34	63,69	66,77
50	27,99	29,71	32,36	34,76	37,69	42,94	49,34	56,33	63,17	67,51	71,42	76,15	79,49
60	35,53	37,49	40,48	43,19	46,46	52,29	59,34	66,98	74,40	79,08	83,30	88,38	91,95
70	43,28	45,44	48,76	51,74	55,33	61,70	69,33	77,58	85,53	90,53	95,02	100,43	104,22
80	51,17	53,54	57,15	60,39	64,28	71,15	79,33	88,13	96,58	101,88	106,63	112,33	116,32
90	59,20	61,75	65,65	69,13	73,29	80,63	89,33	98,65	107,57	113,15	118,14	124,12	128,30
100	67,33	70,07	74,22	77,93	82,36	90,13	99,33	109,14	118,50	124,34	129,56	135,81	140,17

Anexo IV

Calculo dos autovetores e autovalores, para linearização dos pontos da equação característica.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \lambda \text{ autovalor}, v \text{ autovetor}$$

Sabe-se que $Av = \lambda v$, para o cálculo dos autovalores λ , tem-se

$$(A - \lambda I)v = 0$$

Função característica

$$f(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{21}a_{12} = 0$, daí obtém-se a equação característica:

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) = 0, \text{ definindo:}$$

$$b = (a_{11} + a_{22})$$

$$c = (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})$$

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

$$\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Onde λ_1 e λ_2 são soluções para a equação característica, tornando-se Autovalores da matriz de covariância A.

Levando a dispersão para as coordenadas do novo eixo

$$(A - \lambda_i I)v_i = 0$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda_i & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{i,1} \\ v_{i,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$v_{i,1} = \frac{a_{12}}{(a_{11} - \lambda_i)} v_{i,2}$$

$$\left(a_{21} \frac{a_{12}}{(a_{11} - \lambda_i)} + (a_{22} - \lambda_i) \right) = 0$$

$$a_{21} \frac{a_{12}}{(a_{11} - \lambda_i)} v_{i,2} + v_{i,2} (a_{22} - \lambda_i) = 0$$

Logo resulta no sistema :

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda_i) v_{i,1} + a_{12} v_{i,2} = 0 \\ a_{21} v_{i,1} + v_{i,2} (a_{22} - \lambda_i) = 0 \end{cases}$$

Com : esses resultados pode - se observar que:

$$\lambda_1, v_{11} = 1, \text{ obtem - se } v_{21};$$

$$\lambda_2, v_{22} = 1, \text{ obtem - se } v_{12};$$

$$\lambda_1, v_{21} = 1, \text{ obtem - se } v_{11};$$

$$\lambda_2, v_{12} = 1, \text{ obtem - se } v_{22};$$

Elementos do autovetor associado a λ_i :

$$v_i = \frac{1}{\sqrt{v_i^T v_i}} v_i$$

$$\lambda_1, \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{v_1^T v_1}} v_1 = \frac{1}{\sqrt{\begin{bmatrix} v_{11} & v_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{bmatrix}}} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2, \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{v_2^T v_2}} v_2 = \frac{1}{\sqrt{\begin{bmatrix} v_{12} & v_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{bmatrix}}} \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{bmatrix}$$

Obs. :

$$\lambda_1, v_{11} = 1, \quad v_{21} = \frac{-(a_{11} - \lambda_1)}{a_{21}} v_{11};$$

$$\lambda_2, v_{22} = 1, \quad v_{12} = \frac{-(a_{11} - \lambda_2)}{a_{12}} v_{22};$$

$$\lambda_1, v_{21} = 1, \quad v_{11} = \frac{a_{21}}{-(a_{11} - \lambda_1)} v_{21};$$

$$\lambda_2, v_{12} = 1, \quad v_{22} = \frac{a_{12}}{-(a_{11} - \lambda_2)} v_{12};$$

Logo a matriz dos autovetores é a matriz que ortogonaliza a dispersão:

$$v = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix}, \text{ matriz ortogonal.}$$

