

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE  
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

ALAN GONÇALVES PAULO E SILVA

**CONTROLE ATIVO DE VIBRAÇÕES EM UMA ESTRUTURA COM 2 GDL  
UTILIZANDO TRANSDUTORES PIEZOELÉTRICOS ASSOCIADOS A CIRCUITOS  
*SHUNT* DE CAPACITÂNCIA NEGATIVA**

Campina Grande, PB

2016

ALAN GONÇALVES PAULO E SILVA

**CONTROLE ATIVO DE VIBRAÇÕES EM UMA ESTRUTURA COM 2 GDL  
UTILIZANDO TRANSDUTORES PIEZOELÉTRICOS ASSOCIADOS A CIRCUITOS  
*SHUNT* DE CAPACITÂNCIA NEGATIVA**

Dissertação apresentada a Universidade Federal de Campina Grande, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica do programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.

Área de Concentração: Análise e Projeto de Sistemas Termomecânicos.

Orientador: Prof. Dr. Antonio Almeida Silva

Campina Grande, PB

2016

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL DA UFCG

S586c Silva, Alan Gonçalves Paulo e.  
Controle ativo de vibrações em uma estrutura com 2 GDL utilizando transdutores piezoelétricos associados a circuitos SHUNT de capacitância negativa / Alan Gonçalves Paulo e Silva. – Campina Grande, 2016.  
121 f. : il. color.

Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia.

"Orientação: Prof. Dr. Antonio Almeida Silva".

Referências.

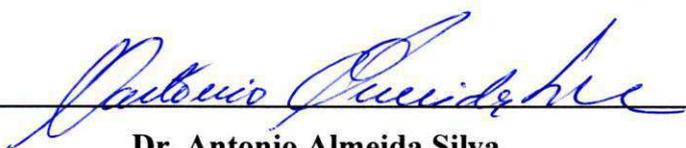
1. Transdutores. 2. Vibrações - Controle. 3. Transdutores Piezoelétricos. 4. Capacitância Negativa - Circuito Shunt. 5. Conversores de Impedância Negativa (NIC). I. Silva, Antonio Almeida. II. Título.

CDU 621.318.43(043)

“CONTROLE ATIVO DE VIBRAÇÕES EM UMA ESTRUTURA COM 2 GDL  
UTILIZANDO TRANSDUTORES PIEZOELÉTRICOS ASSOCIADOS A CIRCUITOS  
SHUNT DE CAPACITÂNCIA NEGATIVA”.

**ALAN GONÇALVES PAULO E SILVA**

Dissertação Aprovada em 04/02/2016 pela Banca Examinadora constituída dos seguintes  
membros:



---

**Dr. Antonio Almeida Silva**

Orientador

PPGEM/UAEM/CCT/UFCG



---

**Dr. Eisenhower de Moura Fernandes**

Co-Orientador

PPGEM/UAEM/CCT/UFCG

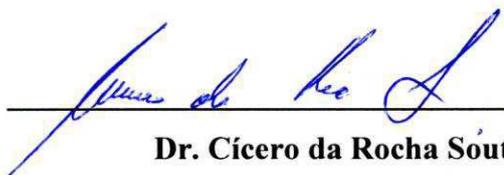


---

**Dr. Wanderley Ferreira de Amorim Júnior**

Examinador Interno

PPGEM/UAEM/CCT/UFCG



---

**Dr. Cícero da Rocha Souto**

Examinador Externo

DEE/CEAR/UFPB

A Deus, pela capacidade e a fé. Aos meus pais, Francisco das Chagas e Maria de Fátima, que me ensinaram os valores e princípios para a vida.

## AGRADECIMENTOS

A Deus, pela oportunidade de estar aqui novamente e pela capacidade dada para continuar trabalhando no bem.

A minha companheira de todos os dias, Marcella Lima, pela paciência, apoio e compreensão.

Ao Prof. Dr. Antonio Almeida Silva, pela orientação, pela convivência e por compartilhar seu conhecimento, contribuindo dessa forma para meu crescimento científico, intelectual e moral.

Ao Prof. Dr. Eisenhower de Moura Fernandes pela coorientação e todo auxílio intelectual disponibilizados a conclusão deste trabalho.

Ao Prof. Dr. Carlos José de Araújo, pela confiança depositada em mim e pelos conhecimentos concedidos.

Aos Prof. Rômulo Pierre e Diego David, por toda ajuda e paciência oferecidas ao longo de minha formação.

Aos companheiros e amigos de trabalho, Paulo César, Ângelo Emiliavaca e Orlando Tomaz pelo auxílio e pelas produtivas discussões, compartilhando seus aprendizados e suas experiências.

A Universidade Federal de Campina Grande e a Unidade Acadêmica de Engenharia Mecânica, pela oportunidade de realização do curso de mestrado.

Ao Laboratório Multidisciplinar de Materiais e Estruturas Ativas (LaMMEA) e ao Laboratório de Vibrações e Instrumentação (LVI), por viabilizar os meios necessários ao projeto, como a disponibilidade de equipamentos, insumos e recursos.

A CAPES pela concessão da bolsa de mestrado e pelo apoio financeiro para a realização dessa pesquisa.

*“Muita gente riu de mim quando eu disse que podia fazer o que quisesse da minha vida. Foram muitos anos de vivência, muitos baldes de água fria na cabeça. Muitos goles a mais, alguns passos pra trás. Só flagrando a cena. Eu aprendi o bastante pra poder sorrir, pois ainda estou aqui, tentando conquistar o meu espaço. Com muita pouca condição, mais a cabeça eu não abaixo... Deixa estar que eu sigo em frente!”*

*Alexandre Magno Abrão*

## RESUMO

GONÇALVES, A. P. S. **Controle ativo de vibrações em uma estrutura com 2 GDL utilizando transdutores piezoelétricos associados a circuitos *shunt* de capacitância negativa**. 2016. 125 f. Dissertação (Mestrado) – Unidade Acadêmica de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, 2016.

A necessidade de controle ou supressão das vibrações surgiu devido aos seus efeitos danosos causados as pessoas, estruturas e elementos de máquinas. Com o passar dos anos, várias técnicas de controle foram criadas e se desenvolvem à medida que a tecnologia avança. Hoje, a utilização de materiais funcionais ou inteligentes, já é utilizada em larga escala em aplicações práticas e nas pesquisas acadêmicas dos maiores centros de tecnologia do mundo. Neste trabalho, temos como objetivo, realizar o controle de vibrações de uma estrutura com dois graus de liberdade do tipo pórtico, utilizando transdutores piezoelétricos associados a circuitos do tipo *shunt* de capacitância negativa com resistência elétrica em série. Para tal, utilizamos um circuito eletroeletrônico com componentes passivos (resistores, capacitores, indutores) associados a transdutores piezoelétricos *QP10W*, para produzirmos o circuito *shunt* de capacitância negativa, implementado através de Conversores de Impedância Negativa (NIC), utilizando amplificadores operacionais. As amplitudes de resposta do sistema nos domínios do tempo e frequência foram analisadas em vibração livre e em vibração forçada, utilizando os resistores que obtiveram o melhor desempenho na dissipação de energia da estrutura, que foram os de  $100\ \Omega$  e de  $150\ k\Omega$ . Obtivemos uma redução de  $9,01\ dB$  para o primeiro pico de frequência e de  $6,95\ dB$  para o segundo pico, em vibração livre. Para o caso de vibração forçada, obtivemos uma redução de  $1,5\ dB$  para o primeiro pico de frequência e de  $2,19\ dB$  para o segundo pico de frequência, cumprindo assim o objetivo do trabalho pretendido.

**Palavras-chave:** Controle de vibrações. Transdutores piezoelétricos. Circuito *shunt* de capacitância negativa. NIC.

## ABSTRACT

GONÇALVES, A. P. S. **Active control vibration in a structure with 2 DOF using piezoelectric transducers associates the negative capacitance shunt circuits.**

2016. 125 f. M. Sc. Dissertation – Academic Unit of Mechanical Engineering, Federal University of Campina Grande, Campina Grande, 2016.

The need for control or suppression of vibrations arose due to its harmful effects caused at people, structures and machine elements. With the passage of years, various control techniques were created and develop as technology advance. Today, the use of functional or smart materials is already used on a large scale in practical applications and in academic research of the world's largest technology centers. In this work, our goal is to perform vibration control of a structure with two degrees of freedom portico type using piezoelectric transducers associated with the negative capacitance shunt circuits with electric resistance in series. To do this, we use an electroelectronics circuit with passive components (resistors, capacitors, inductors) associated with piezoelectric transducers QP10W, to produce the negative capacitance shunt circuit, implemented through Negative Impedance Converters (NIC) using operational amplifiers. Response amplitudes of the system in the domains of time and frequency were analyzed in free vibration and forced vibration using the resistors that had the best performance in energy dissipation structure, which were the  $100 \Omega$  and  $150 k\Omega$ . We obtained a reduction of  $9.01 dB$  for the first peak frequency and  $6.95 dB$  for the second peak in vibration free. In the case of forced vibration, we obtained a reduction of  $1.5 dB$  for the first peak frequency and  $2.19 dB$  for the second peak frequency, thus fulfilling the purpose of the intended work.

**Keywords:** Vibration Control. Piezoelectric transducers. Negative capacitance shunt circuit. NIC.

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	1
1.1	<i>Vibrações estruturais e sua importância no projeto de sistemas</i>	1
1.1.1	<i>Excitação de base</i>	2
1.1.2	<i>Técnicas de controle de vibrações</i>	3
1.1.3	<i>Materiais inteligentes</i>	7
1.1.4	<i>Estruturas inteligentes e suas aplicações</i>	9
1.2	<i>Objetivos</i>	11
1.2.1	<i>Objetivos gerais</i>	11
1.2.2	<i>Objetivos específicos</i>	11
<b>2</b>	<b>REVISÃO DA LITERATURA</b>	12
2.1	<i>Transdutores piezoelétricos</i>	12
2.1.1	<i>Piezoelasticidade</i>	15
2.2	<i>Amortecimento piezoelétrico tipo shunt</i>	19
2.2.1	<i>Circuitos shunt de capacitância negativa</i>	22
2.3	<i>Aplicação de transdutores piezoelétricos</i>	25
<b>3</b>	<b>ABORDAGEM TEÓRICA E FORMULAÇÃO MATEMÁTICA</b>	30
3.1	<i>Sistemas com 2 GDL</i>	30
3.1.1	<i>Vibração livre não amortecida</i>	32
3.1.2	<i>Vibração forçada amortecida submetida à excitação de base</i>	37
3.2	<i>Equações que regem o fenômeno piezoelétrico</i>	40
3.3	<i>Conversores de Impedância Negativa (NIC)</i>	51
3.4	<i>Estrutura acoplada ao circuito shunt</i>	56
<b>4</b>	<b>MATERIAIS E MÉTODOS</b>	60
4.1	<i>Metodologia de análise</i>	60
4.1.1	<i>Modelagem analítica</i>	61
4.1.1.1	<i>Frequências naturais e modos de vibração da estrutura</i>	61
4.1.1.2	<i>Funções de transferência da estrutura</i>	61
4.1.1.3	<i>Circuito shunt</i>	62
4.1.1.4	<i>Implementação através dos NICs</i>	64
4.1.1.5	<i>Acoplamento entre a estrutura e o circuito shunt</i>	65
4.1.2	<i>Modelagem computacional</i>	65
4.1.2.1	<i>Frequências naturais e modos de vibração da estrutura</i>	65
4.1.2.2	<i>Circuito shunt</i>	67
4.1.3	<i>Metodologia experimental</i>	69
4.1.3.1	<i>Concepção da estrutura</i>	69
4.1.3.2	<i>Posicionamento e colagem dos piezoelétricos</i>	72
4.1.3.3	<i>Circuito eletrônico</i>	74
4.1.3.4	<i>Determinação do “R” ótimo</i>	74
4.1.3.5	<i>Estrutura e circuito shunt acoplados</i>	75
<b>5</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÕES</b>	78
5.1	<i>Resultados analíticos</i>	78
5.2	<i>Resultados computacionais</i>	83
5.2.1	<i>Estrutura</i>	83
5.2.2	<i>Circuito shunt</i>	85
5.3	<i>Resultados experimentais</i>	87
5.3.1	<i>Determinação experimental da resistência elétrica</i>	87
5.3.2	<i>Resposta em vibração livre</i>	88
5.3.3	<i>Resposta em vibração forçada</i>	90

5.4	<i>Análise e comparação dos resultados</i> .....	93
5.4.1	<i>Vibração livre</i> .....	93
5.4.2	<i>Vibração forçada</i> .....	95
6	<b>CONCLUSÕES E SUGESTÕES</b> .....	100
6.1	<i>Conclusões</i> .....	100
6.2	<i>Sugestões para trabalhos futuros</i> .....	101
	<b>REFERÊNCIAS</b> .....	103
	<b>ANEXO A</b> .....	111
	<b>ANEXO B</b> .....	113
	<b>ANEXO C</b> .....	114

## 1 INTRODUÇÃO

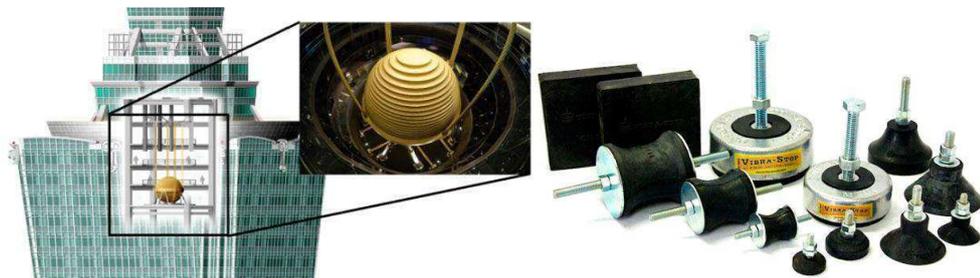
### 1.1 Vibrações estruturais e sua importância no projeto de sistemas

Em sua maioria, as estruturas, partes de máquinas e outros equipamentos utilizados no nosso dia a dia, estão sujeitos aos efeitos danosos causados pelas vibrações excessivas. Sejam devidos a fenômenos físicos da natureza, ou inerentes ao funcionamento de alguns sistemas mecânicos.

Grande parte das vezes, essas vibrações são indesejáveis e podem de alguma forma causar danos temporários ou permanentes, levando ao mau funcionamento de máquinas e equipamentos, e em casos extremos, até a falha estrutural.

Com o objetivo de minimizar esses efeitos, tem-se estudado e empregado inúmeras técnicas de controle e atenuação ao longo dos anos. Que vão desde sistemas robustos e de grande porte, como o edifício *Taipei 101* em *Taiwan* que utiliza Absorvedores Dinâmicos de Vibração (ADVs) contra terremotos e ações dos ventos, a aplicação de materiais “amortecedores”, como os *vibra-stop* e placas de materiais viscoelásticos em suportes e estruturas de máquinas, como mostrado na Figura 1.1.

Figura 1.1 – Edifício *Taipei 101* com seu ADV, e alguns tipos de *vibra stop*.



Fonte: Google Imagens. Acesso em: 09 de novembro de 2015.

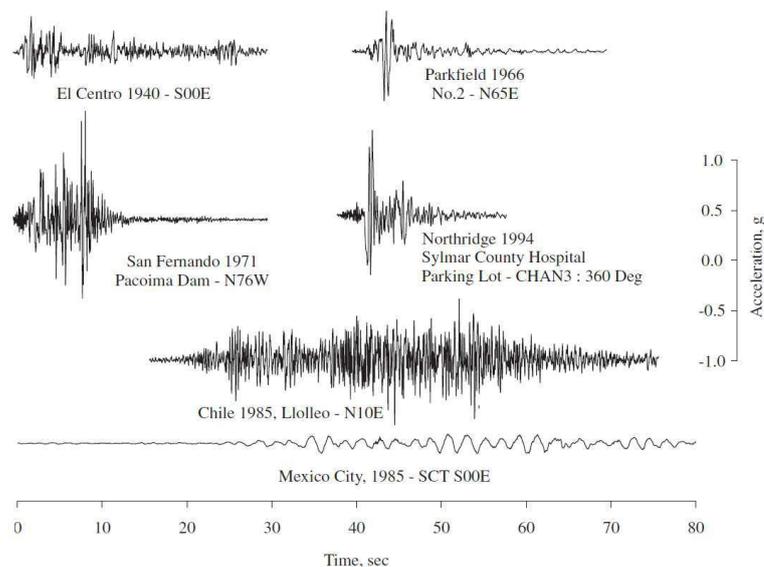
### 1.1.1 Excitação de base

Algumas vezes, a base ou o suporte do sistema é o elemento que sofre o movimento, quando isso acontece denominamos esse movimento de excitação de base.

Uma das mais importantes aplicações da teoria da dinâmica estrutural é na análise da resposta de estruturas aos movimentos de base, causados principalmente pelos terremotos, ou abalos sísmicos, que são uma das maiores e mais poderosas forças da natureza, e que podem ser considerados como um bom exemplo desse tipo de excitação. Por ser de grande capacidade destrutiva e de certa forma, inevitável, muitos estudos têm sido realizados utilizando-se desse tipo de movimento como ferramenta de dimensionamento e teste em estruturas.

Para propósitos de engenharia, a variação da aceleração da base no tempo é mais utilizada para definir o deslocamento de base durante um terremoto. Esse problema de excitação de base pode ser completamente resolvido facilmente para um sistema com um grau de liberdade, caso conheçamos a massa, a rigidez e as propriedades de amortecimento da estrutura (CHOPRA, 2012). Alguns exemplos de sinais de terremotos adquiridos pelo homem, podem ser observados na Figura 1.2.

Figura 1.2 – Deslocamentos de base adquiridos durante alguns terremotos.



Fonte: Adaptado do Chopra (2012).

### 1.1.2 *Técnicas de controle de vibrações*

Pelos motivos abordados anteriormente, vemos a necessidade de se efetuar o controle das vibrações em estruturas e máquinas. Quando há a necessidade de se ter pessoas operando essas máquinas, as vibrações em forma de oscilações mecânicas e ruído podem ser prejudiciais ao ser humano, podendo causar perda de eficiência ou danos permanentes, se exposto à fonte de vibração por longos períodos de tempo.

Por outro lado, o crescimento da concorrência e da globalização dos produtos comercializados no mercado internacional exige que eles obedeçam a certo padrão de qualidade, regulamentado por órgãos e rigorosas normas internacionais de exposição à vibração. Em muitos produtos, os níveis de vibração também estão intimamente relacionados à sua qualidade e confiabilidade, o que reflete diretamente na aceitação do mesmo pelos consumidores.

Em decorrência dessas questões, tem crescido a necessidade de controle dessas vibrações e dos ruídos a ela associados. Como resultado, diferentes técnicas de controle foram desenvolvidas e continuam a ser aperfeiçoadas para esse fim. Dessa forma, podemos classificar as técnicas de controle em três grandes grupos:

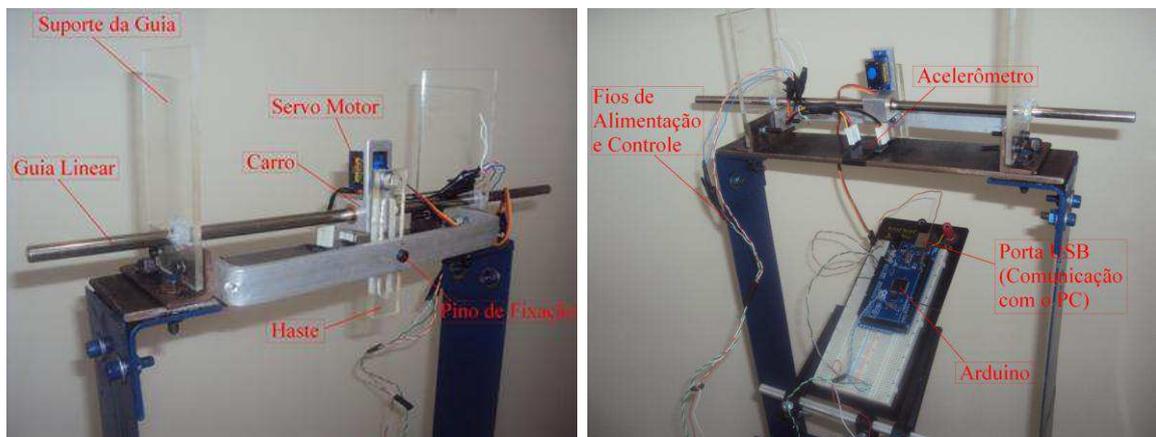
- Técnicas Ativas;
- Técnicas Passivas;
- Técnicas Híbridas ou Semiativas.

As técnicas ativas de controle, fundamentalmente, utilizam excitações contrárias, normalmente de mesma frequência e intensidade da fonte geradora de vibração, como meio de controle. Nesse tipo de procedimento, são utilizados três elementos principais para esse objetivo, operando de forma simultânea e interligada, que são os sensores, os atuadores e o(s) controlador(es).

Um exemplo de sistema de controle ativo em uma estrutura do tipo pórtico desenvolvido por Gonçalves (2013) é apresentado na Figura 1.3. Esse sistema é constituído de um ADV ativo, composto por uma massa que se desloca sobre uma

guia, acionada por um motor de passo (atuador) conectado ao carro, um *Arduino*® (controlador) e um acelerômetro (sensor) do tipo ADXL 345. Onde o carro se desloca na direção contrária a estrutura, opondo-se ao movimento. Foi possível reduzir as amplitudes de resposta da estrutura em aproximadamente 27 %, para baixos valores de frequência de excitação.

Figura 1.3 – ADV ativo e seus principais componentes.

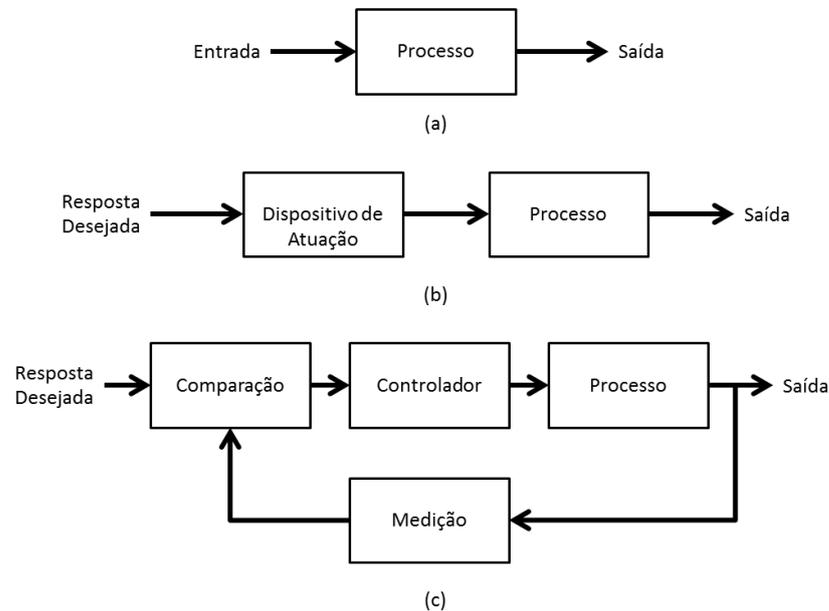


Fonte: Gonçalves (2013).

As técnicas modernas de controle ativo podem ser classificadas em dois grupos, conforme a disposição dos seus elementos e do fluxo dos sinais elétricos através da malha de controle, conhecidas como sistemas de controle em malha aberta (*feedforward*), ou seja, sem retroação e sistemas de controle em malha fechada (*feedback*), ou seja, com retroação ou realimentação.

Os sistemas de controle em malha aberta utilizam um dispositivo de atuação para controlar diretamente o processo, sem usar retroação. Já os sistemas de controle em malha fechada usam o sinal de saída e a retroação desse sinal para compará-lo com a saída desejada (referência ou comando), como mostrado na Figura 1.4 (DORF; BISHOP, 2001).

Figura 1.4 – (a) Processo a ser controlado, (b) sistema de controle em malha aberta (sem retroação), e (c) sistema de controle em malha fechada (com retroação).



Fonte: Adaptado do Dorf e Bishop (2001).

As técnicas de controle passivas são de fundamental importância na teoria de controle, por serem simples e de fácil aplicação. Elas são basicamente fundamentadas na utilização de materiais absorvedores, como os viscoelásticos, e no uso de absorvedores dinâmicos de vibrações passivos.

Apresentamos na Figura 1.5, o primeiro exemplo de aplicação envolvendo a utilização de amortecedores viscosos passivos de vibração em uma ponte e os detalhes dos amortecedores viscosos utilizados. Esta estrutura está localizada na cidade de Mainden na Alemanha, e nesse caso específico dada à elevada flexibilidade lateral da estrutura, optou-se por introduzir tais dispositivos de controle nessa direção (MOUTINHO, 2007).

Figura 1.5 – Ponte estaiada e os amortecedores viscosos em detalhe.



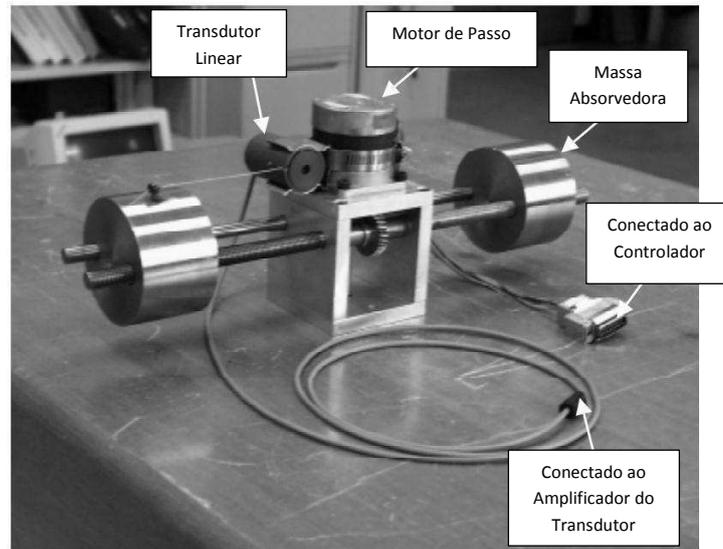
Fonte: Moutinho (2007).

Embora o controle passivo não possua a eficiência e a adaptabilidade do controle ativo, essas técnicas apresentam-se muitas vezes como soluções robustas e econômicas, tornando-se um objeto de estudo e de pesquisas de inúmeros trabalhos desenvolvidos na atualidade. São também, técnicas reconhecidamente mais adequadas para aplicações que envolvam elevadas faixas de frequência (SANTANA, 2007).

Finalmente, temos as técnicas de controle híbridas ou semiativas, que podem ser entendidas como aquelas que resultam da combinação de técnicas ativas e passivas, e seus usos se justificam pelo interesse em combinar as características mais vantajosas de cada tipo de técnica (SANTANA, 2007).

Dentre as técnicas de controle híbrido, uma das mais representativas são os ADVs semiativos. Nesse tipo de dispositivo, é utilizada energia externa para modificar as características geométricas do dispositivo e assim ampliar a faixa de frequência de atuação dos mesmos. No caso apresentado na Figura 1.6, a adaptação do ADV é feita através da variação da posição de duas massas utilizando um motor de passo em relação ao centro.

Figura 1.6 – Exemplo de um ADV híbrido.



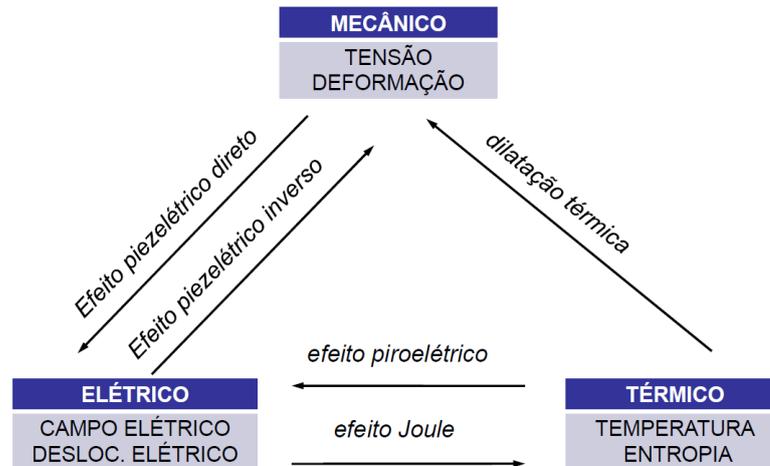
Fonte: Ting-Kong (1999).

A posição das massas em qualquer ponto do espaço no tempo pode ser detectada através de um transdutor linear, que apresenta uma variação de tensão elétrica dependendo do número de voltas no eixo que foram dadas. Quando o absorvedor foi montado em uma viga e ajustado para reduzir o pico de ressonância, foi visto que uma antirressonância foi produzida próximo da frequência na qual a ressonância ocorreu anteriormente. Que segundo Ting-Kong (1999), resultou em uma redução na amplitude da resposta para a frequência desejada de aproximadamente 45 dB.

### 1.1.3 Materiais inteligentes

Mais recentemente tem-se explorado cada vez mais o uso de materiais funcionais ou inteligentes, para aplicações que necessitem de controle das vibrações e até para geração de energia. Segundo Leo (2007), materiais inteligentes podem ser definidos como aqueles materiais que exibem acoplamento entre vários domínios físicos (mecânico, elétrico, térmico e etc.) como mostrado na Figura 1.7. Podendo também desempenhar uma função estrutural, que quando estimulados, podem gerar força ou movimento.

Figura 1.7 – Representação visual do acoplamento entre os domínios físicos.



Fonte: Adaptado de Leo (2007).

Os materiais funcionais ou inteligentes mais utilizados e explorados na atualidade podem ser classificados em:

- **Materiais Piezoelétricos:** polímeros e cerâmicas que reagem à tensão elétrica e/ou deformação imposta;
- **Ligas com Memória de Forma (LMF):** polímeros e ligas metálicas que reagem à temperatura e/ou tensão mecânica;
- **Polímeros Eletroativos (EAP):** polímeros sensíveis à aplicação de tensão elétrica;
- **Fluidos Eletro Reológicos:** materiais compostos que reagem ao campo elétrico aplicado, alterando sua reologia;
- **Fluidos Magneto Reológicos:** materiais compostos que reagem ao campo magnético aplicado, alterando sua reologia.

Tais materiais já estão sendo aplicados na indústria e no desenvolvimento de novas peças e equipamentos, substituindo na maioria das vezes sistemas de grande custo, maior peso e grande complexidade. Utilizado também como opção alternativa

para sistemas convencionais, alterando a concepção de componentes, potencializando o seu funcionamento e o seu poder de atuação.

#### **1.1.4 Estruturas inteligentes e suas aplicações**

Quando aplicamos um material inteligente em uma estrutura, ela pode ser considerada uma estrutura inteligente. Dessa forma, uma estrutura inteligente tem a habilidade de detectar qualquer alteração no ambiente ou no sistema, localizar qualquer problema em locais críticos, armazenar e processar dados, comandar a ação apropriada para melhorar o seu desempenho e preservar a integridade estrutural, segurança e facilidade de manutenção do sistema (CHENG; JIANG; LOU, 2008).

O conceito de estruturas inteligentes vem sendo largamente aplicado na indústria aeronáutica e mecânica, como o monitoramento da integridade estrutural e absorvedores de vibração em automóveis. Na engenharia civil estrutural, vem sendo aplicado na redução das respostas da estrutura, aos efeitos causados pelas ações do vento e dos terremotos.

Sendo assim, podemos comparar uma estrutura inteligente a um sistema mecatrônico, porém mais avançado, que incorpora a nova tecnologia dos materiais funcionais, utilizando das suas propriedades para conferir algum tipo de funcionalidade desejada, que pode ser:

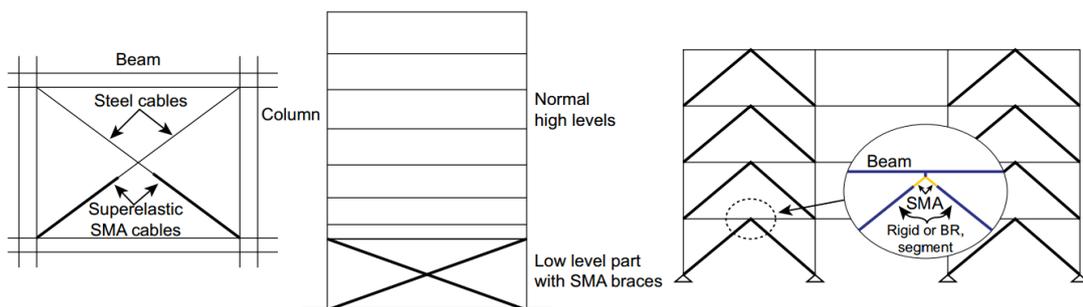
- Controle de vibrações;
- Controle de posição;
- Controle de forma;
- Monitoramento de integridade estrutural;
- Geração de energia.

Como exemplo, podemos citar algumas estruturas com perfis em aço, que utilizam cabos de LMF na forma de “tendões”, para reduzir as amplitudes de

vibração e aumentar a rigidez total do sistema. Esse tipo de concepção já vem sendo utilizada em diversas estruturas espalhadas ao redor do mundo, como cabos de pontes, pequenas estruturas de aço, grandes edifícios, entre outros casos.

Mais recentemente, um grupo de pesquisadores do Departamento de Engenharia Estrutural do Laboratório Federal Suíço de Ciências dos Materiais (EMPA) está estudando a viabilidade da utilização de ligas metálicas com memória de forma (LMF) no reforço de vigas de concreto. Onde o LMF estaria na forma de vergalhões submetidos a uma pré-carga e reforçando o concreto. A Figura 1.8 apresenta três diferentes configurações geométricas de estruturas de aço que possuem elementos de LMF na forma de cabos, como elemento passivo de atenuação.

Figura 1.8 – Representação esquemática de cabos de LMF para estruturas em aço.



Fonte: Menna, Auricchio e Asprone (2015).

Nesse trabalho, no entanto, iremos nos aprofundar apenas no uso dos materiais piezoelétricos cerâmicos e os fenômenos a eles atribuídos, por se tratarem do nosso elemento de estudo, utilizando um controle ativo na atenuação das amplitudes de resposta de uma estrutura através de circuitos eletrônicos.

## 1.2 Objetivos

### 1.2.1 Objetivos gerais

Estudar a implementação de um sistema controle de vibrações em uma estrutura tipo pórtico, com dois graus de liberdade, utilizando transdutores piezoelétricos associados a circuitos do tipo *shunt* de capacitância negativa com resistência elétrica em série.

### 1.2.2 Objetivos específicos

- Especificar e conceber uma estrutura com dois graus de liberdade feita de metal (aço), com formato de pórtico, que se adeque ao sistema de excitação (*Shake Table II®*);
- Determinar as frequências naturais dessa estrutura e seus modos de vibração, sem e com o piezoelétrico acoplado;
- Desenvolver e construir o circuito de controle para dois transdutores piezoelétricos agindo simultaneamente, utilizando a teoria de circuitos shunt de capacitância negativa em série com uma resistência elétrica;
- Comparar os valores de amplitude de deslocamento (ou aceleração) da estrutura com os elementos piezoelétricos acoplados, quando estes estão ativados (*closed loop*) e não ativados (*open loop*);
- Verificar e quantificar a redução das amplitudes de resposta do sistema para cada frequência de ressonância da estrutura.

## 2 REVISÃO DA LITERATURA

### 2.1 *Transdutores piezoelétricos*

Por definição, transdutores são dispositivos que convertem ou transformam um tipo de energia em outro, por exemplo, um microfone (dispositivo de entrada) converte as ondas sonoras em sinais elétricos, que serão amplificados e enviados ao alto-falante (dispositivo de saída).

O fenômeno da piezoelectricidade foi descoberto pelos irmãos Curie, em 1880 na França, durante experimentos de laboratório com cristais de quartzo. Sua primeira aplicação prática foi dada por Paul Langevin durante a primeira guerra mundial no desenvolvimento de sonares. Devido à dificuldade de se excitar transdutores constituídos de quartzo, por demandarem geradores de alta tensão, iniciou-se o desenvolvimento de materiais piezoelétricos sintéticos. Com avanço das novas tecnologias de obtenção de cerâmicas piezoelétricas sintéticas, houve o surgimento de novas aplicações para esses materiais.

Diversos materiais diferentes encontrados na natureza podem apresentar o fenômeno da piezoelectricidade, porém não possuem as características necessárias para sua aplicação em larga escala e em projetos que demandem de maior potência, tornando sua aplicação limitada. É aí que o desenvolvimento de materiais sintéticos tornasse importante.

Em qualquer escala de frequência ou potência, o elemento ativo (núcleo) da maioria dos transdutores é um piezoelétrico, podendo ser classificado em um dos seguintes grupos: Cristais de Quartzo, Cristais Hidrossolúveis, Monocristais Piezoelétricos, Semicondutores Piezoelétricos, Cerâmicas Piezoelétricas, Polímeros Piezoelétricos e Compósitos Piezoelétricos (VENET; PEREIRA, 2004).

Dentre esses grupos apresentados, o que mais se destaca são as Cerâmicas Piezoelétricas, que apresentam maior variedade de formas e de propriedades, por serem fabricadas através da sinterização de pós-cerâmicos conformados via prensagem ou extrusão.

Eles podem ser obtidos através de diversos materiais, porém, as mais comuns são as cerâmicas e os polímeros. Entre eles, os mais utilizados são as cerâmicas a base de Titanato Zirconato de Chumbo (PZT) e de Titanato de Bário, e os polímeros chamados de Polifluoreto de Vinilideno (PVDF). Também podemos encontrar outros materiais, como por exemplo, o Titanato de Chumbo (PT) e o Niobato de Chumbo e Magnésio (PMN), utilizados em aplicações que exigem propriedades especiais e muito específicas, como transdutores para altas temperaturas, para imagem e para ensaios não destrutivos.

As cerâmicas piezoelétricas são corpos maciços semelhantes às cerâmicas utilizadas em isoladores elétricos, como mostrado na Figura 2.1. São constituídas de inúmeros cristais ferroelétricos microscópicos, sendo inclusive denominada como um material policristalino (VENET; PEREIRA, 2004).

Figura 2.1 – Exemplos de cerâmicas piezoelétricas comerciais.



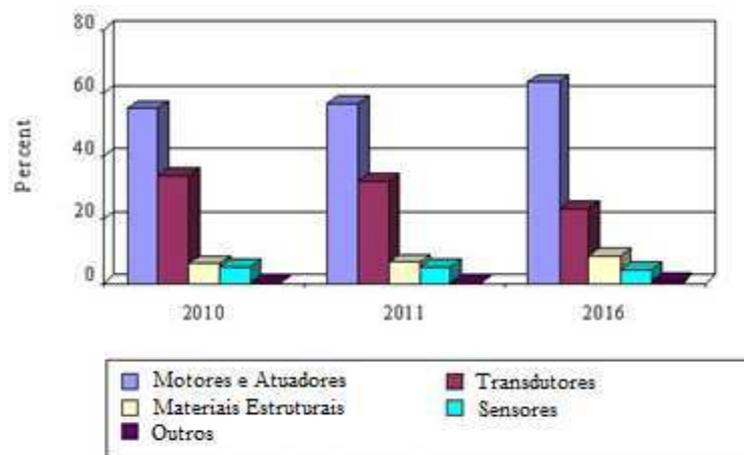
Fonte: JWG Ceramics (2015).

O investimento nos últimos anos em pesquisa e desenvolvimento nesses materiais tem crescido de forma relevante, nos levando a crer que essas novas tecnologias que fazem uso desse tipo de material vieram para ficar.

Segundo pesquisas publicadas em 2012 e em 2015, pela empresa norte americana de pesquisas de mercado *BCC Research*, o mercado global de materiais inteligentes movimentou cerca de US\$19,6 bilhões em 2010 e cerca de US\$26,0

bilhões em 2014. É esperado um ganho de aproximadamente US\$42,2 bilhões em 2019, registrando uma taxa de crescimento anual de 10,2% para o período de 2014 a 2019 (BCC RESEARCH BLOGGER, 2012, 2015). A previsão feita pela mesma empresa no ano de 2012 para o mercado global de materiais inteligentes no período de 2010 a 2016 está mostrada na Figura 2.2.

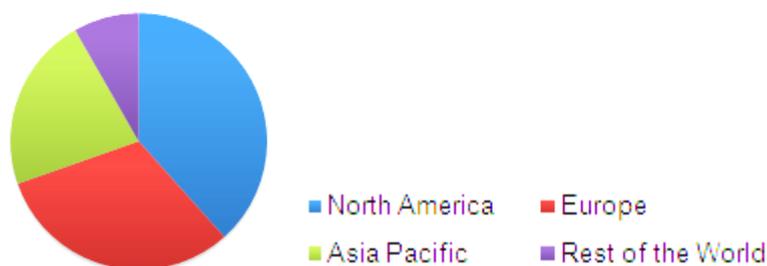
Figura 2.2 – Previsão para o mercado global de materiais inteligentes (em % total do mercado).



Fonte: BCC Research Blogger (2012, 2015).

Outra pesquisa publicada em outubro de 2015 pela empresa canadense Transparency Market Research (TMR), se mostrou mais otimista e espera um crescimento de mais de US\$63,2 bilhões para 2020. Segundo a TMR, o mercado global de materiais inteligentes é impulsionado pela crescente popularidade dos dispositivos piezoelétricos e por seu diversificado mercado de aplicações. Em 2013, o segmento de materiais piezoelétricos estava no topo do mercado de materiais inteligentes e deverá liderar esse mercado, em um futuro próximo (TRANSPARENCY MARKET RESEARCH, 2014). A Figura 2.3 apresenta um gráfico que mostra o mercado de materiais inteligentes por região, para esse mesmo ano.

Figura 2.3 – Parcela na receita de cada região, para o mercado global de materiais inteligentes em 2013.



Fonte: Transparency Market Research (2014).

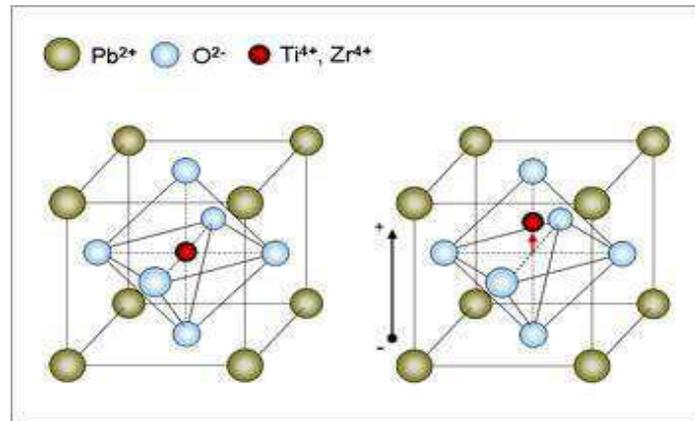
Como observado na Figura 2.3, a América do Norte domina esse mercado e é responsável por mais de 38% da receita do mercado global de materiais inteligentes. De acordo com a pesquisa, a Ásia irá ter um rápido crescimento nos próximos anos, devido à crescente demanda de materiais inteligentes no fim de linha da produção das indústrias. Do lado contrário, o resto do mundo obteve a menor participação na receita do mercado global.

### 2.1.1 Piezoelectricidade

Pode ser definido como a propriedade dos materiais dielétricos, naturais ou sintéticos, que não apresentam estrutura cristalina simétrica em relação ao centro da célula. Podendo ser derivado de materiais orgânicos ou inorgânicos.

Particularmente nas cerâmicas piezoelétricas do tipo PZT, seus cristais possuem estrutura Perovskita, que apresenta simetria tetragonal, romboédrica ou cúbica simples, dependendo da temperatura em que o material se encontra (VENET; PEREIRA, 2004). Estando abaixo de uma temperatura crítica (Temperatura de Curie), a estrutura cristalina apresenta a simetria em que o centro de simetria das cargas elétricas positivas não coincide com o centro de simetria das cargas negativas, dando origem a um dipolo elétrico, como apresentado na Figura 2.4.

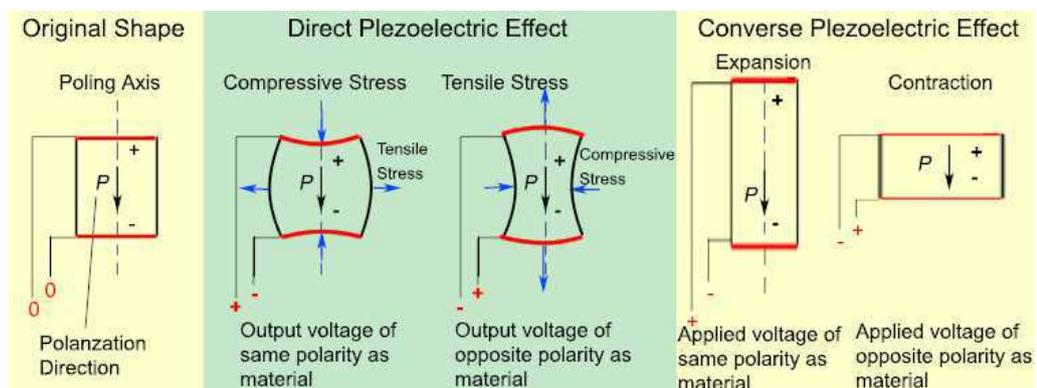
Figura 2.4 – Estrutura Perovskita simétrica e assimétrica.



Fonte: Adaptado de Venet e Pereira (2004).

A existência deste dipolo faz com que a estrutura cristalina se deforme na presença de um campo elétrico e/ou gere um deslocamento elétrico quando submetida a uma deformação mecânica. Essa característica de que quando submetidos a uma tensão mecânica, é gerada uma tensão elétrica em seus terminais, é chamado de efeito direto. O contrário também é verdadeiro. Se aplicarmos uma tensão elétrica em seus terminais o elemento piezoelétrico retorna com um deslocamento mecânico, ao qual chamamos de efeito inverso. Ambos os efeitos são observados no esquema apresentado na Figura 2.5.

Figura 2.5 – Representação do efeito direto e inverso em transdutores piezoelétricos, respectivamente.

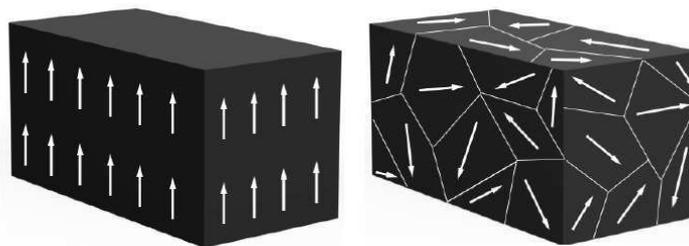


Fonte: Wing (2003)

Para que ocorram manifestações macroscópicas é necessária uma orientação preferencial do arranjo, conhecida como “polarização”. Essa polarização é feita aplicando-se um alto campo elétrico direcionado sobre a cerâmica, enquanto a mesma está sendo exposta a uma fonte de calor, a uma temperatura acima da Temperatura de Curie do material. Com o calor, as moléculas podem se movimentar mais livremente e as forças geradas pelo campo elétrico forçam os dipolos a se rearranjarem de acordo com a direção do campo elétrico externo aplicado. Vale notar que essa polarização se esvaece com o tempo e o uso, inutilizando o material para transformação de energia, porém esse processo pode levar muitos anos.

Em um monocristal (Figura 2.6 (a)) os eixos de todos os portadores de carga exibem uma característica unidirecional. Estes cristais apresentam simetria, mesmo se for dividido em pedaços menores. Enquanto que em uma cerâmica policristalina (Figura 2.6 (b)) é caracterizada por diferentes regiões do material com diferentes eixos. Ele é assimétrico por que não há nenhum ponto no cristal que possa ser cortado e que pelo menos duas partes apresentem suas cargas na mesma direção resultante.

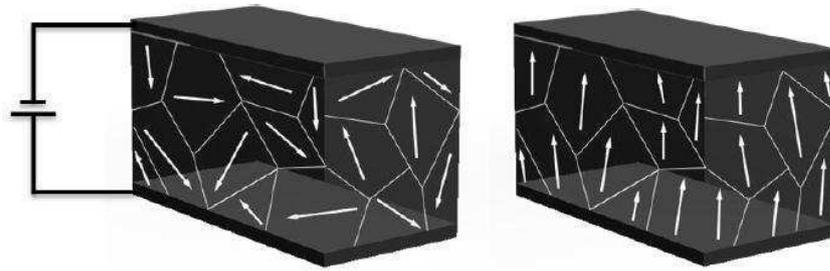
Figura 2.6 – (a) Estrutura Monocristalina e (b) Policristalina



Fonte: Calìò *et al.* (2014).

No caso das cerâmicas policristalinas, elas precisam ser polarizadas, pelo método já apresentado anteriormente, para que seus portadores de carga se alinhem em uma direção preferencial e possa exibir os efeitos desejados, como está exibido na Figura 2.7.

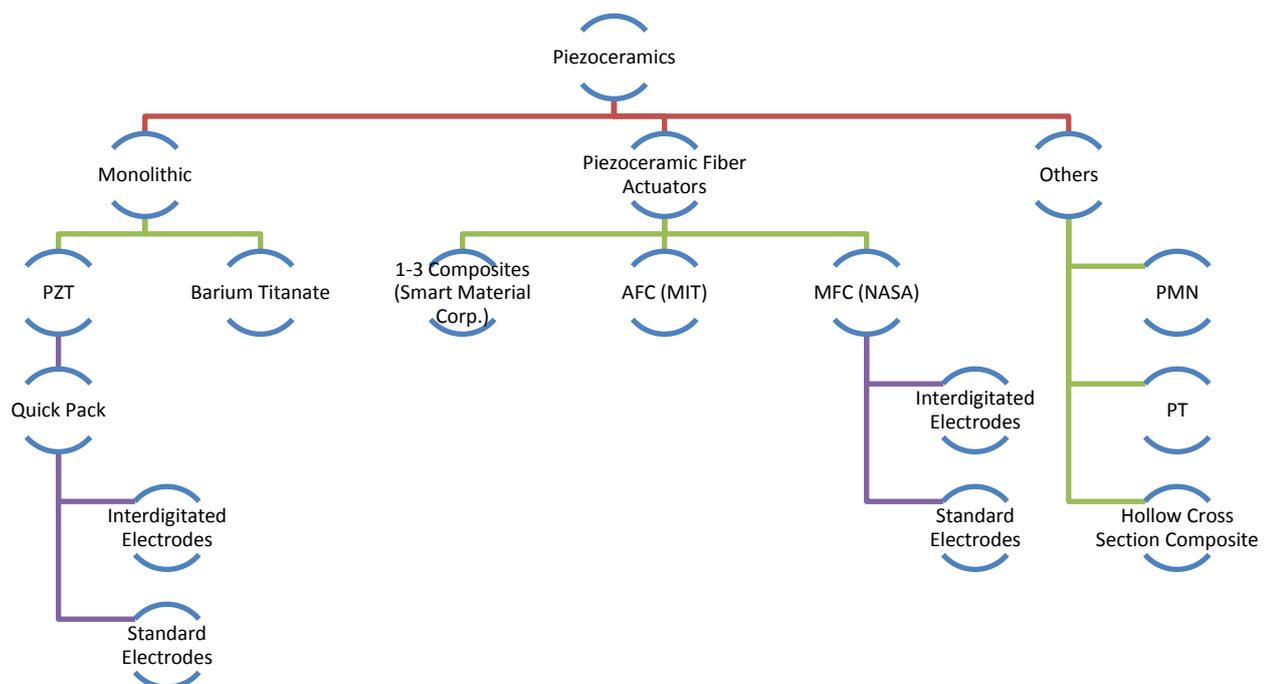
Figura 2.7 – Cerâmica Policristalina, (a) antes e (b) depois da polarização.



Fonte: Caliò *et al.* (2014).

Hoje, existem uma grande variedade de cerâmicas piezoelétricas comercializadas e sendo desenvolvidas, tanto em termos de geometria como em propriedades físicas. Algumas das principais soluções encontradas na atualidade estão expostas no esquema da Figura 2.8.

Figura 2.8 – Representação esquemática dos principais tipos de cerâmicas piezoelétricas comercializadas na atualidade.



Fonte: Autoria própria.

## 2.2 Amortecimento piezoelétrico tipo *shunt*

Amortecimento piezoelétrico do tipo *shunt* é um dos mais populares métodos utilizados para supressão de vibrações em estruturas flexíveis. A técnica é caracterizada por uma impedância elétrica conectada a um transdutor piezoelétrico acoplado, ou colado à estrutura. Tal método não necessita de um sensor externo, e se projetado corretamente, é capaz de garantir a estabilidade do sistema (MOHEIMANI; FLEMING, 2006).

O conceito de amortecimento piezoelétrico tipo *shunt* é atribuído principalmente a Hagood e von Flotow (1991), embora a primeira aparição desse conceito tenha sido anterior a eles. Eles demonstraram que um circuito indutor-resistor em série pode reduzir significativamente a vibração estrutural para um único modo. Nessa técnica, o circuito, junto com a capacitância inerente do transdutor piezoelétrico, é sintonizado para a frequência de ressonância do modo que se deseja amortecer. Semelhante a um absorvedor de vibrações mecânico sintonizado, introduzindo uma dinâmica no sistema que no circuito *shunt* é utilizado para aumentar o amortecimento estrutural efetivo.

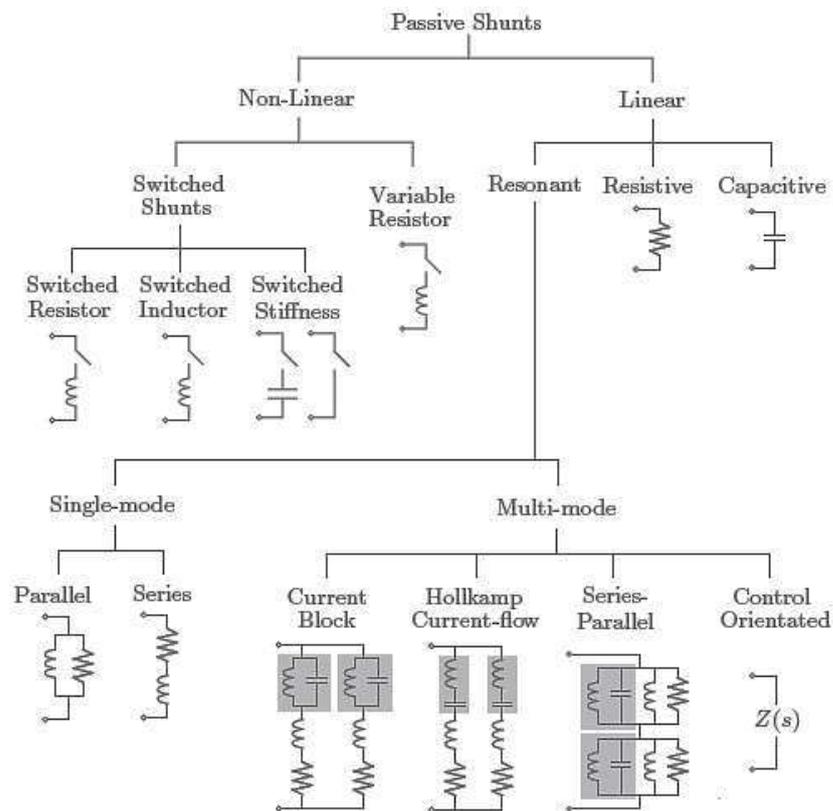
O controle de vibrações unimodal pode ser efetuado para diversos modos diferentes, basta acrescentarmos a estrutura mais transdutores piezoelétricos e seus circuitos equivalentes. Porém, na maioria dos casos essa não é uma solução prática, principalmente quando se necessita controlar muitos modos, o que além de encarecer o projeto, acrescentará dificuldades como falta de espaço para colagem dos transdutores e acréscimo de massa ao sistema.