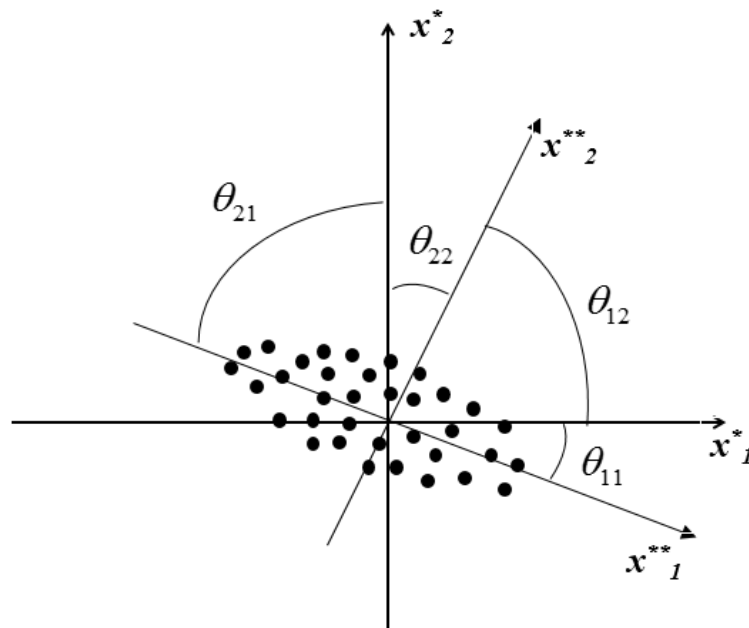
$$x_{1k}^{**} = x_{1k}^* v_{11} + x_{2k}^* v_{12}$$

$$x_{2k}^{**} = x_{1k}^* v_{21} + x_{2k}^* v_{22}$$

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \text{ matriz diagonal.}$$

Onde a Figura 47 representa o significado físico da matriz de autovalores:

Figura 47- Significado físico da matriz de autovalores



Desde que sejam obedecidas as condições a seguir:

$$v = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix}, \begin{cases} \cos \theta_{11} = v_{11} \\ \cos \theta_{12} = v_{12} \\ \cos \theta_{21} = v_{21} \\ \cos \theta_{22} = v_{22} \end{cases}$$

Anexo V

Cálculo para identificação da função de transferência que rege o sistema de separação Água – Metanol:

f1 =

From input "u1" to output "y1":

0.04965

s + 0.9624

Name: tf1

Continuous-time identified transfer function.

Parameterization:

Number of poles: 1 Number of zeros: 0

Number of free coefficients: 2

Use "tfdata", "getpvec", "getcov" for parameters and their uncertainties.

Status:

Estimated using TFEST on time domain data "z1".

Fit to estimation data: 98.93% (simulation focus)

FPE: 0.007317, MSE: 0.00723

Anexo VI

Cálculo para identificação da função de transferência que rege o sistema de produção do Propileno Glicol:

tf1 =

From input "u1" to output "y1":

0.01398

s + 0.7781

Name: tf1

Continuous-time identified transfer function.

Parameterization:

Number of poles: 1 Number of zeros: 0

Number of free coefficients: 2

Use "tfdata", "getpvec", "getcov" for parameters and their uncertainties.

Status:

Estimated using TFEST on time domain data "z1".

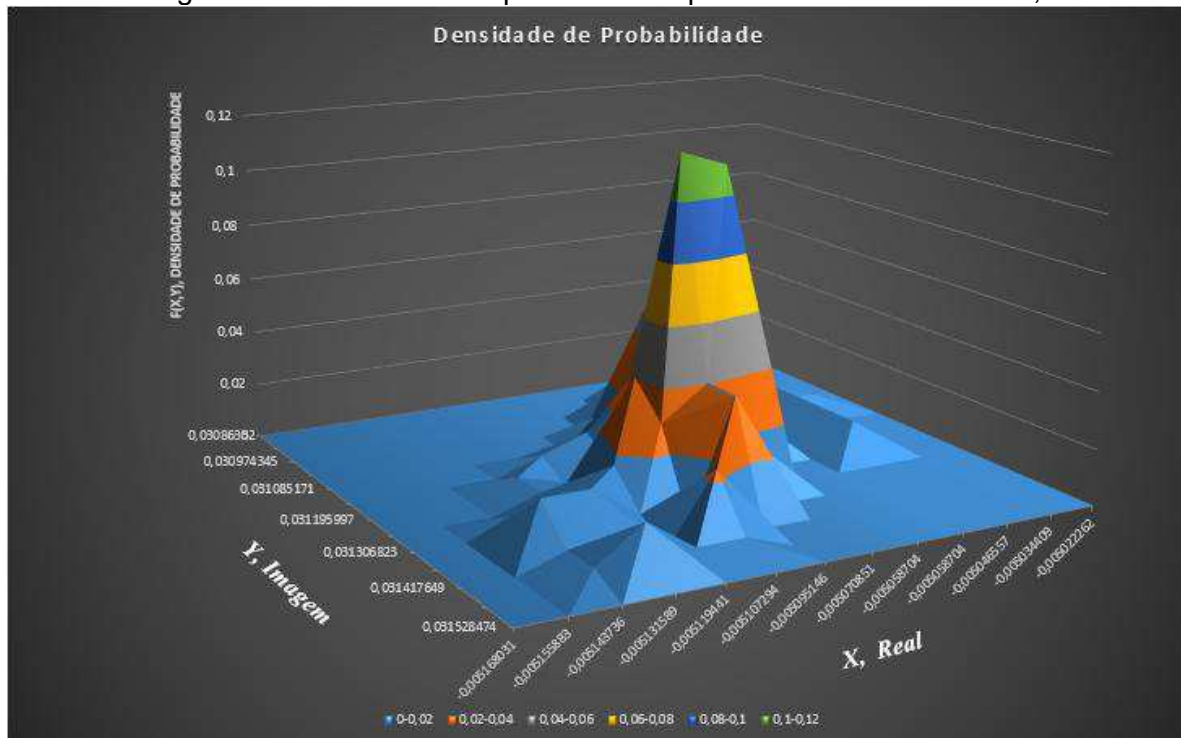
Fit to estimation data: 95.31% (simulation focus)