Dessa forma alguns pesquisadores concentraram seus esforços para encontrar uma solução, e assim surgiu o controle multimodal, que necessita de apenas um transdutor piezoelétrico agindo em diferentes modos. O circuito de controle multimodal pode ser considerado uma extensão do circuito de controle unimodal, só que “sintonizável” em uma ou mais faixas de frequência.

A maioria dos circuitos *shunts* é de natureza passiva. Isto implica que eles podem ser realizados utilizando-se componentes passivos, isto é, resistores, indutores e capacitores. Uma impedância elétrica do tipo *shunt* é dita passiva, se somente se, ela não fornece energia ao sistema. E o maior benefício da passividade é que a

estabilidade do sistema *shunt* é garantida. Um diagrama esquemático das técnicas de amortecimento *shunt* passivo esta apresentado na Figura 2.9.

Figura 2.9 – Técnicas de amortecimento piezoelétrico tipo *shunt* passivo.



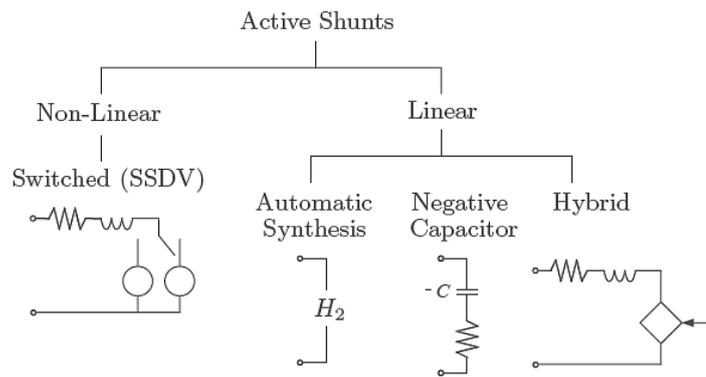
Fonte: Moheimani e Fleming (2006).

Para complementar essa discussão, um circuito *shunt* linear é definido como qualquer impedância que possua uma relação linear entre a corrente e a tensão elétrica, para a faixa de frequências de interesse. Por essa definição, variando lentamente as impedâncias, tais como nos *shunts* adaptativos, e *shunts* implementados por um amplificador chaveado, são classificados lineares.

Ao permitir que uma impedância tipo *shunt* possa ser ativa, é possível projetar circuitos que são capazes de proporcionar níveis mais elevados de desempenho, em termos de adição de amortecimento ao sistema. Impedâncias do tipo *shunt* ativo não podem ser realizadas utilizando-se componentes físicos passivos. Nesse caso, a

estabilidade do sistema não pode ser garantida, apesar do fato que circuitos *shunt* ativos possam proporcionar maior redução de vibração em relação a sistemas passivos. Um diagrama esquemático de algumas das técnicas de amortecimento *shunt* ativo está exemplificado na Figura 2.10.

Figura 2.10 – Técnicas de amortecimento piezoelétrico tipo *shunt* ativo.



Fonte: Moheimani e Fleming (2006).

Outro modo de melhorar as respostas de controle de um sistema é utilizando algumas técnicas de controle avançadas, como os métodos LQG (*Linear Quadratic Gaussian*),  $H_\infty$  (H infinito) e  $H_2$  (controle ótimo), etc. que podem ser empregados para criar circuitos *shunt* de alto desempenho.

Temos ainda a utilização de sistemas híbridos que podem fazer uso de mais de uma técnica de controle, utilizando rotinas de programação e métodos computacionais para auxiliar os circuitos eletroeletrônicos. Embora a solução ótima seja numericamente pesada (em termos de processamento de dados) para ser calculada em tempo real, uma solução simplificada próxima a ideal pode ser facilmente aplicada.

Iremos focar nos circuitos *shunt* de capacitância negativa, pois são os que iremos utilizar nesse trabalho.

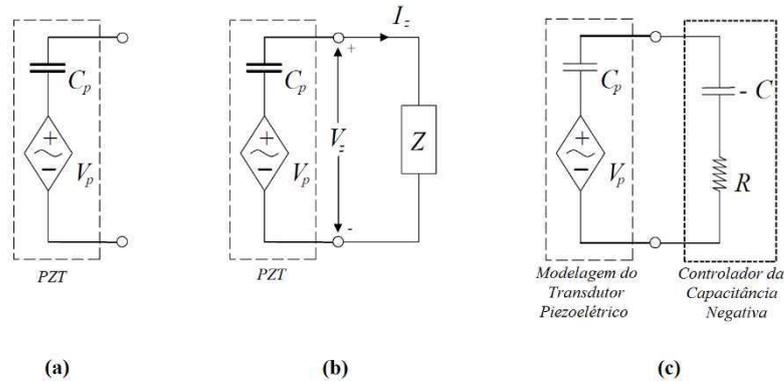
### 2.2.1 Circuitos shunt de capacitância negativa

O circuito *shunt* de capacitância negativa é uma técnica relativamente nova, simples e de fácil aplicação capaz de aumentar de forma considerável o amortecimento estrutural de sistemas, podendo ser aplicado em uma ampla faixa de frequências. Sua aplicação é semelhante às técnicas passivas de amortecimento *shunt* multimodais, onde apenas um transdutor piezoelétrico é utilizado para amortecer a estrutura. Esse método é considerado uma técnica ativa de controle de vibrações, pelo fato de que capacitores “negativos” não podem ser construídos utilizando componentes passivos e não podemos garantir a estabilidade incondicional do sistema quando em circuito fechado. Eles são de simples concepção e capazes de promover bom desempenho com uma pequena dependência das frequências de ressonância da estrutura.

Sua maior desvantagem é a sua sensibilidade às variações de capacitância do transdutor, que segundo Moheimani e Fleming (2006) um acréscimo de 10% na capacitância do transdutor pode causar uma significativa perda de desempenho do circuito ou causar instabilidade. Essa sensibilidade pode tornar seu uso em aplicações que envolvam grandes variações de temperatura complicada.

O transdutor piezoelétrico pode ser considerado como uma fonte de tensão  $V_P$ , que é gerada quando o mesmo é submetido a uma tensão ou deformação mecânica, em série com um capacitor  $C_P$ , que representa a capacitância interna do transdutor, devido a seu comportamento elétrico de armazenar cargas, como mostrado na Figura 2.11 (a). A impedância elétrica do circuito associado ao piezoelétrico é representada pela variável  $Z$ , apresentada na Figura 2.11 (b). Nesse caso a impedância ( $Z$ ) é composta por um “capacitor negativo” ( $-C$ ) e uma resistência  $R$ , que pode estar em série ou em paralelo com o capacitor (Figura 2.11 (c)).

Figura 2.11 – (a) Modelo equivalente do transdutor piezoelétrico. (b) Representação do piezoelétrico associado à impedância do circuito  $Z$ . (c) E o controlador da capacitância negativa com a resistência elétrica.



Fonte: Adaptado de Behrens, Fleming e Moheimani (2001).

Capacitores negativos não são fisicamente realizáveis, mais podem ser implementados através de circuitos Conversores de Impedância Negativa (NIC), que será tema do nosso próximo tópico.

A impedância ótima (circuito *shunt*) é igual em magnitude à impedância da fonte (piezoelétrico), porém oposta em fase, esse efeito é causado pelo o que chamamos de “capacitor negativo”. A ideia principal é criar uma capacitância de mesmo valor da capacitância interna do piezoelétrico, porém com sinal oposto (negativo), de modo que elas se anulem e toda a energia elétrica gerada no transdutor seja convertida única e exclusivamente, por um resistor dissipador que, por sua vez, é independente da frequência, e por isso possibilita o controle simultâneo de vários modos de vibração.

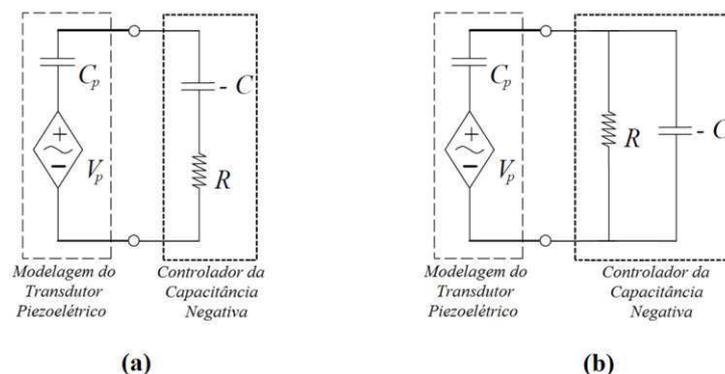
Seu funcionamento se dá da seguinte forma: 1º) a estrutura é excitada externamente para que se desloque com uma determinada amplitude e frequência; 2º) esse deslocamento causa uma deformação localizada na estrutura no ponto onde estarão colados os transdutores piezoelétricos, e que pelo fato dos transdutores estarem colados a estrutura, estes também se deformam; 3º) ao se deformarem os transdutores geram uma tensão elétrica em seus terminais; 4º) essa tensão elétrica gerada é direcionada diretamente ao circuito elétrico, onde um resistor será o componente responsável pela transformação de energia elétrica em

energia térmica, que será posteriormente dissipada no ambiente. Essa técnica é semelhante à utilizada em circuitos *shunt* ressonantes resistivos, porém seu controle é feito para múltiplos modos com uma eficiência muito maior.

Dessa forma, ocorre a transformação da energia de deformação, em energia elétrica e posteriormente em energia térmica, resultando em um aumento da capacidade de amortecimento do sistema. Vale lembrar que nesse caso, o piezoelétrico funciona ao mesmo tempo como atuador e como sensor.

Como afirmamos antes, o resistor pode ser associado de duas maneiras diferentes no circuito *shunt*, em série ou em paralelo com o capacitor, como mostrado na Figura 2.12. Park e Park (2003) estudaram a influência do uso do circuito shunt de capacitância negativa com a resistência elétrica em série e em paralelo. Utilizando o método do máximo fator de perda como parâmetro de comparação entre os circuitos em série e em paralelo, chegou-se à conclusão de que o fator de conversão de energia mecânica em elétrica é máximo quando o sistema está oscilando em altas frequências para o caso do circuito em paralelo, e em baixas frequências para o caso em que o circuito está em série.

Figura 2.12 – Modelo de circuito de capacitância negativa: (a) série e (b) paralelo.



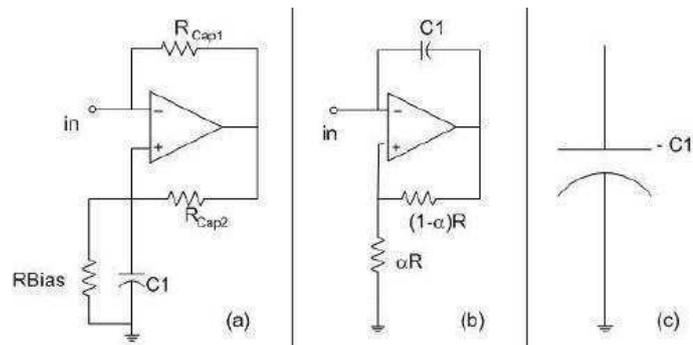
Fonte: Adaptado de Park e Park (2003).

Portanto, como o nosso objetivo é a máxima redução das amplitudes de deslocamento da estrutura, escolheremos o circuito que possui maior eficiência. Pelo fato do nosso sistema possuir suas frequências naturais em uma faixa de

baixos valores e devido aos motivos apresentados, optamos pela utilização do circuito *shunt* de capacitância negativa com resistência em série.

Os capacitores negativos podem ser obtidos através de circuitos eletrônicos chamados de Conversores de Impedância Negativa (NIC – do inglês Negative Impedance Converters). Esses circuitos são normalmente compostos por amplificadores operacionais de forma a obter uma impedância de entrada em seus terminais igual às impedâncias que compõe o circuito. A Figura 2.13 apresenta diferentes tipos de circuitos NIC encontrados na literatura.

Figura 2.13 – Esquemas de circuitos NIC e seu equivalente eletrônico.

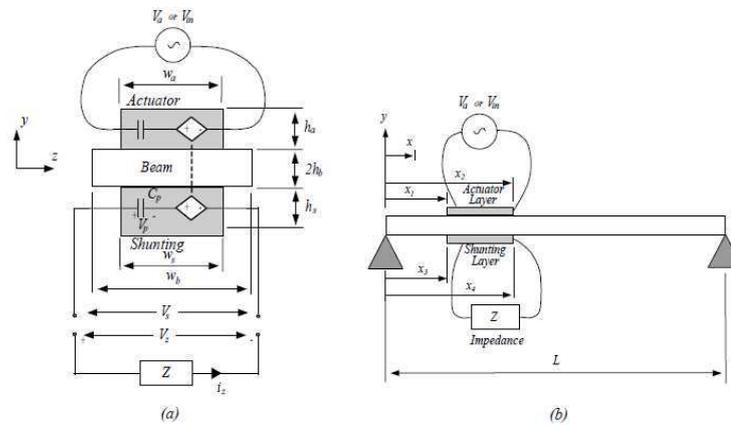


Fonte: Santana (2007).

### 2.3 Aplicação de transdutores piezoelétricos

Transdutores piezoelétricos tem-se mostrado uma boa opção na tentativa de redução das vibrações em mecanismos e em sistemas mecânicos. Um dos tipos mais eficientes e modernos no controle de circuitos associados à piezoelétricos é o circuito *shunt* de capacitância negativa. Behrens, Fleming e Moheimani (2001), estudaram o efeito teórico e experimental de um controlador do tipo “capacitor negativo” associado à piezoelétricos do tipo lâmina, em uma viga simplesmente apoiada, como representada na Figura 2.14.

Figura 2.14 – (a) Seção transversal da viga com os piezoelétricos presentes; (b) viga simplesmente apoiada com os piezoelétricos em sua superfície.

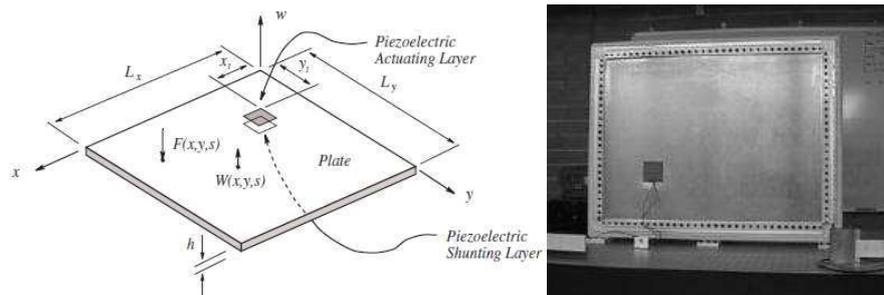


Fonte: Behrens, Fleming e Moheimani (2001).

As amplitudes de ressonância experimentais do sistema para a 1<sup>o</sup>, 2<sup>o</sup>, 3<sup>o</sup>, 4<sup>o</sup> e 5<sup>o</sup> modos de vibração, foram reduzidas em cerca de 6,1, 16,3, 15,2, 11,7 e 10,2 dB, respectivamente.

Behrens, Fleming e Moheimani (2003), publicaram outro trabalho, utilizando o mesmo princípio da capacitância negativa, analisando o estudo de forma teórica e validando os resultados experimentalmente. Porém, dessa vez, eles utilizaram os piezoelétricos em forma de lâmina em uma placa retangular simplesmente apoiada, como mostrado na Figura 2.15, abaixo.

Figura 2.15 – Estrutura do tipo placa simplesmente apoiada com piezoelétrico colado em sua superfície.

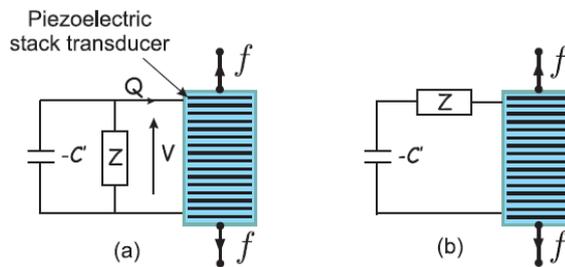


Fonte: Behrens, Fleming e Moheimani (2003).

Experimentalmente, as amplitudes de resposta em ressonância dos seis primeiros modos foram reduzidas com sucesso em 5,8, 20,1, 18,2, 3,8, 16,7 e 17,2 *dB*. Das equações teóricas, se esperava um decréscimo nas amplitudes de ressonância de 6,8, 22,8, 20,1, 6,2, 19,6 e 22,4 *dB*, respectivamente.

O trabalho de Marneffe e Preumont (2008) analisa de forma teórica e experimental, o uso de transdutores piezoelétricos na forma de pastilhas (*stacks*), com os circuitos shunt de capacitância negativa, a fim de verificar sua eficiência. A estabilidade do circuito proposto é determinada através da curva de admitância elétrica do transdutor e um método é introduzido para quantificar as faixas de valores que levam a estabilidade da estrutura conectada ao circuito. Testando-se também, as configurações série e paralelo dos circuitos, como mostrado na Figura 2.16, e comparando-os com outros tipos de configuração.

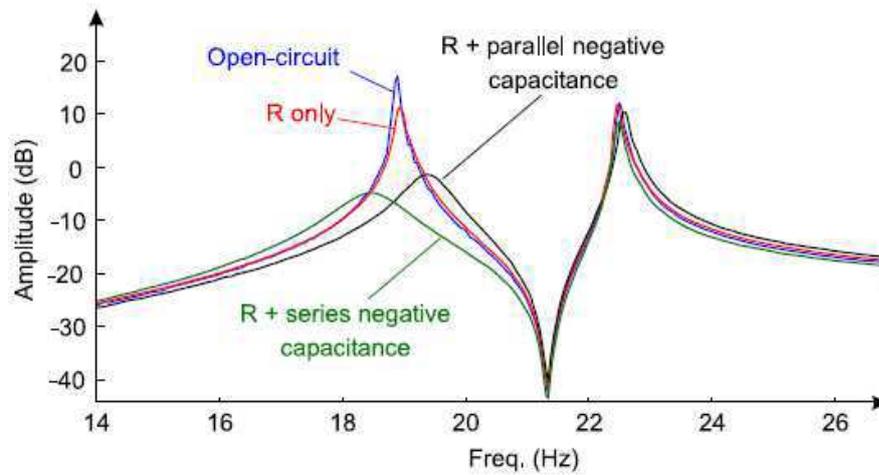
Figura 2.16 – Circuitos *shunt* de capacitância negativa: (a) em série; (b) e em paralelo.



Fonte: Marneffe e Preumont (2008).

Eles obtiveram ótimos resultados, observando-se que a atenuação adquirida pelo circuito *shunt* de capacitância negativa, foi superior ao que foi obtido, por exemplo, nos circuitos *shunt* passivos. Houve uma redução de aproximadamente 21,9 e 18,4 *dB*, para as duas primeiras frequências naturais de ressonância experimentais, como apresentado na Figura 2.17.

Figura 2.17 – Respostas experimentais da estrutura.



Fonte: Marneffe e Preumont (2008).

Beck *et al.* (2011) estudou o desempenho de um circuito de capacitância negativa, conectado a piezoelétricos em forma de lâminas colados em uma estrutura semelhante a um painel rígido, utilizado em aeronaves, como mostrado na Figura 2.18.

Figura 2.18 – Painel rígido em teste, com os piezoelétricos colados.



Fonte: Beck *et al.* (2011).

O posicionamento dos piezoelétricos foi determinado, utilizando-se um modelo de elementos finitos simplificado de uma parte do painel. Os resultados numéricos foram comparados com os resultados experimentais para vibração média espacial, para uma entrada do tipo força, aplicada em um único ponto. A quantidade de controle necessária em função do aumento de transdutores, também foi investigada.

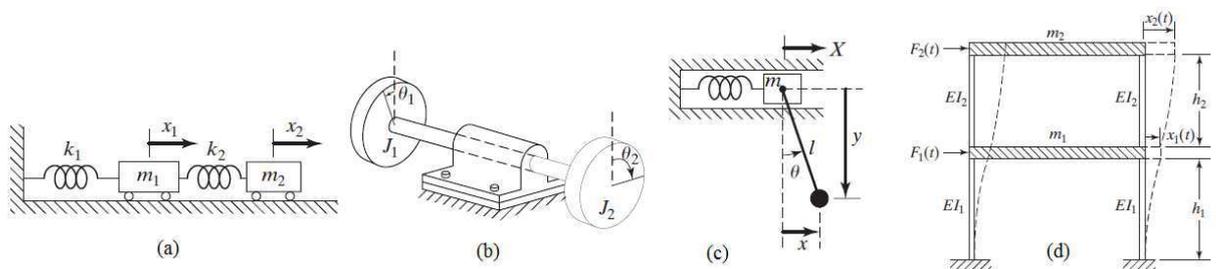
Quando o controle de um único piezoelétrico é aplicado experimentalmente, a resposta é reduzida em  $7,8 \text{ dB}$  na primeira frequência de ressonância, ao mesmo tempo que controla outras três frequências de ressonância. A redução na resposta total do painel para a primeira frequência foi de  $3,7 \text{ dB}$  com um único piezoelétrico, e aumentou-se essa redução para  $8 \text{ dB}$ , com a adição de mais quatro transdutores. Foi observado que caso houvesse um aumento na quantidade de piezoelétricos, haveria um incremento na redução das amplitudes. Notou-se também que o controle utilizando o método da capacitância negativa se mostrou robusto e eficaz de controlar até frequências naturais de ressonância em uma faixa de valores mais alta.

### 3 ABORDAGEM TEÓRICA E FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

#### 3.1 Sistemas com 2 GDL

São sistemas que necessitam de pelo menos duas coordenadas independentes para descrever o seu movimento. Alguns exemplos de sistemas com dois graus de liberdade (GDL) são mostrados na Figura 3.1.

Figura 3.1 – Sistemas que possuem 2 GDL.



Fonte: Rao (2011).

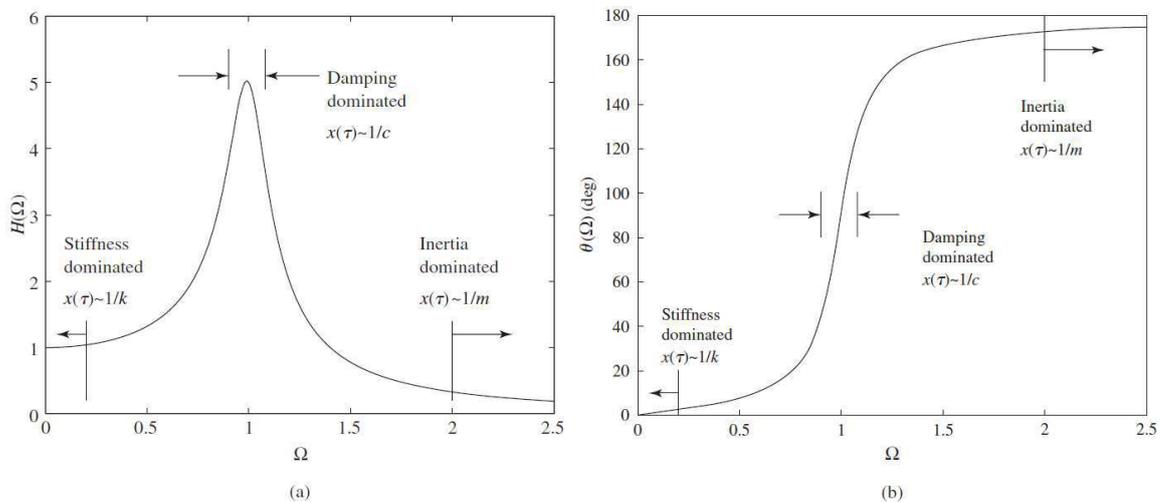
No caso da Figura 3.1 (a), seu movimento pode ser descrito por  $x_1$  e  $x_2$ , na (b) por  $\theta_1$  e  $\theta_2$ , na (c) por  $X$  e  $\theta$  e na (d) por  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$ , portanto, todos os sistemas mostrados podem ter seus movimentos descritos por apenas duas variáveis.

Dessa forma, a partir do diagrama de corpo livre de qualquer sistema apresentado na Figura 3.1, obteremos duas equações de movimento para um sistema com dois graus de liberdade, uma para cada grau de liberdade. Em geral, essas equações estão na forma de equações diferenciais acopladas, isto é, cada equação envolve todas as coordenadas do sistema. Caso consideremos uma solução harmônica para cada equação, elas vão gerar uma equação característica que permite obter duas frequências naturais ou fundamentais para o sistema. Aplicando a excitação inicial adequada, o sistema pode vibrar em umas das suas frequências naturais e durante a vibração livre em uma dessas frequências as amplitudes de vibração desse sistema estarão relacionadas de uma forma específica. Denominamos essa forma de vibrar de modo principal ou modo normal

de vibração. Portanto, um sistema com 2 GDL possui dois modos normais de vibração, correspondentes as suas duas frequências naturais.

Ao aplicarmos uma excitação externa inicial arbitrária ao sistema, a vibração livre resultante será a sobreposição dos dois modos normais de vibração. Contudo, se o sistema vibrar sob a ação de uma força harmônica externa, a vibração harmônica resultante ocorrerá exatamente à frequência da força aplicada. Caso a frequência da força harmônica externa coincidir com uma das frequências naturais de vibração do sistema, ocorrerá um fenômeno conhecido como ressonância, e as amplitudes de resposta serão máximas. Um gráfico típico da amplitude e do ângulo de fase da resposta em função da razão de frequências adimensional é apresentado na Figura 3.2 (a) e (b), para um sistema com um grau de liberdade.

Figura 3.2 – As três regiões de um sistema com um grau de liberdade: (a) amplitude de resposta e (b) ângulo de fase da resposta.



Fonte: Balachandran e Magrab (2009).

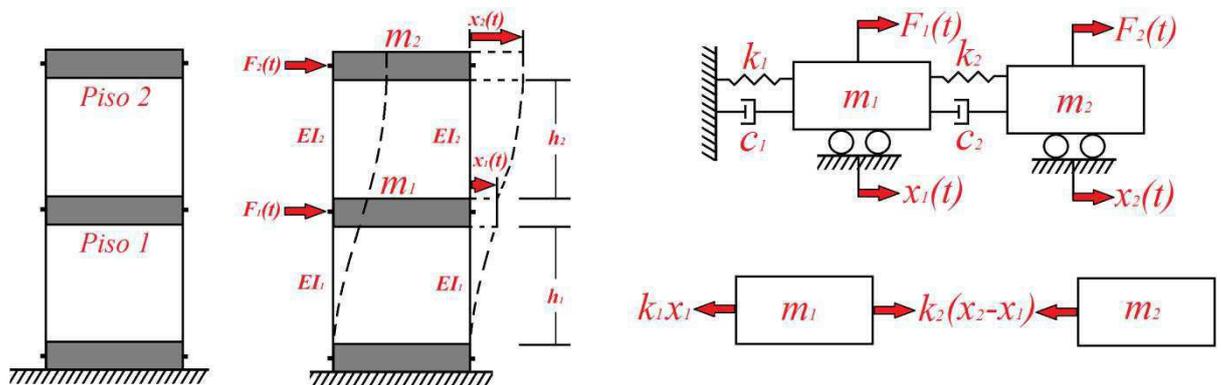
Embora as equações de movimento sejam acopladas, de forma que cada equação comporte todas as coordenadas, é possível determinar um conjunto particular de coordenadas, de forma que cada equação de movimento resultante contenha apenas uma coordenada. Nesse caso, as equações de movimento tornam-

se não acopladas e podem ser determinadas separadamente, tal conjunto de coordenadas é denominado coordenadas principais.

### 3.1.1 Vibração livre não amortecida

Considere um sistema massa-mola com dois graus de liberdade como mostrado na Figura 3.3. O movimento do sistema pode ser descrito pelas coordenadas  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$ , que definem as posições das massas  $m_1$  e  $m_2$  em qualquer instante de tempo  $t$ , em relação às respectivas posições de equilíbrio. As forças externas  $F_1(t)$  e  $F_2(t)$  agem sobre as massas  $m_1$  e  $m_2$ , respectivamente.

Figura 3.3 – Sistema massa-mola com 2 GDL e seu respectivo diagrama de corpo livre (DCL)



Fonte: Autoria própria.

A aplicação da segunda lei do movimento de Newton a cada uma das massas gera a equação de movimento na forma de matriz:

$$[m]\ddot{\vec{x}}(t) + [c]\dot{\vec{x}}(t) + [k]\vec{x}(t) = \vec{F}(t) \quad (3.1)$$

Onde  $[m]$ ,  $[c]$  e  $[k]$  são denominadas matrizes de massa, amortecimento e rigidez, respectivamente e são dadas por:

$$[m] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}, [c] = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \text{ e } [k] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}.$$

Para a análise de vibração livre, consideraremos o sistema mostrado anteriormente na Figura 3.3 e fazendo  $F_1(t) = F_2(t) = 0$  na Equação 3.1. Desprezando, ainda, o amortecimento ( $c_1 = c_2 = 0$ ), as equações de movimento reduzem-se a:

$$m_1 \cdot \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2) \cdot x_1 - k_2 \cdot x_2 = 0 \quad (3.2)$$

$$m_2 \cdot \ddot{x}_2 - k_2 \cdot x_1 + k_2 \cdot x_2 = 0 \quad (3.3)$$

Admitindo que seja possível haver movimento harmônico de  $m_1$  em  $m_2$  a mesma frequência  $\omega$  e com mesmo ângulo de fase  $\varphi$ , tomamos as soluções das Equações (3.2) e (3.3) como,

$$x_1(t) = X_1 \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

$$x_2(t) = X_2 \cdot \cos(\omega t + \varphi) \quad (3.4)$$

Com suas respectivas derivadas segundas iguais a:

$$\ddot{x}_1(t) = -X_1 \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\ddot{x}_2(t) = -X_2 \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega t + \varphi) \quad (3.5)$$

Onde  $X_1$  e  $X_2$  são variáveis que denotam as amplitudes máximas de  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$ , e  $\varphi$  é o ângulo de fase. Substituindo as Equações (3.4) e (3.5) nas Equações (3.2) e (3.3), obtemos:

$$\begin{aligned} & [ \{-m_1 \cdot \omega^2 + (k_2 + k_1)\} \cdot X_1 - k_2 \cdot X_2 ] \cdot \cos(\omega t + \varphi) = 0 \\ & [ \{-m_2 \cdot \omega^2 + k_2\} \cdot X_2 - k_2 \cdot X_1 ] \cdot \cos(\omega t + \varphi) = 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Visto que a Equação (3.6) deve ser satisfeita para todos os valores de tempo  $t$ , os termos entre colchetes devem ser nulos. Isso resulta em,

$$\begin{aligned} & [ \{-m_1 \cdot \omega^2 + (k_2 + k_1)\} \cdot X_1 - k_2 \cdot X_2 ] = 0 \\ & [ \{-m_2 \cdot \omega^2 + k_2\} \cdot X_2 - k_2 \cdot X_1 ] = 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

Que pode ser reescrita na forma matricial,

$$\begin{bmatrix} (-\omega^2 \cdot m_1 + k_1 + k_2) & -k_2 \\ -k_2 & (-\omega^2 \cdot m_2 + k_2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Em forma matricial, temos representadas as duas equações algébricas homogêneas simultâneas com as incógnitas  $X_1$  e  $X_2$ . Podemos observar que a Equação (3.7) é satisfeita pela solução trivial, onde  $X_1 = X_2 = 0$ , o que implica que não há nenhuma vibração. Para uma solução não trivial de  $X_1$  e  $X_2$ , o determinante dos coeficientes de  $X_1$  e  $X_2$  deve ser zero:

$$\det \begin{bmatrix} (-\omega^2 \cdot m_1 + k_1 + k_2) & -k_2 \\ -k_2 & (-\omega^2 \cdot m_2 + k_2) \end{bmatrix} = 0$$

Ou,

$$\omega^4 \cdot m_1 \cdot m_2 - \omega^2 \cdot (m_2 \cdot k_1 + m_2 \cdot k_2 + m_1 \cdot k_1) + k_1 \cdot k_2 = 0 \quad (3.9)$$

A Equação (3.9) é denominada equação característica porque a solução dessa equação fornece as frequências ou os valores característicos do sistema. As raízes da Equação (3.9) são dadas por (RAO, 2011):

$$\omega_1^2, \omega_2^2 = \frac{(m_2 \cdot k_1 + m_2 \cdot k_2 + m_1 \cdot k_2) \mp \sqrt{(m_2 \cdot k_1 + m_2 \cdot k_2 + m_1 \cdot k_2)^2 - 4 \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot k_1 \cdot k_2}}{2 \cdot m_1 \cdot m_2} \quad (3.10)$$

Portanto, é possível que o sistema tenha uma solução harmônica não trivial da forma da Equação (3.4) quando  $\omega$  é igual a  $\omega_1$  e  $\omega_2$  dadas pela Equação (3.10). Denominamos  $\omega_1$  e  $\omega_2$  as frequências naturais do sistema, tais que:

$$\omega_1^2 = \frac{(m_2 \cdot k_1 + m_2 \cdot k_2 + m_1 \cdot k_2) - \sqrt{(m_2 \cdot k_1 + m_2 \cdot k_2 + m_1 \cdot k_2)^2 - 4 \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot k_1 \cdot k_2}}{2 \cdot m_1 \cdot m_2} \quad (3.11)$$

$$\omega_2^2 = \frac{(m_2 \cdot k_1 + m_2 \cdot k_2 + m_1 \cdot k_2) + \sqrt{(m_2 \cdot k_1 + m_2 \cdot k_2 + m_1 \cdot k_2)^2 - 4 \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot k_1 \cdot k_2}}{2 \cdot m_1 \cdot m_2} \quad (3.12)$$

Resta determinar os valores de  $X_1$  e  $X_2$ . Esses valores dependem de  $\omega_1$  e  $\omega_2$ . Denominaremos os valores de  $X_1$  e  $X_2$  correspondentes a  $\omega_1$  como  $X_1^{(1)}$  e  $X_2^{(1)}$  e os correspondentes a  $\omega_2$  como  $X_1^{(2)}$  e  $X_2^{(2)}$ . Como visto anteriormente, a Equação (3.7) é homogênea, portanto, somente as razões  $r_1 = (X_2^{(1)} / X_1^{(1)})$  e  $r_2 = (X_2^{(2)} / X_1^{(2)})$  podem ser determinadas. Se fizermos  $\omega^2 = \omega_1^2$  e  $\omega^2 = \omega_2^2$ , a Equação (3.7) nos dará:

$$\begin{aligned}
 r_1 &= \frac{X_2^{(1)}}{X_1^{(1)}} = \frac{-m_1\omega_1^2 + (k_1 + k_2)}{k_2} = \frac{k_2}{-m_2\omega_1^2 + k_2} \\
 r_2 &= \frac{X_2^{(2)}}{X_1^{(2)}} = \frac{-m_1\omega_2^2 + (k_1 + k_2)}{k_2} = \frac{k_2}{-m_2\omega_2^2 + k_2}
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

Podemos ver que as duas equações dadas para cada  $r_i$  ( $i = 1, 2$ ) na equação anterior são idênticas. Então, os modos normais de vibração correspondentes a  $\omega_1^2$  e  $\omega_2^2$  podem ser expressos, respectivamente, como:

$$\begin{aligned}
 \vec{X}^{(1)} &= \begin{pmatrix} X_1^{(1)} \\ X_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1^{(1)} \\ r_1 X_1^{(1)} \end{pmatrix} \\
 \vec{X}^{(2)} &= \begin{pmatrix} X_1^{(2)} \\ X_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1^{(2)} \\ r_1 X_1^{(1)} \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

Os vetores  $\vec{X}^{(1)}$  e  $\vec{X}^{(2)}$ , que representam os modos normais de vibração, são conhecidos como vetores modais do sistema. A solução de vibração livre ou o movimento no tempo pode ser expresso pela Equação (3.4), como:

$$\begin{aligned}
 \vec{x}^{(1)}(t) &= \begin{pmatrix} x_1^{(1)}(t) \\ x_2^{(1)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1^{(1)} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ r_1 X_1^{(1)} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \end{pmatrix} = \textit{primeiro modo} \\
 \vec{x}^{(2)}(t) &= \begin{pmatrix} x_1^{(2)}(t) \\ x_2^{(2)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1^{(2)} \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ r_2 X_1^{(2)} \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{pmatrix} = \textit{segundo modo}
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

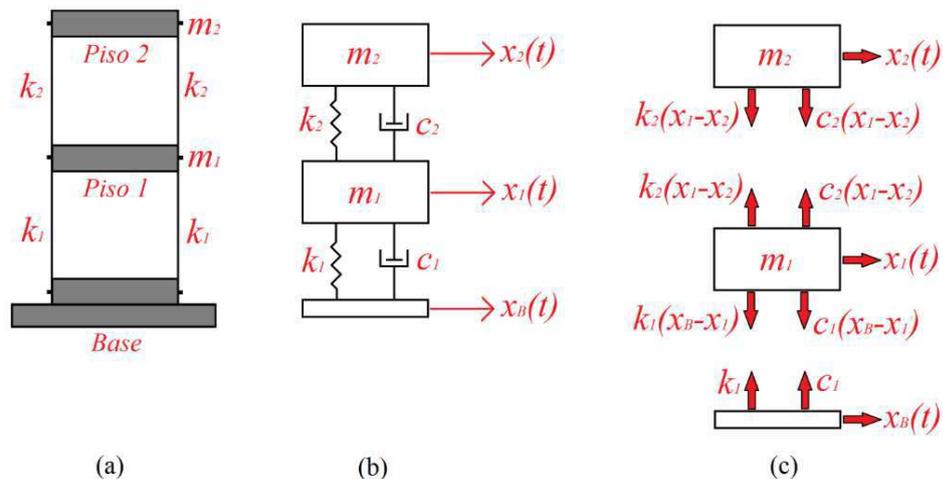
Onde as constantes  $\vec{X}^{(1)}$ ,  $\vec{X}^{(2)}$ ,  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  são determinadas pelas condições iniciais do problema, do qual obtemos a solução desejada

$$\begin{aligned}
X_1^{(1)} &= \left[ \left\{ X_1^{(1)} \cos \varphi_1 \right\}^2 + \left\{ X_1^{(1)} \sin \varphi_1 \right\}^2 \right]^{1/2} \\
X_1^{(1)} &= \frac{1}{(r_2 - r_1)} \left[ \left\{ r_2 x_1(0) - x_2(0) \right\}^2 + \frac{\{-r_2 \dot{x}_1(0) + \dot{x}_2(0)\}^2}{\omega_1^2} \right]^{1/2} \\
X_1^{(2)} &= \left[ \left\{ X_1^{(2)} \cos \varphi_2 \right\}^2 + \left\{ X_1^{(2)} \sin \varphi_2 \right\}^2 \right]^{1/2} \\
X_1^{(2)} &= \frac{1}{(r_2 - r_1)} \left[ \left\{ -r_1 x_1(0) + x_2(0) \right\}^2 + \frac{\{r_1 \dot{x}_1(0) - \dot{x}_2(0)\}^2}{\omega_2^2} \right]^{1/2} \\
\varphi_1 &= \tan^{-1} \left\{ \frac{X_1^{(1)} \sin \varphi_1}{X_1^{(1)} \cos \varphi_1} \right\} = \tan^{-1} \left\{ \frac{-r_2 \dot{x}_1(0) + \dot{x}_2(0)}{\omega_1 [r_2 x_1(0) - x_2(0)]} \right\} \\
\varphi_2 &= \tan^{-1} \left\{ \frac{X_1^{(2)} \sin \varphi_2}{X_1^{(2)} \cos \varphi_2} \right\} = \tan^{-1} \left\{ \frac{r_1 \dot{x}_1(0) - \dot{x}_2(0)}{2[-r_1 x_1(0) + x_2(0)]} \right\} \tag{3.16}
\end{aligned}$$

### 3.1.2 Vibração forçada amortecida submetida à excitação de base

Considerando a estrutura apresentada na Figura 3.4, junto com seu DCL, podemos aplicar as equações de equilíbrio para encontrar as respostas do sistema.

Figura 3.4 – (a) Representação esquemática da estrutura, (b) diagrama de massas concentradas e (c) diagrama de corpo livre do pórtico.



Fonte: Autoria própria.

Aplicando as equações de equilíbrio de Newton ao sistema amortecido com dois GDL submetido à excitação de base, temos que:

$$\begin{aligned} m_1 \cdot \ddot{x}_1 - c_1(\dot{x}_B - \dot{x}_1) + c_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k_1(x_B - x_1) + k_2(x_1 - x_2) &= 0 \\ m_2 \cdot \ddot{x}_2 - c_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k_2(x_1 - x_2) &= 0 \end{aligned} \quad (3.17)$$

Rearranjando os termos da equação anterior, temos:

$$\begin{aligned} [m_1 \cdot \ddot{x}_1 + (c_1 + c_2) \cdot \dot{x}_1 + (k_1 + k_2) \cdot x_1] + [-c_2 \cdot \dot{x}_2 - k_2 x_2] &= [k_1 \cdot x_B + c_1 \cdot \dot{x}_B] = f_1(t) \\ [m_2 \cdot \ddot{x}_2 + c_2 \cdot \dot{x}_2 + k_2 \cdot x_2] + [-c_2 \cdot \dot{x}_1 - k_2 \cdot x_1] &= 0 = f_2(t) \end{aligned} \quad (3.18)$$

Agora, aplicando a teoria da Transformada de Laplace na Equação (3.18):

$$\begin{aligned} [m_1 \cdot \{s^2 \cdot X_1(s) - s \cdot x_1(0) - \dot{x}_1(0)\} + (c_1 + c_2) \cdot \{s \cdot X_1(s) - x_1(0)\} + (k_1 + \\ k_2) \cdot \{X_1(s)\}] + [-c_2 \cdot \{s \cdot X_2(s) - x_2(0)\} - k_2 \{X_2(s)\}] &= [k_1 \cdot \{X_B(s)\} + c_1 \cdot \{s \cdot X_B(s) - \\ x_B(0)\}] = F_1(s) \\ [m_2 \cdot \{s^2 \cdot X_2(s) - s \cdot x_2(0) - \dot{x}_2(0)\} + c_2 \cdot \{s \cdot X_2(s) - x_2(0)\} + k_2 \cdot \{X_2(s)\}] + \\ [-c_2 \cdot \{s \cdot X_1(s) - x_1(0)\} - k_2 \cdot \{X_1(s)\}] &= 0 = F_2(s) \end{aligned} \quad (3.19)$$

Assumindo as condições iniciais do sistema como sendo  $x_1(0) = x_2(0) = 0$  e  $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$ . E sabendo ainda que  $F_1(s) = [k_1 \cdot \{X_B(s)\} + c_1 \cdot \{s \cdot X_B(s) - x_B(0)\}]$  e  $F_2(s) = 0$ , temos que a Equação (3.19) pode ser reescrita na forma:

$$\begin{aligned} [s^2 \cdot X_1(s) \cdot m_1 + s \cdot X_1(s) \cdot (c_1 + c_2) + X_1(s) \cdot (k_1 + k_2)] + [-s \cdot X_2(s) \cdot c_2 - X_2(s) \cdot k_2] &= \\ = F_1(s) \end{aligned}$$

$$[s^2 \cdot X_2(s) \cdot m_2 + s \cdot X_2(s) \cdot c_2 + X_2(s) \cdot k_2] + [-s \cdot X_1(s) \cdot c_2 - X_1(s) \cdot k_2] = 0 \quad (3.20)$$

Colocando  $X_1(s)$  e  $X_2(s)$  em evidência,

$$X_1(s) \cdot [s^2 \cdot m_1 + s \cdot (c_1 + c_2) + (k_1 + k_2)] + X_2(s) [-s \cdot c_2 - k_2] = F_1(s)$$

$$X_2(s) \cdot [s^2 \cdot m_2 + s \cdot c_2 + k_2] + X_1(s) \cdot [-s \cdot c_2 - k_2] = 0 \quad (3.21)$$

Que em forma matricial fica:

$$\begin{bmatrix} s^2 \cdot m_1 + s \cdot (c_1 + c_2) + (k_1 + k_2) & -s \cdot c_2 - k_2 \\ -s \cdot c_2 - k_2 & s^2 \cdot m_2 + s \cdot c_2 + k_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{Bmatrix} = [A] \cdot \{X(s)\} = \begin{Bmatrix} F_1(s) \\ F_2(s) \end{Bmatrix} = \{F(s)\} \quad (3.22)$$

Para a Equação (3.22), definimos quatro funções de transferência. Note que para funções de transferência envolvendo  $F_1(s)$ , assumimos  $F_2(s) = 0$  e vice-versa. São elas  $X_1(s) / F_1(s)$ ,  $X_1(s) / F_2(s)$ ,  $X_2(s) / F_1(s)$  e  $X_2(s) / F_2(s)$ . Utilizando a regra de *Cramer*, podemos resolver a equação matricial para  $X_1(s)$  e  $X_2(s)$ .

$$X_1(s) = \frac{\det \begin{pmatrix} F_1(s) & -s \cdot c_2 - k_2 \\ F_2(s) & s^2 \cdot m_2 + s \cdot c_2 + k_2 \end{pmatrix}}{\det(A)} = \left( \frac{s^2 \cdot m_2 + s \cdot c_2 + k_2}{\det(A)} \right) \cdot F_1(s) + \left( \frac{-s \cdot c_2 - k_2}{\det(A)} \right) \cdot F_2(s)$$

$$X_2(s) = \frac{\det \begin{pmatrix} s^2 \cdot m_1 + s \cdot (c_1 + c_2) + (k_1 + k_2) & F_1(s) \\ -s \cdot c_2 - k_2 & F_2(s) \end{pmatrix}}{\det(A)} = \left( \frac{-s \cdot c_2 - k_2}{\det(A)} \right) \cdot F_1(s) + \left( \frac{s^2 \cdot m_1 + s \cdot (c_1 + c_2) + (k_1 + k_2)}{\det(A)} \right) \cdot F_2(s) \quad (3.23)$$

Onde  $\det(A) = [s^2 \cdot m_1 + s \cdot (c_1 + c_2) + (k_1 + k_2)] \cdot [s^2 \cdot m_2 + s \cdot c_2 + k_2] - (-s \cdot c_2 - k_2)^2$ .

Fazendo na Equação (3.19),  $F_2(s) = 0$ , ficaremos com apenas duas funções de transferência que regem o nosso sistema. Multiplicando essas equações pelas rigidezes modais do sistema  $k_1$  e  $k_2$ , respectivamente, temos a função de transferência no domínio de Laplace na forma adimensional.

$$\begin{aligned} H_1(s) &= X_1(s) \cdot k_1 / F_1(s) = (s^2 \cdot m_2 \cdot k_1 + s \cdot c_2 \cdot k_1 + k_2 \cdot k_1) / \det(A) \\ H_2(s) &= X_2(s) \cdot k_2 / F_1(s) = (-s \cdot c_2 \cdot k_2 - k_2 \cdot k_2) / \det(A) \end{aligned} \quad (3.24)$$

A resposta total do sistema é dada pela soma da função de transferência da primeira massa e da segunda massa, o que resulta em:

$$Ht(s) = \frac{X_1(s) \cdot k_1}{F_1(s)} + \frac{X_2(s) \cdot k_2}{F_1(s)} = \left( \frac{-s \cdot c_2 \cdot k_2 - k_2 \cdot k_2}{\det(A)} \right) + \left( \frac{s^2 \cdot m_2 \cdot k_1 + s \cdot c_2 \cdot k_1 + k_2 \cdot k_1}{\det(A)} \right) \quad (3.25)$$

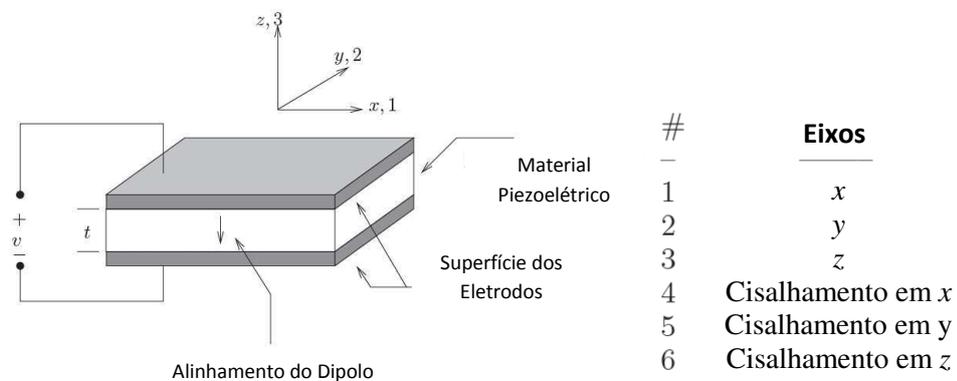
### 3.2 Equações que regem o fenômeno piezoelétrico

Nesta seção iremos apresentar as equações que descrevem as propriedades eletromecânicas dos materiais piezoelétricos e consideraremos que os mesmos se comportam de forma linear, pois sabemos que quando submetidos a baixos níveis de estresse mecânico e baixos campos de tensão elétrica, as propriedades desses materiais realmente se comportam linearmente. No entanto, eles podem apresentar grandes não linearidades no caso de campos elétricos elevados e altos níveis de tensão forem aplicados sobre o material. Portanto, como na maioria de suas aplicações, consideraremos que os transdutores piezoelétricos estarão operando sobre baixos níveis de tensão mecânica e de campo elétrico.

As equações constitutivas que descrevem as propriedades piezoelétricas do material são baseadas no pressuposto de que a deformação total no transdutor é a soma da deformação mecânica induzida pela tensão mecânica e da deformação de atuação controlável, causada pela tensão elétrica aplicada. Os eixos são identificados por números em vez de letras, onde o número 1 se refere ao eixo x, o

número 2 se refere ao eixo  $y$  e o número 3 é correspondente ao eixo  $z$ . Ao eixo 3 é atribuído a direção de polarização inicial do transdutor, e os eixos 1 e 2 se encontram no plano perpendicular ao eixo 3. O esquema do transdutor piezoelétrico adotado está exposto na Figura 3.5, com a descrição da nomenclatura e das direções dos eixos considerados.

Figura 3.5 – Diagrama esquemático do transdutor piezoelétrico e nomenclatura dos eixos.



Fonte: Moheimani e Fleming (2006).

As equações que descrevem o comportamento eletromecânico para um material piezoelétrico linear podem ser escritas na forma:

$$\varepsilon_i = S_{ij}^E \cdot \sigma_j + d_{mi} \cdot E_m \quad (3.26)$$

$$D_m = d_{mi} \cdot \sigma_i + \xi_{ik}^\sigma \cdot E_k \quad (3.27)$$

Onde os índices  $i, j = 1, 2, \dots, 6$  e  $m, k = 1, 2, 3$  se referem as diferentes direções dentro do sistema de coordenadas do material. As equações anteriores podem ser reescritas como se segue, quando o transdutor é utilizado para aplicações como sensor:

$$\varepsilon_i = S_{ij}^D \cdot \sigma_j + g_{mi} \cdot D_m \quad (3.28)$$

$$E_m = g_{mi} \cdot \sigma_i + \beta_{ik}^\sigma \cdot D_k \quad (3.29)$$

Onde,

$\sigma$  = vetor de tensão ( $N/m^2$ )

$\varepsilon$  = vetor de deformação ( $m/m$ )

$E$  = vetor de campo elétrico aplicado ( $V/m$ )

$\xi$  = permissividade ( $F/m$ )

$d$  = matriz das constantes de deformação piezoelétrico ( $m/V$ )

$S$  = matriz dos coeficientes de compliança ( $m^2/N$ )

$D$  = vetor de deslocamento elétrico ( $C/m^2$ )

$g$  = matriz das constantes piezoelétricas ( $m^2/C$ )

$\beta$  = componente de não permissividade ( $m/F$ )

E os sobrescritos  $D$ ,  $E$  e  $\sigma$  representam medições feitas com deslocamento elétrico constante, campo elétrico constante e tensão mecânica constante, respectivamente.

As Equações (3.26) e (3.28) expressam o efeito piezoelétrico inverso, que descrevem o estado do transdutor quando ele está sendo utilizado como atuador. As Equações (3.27) e (3.29), por outro lado, expressam o efeito piezoelétrico direto, que é o caso em que o transdutor está sendo utilizado como um sensor. O efeito inverso é frequentemente utilizado para determinar os coeficientes piezoelétricos.

Em forma matricial, as Equações (3.26) e (3.27) podem ser expressas como:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{51} & S_{52} & S_{53} & S_{54} & S_{55} & S_{56} \\ S_{61} & S_{62} & S_{63} & S_{64} & S_{65} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{11} & d_{21} & d_{31} \\ d_{12} & d_{22} & d_{32} \\ d_{13} & d_{23} & d_{33} \\ d_{14} & d_{24} & d_{34} \\ d_{15} & d_{25} & d_{35} \\ d_{16} & d_{26} & d_{36} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

$$\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & d_{16} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} & d_{26} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} & d_{35} & d_{36} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_{11}^\sigma & e_{12}^\sigma & e_{13}^\sigma \\ e_{21}^\sigma & e_{22}^\sigma & e_{23}^\sigma \\ e_{31}^\sigma & e_{32}^\sigma & e_{33}^\sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

Alguns autores utilizam a seguinte notação para a deformação e a tensão por cisalhamento:

$$\gamma_{23} = \varepsilon_4; \gamma_{31} = \varepsilon_5; \gamma_{12} = \varepsilon_6;$$

$$\tau_{23} = \sigma_4; \tau_{31} = \sigma_5; \tau_{12} = \sigma_6;$$

Assumindo que o transdutor é polarizado ao longo do eixo 3, e tratando o material piezoelétrico como um material isotrópico ao longo de sua seção transversal, alguns dos parâmetros das matrizes apresentadas anteriormente será igual a zero, ou podem ser expressos em função de outros parâmetros. Em particular, os coeficientes da compliança elétrica que são diferentes de zero, são:

$$S_{11} = S_{22};$$

$$S_{13} = S_{31} = S_{23} = S_{32};$$

$$S_{12} = S_{21};$$

$$S_{44} = S_{55};$$

$$S_{66} = 2(S_{11} - S_{12});$$

As constantes de deformação piezoelétrico diferentes de zero são:

$$d_{31} = d_{32}; \quad e \quad d_{15} = d_{24}.$$

E finalmente, os coeficientes dielétricos diferentes de zero são  $e_{11}^\sigma = e_{22}^\sigma$  e  $e_{33}^\sigma$ . Após isso, as Equações (3.30) e (3.31) podem ser simplificadas na forma:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11}S_{12}S_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S_{12}S_{11}S_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S_{13}S_{13}S_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(S_{11} - S_{12}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & d_{31} \\ 0 & 0 & d_{31} \\ 0 & 0 & d_{33} \\ 0 & d_{15} & 0 \\ d_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

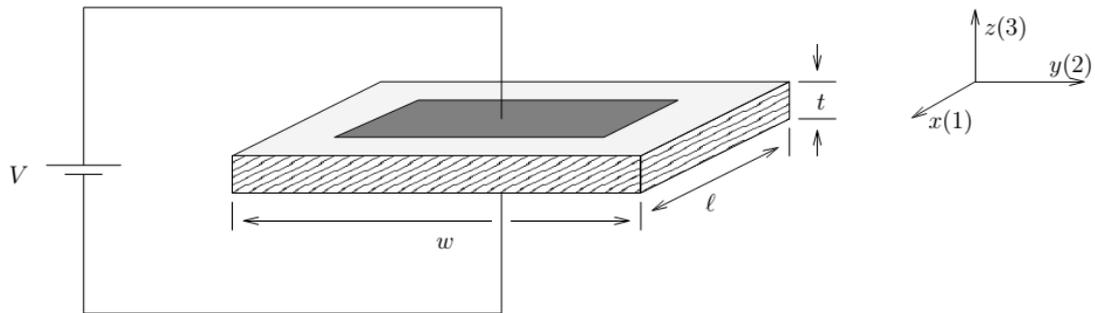
$$\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{31} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_{11}^\sigma & 0 & 0 \\ 0 & e_{11}^\sigma & 0 \\ 0 & 0 & e_{33}^\sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

A “constante de deformação piezoelétrico” ( $d$ ) é definida como a razão entre a deformação livre desenvolvida em relação ao campo elétrico aplicado. O subscrito  $d_{ij}$  implica que o campo elétrico é aplicado ou a carga elétrica é recolhida na direção  $i$  para um deslocamento ou força aplicado na direção  $j$ . O significado físico deste e de outras constantes piezoelétricas serão explicados logo abaixo.