FPE: 0.04838, MSE: 0.04707

Apêndice 01

Densidade de probabilidade para o sistema não reativo de separação de Água e Metanol:

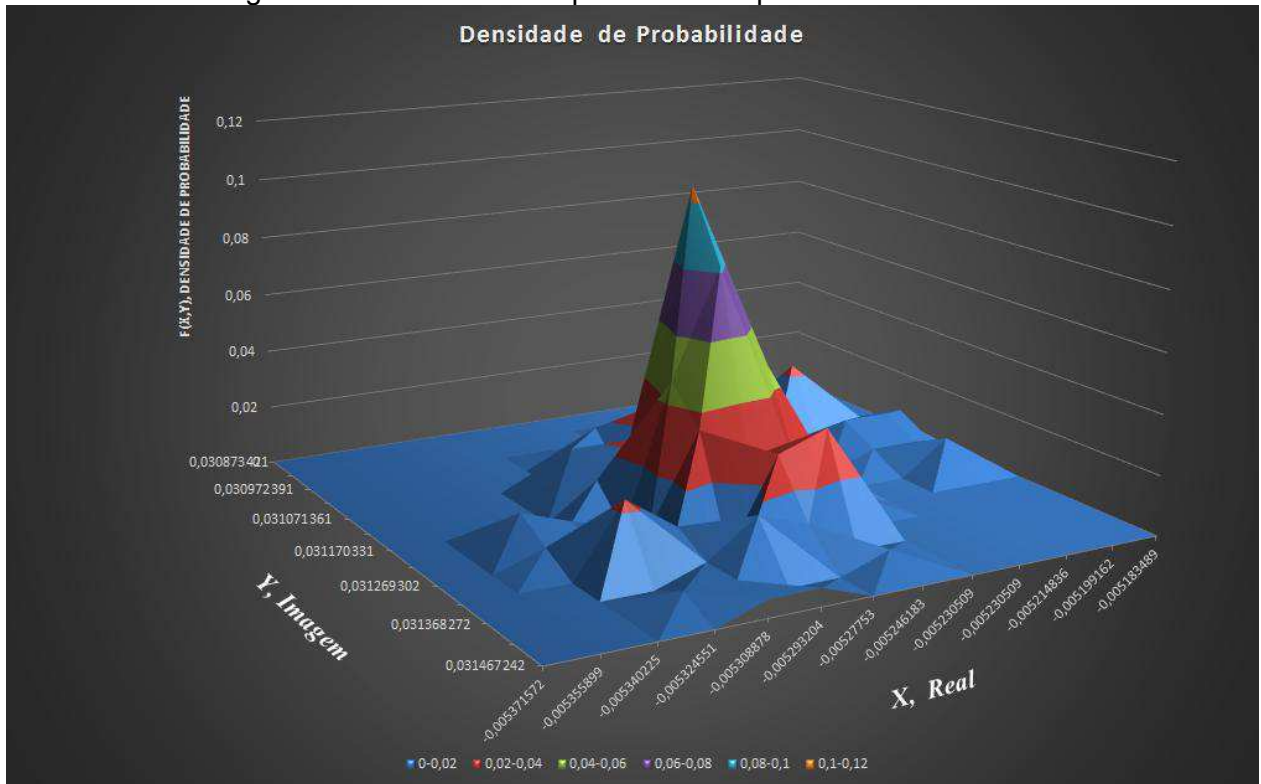
Figura A01- Densidade de probabilidade para o sistema não reativo;