- Constante de Deformação Piezoelétrica ( $d_{ij}$ ):

O coeficiente piezoelétrico  $d_{ij}$  é a relação entre a deformação no eixo  $j$  ao campo elétrico aplicado ao longo do eixo  $i$ , quando todas as tensões externas ao material são mantidas constantes. Na Figura 3.6, uma tensão  $V$  é aplicada a um transdutor piezoelétrico que está polarizado na direção 3.

Figura 3.6 – Arranjo de um transdutor piezoelétrico para medições de  $d_{31}$ .



Fonte: Moheimani and Fleming (2006).

Essa tensão aplicada gera um campo elétrico

$$E_3 = V/t \quad (3.34)$$

Que tensiona o transdutor. Em particular,

$$\varepsilon_1 = \Delta l/l \quad (3.35)$$

$$\text{Com } \Delta l = d_{31} \cdot V \cdot l/t.$$

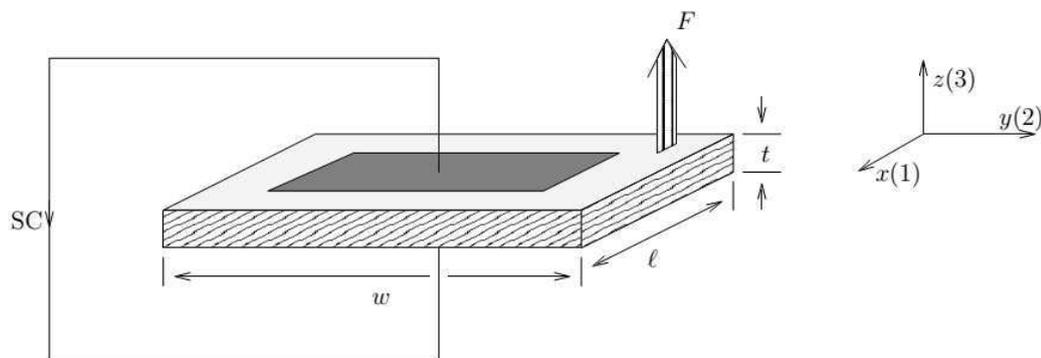
A constante piezoelétrica  $d_{31}$  é normalmente um número negativo. Isto é devido ao fato que a aplicação de um campo elétrico positivo irá gerar uma deformação positiva na direção 3.

Outra interpretação para  $d_{ij}$  é a razão entre a carga elétrica de curto-circuito por unidade de área, que flui entre os eletrodos conectados entre si, perpendiculares a direção de  $j$  para a tensão mecânica aplicada na direção  $i$ . Como mostrado na Figura 3.7, uma vez que a força  $F$  é aplicada ao transdutor na direção 3, que gera a tensão

$$\sigma_3 = F/l\omega \quad (3.36)$$

Que resulta na carga elétrica  $q = d_{33}F$ , que flui através do sistema em curto circuito.

Figura 3.7 – Geração de carga em um transdutor piezoelétrico.



Fonte: Moheimani e Fleming (2006).

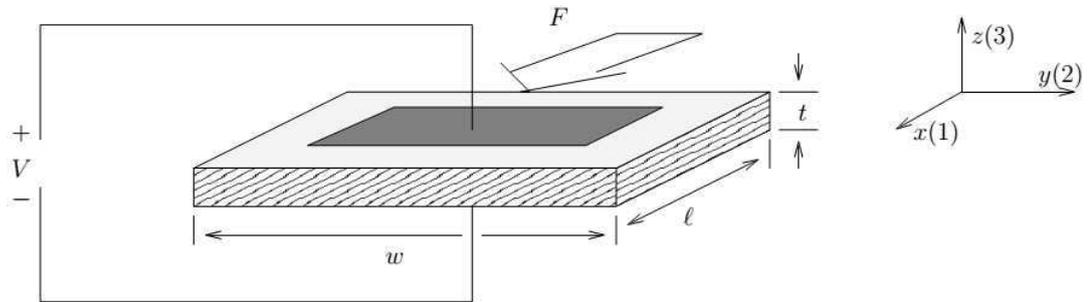
Se uma tensão mecânica é aplicada igualmente nas direções 1, 2 e 3, e os eletrodos estando perpendiculares ao eixo 3, a carga de curto-circuito resultante por unidade de área, dividida pela tensão aplicada é denominada  $d_p$ .

- Constante Piezoelétrica ( $g_{ij}$ ):

A constante piezoelétrica  $g_{ij}$  significa que está sendo desenvolvido um campo elétrico ao longo do eixo  $i$  quando o material é tensionado ao longo do eixo  $j$ . Portanto, a força  $F$  aplicada no transdutor, como mostrado na Figura 3.8, resulta na voltagem:

$$V = g_{31}F/\omega \quad (3.37)$$

Figura 3.8 – Transdutor piezoelétrico em circuito aberto, submetido a uma força na direção 1.

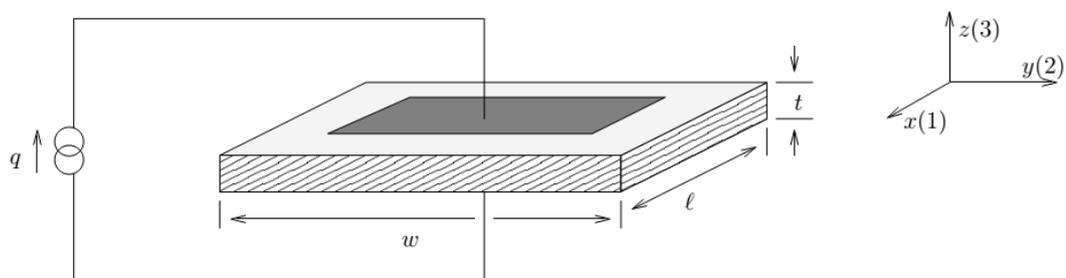


Fonte: Moheimani e Fleming (2006).

Outra interpretação para  $g_{ij}$  é que ele seja a relação entre a deformação desenvolvida ao longo do eixo  $j$  pela carga por unidade de área depositada nos eletrodos perpendiculares ao eixo  $i$ . Portanto, como apresentado na Figura 3.9, se uma carga elétrica  $Q$  é depositada sobre os eletrodos da superfície, a espessura do elemento piezoelétrico irá variar de:

$$\Delta l = g_{31} \cdot Q / \omega \quad (3.38)$$

Figura 3.9 – Transdutor piezoelétrico submetido a uma carga aplicada.



Fonte: Moheimani e Fleming (2006).

- **Compliança Elástica ( $S_{ij}$ ):**

O coeficiente de compliança elástica  $S_{ij}$  é a relação entre a deformação na direção  $i$  e a tensão na direção  $j$ , desde que não haja nenhuma mudança de tensão ao longo das outras duas direções. Tensões e deformações normais são indicadas pelos índices de 1 a 3. Tensões e deformações de cisalhamento são indicadas pelos índices de 4 a 6.

O sobrescrito “ $E$ ” é usado para indicar que a compliança elástica ( $S_{ij}^E$ ) é medida com os eletrodos curto-circuitados. Similarmente, o sobrescrito “ $D$ ” em  $S_{ij}^D$ , denota que as medições foram efetuadas quando os eletrodos estavam em circuito aberto. Uma tensão mecânica resulta em uma resposta elétrica que pode aumentar a deformação resultante do transdutor. Portanto, é natural esperar que  $S_{ij}^E$  seja menor do que  $S_{ij}^D$ . Isto é, um piezoelétrico curto-circuitado tem um menor módulo de elasticidade (*Young*) do que quando está em circuito aberto.

- **Coeficiente Dielétrico ( $e_{ij}$ ):**

O coeficiente dielétrico ( $e_{ij}$ ) determina a carga por unidade de área no eixo  $i$  devido a um campo elétrico aplicado no eixo  $j$ . Na maioria dos materiais piezoelétricos, um campo elétrico aplicado ao longo do eixo  $j$  causa um deslocamento elétrico apenas nesse sentido. A constante dielétrica relativa, definida como a relação entre a permissividade absoluta do material, pela permissividade do espaço livre, e é denotada por  $K$ . O sobrescrito  $\sigma$  em  $e_{11}^\sigma$  se refere à permissividade para um campo aplicado na direção 1, quando o material não está restringido fisicamente.

- **Coeficiente de Acoplamento Eletromecânico ( $k_{ij}$ ):**

O coeficiente piezoelétrico  $k_{ij}$  representa a habilidade do material piezocerâmico de transformar energia elétrica em energia mecânica e vice-versa. Essa transformação de energia entre os domínios mecânico e elétrico é empregada tanto em sensores como em atuadores que utilizam materiais piezoelétricos. O índice  $ij$

indica que a tensão, ou a deformação estão sendo aplicadas na direção  $j$ , enquanto os eletrodos se encontram perpendiculares à direção  $i$ .

Existem diversas formas de se mensurar a magnitude do  $k_{ij}$ . Uma possibilidade é a aplicação de força a um elemento piezoelétrico, enquanto seus terminais estão em circuito aberto. O dispositivo piezoelétrico irá defletir semelhante a uma mola. Essa deflexão  $\Delta_z$ , pode ser medida e o trabalho mecânico realizado pela força aplicada  $F$  pode ser determinado por:

$$W_M = F \cdot \Delta_z / 2 \quad (3.39)$$

Devido ao efeito piezoelétrico, cargas elétricas iram se acumular nos eletrodos do transdutor. Essa quantidade de energia é dada por:

$$W_E = Q^2 / 2 \cdot C_P \quad (3.40)$$

Que está armazenada no piezoelétrico, que funciona como um capacitor. Portanto,

$$k_{33} = \sqrt{W_E / W_M} = Q / \sqrt{F \cdot \Delta_z C_P} \quad (3.41)$$

O coeficiente de acoplamento pode ser reescrito em função de outras constantes piezoelétricas. Em particular:

$$k_{ij}^2 = \frac{d_{ij}^2}{S_{ij}^E \cdot e_{ij}^\sigma} = g_{ij} \cdot d_{ij} \cdot E_P \quad (3.42)$$

Onde  $E_P$  é o módulo de elasticidade do material piezoelétrico.

Quando uma força é aplicada a um transdutor piezoelétrico, dependendo se o dispositivo está em circuito aberto ou circuito fechado, esperamos observar diferentes valores de rigidez. Em particular, se os elétrodos são curto-circuitados, o dispositivo apresentará uma menor rigidez. Isto é devido ao fato de que, após a aplicação de uma força externa, as cargas elétricas de polaridades opostas acumuladas nos eletrodos irão se anular mutuamente. Portanto, nenhuma energia elétrica será armazenada no piezoelétrico.

Denotando a rigidez de curto-circuito e a rigidez de circuito aberto, como sendo  $K_{SC}$  e  $K_{OC}$ , respectivamente, podemos provar que:

$$\frac{K_{OC}}{K_{SC}} = \frac{1}{1-k^2} \quad (3.43)$$

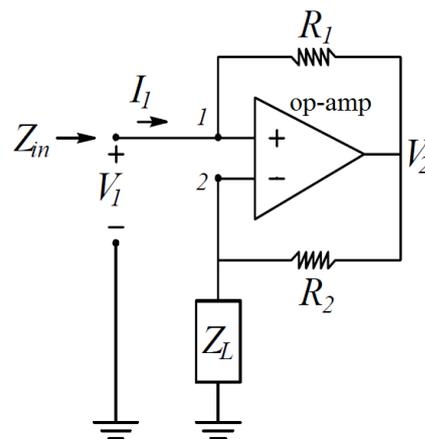
- Temperatura de Curie ( $T_c$ ):

É a temperatura na qual a estrutura cristalina do material sofre transformação de fase e o mesmo deixa de apresentar as propriedades piezoelétricas. Caso essa temperatura seja ultrapassada, por algum motivo, o material irá perder a polarização remanescente induzida, se tornando inútil para ser utilizado como transdutor (VENET; PEREIRA, 2004). Os valores típicos para cerâmicas piezoelétricos de PZT são de 150 a 350 °C. E essa característica é indispensável no projeto de sistemas que serão submetidos a altas temperaturas e de alta potência.

### 3.3 Conversores de Impedância Negativa (NIC)

Nesse trabalho iremos utilizar a configuração sugerida por Behrens, Fleming e Moheimani (2001) apresentada na Figura 3.10. Essa configuração consiste em um amplificador operacional (*op-amp*), dois resistores ( $R_1$  e  $R_2$ ) e a impedância que se deseja negativar ( $Z_L$ ).

Figura 3.10 – Conversor de Impedância Negativa escolhido.



Fonte: Adaptado de Behrens, Fleming e Moheimani (2001).

Observando-se a Figura 3.10, vemos ainda que a impedância vista dos terminais do circuito ( $Z_{in}$ ) é proporcional a  $-Z_L$ . Podemos chegar a essa conclusão através da análise nodal do circuito, aplicando a Lei de Kirchhoff's da corrente para o nodo 1, temos:

$$I_1 + \frac{V_2 - V_1}{R_1} = 0 \quad (3.44)$$

E para o nodo 2, temos:

$$\frac{V_2 - V_1}{R_2} + \frac{(0 - V_1)}{Z_L} = 0 \quad (3.45)$$

Colocando  $V_2$  em evidência e igualando as Equações (3.44) e (3.45), implica que:

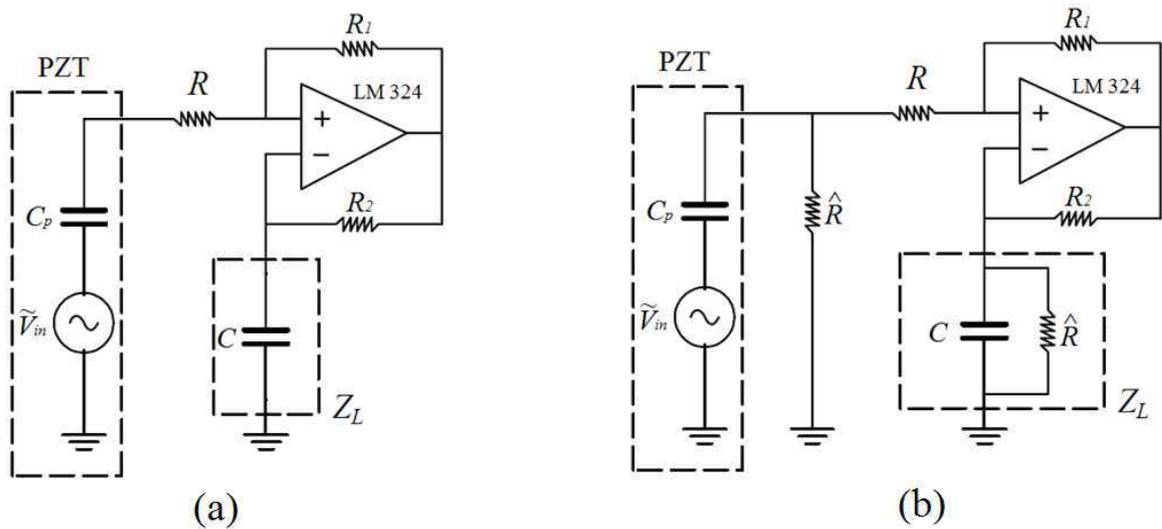
$$-I_1 \cdot R_1 - \frac{V_1 \cdot R_2}{Z_L} = 0 \quad (3.46)$$

Dividindo tudo por  $R_2$  e resolvendo para a razão  $V_1/I_1$ , nós obtemos a equação que se segue:

$$Z_{in} = \frac{V_1}{I_1} = -\frac{R_1}{R_2} Z_L \quad (3.47)$$

Podemos observar dessas equações que o circuito mostrado na Figura 3.10, cria uma impedância negativa em função da razão escalar entre os resistores  $R_1$  e  $R_2$ . Agora podemos usar esse circuito para tentar reduzir as amplitudes dos picos de ressonância da estrutura.

Ao utilizar esse NIC é necessário que determinemos as constantes referentes à impedância que queremos anular ( $Z_P$ ) e a impedância que iremos criar ( $Z_L$ ), de mesmo valor e sinal oposto. Ao substituirmos o NIC no circuito mostrado na Figura 2.12 (a), ficamos com o circuito apresentado na Figura 3.11 (a). Porém, nessa montagem, foram observados alguns problemas relativos ao capacitor  $C$ , portanto, para aumentar a perda de carga do capacitor e direcionarmos a corrente de polarização é necessário acrescentarmos um resistor  $\hat{R}$  em paralelo com o capacitor  $C$ . E para que a impedância do transdutor  $Z_P$  seja igual  $Z_L$  é necessário acrescentarmos também, um resistor  $R = \hat{R}$  de mesmo valor, em paralelo com o capacitor  $C_P$ . Como mostrado na Figura 3.11 (b).

Figura 3.11 – Circuito *shunt* proposto.

Fonte: Adaptado de Behrens, Fleming e Moheimani (2001).

- Determinação da impedância elétrica do PZT com  $\hat{R}$  em paralelo:

Aplicando a Lei de *Ohm* para o resistor  $\hat{R}$ , temos que  $\hat{R} = V(t)/I(t)$ , onde  $V(t)$  é a tensão elétrica e  $I(t)$  é a corrente elétrica que passa através do resistor. Efetuando-se a transformada de *Laplace* dessa equação, a impedância elétrica do resistor no domínio de *Laplace*, será dada por:

$$\hat{R} = Z_{\hat{R}}(s) = \tilde{V}(s)/\tilde{I}(s) \quad (3.48)$$

Já no capacitor  $C_P^T$ , a relação é dada por  $V(t) = Q(t)/C$ , onde  $V(t)$  é a tensão elétrica,  $Q(t)$  é a carga elétrica e  $C_P^T$  é a capacitância do piezoelétrico. Como estamos admitindo que em  $t < 0$  não existem cargas nem correntes, então a carga acumulada no instante  $t$ , será igual a integral da corrente, no intervalo de  $t = 0$  até o instante qualquer  $t$ . Ou seja:

$$V(t) = \left(\frac{1}{C_P^T}\right) \int_0^t I(u) du \quad (3.49)$$

Aplicando agora a propriedade da transformada de *Laplace* da integral de uma função, temos que a impedância elétrica do capacitor  $C_P^T$  é dada por:

$$\tilde{V}(s) = \frac{\tilde{I}(s)}{sC_p^T} \Rightarrow \frac{\tilde{V}(s)}{\tilde{I}(s)} = \frac{1}{sC_p^T} \Rightarrow Z_{C_P}(s) = \frac{1}{sC_p^T} \quad (3.50)$$

Como as impedâncias do resistor ( $Z_{\hat{R}}$ ) e do capacitor ( $Z_C$ ) estão em paralelo, temos que a impedância total do PZT ( $Z_P$ ) é igual a:

$$Z_P(s) = \frac{Z_{C_P^T} \cdot Z_{\hat{R}}}{Z_{C_P^T} + Z_{\hat{R}}} = \frac{\left(\frac{1}{sC_p^T}\right) \cdot \hat{R}}{\left(\frac{1}{sC_p^T}\right) + \hat{R}} \Rightarrow Z_P(s) = \frac{\hat{R}}{s\hat{R}C_p^T + 1} \quad (3.51)$$

- Determinação da impedância do circuito elétrico com resistor R em série:

Devido às características elétricas do amplificador operacional, podemos fazer a seguinte relação:

$$i_{IN} = \frac{v_P - v^-}{R} = \frac{v^- - v_0}{R_1} = \frac{v_0 - v^+}{R_2} = \frac{v^+ - 0}{Z_L} \quad (3.52)$$

Onde  $v^-$  é a tensão medida no terminal negativo do amplificador,  $v^+$  é a tensão medida no terminal positivo do amplificador e  $v_0$  é a tensão medida na saída do amplificador. Da quarta relação, temos que  $v^+ = Z_L \cdot i_{IN}$ , e substituindo na primeira relação temos:

$$i_{IN} = \frac{v_P - Z_L \cdot i_{IN}}{R} \Rightarrow \frac{v_P}{i_{IN}} = R + Z_L \quad (3.53)$$

As operações matemáticas utilizadas para determinação da impedância  $Z_L$  são semelhantes às operações utilizadas para se determinar  $Z_P$  na Equação (3.51). Portanto, fazendo-se analogia com a Equação (3.51), vimos que:

$$Z_L(s) = \frac{Z_C \cdot Z_{\hat{R}}}{Z_C + Z_{\hat{R}}} = \frac{(1/sC) \cdot \hat{R}}{(1/sC) + \hat{R}} \Rightarrow Z_L(s) = \frac{\hat{R}}{s\hat{R}C + 1} \quad (3.54)$$

Podemos notar que o valor da impedância do piezoelétrico ( $Z_P$ ) é igual ao valor da impedância elétrica que criamos ( $Z_L$ ), desde que o valor de  $C$  seja muito próximo ou igual ao valor de  $C_P$ , ou seja,  $C \approx C_P^T$ . Além do que, se escolhermos  $R_1 = R_2$ , e substituirmos o valor de  $Z_L(s)$  encontrado na Equação (3.54), na Equação (3.47), temos que:

$$Z_{IN}(s) = -\left(\frac{R_1}{R_2}\right) \cdot Z_L(s) = -Z_L(s) = -\frac{\hat{R}}{s\hat{R}C + 1} \Rightarrow Z_P(s) \approx -Z_L(s) \quad (3.55)$$

Ou seja, se assumirmos as considerações feitas anteriormente, vemos que a impedância elétrica do piezoelétrico é igual à impedância escolhida para “anularmos”, porém com sinal oposto.

Substituindo ainda, a Equação (3.54) na Equação (3.53), podemos determinar a impedância do circuito elétrico ( $Z$ ). Então,

$$\frac{v_P}{i_{IN}} = Z(s) = R - \frac{\hat{R}}{s\hat{R}C + 1} \Rightarrow Z(s) = \frac{sR \left[ \frac{1}{C} \left( \frac{R}{\hat{R}} - 1 \right) \right]}{s + \frac{1}{\hat{R}C}} \quad (3.56)$$

Vale salientar que a estabilidade da Equação (3.56) é garantida se o capacitor escolhido ( $C$ ) for maior do que a capacitância do piezoelétrico ( $C_P^T$ ), ou seja, se  $C > C_P^T$ , e se  $\hat{R} \gg R > 0$ .

- Determinação da impedância elétrica total do circuito *shunt*:

A impedância elétrica total do circuito *shunt* ( $Z_{ELE}$ ) no domínio de *Laplace* pode ser determinada pela associação em paralelo da impedância do circuito ( $Z$ ) com a impedância do piezoelétrico ( $Z_P$ ). Portanto,

$$Z_{ELE}(s) = \frac{Z_P(s) \cdot Z(s)}{Z_P(s) + Z(s)} = \frac{\left(\frac{\hat{R}}{s\hat{R}C_p^T + 1}\right) \cdot \left(\frac{R - \hat{R}}{s\hat{R}C + 1}\right)}{\left(\frac{\hat{R}}{s\hat{R}C_p^T + 1}\right) + \left(\frac{R - \hat{R}}{s\hat{R}C + 1}\right)} \quad (3.57)$$

Resolvendo a Equação (3.57) e efetuando-se algumas manipulações matemáticas, temos que:

$$Z_{ELE}(s) = \frac{(CR\hat{R}^2)s + (R\hat{R} - \hat{R}^2)}{(CC_p^T R\hat{R}^2)s^2 + (C\hat{R}^2 - C_p^T \hat{R}^2 + CR\hat{R} + C_p^T R\hat{R})s + (R)} \quad (3.58)$$

Então, se definirmos a impedância elétrica total adimensional do circuito *shunt*, como  $\bar{Z}_{ELE}(s) = Z_{ELE}(s)/Z_P(s)$ , temos:

$$\bar{Z}_{ELE}(s) = \frac{(CC_p^T R\hat{R}^2)s^2 + (CR\hat{R} - C_p^T \hat{R}^2 + C_p^T R\hat{R})s + (R - \hat{R})}{(CC_p^T R\hat{R}^2)s^2 + (C\hat{R}^2 - C_p^T \hat{R}^2 + CR\hat{R} + C_p^T R\hat{R})s + (R)} \quad (3.59)$$

### 3.4 Estrutura acoplada ao circuito *shunt*

Para determinarmos o comportamento global do sistema é necessário que seja feito o acoplamento eletromecânico entre a estrutura e o circuito *shunt*. Neste

momento é importante revisarmos a definição do Coeficiente de Acoplamento Eletromecânico ( $k_{ij}$ ) apresentado na seção 3.2 e descrito pela Equação (3.42).

Hagood e von Flotow (1991) definem esta constante como sendo a relação entre a energia de pico armazenada no capacitor e a energia de pico armazenada na deformação do material com os eletrodos da pastilha piezoelétrica abertos. Fisicamente, o quadrado deste coeficiente ( $k^2$ ) representa a porcentagem de energia de deformação mecânica que é convertida em energia elétrica e vice-versa (VIANA, 2005).

Considerando que o campo elétrico aplicado e a deformação da pastilha piezoelétrica sejam uniaxiais, as equações mostradas anteriormente podem ser simplificadas e a notação matricial será posta de lado, já que vamos simplificar para uma única dimensão. Particularizando ainda, para o caso em que os terminais da pastilha piezoelétrica estão em curto  $\bar{Z}_{ELE}(s) = 1$ . Uma relação para a mudança no valor da capacitância da pastilha piezoelétrica pode ser feita, que segundo Hagood e von Flotow (1991) é dada por:

$$C_p^S = C_p^T(1 - k_{ij}^2) \quad (3.60)$$

Onde  $C_p^T$ , representa o valor da capacitância da pastilha piezoelétrica medida sobre tensão mecânica constante (livre), e  $C_p^S$  é o valor da capacitância do piezoelétrico medido sobre deformação constante (engastado).

Hagood e von Flotow (1991) também mostraram que a impedância mecânica de um transdutor piezoelétrico pode ser expressa através do parâmetro de *Laplace* (s), e ainda, que a impedância mecânica adimensional para o piezoelétrico com o circuito *shunt*, é definida como:

$$\bar{Z}_{jj}^{MEC}(s) = \frac{Z_{jj}^{SHUNT}(s)}{Z_{jj}^D(s)} = \frac{1 - k_{ij}^2}{1 - k_{ij}^2 \cdot \bar{Z}_{ELE}(s)} \quad (3.61)$$

Onde  $Z_{jj}^{SHUNT}(s)$  é a impedância referente ao circuito *shunt* e  $Z_{jj}^D(s)$  é a impedância da pastilha piezoelétrica tomada sob densidade de carga constante (circuito aberto).