Apêndice 02

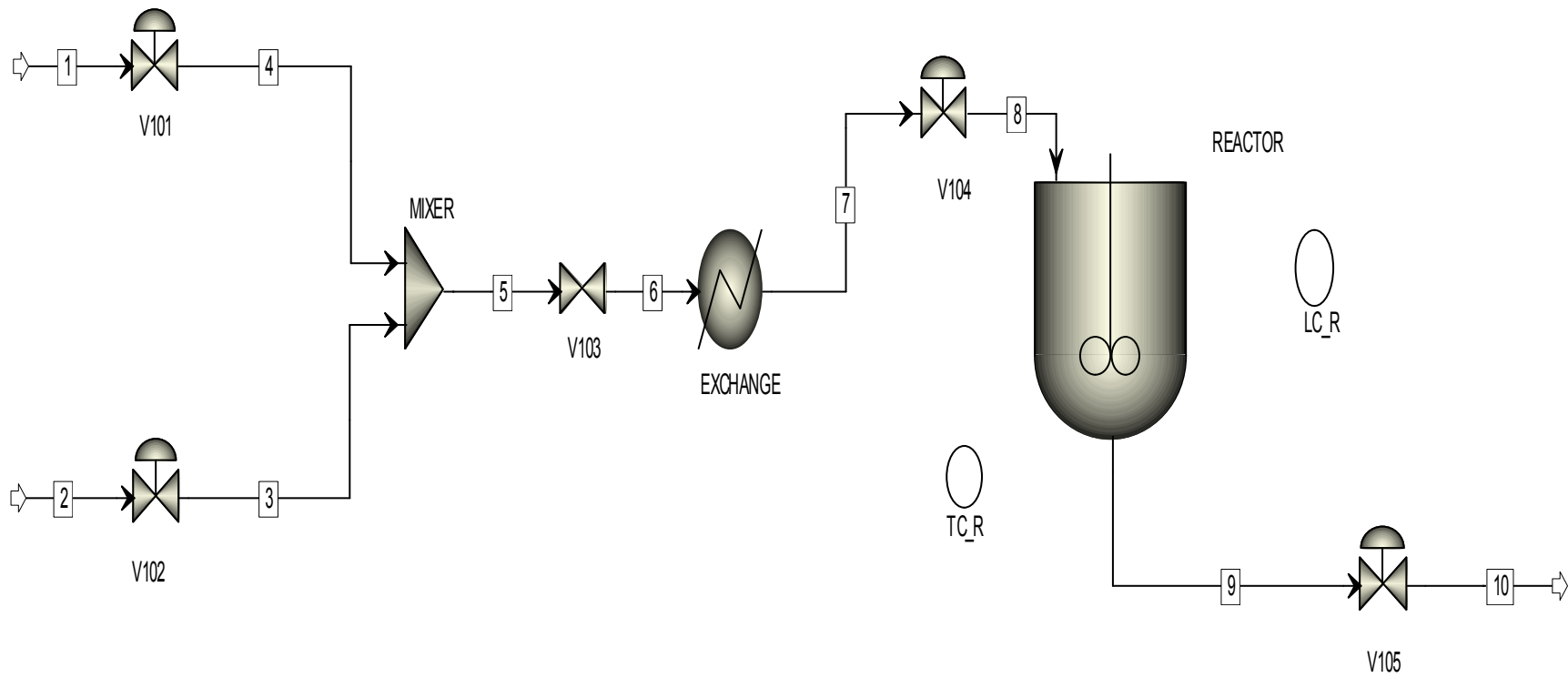
Densidade de probabilidade para o sistema reativo de separação de produção do Propileno glicol:

Figura A02- Densidade de probabilidade para o sistema reativo



Apêndice 03

Figura 48– Reapresentação da Simulação do processo de produção do Propileno Glicol no estado dinâmico.



Apêndice 04

Tabela 8– Valores obtidos através da simulação do processo de produção do Propileno glicol.

PROPILENO GLICOL											
Stream ID		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Temperature	F	58,0	58,0	58,0	58,0	58,4	58,4	75,0	75,0	103,7	103,8
Pressure	psia	44,09	44,09	36,74	36,74	36,74	29,39	29,39	22,04	22,04	14,69
Vapor Frac		0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
Mole Flow	lbmol/hr	113,410	806,203	806,203	113,410	919,613	919,613	919,613	919,613	904,902	904,902
Mass Flow	lb/hr	4708,075	14523,966	14523,966	4708,075	19232,041	19232,041	19232,041	19232,041	19232,041	19232,041
Volume Flow	cuft/hr	91,023	231,706	231,708	91,025	323,023	323,027	326,307	326,311	328,224	328,228
Enthalpy	MMBtu/hr	-9,621	-99,265	-99,265	-9,621	-108,885	-108,885	-108,616	-108,616	-108,674	-108,674
Mole Flow	lbmol/hr										
PROPA-01										14,711	14,711
PROPY-01		41,254			41,254	41,254	41,254	41,254	41,254	26,543	26,543
WATER			806,203	806,203		806,203	806,203	806,203	806,203	791,492	791,492
METHA-01		72,156			72,156	72,156	72,156	72,156	72,156	72,156	72,156