Podemos observar pelas as equações descritas anteriormente, que o acoplamento do circuito elétrico com a pastilha piezoelétrica, modifica tanto as características mecânicas quanto elétricas da pastilha. Nesse sentido, a Equação (3.61) sintetiza esse efeito mostrando que a impedância mecânica adimensional é função tanto da impedância elétrica adimensional do circuito *shunt* quanto do coeficiente de acoplamento eletromecânico. Portanto, substituindo as Equações (3.59) e (3.60) na Equação (3.61), temos que a impedância mecânica adimensional no sistema é dada por:

$$\bar{Z}_{MEC}(s) = \frac{(A) + (C\hat{R}^2 - C_p^S\hat{R}^2 - C\hat{R}^2k_{31}^2 + B + D + CR\hat{R} + C_p^S R\hat{R} - F - C + E)s + (R - Rk_{31}^2)}{(A) + (C\hat{R}^2 - C_p^S\hat{R}^2 + B - D + CR\hat{R} + C_p^S R\hat{R} - F - C + E)s + (R - Rk_{31}^2 + \hat{R}k_{31}^2)} \quad (3.62)$$

Onde,

$$A = (CC_p^S R\hat{R}^2 k_{31}^4 - 2CC_p^S R\hat{R}^2 k_{31}^2 + CC_p^S R\hat{R}^2)s$$

$$B = (2C_p^S \hat{R}^2 k_{31}^2)$$

$$C = (2C_p^S R\hat{R} k_{31}^2)$$

$$D = (C_p^S \hat{R}^2 k_{31}^4)$$

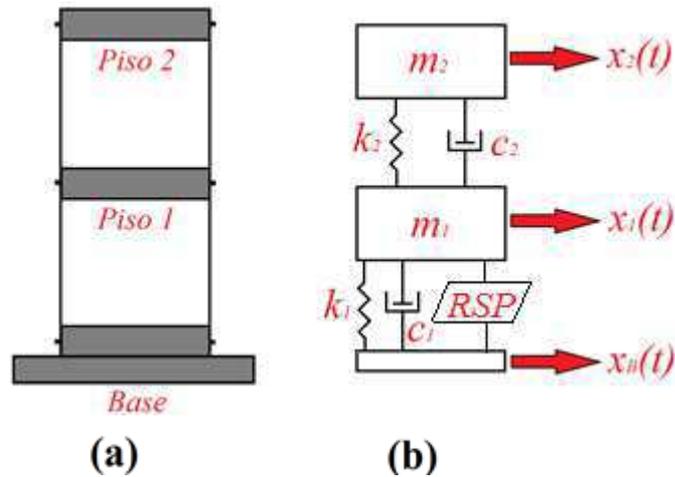
$$E = (C_p^S R\hat{R}^2 k_{31}^4)$$

$$F = (CR\hat{R} k_{31}^2)$$

Pala acoplar o circuito *shunt* a estrutura, Hagood e von Flotow (1991) fazem uma comparação entre o circuito *shunt* e um Absorvedor Dinâmico de Vibrações (ADV), e introduzem o efeito da impedância mecânica adimensional (Equação (3.62)) como sendo um amortecimento viscoso referente ao circuito *shunt* (RCS) em paralelo com

o amortecimento inerente da estrutura. Essa consideração aproximada para um sistema com dois GDL pode ser vista na Figura 3.12.

Figura 3.12 – Representação esquemática de um sistema com dois GDL (a) e seu respectivo modelo com o RSP acoplado na estrutura (b).



Fonte: Autoria própria.

O amortecimento viscoso da estrutura em paralelo com o circuito *shunt* representa o comportamento mecânico do sistema com o piezoelétrico acoplado à estrutura. Utilizaremos a Equação (3.25) para introduzirmos o efeito do amortecimento RSP, e como ele está em paralelo com  $c_1$ , temos que:

$$H(s) = \left( (k_1 \cdot m_2) \cdot s^2 + (c_2 \cdot k_1 - c_2 \cdot k_2) \cdot s + (k_1 \cdot k_2 - k_2^2) \right) / \left( (m_1 \cdot m_2) \cdot s^4 + ((c_1 + \bar{Z}_{MEC}(s)) \cdot m_2 + c_2 \cdot m_1 + c_2 \cdot m_2) \cdot s^3 + ((c_1 + \bar{Z}_{MEC}(s)) \cdot c_2 + k_1 \cdot m_2 + k_2 \cdot m_1 + k_2 \cdot m_2) \cdot s^2 + ((c_1 + \bar{Z}_{MEC}(s)) \cdot k_2 + c_2 \cdot k_1) \cdot s + (k_1 \cdot k_2) \right) \quad (3.63)$$

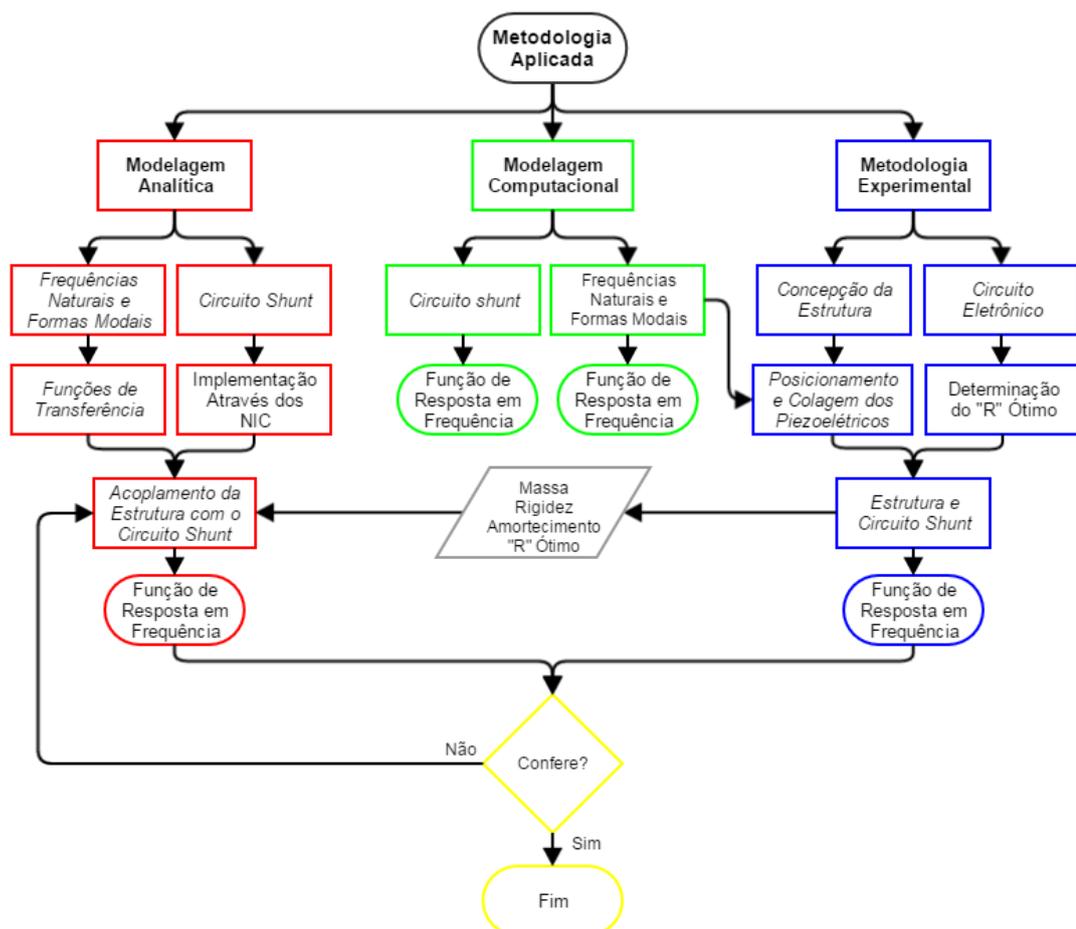
Esse equacionamento foi feito para circuitos *shunts* passivos, porém com algumas aproximações e considerações, aplicamos o conceito de circuito *shunt* ativo de capacitância negativa, ou seja, simplificado.

## 4 MATERIAIS E MÉTODOS

### 4.1 Metodologia de análise

A metodologia adotada é apresentada de três formas, iniciando-se com a modelagem analítica, seguindo para a modelagem computacional e finalizando com a parte experimental, determinando as características da estrutura e do circuito elétrico simultaneamente. A sequência utilizada na metodologia aplicada está apresentada no fluxograma representativo da Figura 4.1.

Figura 4.1 – Representação esquemática da sequência utilizada na metodologia.



Fonte: Autoria própria.

Para fins de validação do modelo analítico, utilizamos os valores de massa, rigidez, amortecimento e módulo elástico do modelo experimental, e obtemos a FRF de ambos. Ao comparar a FRF experimental com a analítica, caso não ocorra uma convergência de resultados, é necessário realimentarmos o modelo analítico com valores distintos para que o objetivo seja alcançado.

#### **4.1.1 Modelagem analítica**

##### **4.1.1.1 Frequências naturais e modos de vibração da estrutura**

As equações utilizadas para determinar as frequências naturais e os modos de vibração da estrutura foram as Equações (3.10) e (3.15), apresentadas e descritas na seção 3.1.1, onde utilizamos a teoria de sistemas de dois graus de liberdade submetidos à vibração livre, quando estes são considerados não amortecidos.

Para facilitar a resolução dos problemas e podermos interagir com os resultados, foi criada uma rotina no *software Matlab®*, onde aplicamos as Equações (3.10) e (3.15), obtendo-se assim, os valores das frequências naturais e dos modos de vibração da estrutura. O algoritmo de programação está apresentado no Anexo A.

Os valores de massa, rigidez, amortecimento e o módulo elástico foram obtidos experimentalmente e estão descritos na seção 4.1.3 e na Tabela 4.4.

##### **4.1.1.2 Funções de transferência da estrutura**

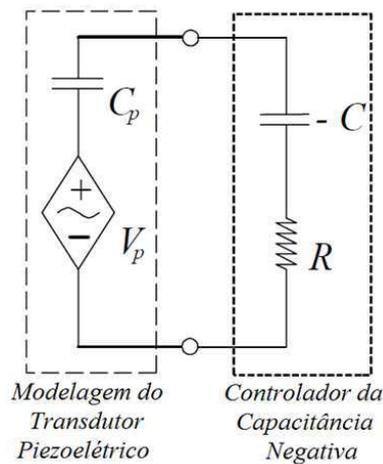
As funções de transferência da estrutura para um sistema com dois graus de liberdade, quando submetidas à excitação harmônica de base foram determinadas utilizando o método das Transformadas de *Laplace*, devido a sua aparente simplicidade e facilidade de implementação no ambiente de programação do *Matlab®*. Outros métodos, como por exemplo, o método da impedância mecânica, apresentado no Anexo C, também poderia ser utilizado.

A equação que representa a função de transferência da estrutura e as suas respostas no domínio da frequência são dadas pela Equação (3.25). A programação feita para determinação das respostas da estrutura através dessa equação no *Matlab*®, está apresentada no Anexo B.

#### 4.1.1.3 Circuito shunt

O circuito *shunt* de capacitância negativa escolhido é o apresentado na Figura 4.2. Tal circuito é formado por um transdutor piezoelétrico, representado por uma fonte em série com um capacitor, e pelo circuito eletrônico, formado por um “capacitor negativo” em série com uma resistência elétrica. O papel do “capacitor negativo” é “anular” a capacitância do piezoelétrico, fazendo com que toda energia seja dissipada apenas pelo resistor.

Figura 4.2 – Representação do circuito de capacitância negativa em série.



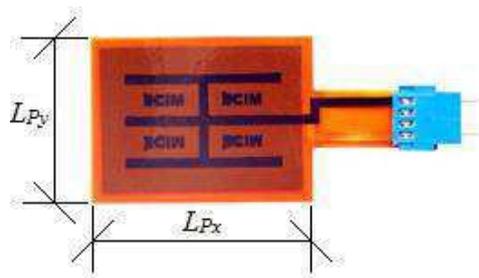
Fonte: Adaptado de Park e Park (2003).

O transdutor piezoelétrico escolhido foi o da fabricante norte-americana *Midé*®, modelo *QuickPack*® *QP10W*. Eles são constituídos de cerâmicas piezoelétricas comerciais monocristalinas com os eletrodos depositados eletricamente em sua

superfície, e envoltas em material polimérico chamado de *Espanex*® colados com *Epoxy*.

Esse tipo de piezoelétrico possui algumas vantagens constitutivas e de aplicação. São fáceis de utilizar, pois não necessita colar os eletrodos na superfície da cerâmica e nem os fios para ligá-lo ao circuito elétrico. Além de possuir a superfície recoberta de polímero flexível, o que protege o transdutor contra pequenos danos mecânicos e o isola eletricamente. O transdutor escolhido pode ser visto na Figura 4.3. Seus parâmetros elétricos, geométricos e do material estão apresentados na Tabela 4.1.

Figura 4.3 – Transdutor piezoelétrico utilizado.



Fonte: Autoria própria.

Tabela 4.1 – Parâmetros do transdutor piezoelétrico.

Nome	Símbolo	Unidade
Comprimento (m)	$L_{Px}$	0.0508
Largura (m)	$L_{Py}$	0.0381
Espessura (m)	$h_P$	0.000381
Capacitância ( $10^{-9}$ F)	$C_P$	85
Constante de Deformação ( $10^{-12}$ m/V)	$d_{31}$	-190
Fator de Acoplamento Eletromecânico	$k_{31}$	0.36
Constante de Tensão ( $10^{-3}$ V.m/N)	$g_{31}$	-11.3

Fonte: Adaptado de Quickpack Piezo Products.

Como os circuitos *shunt* de capacitância negativa não podem ser fisicamente realizáveis por elementos passivos, é necessário que se utilizem conversores de impedância negativa para implementar o circuito, e que serão detalhados na próxima seção.

#### 4.1.1.4 Implementação através dos NICs

Para implementação do circuito, utilizamos o Conversor de Impedância Negativa (NIC) proposto por Behrens, Fleming e Moheimani (2001), porém com algumas modificações, como mostrado na Figura 3.10, apresentada anteriormente. O circuito *shunt* proposto completamente montado foi apresentado na Figura 3.11.

O amplificador operacional utilizado foi o LM324 da *STMicroelectronics*® que possui 4 amplificadores em seu interior. Para mais informações sobre o mesmo, recomendamos a referência Datasheet LM 324 (2001).

Os valores divulgados nos catálogos dos fabricantes e os valores medidos dos componentes eletrônicos que compõe o circuito *shunt* estão apresentados na Tabela 4.2, abaixo:

Tabela 4.2 – Parâmetros do circuito de capacitância negativa.

Componente do Circuito	Valor Divulgado	Valor Medido	Erro
$R_1 = R_2$ (k $\Omega$ )	10	9,91	0,9 %
$\hat{R}$ (M $\Omega$ )	3,3	3,4	2,9 %
$R$ ( $\Omega$ )	100	98,4	1,6 %
$C_p$ (nF)	85	90,7	6,3 %
$C$ (nF)	90	92,7	2,9 %

Fonte: Autoria própria.

#### 4.1.1.5 Acoplamento entre a estrutura e o circuito shunt

O acoplamento entre o circuito *shunt* e a estrutura, foram descritos na seção 3.4 do capítulo anterior e determinado através da Equação 3.63, que utiliza o efeito do acoplamento eletromecânico através da impedância mecânica adimensional ( $\bar{Z}_{MEC}(s)$ ) e do fator de acoplamento eletromecânico ( $k_{ij}^2$ ) para determinar o comportamento do sistema.

#### 4.1.2 Modelagem computacional

Na modelagem computacional, determinamos as frequências naturais e os modos de vibração da estrutura, assim como as respostas em frequência da estrutura e do circuito *shunt*. Para tal, utilizamos algumas ferramentas para nos auxiliar nessa tarefa.

Para determinação das frequências naturais, das formas modais e da resposta em frequência da estrutura, foram utilizados os softwares *Solidworks*® e *Ansys*®, para os desenhos CAD e a simulação, respectivamente. Já para o circuito shunt, determinamos as respostas elétricas do circuito e elaboramos uma topografia de circuito integrado, utilizando os softwares computacionais *PSpice*® e *Fritzing*®, respectivamente.

Não efetuamos o estudo da estrutura acoplada ao circuito, devido à complexidade inerente a simulação do acoplamento de tais elementos, e sugerimos essa atividade como trabalhos futuros.

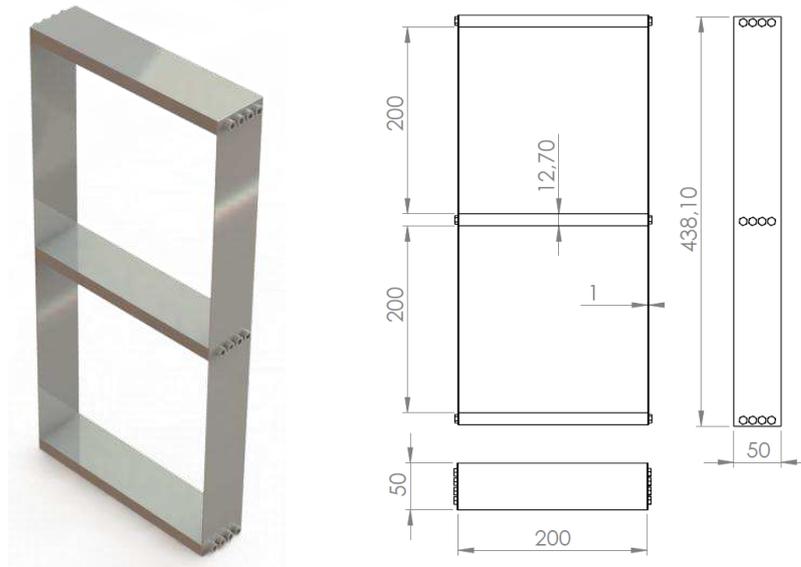
##### 4.1.2.1 Frequências naturais e modos de vibração da estrutura

Antes de iniciarmos a simulação da estrutura, é necessário que seja feito o desenho do modelo em ambiente gráfico próprio. Para isso, utilizamos o *Solidworks*® devido a sua simplicidade e facilidade de se construir modelos, além de podermos exportar as informações da estrutura para qualquer formato desejado.

A estrutura é composta por três “pisos” de aço 1020, duas colunas inteiriças de aço inoxidável e de 24 parafusos do tipo *Allen* que unem os pisos diretamente as

colunas. A estrutura completamente montada e as dimensões principais do pórtico estão apresentadas na Figura 4.4.

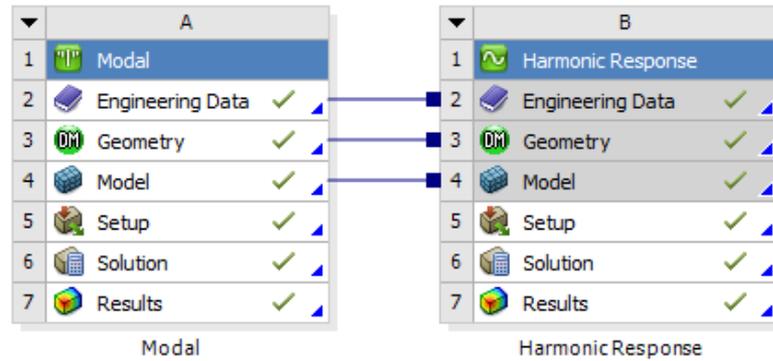
Figura 4.4 – Pórtico completamente montado e suas dimensões.



Fonte: Autoria própria.

Depois de concluída a etapa de construção da estrutura, exportamos os desenhos feitos no *Solidworks*®, em uma extensão de arquivo que seja possível sua leitura no *Ansys*®, para podermos iniciar as simulações. O próximo passo seria a construção dos blocos de comando, onde selecionamos os materiais a serem utilizados na estrutura, carregamos a geometria já definida e desenhada no *Solidworks*®, depois aplicamos a malha desejada e as soluções que nos interessam que nesse caso, foram os Modos de Vibração (Bloco A) e as Respostas Harmônicas (Bloco B), como apresentado na Figura 4.5, abaixo.

Figura 4.5 – Representação de blocos utilizado no *Ansys® Workbench*.

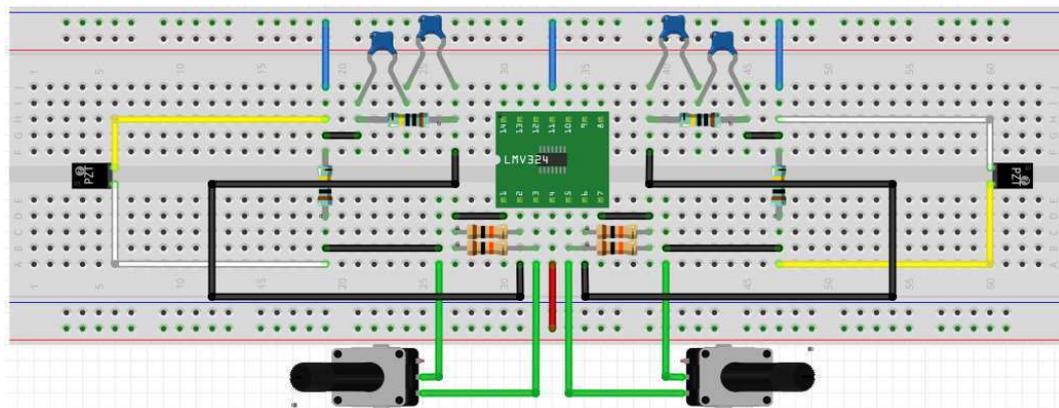


Fonte: Autoria própria.

#### 4.1.2.2 Circuito shunt

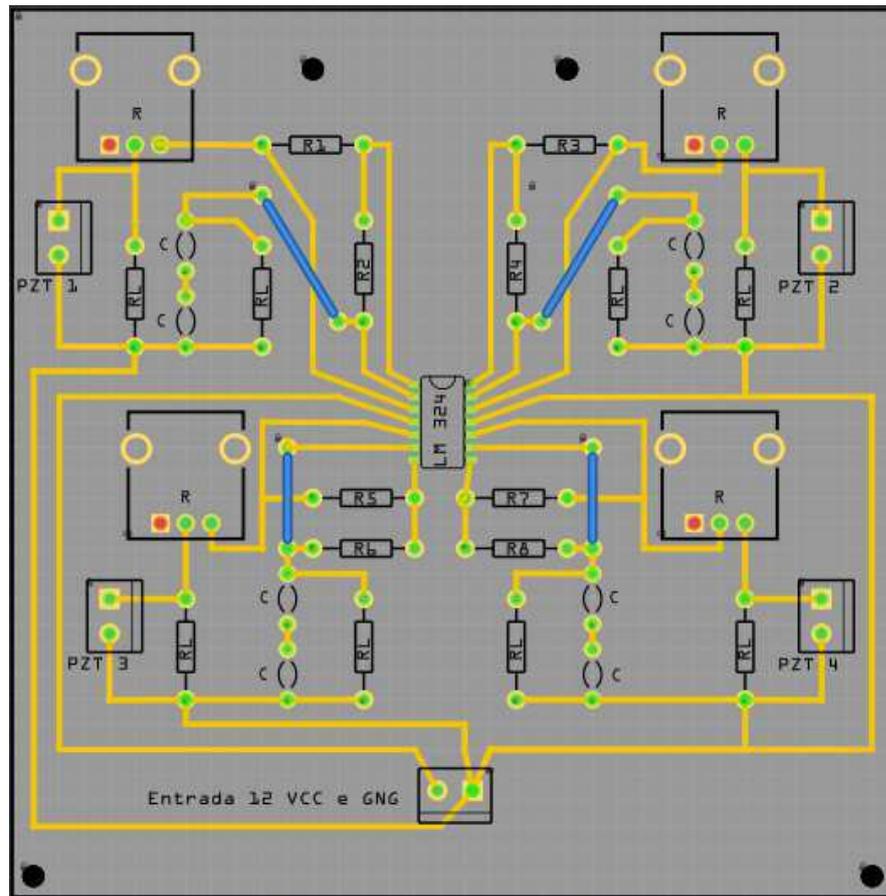
O *Fritzing®* é uma iniciativa de *hardware open-source* que torna a eletrônica acessível às pessoas, incentivando a criatividade. Essa foi a ferramenta escolhida para representação e montagem do circuito em *proto-board* (Figura 4.6), além da construção da placa de circuito impresso sugerida para abrigar o circuito *shunt* de capacitância negativa (Figura 4.7), capaz de conter até quatro piezoelétricos conectados a ela, simultaneamente. Necessitando apenas do ajuste dos potenciômetros para a faixa de frequência desejada.

Figura 4.6 – Representação esquemática do circuito a ser montado na *proto-board*.



Fonte: Autoria própria.

Figura 4.7 – Placa de circuito impresso sugerida.



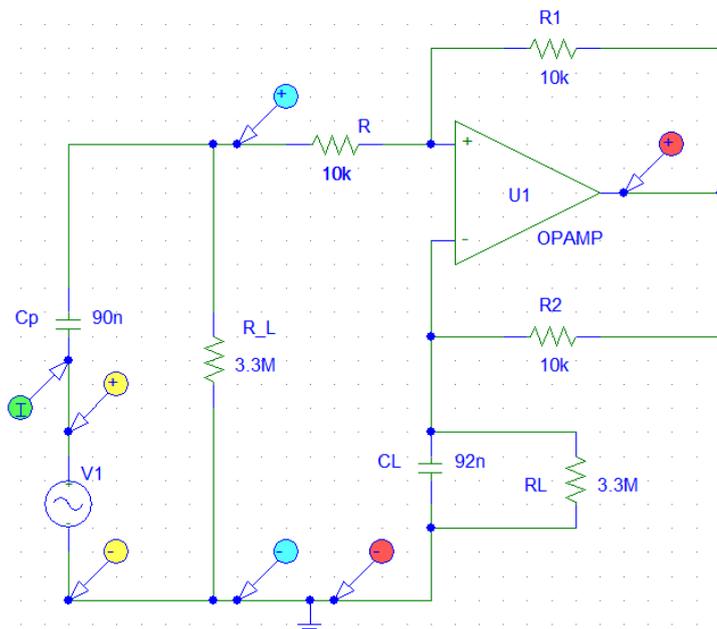
Fonte: Autoria própria.

Os componentes eletrônicos do circuito foram listados na Tabela 4.2. Nesse caso os resistores de  $100 \Omega$  foram substituídos por dois potenciômetros de  $500 k\Omega$ , com a finalidade de facilitar os experimentos, na busca pelo valor da melhor resistência elétrica aplicada, e a possibilidade de ajustes (mais detalhes sobre esse assunto, serão abordados na seção 5.3.1). Como o capacitor de  $90 nF$  não foi encontrado no mercado local, decidimos fazer uma associação em série de dois capacitores de  $180 nF$ , e que resulta no valor que necessitamos.

Para determinarmos as respostas elétricas do circuito, utilizamos uma ferramenta chamada de *PSpice*®, capaz de permitir o projeto e simular o comportamento elétrico de diferentes tipos de montagem de circuitos, analógicos ou digitais.

O circuito que construímos no programa é basicamente o circuito escolhido na seção 3.3 e apresentado na Figura 3.11 (b), aplicando os valores dos componentes eletrônicos medidos e não os divulgados pelo fabricante, para que o resultado da simulação represente da melhor forma possível o comportamento do circuito físico real a ser construído. A representação do circuito simulado no programa está apresentada na Figura 4.8.

Figura 4.8 – Representação do circuito simulado no *PSpice®*.



Fonte: Autoria própria.

### 4.1.3 Metodologia Experimental

#### 4.1.3.1 Concepção da estrutura

Toda a estrutura foi desenvolvida e construída no Laboratório de Vibrações e Instrumentação (LVI), pertencente à Unidade Acadêmica de Engenharia Mecânica (UAEM) da Universidade Federal de Campina Grande (UFCG). Ela é composta por barras chatas de aço 1020, chapas de aço inoxidável e por parafusos Allen, como descrito na Tabela 4.3 e como mostrado na Figura 4.9.

Tabela 4.3 – Descrição dos componentes que constituem a estrutura.

Descrição	Dimensões (mm)	Massa (g)	Quantidade
<i>Barra chata de aço 1020</i>	<i>200 x 50 x 12,7</i>	<i>958</i>	<i>3</i>
<i>Chapa de aço Inox</i>	<i>438,1 x 50 x 1</i>	<i>176</i>	<i>2</i>
<i>Parafuso Allen (M4)</i>	<i>4 x 12</i>	<i>3,5</i>	<i>24</i>
<b>Total:</b>		<b>3310</b>	<b>29</b>

Fonte: Autoria própria.

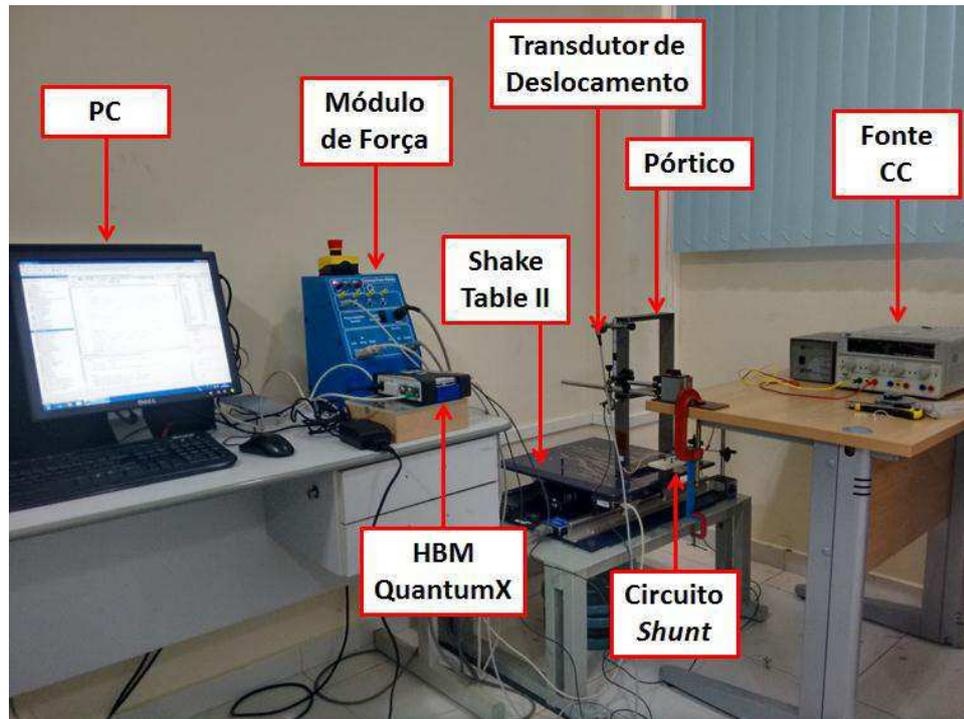
Figura 4.9 – Partes constituintes da estrutura e estrutura montada.



Fonte: Autoria própria.

Antes da construção da estrutura, foi realizado um estudo da geometria da mesma e analisamos os materiais que poderiam ser utilizados, pois não poderíamos ultrapassar a massa total de 7 kg e nem termos as frequências naturais da estrutura muito altas, devido a limitações físicas impostas pelo equipamento responsável pela excitação de base (*Shake Table®*), limitada a 15 Hz. Na Figura 4.10 está apresentada a estrutura montada e parte do aparato necessário para realização de alguns dos testes experimentais.

Figura 4.10 – Estrutura montada sobre a mesa e instrumentação necessária.



Fonte: Autoria própria.

A massa de cada piso foi obtida pesando-se cada uma em uma balança de precisão, junto com os parafusos que fixam o piso a coluna, ou seja, oito parafusos para cada piso.

A medição da rigidez foi feita através de um ensaio de deflexão estática do pórtico engastado na base, com uma montagem experimental que permitiu a adição de massas conhecidas a uma bandeja e a medição da deflexão da estrutura na altura do primeiro e do segundo piso. Como as propriedades geométricas da estrutura eram conhecidas, foi possível obter diretamente o momento de inércia do perfil e a rigidez equivalente do sistema. Já para o cálculo do fator de amortecimento experimental do sistema (estrutura e circuito *shunt*) com o circuito não ativado, utilizamos o método da largura de banda. Os valores obtidos para esses parâmetros são apresentados na Tabela 4.4.

Tabela 4.4 – Parâmetros do sistema obtidos experimentalmente.

Variável	Valor	Unidade
Massa do 1º Piso ( $m_1$ )	0,986	kg
Massa do 2º Piso ( $m_2$ )	0,986	kg
Rigidez do 1º Piso ( $k_1$ )	1357,5	N/m
Rigidez do 2º Piso ( $k_2$ )	2589,1	N/m
Fator de Amortecimento ( $\xi_1$ )	0,017	-
Fator de Amortecimento ( $\xi_2$ )	0,005	-
Constante de Amortecimento ( $c_1$ )	0,801	N.s/m
Constante de Amortecimento ( $c_2$ )	0,743	N.s/m
Módulo Elástico ( $E$ )	155	GPa

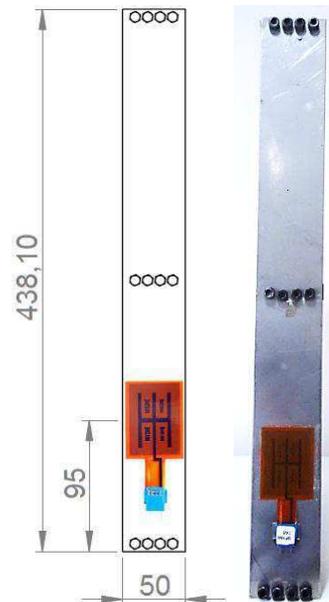
Fonte: Autoria própria.

#### 4.1.3.2 Posicionamento e colagem dos piezoelétricos

O posicionamento e a colagem dos piezoelétricos são de extrema importância para maximizar o efeito e o acoplamento mecânico entre o transdutor e a estrutura. Portanto a execução correta dessa etapa pode ser decisiva para alcançarmos o objetivo do trabalho. Para esse experimento, utilizamos apenas dois transdutores piezoelétricos, colados na parte externa das colunas da estrutura. Autores como Santana (2007), Faria e Muller (1996) e Illegbusi e Ballas (1999) avaliaram também a influência da colagem da pastilha piezoelétrica no desempenho de diferentes estruturas.

Considerando que o melhor local para a colagem dos piezoelétricos é onde ocorre a maior deformação na estrutura, pois nessa região o transdutor será mais solicitado mecanicamente, conseqüentemente, maior energia será transformada. Para detectarmos, onde seria esse local, utilizamos as simulações da estrutura feitas no *Ansys®*, que nos indicou o local de máxima deformação. O posicionamento aproximado do transdutor piezoelétrico está mostrado na Figura 4.11.

Figura 4.11 – Posicionamento aproximado do piezoelétrico na estrutura.



Fonte: Autoria própria.

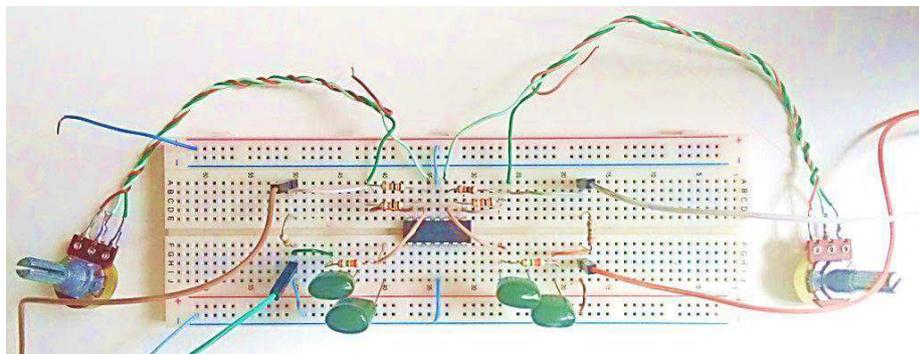
Para a colagem dos piezoelétricos a estrutura, houve a preparação prévia da superfície onde iria ser colado o elemento – nas colunas da estrutura, a fim de garantir a máxima aderência das partes após a secagem da cola. Primeiro efetuamos a limpeza da superfície do metal com água e álcool isopropílico, e secamos com um soprador térmico, para que não ficasse água acumulada. Depois de seca, iniciamos a etapa de lixamento, utilizando lixas d'água 300 e 600, sempre a 45°, variando-se o sentido. Após essa etapa, limpamos novamente a superfície, aplicamos a cola no local desejado e pressionamos o piezoelétrico contra superfície, auxiliados por uma chapa de alumínio e um grampo sargento, para que a pressão fosse mantida constante até que houvesse a secagem da cola e a retirada da chapa.

A cola escolhida foi um adesivo universal instantâneo a base de cianoacrilato líquido do fabricante *Worker®*, por ser facilmente encontrada no comércio, possuir uma secagem rápida e um baixo custo.

#### 4.1.3.3 Circuito eletrônico

O circuito foi montado em uma *protoboard* para facilitar a realização dos experimentos, possíveis ajustes e substituições de componentes, caso necessário, seguindo o esquema apresentado anteriormente na Figura 4.6. O circuito eletrônico montado é apresentado na Figura 4.12.

Figura 4.12 – Circuito eletrônico montado em *protoboard*.



Fonte: Autoria própria.

#### 4.1.3.4 Determinação do “ $R$ ” ótimo

Para determinação do valor da resistência  $R$  ótima em série com o “capacitor negativo” do circuito *shunt*, que nos oferece a maior redução nas amplitudes de vibração da estrutura, utilizamos uma abordagem experimental de tentativa e erro, também aplicada por Park e Park (2003). A determinação desse valor poderia ser feita de forma interativa e/ou utilizando métodos computacionais, mais como o foco do trabalho não está na determinação desse parâmetro e que poderia depender de muito tempo, optamos pela forma mencionada. Para mais detalhes sobre esse tema, recomendamos a leitura dos trabalhos de Beck (2012) e Behrens (2000).

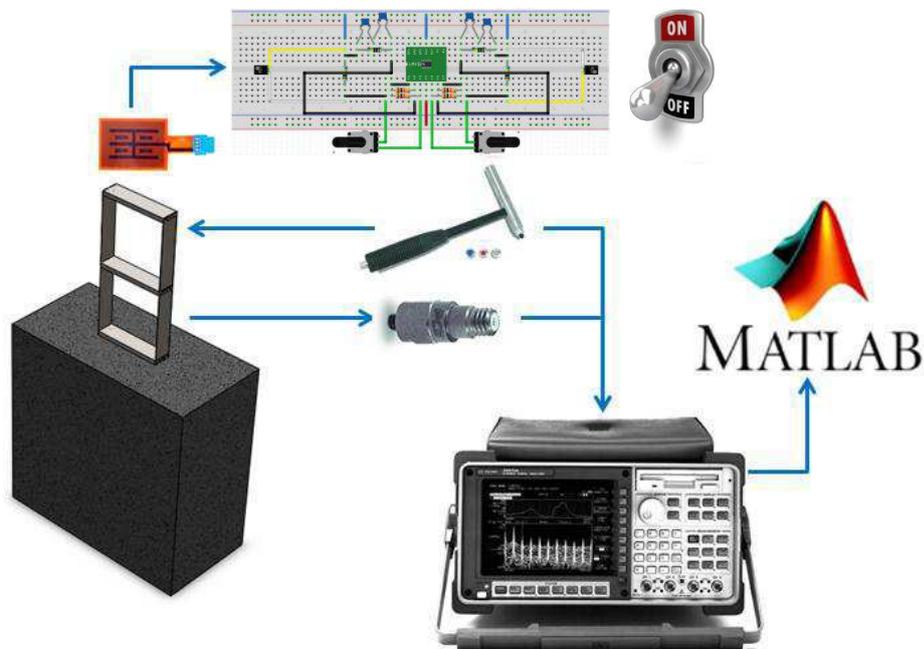
A princípio, utilizamos a Equação (3.63) implementada no *Matlab*®, para determinarmos a faixa de valores de  $R$  que poderiam nos proporcionar o resultado desejado, os valores encontrados variaram de 100  $\Omega$  a 300  $k\Omega$ . Logo depois, selecionamos alguns valores de  $R$  pertencentes a essa faixa, e iniciamos os experimentos.

#### 4.1.3.5 Estrutura e circuito shunt acoplados

Ao conectarmos o circuito shunt a estrutura, observamos o comportamento do sistema quando submetido a uma excitação externa de base e a vibração livre, quando o circuito *shunt* estiver ativado ou não ativado, e verificamos a sua influência.

Para os testes em vibração livre, fixamos a estrutura em uma mesa inercial em forma de bloco retangular com frequência natural de aproximadamente 1,5 Hz, e iniciamos os testes com um martelo de impacto (*PCB® 086C01*) como entrada e um acelerômetro do modelo *PCB® 352B10*, como elemento sensor (saída). Os sinais de entrada e saída foram capturados pelo Analisador Dinâmico de Sinais (*Dynamic Signal Analyzer*), modelo 35670A da marca *Agilent®*, e posteriormente, tratados no *Matlab®*. A representação experimental deste ensaio está apresentada na Figura 4.13.

Figura 4.13 – Representação esquemática do ensaio experimental em vibração livre.



Fonte: Autoria própria.

Para os testes em vibração forçada com excitação de base, utilizamos como excitador a *Shake Table II*® da fabricante canadense *Quanser*®, com um grau de liberdade. Suas principais características podem ser observadas na Tabela 4.5.

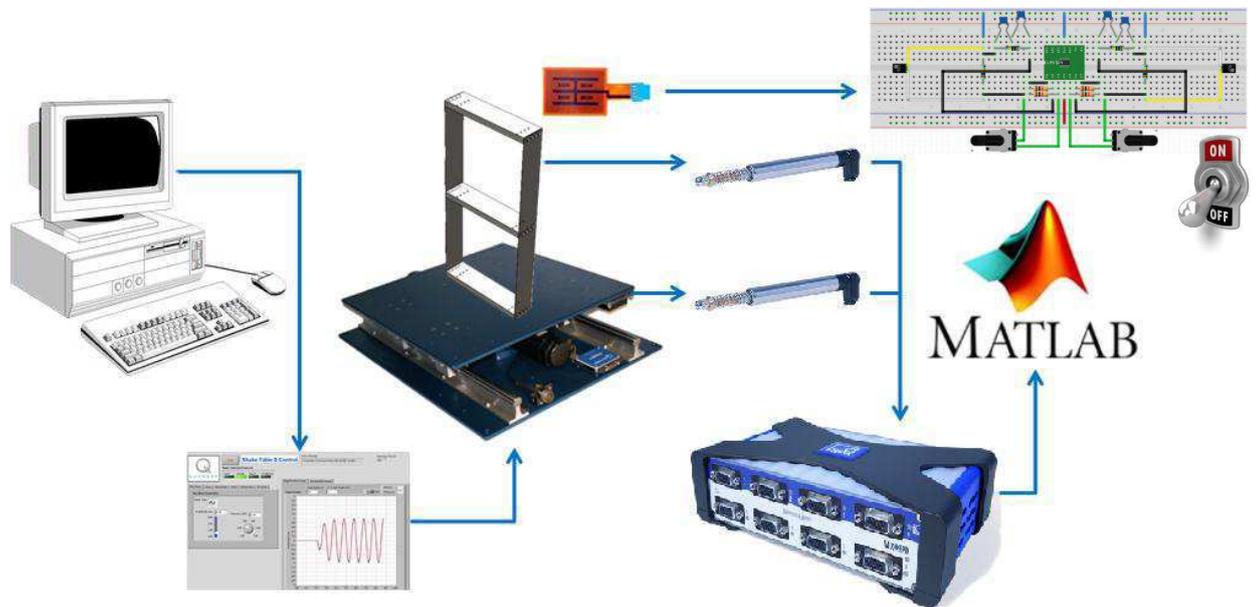
Tabela 4.5 – Principais características da *Shake Table*.

Descrição	Valor
<i>Dimensões</i>	61 cm x 46 cm x 13 cm
<i>Massa</i>	27,2 kg
<i>Dimensões Área de Ensaio</i>	46 cm x 46 cm
<i>Deslocamento Máximo</i>	± 7,6 cm
<i>Carga Máxima</i>	7,5 kg
<i>Aceleração Máxima</i>	2,5 g
<i>Velocidade Máxima</i>	0,665 m/s
<i>Frequência Máxima</i>	15 Hz

Fonte: *Quanser*®.

A mesa é comandada por um computador contendo o seu *software* de controle, chamado de *QUARC*®, ou através da interface do *Matlab*®/*Simulink*®. O deslocamento da mesa (entrada senoidal) e da estrutura (saída) foram medidas através de sensores indutivos de deslocamento, modelo *WI/10MM-T* da *HBM*®. E captados pelo sistema de aquisição de dados *QuantumX*® *MX840B* também da fabricante *HBM*®. Após adquiridos os dados, os mesmos foram tratados e processados no *Matlab*®. Todo o processo experimental executado está mostrado no esquema da Figura 4.14 abaixo.

Figura 4.14 – Representação esquemática do ensaio experimental de vibração forçada com excitação de base.



Fonte: Autoria própria.

Vale salientar que a FRF do sistema quando submetido à excitação de base, foi construída através da captação dos deslocamentos da estrutura e da base em regime permanente, com sinais captados durante dez segundos, variando-se a frequência de excitação de 1 a 14 Hz, com um passo de 0,1 Hz. Dessa forma, obtemos os pontos necessários para construirmos as FRFs com razoável exatidão.

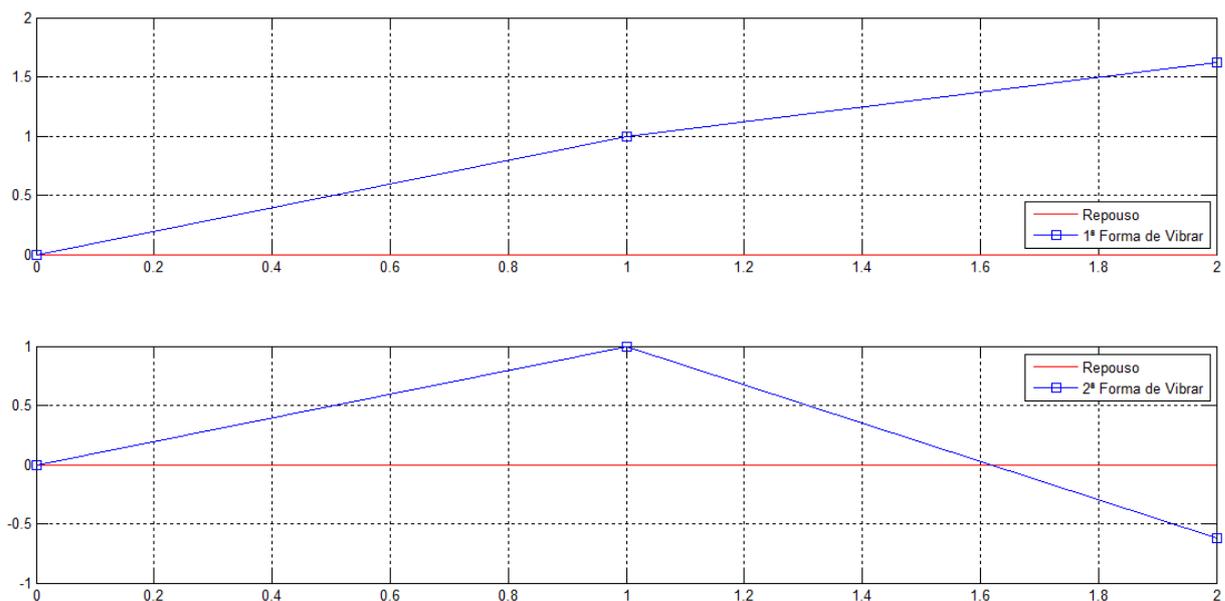
Assim, conseguimos obter as curvas referentes às Funções de Resposta em Frequência (FRF) do sistema sobre excitação, quando o circuito shunt estiver ativado e não ativado, comparando-se a influência do circuito e a sua capacidade de amortecimento.

## 5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

### 5.1 Resultados analíticos

Para a determinação dos valores das frequências naturais da estrutura com dois graus de liberdade submetida à vibração livre não amortecida, utilizamos as Equações (3.11) e (3.12), e os resultados experimentais da Tabela 4.4. Já para os modos de vibração da estrutura, utilizamos a Equação (3.15), que resultou na Figura (5.1), apresentada logo abaixo.

Figura 5.1 – Modos de vibrar da estrutura.



Fonte: Autoria própria.

No eixo  $x$  da Figura 5.1 temos as representações das posições relativas das massas  $m_1$  e  $m_2$ , e no eixo  $y$  temos os deslocamentos relativos dessas massas de forma representativa, apenas para observarmos o comportamento modal da estrutura.

Os parâmetros geométricos da estrutura, como distância entre pisos, espessura da coluna e largura da coluna foram os valores apresentados na Figura 4.4. Os

valores das variáveis estruturais utilizadas nas rotinas e os valores das frequências naturais encontradas para as duas primeiras frequências estão expostas nas Tabelas 4.4 e 5.1, respectivamente.

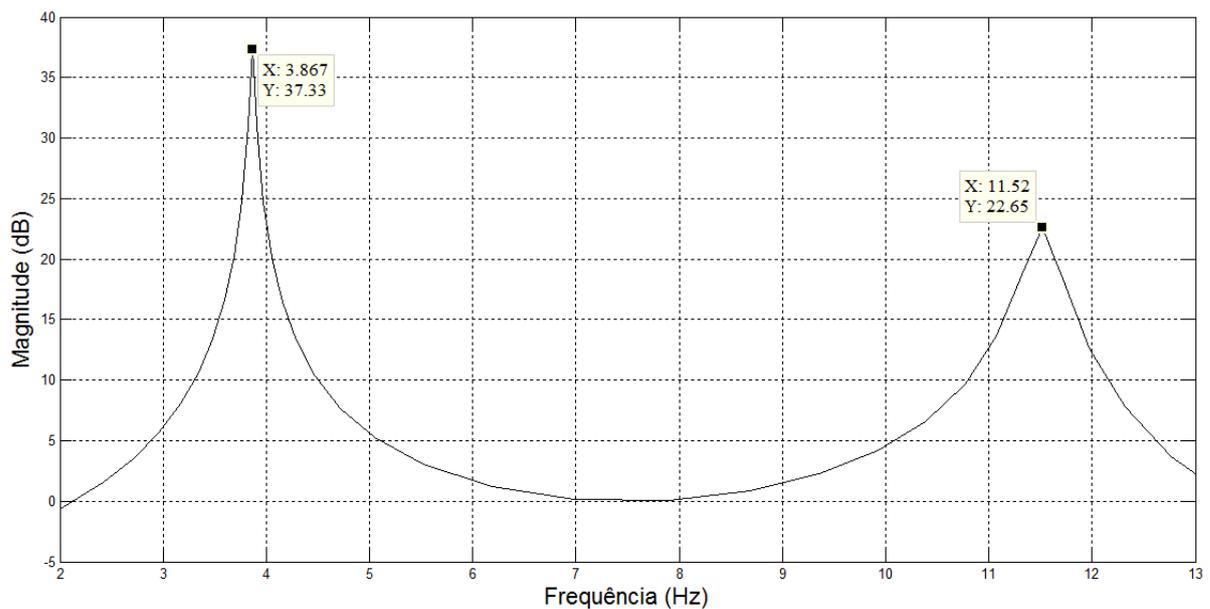
Tabela 5.1 – Frequências naturais encontradas.

Variável	Valor	Unidade
1ª Frequência Natural	3,87	Hz
2ª Frequência Natural	11,52	Hz

Fonte: Autoria própria.

A Função de Resposta em Frequência (FRF) da estrutura foi feita com base na modelagem apresentada no desenvolvimento da Equação (3.25), que utiliza da teoria das Transformadas de *Laplace* para um sistema amortecido e o resultado obtido em escala logarítmica está apresentado na Figura (5.2), para uma entrada do tipo impacto.

Figura 5.2 – FRF da estrutura submetida a um impacto.

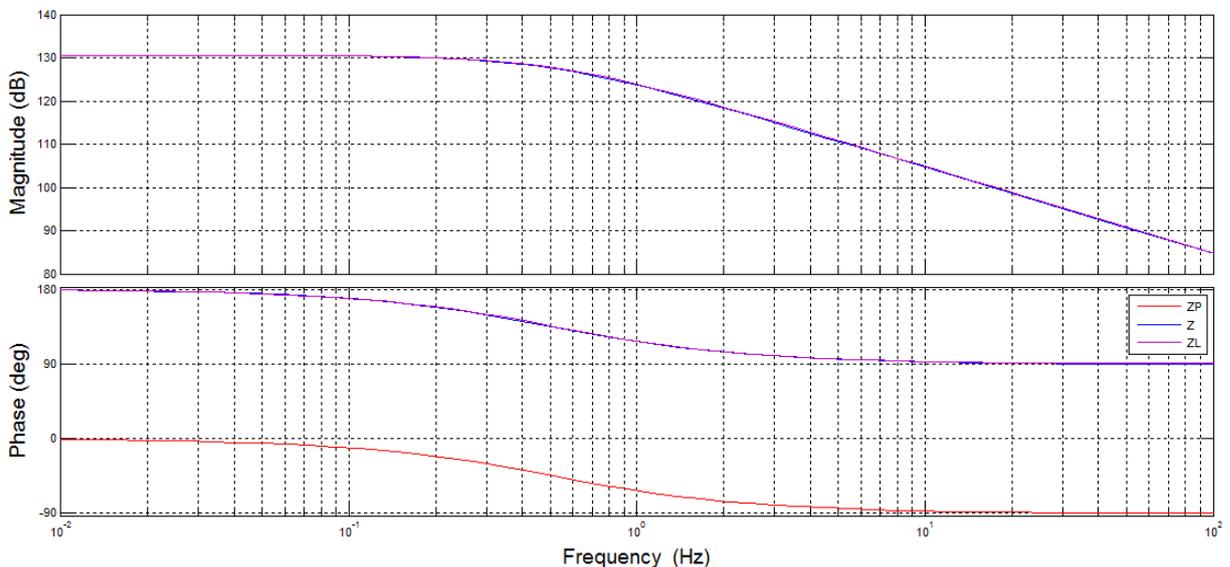


Fonte: Autoria própria.

Para obtenção da Figura 5.2 foi necessário realizarmos algumas alterações nos parâmetros do modelo, para que os valores das frequências naturais analíticas ficassem próximos aos valores experimentais. Como sabemos, a rigidez experimental depende dos parâmetros geométricos e do material da estrutura, além da forma de fixação (por parafusos), portanto, o melhor resultado obtido foi alcançado adotando-se uma rigidez equivalente de  $k_1 = 1375 \text{ N/m}$  e de  $k_2 = 2187 \text{ N/m}$ , para o primeiro e o segundo piso, respectivamente.

Utilizando o Diagrama de *Bode*, podemos observar melhor o comportamento das impedâncias do sistema, através das curvas de magnitude e de fase. Apresentando primeiramente na Figura 5.3, uma comparação entre as impedâncias elétricas do piezoelétrico ( $Z_P$ ) e do circuito elétrico criado ( $Z_L$ ), descrito na Equação (3.55) e a impedância do circuito *shunt* com o piezoelétrico acoplado ( $Z$ ), pela Equação (3.56).

Figura 5.3 – Comparação entre as impedâncias do piezoelétrico ( $Z_P$ ), do circuito elétrico criado ( $Z_L$ ) e do circuito *shunt* com o piezoelétrico ( $Z$ ).



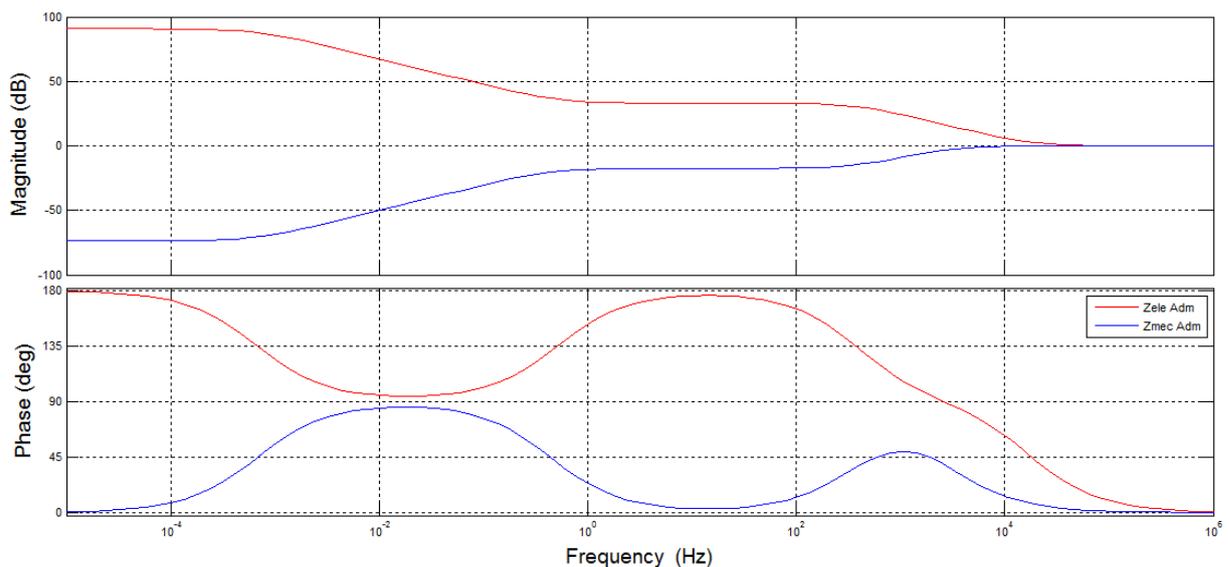
Fonte: Autoria própria.

Pelas curvas apresentadas na Figura 5.3, podemos notar que  $Z_P$ ,  $Z_L$  e  $Z$  são iguais em magnitude, porém as curvas de  $Z_P$  e de  $Z$  estão defasadas de  $180^\circ$ , gerando o efeito descrito anteriormente, em que a impedância elétrica criada, possui

a mesma magnitude do piezoelétrico, mais defasadas de certo valor, para que elas se oponham e se anulem justamente na faixa de frequências para a qual foram ajustadas.

O circuito *shunt* de capacitância negativa é regido pelas impedâncias elétricas e mecânicas adimensionais do sistema, que são representados pelas Equações (3.59) e (3.62), respectivamente. As mesmas também são apresentadas na Figura 5.4, através do Diagrama de *Bode*, onde podemos observar o seu comportamento, e como era de se esperar, elas possuem valores semelhantes na faixa de frequências escolhida, mais são opostas tanto em magnitude como em fase.

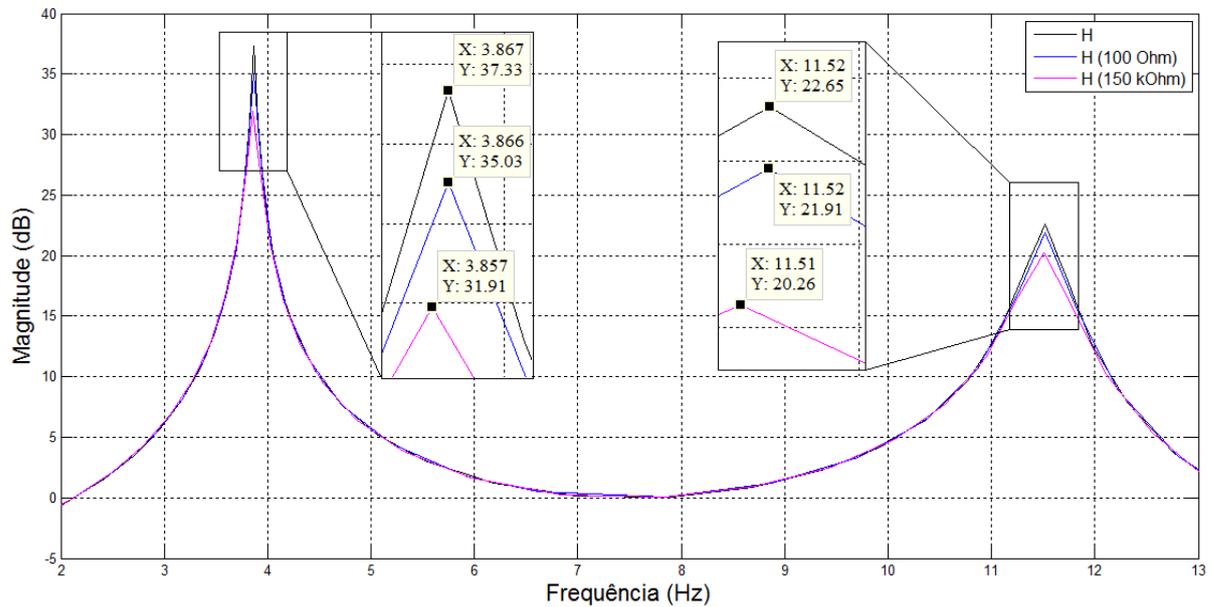
Figura 5.4 – Comparação entre as impedâncias adimensionais elétricas e mecânicas.



Fonte: Autoria própria.

A FRF do sistema acoplado, composto pela estrutura e o circuito *shunt*, é ilustrada na Figura 5.5, com a impedância mecânica adimensional igual a zero, ou seja, em circuito aberto, e comparando-se com os valores escolhidos de resistência elétrica  $R$  de  $100 \Omega$  e  $150 k\Omega$ , em circuito fechado, ou seja, quando o circuito *shunt* está acoplado.

Figura 5.5 – FRF do sistema com e sem o acoplamento do circuito *shunt*, para diferentes valores de R.



Fonte: Autoria própria.

Pela Figura 5.5, especialmente visualizando as janelas de 'zoom', podemos observar que quando o circuito shunt entra em funcionamento, ocorre um incremento no amortecimento do sistema, representado pela redução na amplitude dos picos de ressonância, sem que as frequências naturais, ou seja, a rigidez se altere. Isso implica que apesar da representação simplificada do comportamento da estrutura, com o circuito *shunt* acoplado, o fenômeno pode ser descrito com razoável precisão.

Os valores dos fatores de amortecimento obtidos através do método da Largura de Banda e as amplitudes de resposta apresentados na Figura 5.5 para o resistor de  $100 \Omega$  e  $150 k\Omega$ , estão apresentados nas Tabelas 5.2 e 5.3, respectivamente.

Tabela 5.2 – Fatores de amortecimento analíticos obtidos.

	Variável	Valor	Diferença
<b>1ª Freq. Natural</b>	Fator de Amortecimento ( $\xi_1$ ) P/ NA	0,0233	-
	Fator de Amortecimento ( $\xi_1$ ) P/ 100 $\Omega$	0,0297	27,47 %
	Fator de Amortecimento ( $\xi_1$ ) P/ 150 k $\Omega$	0,0349	49,78 %
<b>2ª Freq. Natural</b>	Fator de Amortecimento ( $\xi_2$ ) P/ NA	0,0271	-
	Fator de Amortecimento ( $\xi_2$ ) P/ 100 $\Omega$	0,0286	5,53 %
	Fator de Amortecimento ( $\xi_2$ ) P/ 150 k $\Omega$	0,0325	19,93 %

Fonte: Autoria própria.

Tabela 5.3 – Frequências naturais e picos das amplitudes de resposta analíticas.

	1ª F. N.	Magnitude	Redução	2ª F. N.	Magnitude	Redução
<b>Não Ativado</b>	3,87 Hz	37,30 dB	-	11,52 Hz	22,70 dB	-
<b>Ativado (100 <math>\Omega</math>)</b>	3,87 Hz	35,00 dB	2,5 dB	11,52 Hz	21,90 dB	0,8 dB
<b>Ativado (150 k<math>\Omega</math>)</b>	3,86 Hz	31,90 dB	5,4 dB	11,52 Hz	20,30 dB	2,4 dB

Fonte: Autoria própria.

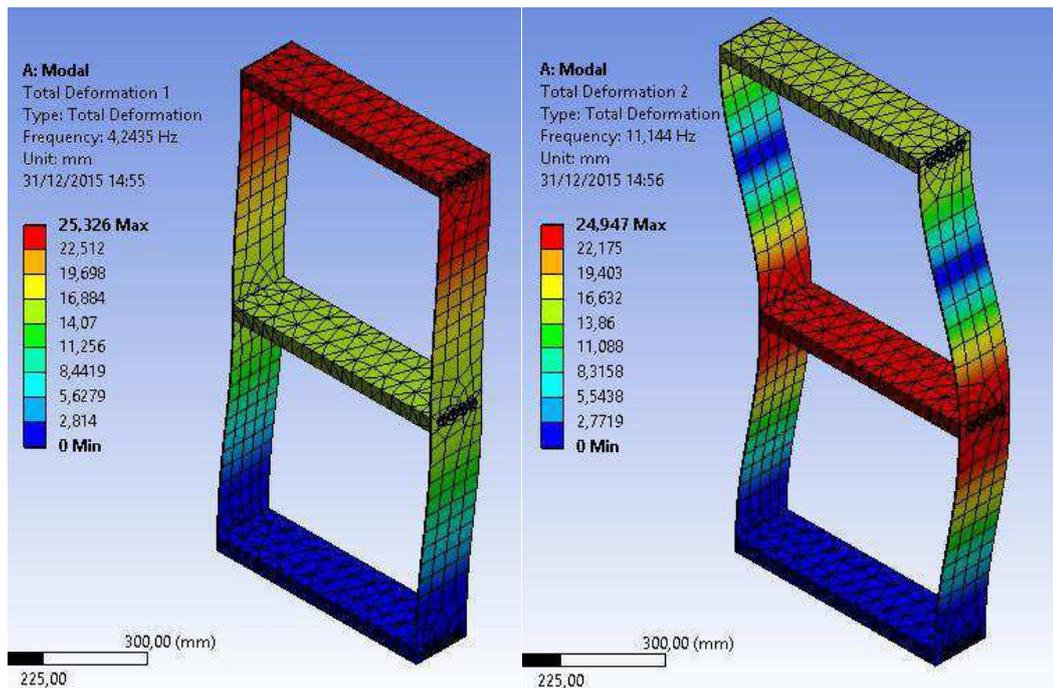
## 5.2 Resultados computacionais

### 5.2.1 Estrutura

A parte mecânica, referente à determinação dos modos de vibração, das frequências naturais e da FRF da estrutura, para as duas primeiras frequências naturais, foi simulada utilizando o *Ansys®*, que se mostrou capaz de representar o fenômeno físico de forma eficiente e representativa. Para essa simulação foi utilizada uma malha de controle com 31.633 nós, contendo 15.322 elementos em forma de triângulos com base em curvatura. Não foi levado em consideração nem o contato e nem o atrito entre as partes da estrutura, e como elemento fixo foi selecionado a base da estrutura.

A Figura 5.6 mostra os dois modos de vibração da estrutura, referentes às suas duas primeiras frequências naturais de vibração e a malha gerada para a estrutura. Para o primeiro modo, encontramos uma frequência natural de 4,24 *Hz*, e para o segundo modo, encontramos uma frequência de 11,14 *Hz*.

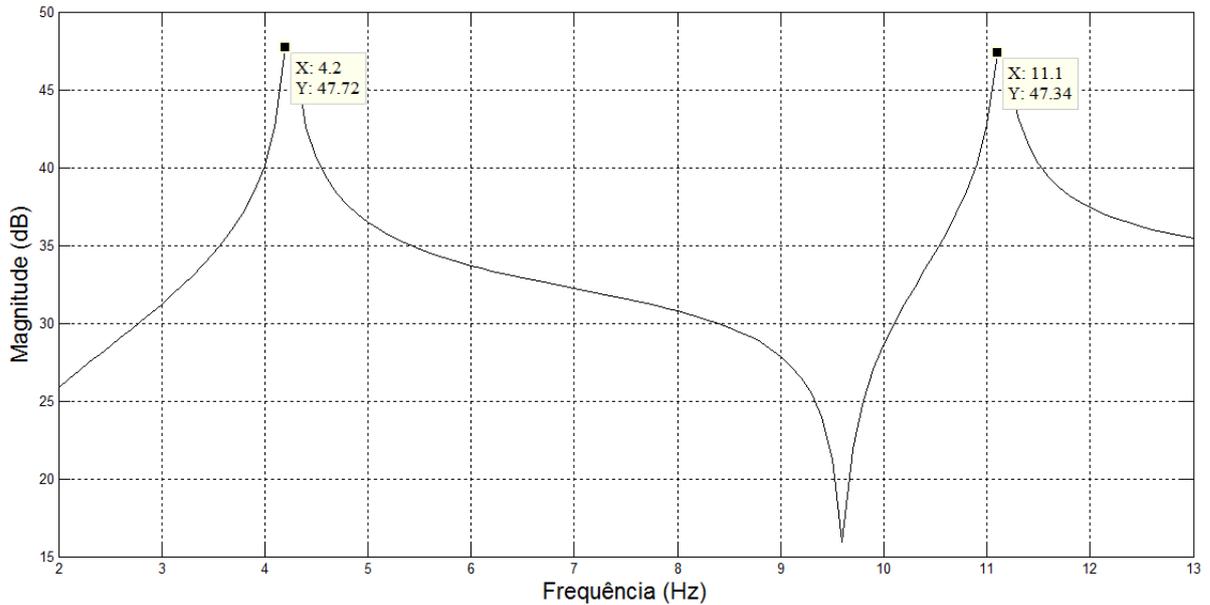
Figura 5.6 – Primeiro e segundo modo de vibração da estrutura.



Fonte: Autoria própria.

Já para a determinação da FRF da estrutura, utilizamos uma análise harmônica, aplicando-se uma força representada por um impacto na extremidade superior da estrutura equivalente a 2 *N* e analisando a resposta numa faixa que vai de 0 a 20 *Hz*. O intervalo de análise das frequências foi de 0,1 *Hz*, ou seja, foram necessários 200 pontos para a construção da curva, apresentada na Figura 5.7.

Figura 5.7 – FRF da estrutura simulada no Ansys®.



Fonte: Autoria própria.

Se compararmos a curva obtida da simulação computacional com a curva obtida analiticamente, veremos que há uma discrepância tanto nos valores das frequências naturais da estrutura, quanto nos valores das amplitudes da resposta. Isso pode ter se dado, devido às simplificações de malha utilizadas no *Ansys®* e a não imposição de um modelo mais completo que contemplasse as uniões e o atrito entre as partes.

Outra diferença encontrada foi o pico de antirressonância que surgiu na Figura 5.7, que pode ser explicado pelos locais onde escolhemos posicionar a entrada (impacto) e saída (deslocamento) do sinal, que no modelo analítico, o impacto foi imposto no primeiro piso da estrutura e o deslocamento medido no segundo. Já no computacional, ambos foram posicionados no segundo piso, alterando a forma da curva da resposta em frequência.

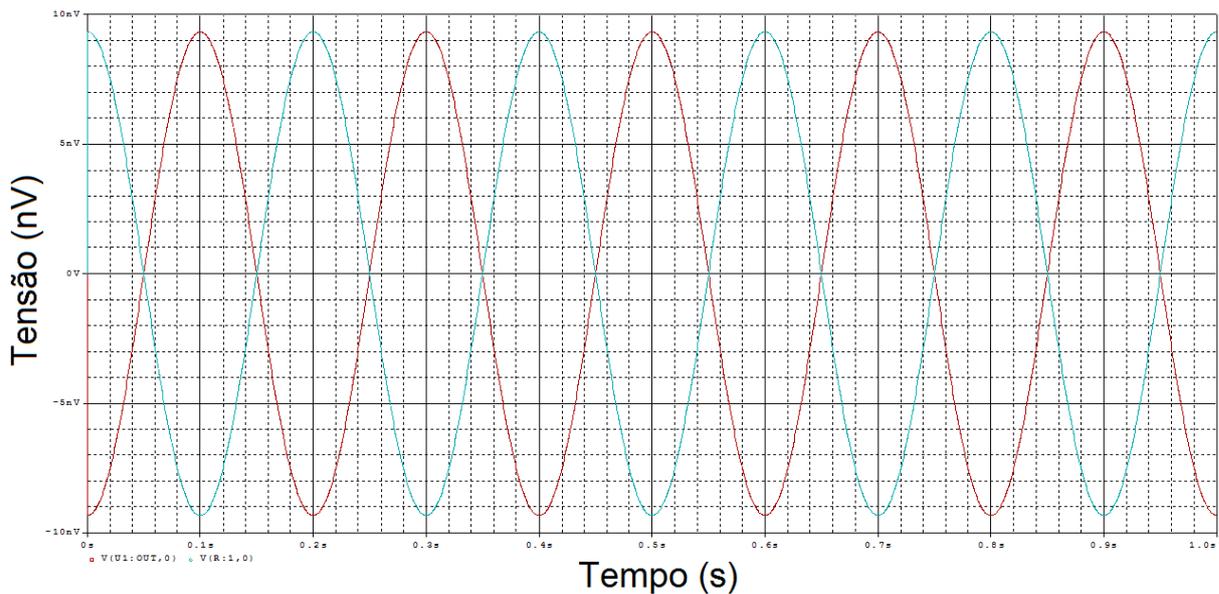
### 5.2.2 Circuito shunt

Para validarmos o comportamento do circuito *shunt*, consideramos que a estrutura e conseqüentemente o transdutor piezoelétrico que está colado a mesma, são excitados por um deslocamento na base de forma senoidal com amplitude de 1

*mm* e uma frequência de 5 Hz. Para simularmos o efeito da geração da tensão elétrica pelo piezoelétrico acoplado a estrutura, criamos uma fonte de tensão contínua que gera 1 V de tensão pico a pico, com uma frequência de 5 Hz, na forma senoidal.

Se plotarmos as tensões elétricas nas saídas do gerador e do amplificador, poderemos observar exatamente o efeito desejado da capacitância negativa, como apresentado na Figura 5.8. Onde a tensão gerada na entrada do piezoelétrico é igual em amplitude à tensão gerada pelo amplificador, porém defasadas de certo ângulo, garantindo que o circuito *shunt* se comporte da maneira esperada.

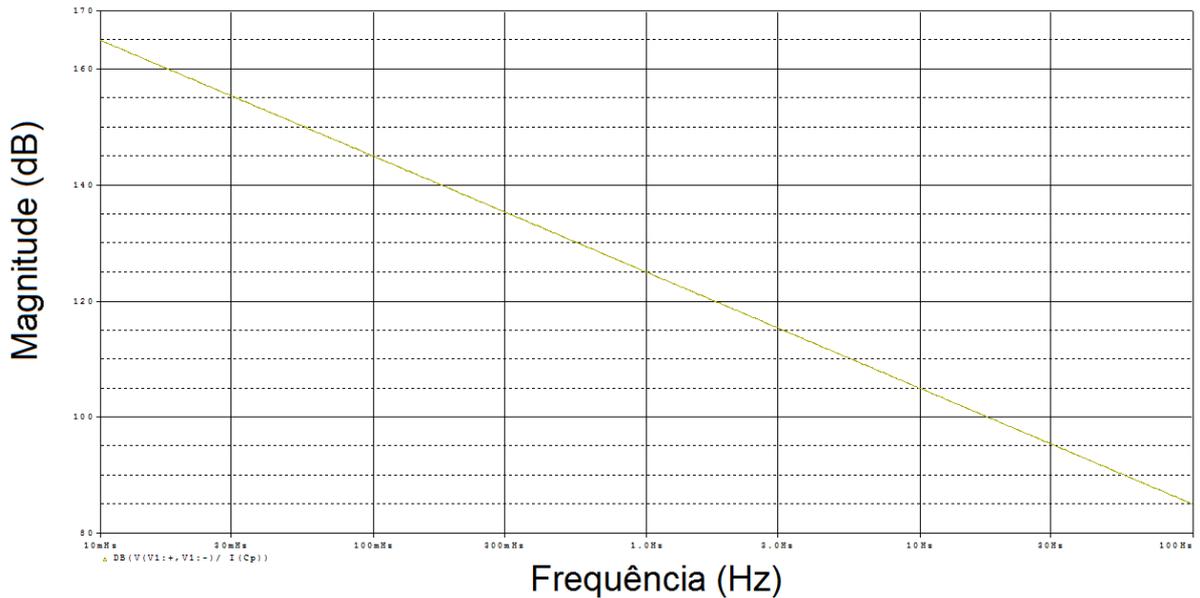
Figura 5.8 – Tensões elétricas geradas na entrada do circuito elétrico (azul), em comparação com a tensão elétrica gerada na saída do amplificador (vermelho), no domínio do tempo.



Fonte: Autoria própria.

O comportamento simulado da impedância do circuito elétrico no domínio da frequência obtido no *PSpice*®, pode ser observado na Figura 5.9, com a corrente e a tensão elétricas medidas na saída do gerador.

Figura 5.9 – Impedância do circuito elétrico simulado no domínio da frequência, medida na saída do gerador.



Fonte: Autoria própria.

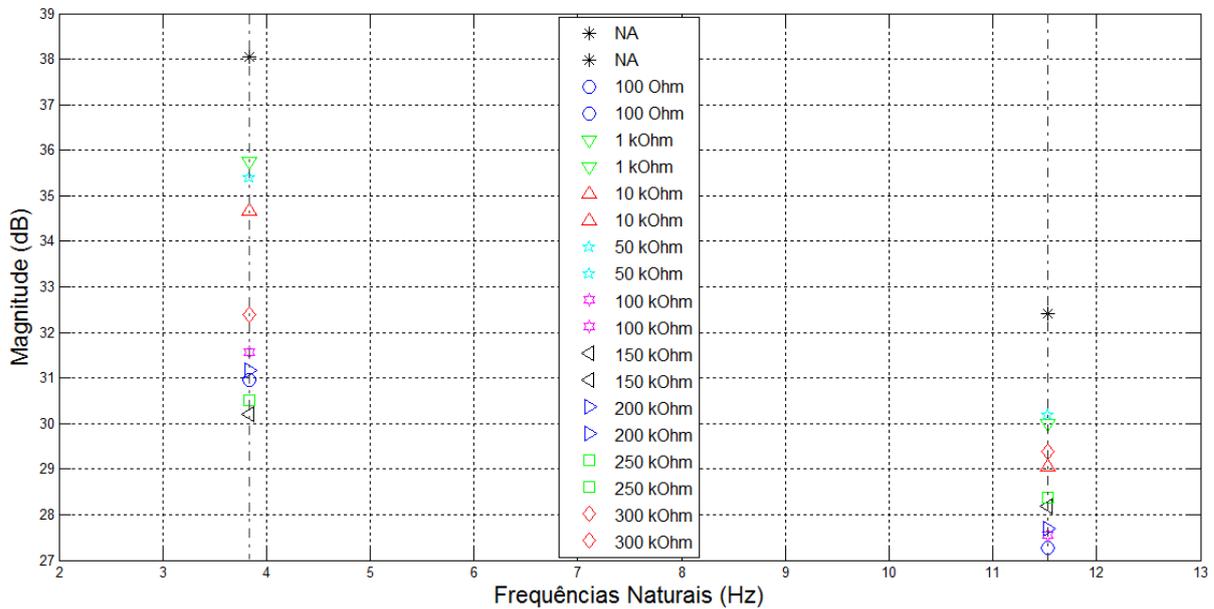
### 5.3 Resultados experimentais

#### 5.3.1 Determinação experimental da resistência elétrica

Após a construção e a montagem completa da estrutura, com o circuito elétrico e os transdutores piezoelétricos corretamente posicionados e colados, foram realizados os procedimentos experimentais para determinação da resistência ideal.

Antes de realizarmos os experimentos, precisamos determinar quais os valores de  $R$ , que correspondem a maior redução nas amplitudes de vibração da estrutura. E como dito anteriormente, essa etapa foi feita através de várias tentativas, escolhendo-se valores de resistores dentro do intervalo de  $100 \Omega$  a  $300 k\Omega$ , e comparando-os com o circuito não ativado (NA), a fim de verificar a sua influência na redução das amplitudes. O resultado dos ensaios utilizando esses valores de  $R$ , e sua influência nos picos de ressonância das duas primeiras frequências naturais estão apresentados na Figura 5.10.

Figura 5.10 – Valores dos resistores utilizados e redução das amplitudes experimentais de resposta de cada pico de ressonância.



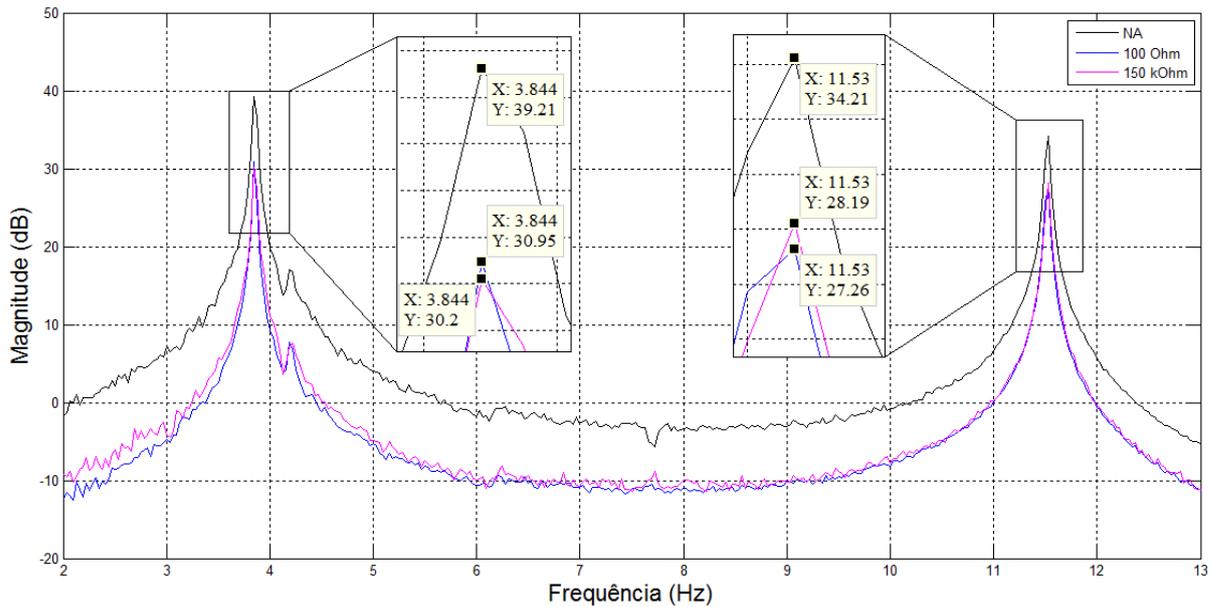
Fonte: Autoria própria.

Podemos observar que todos os resistores reduziram as amplitudes de resposta da estrutura, porém os que obtiveram os melhores desempenhos para a primeira e a segunda frequências naturais, foram os de  $150\text{ k}\Omega$  e  $100\ \Omega$ , alcançando uma redução de  $7,85\text{ dB}$  e  $5,16\text{ dB}$  respectivamente. Esses valores estão de acordo com o esperado, e em sintonia com a teoria apresentada na seção 2.2.1. Portanto, utilizaremos os resistores que obtiveram os melhores resultados para fazermos os testes de vibração livre e vibração forçada, e observar o comportamento da estrutura.

### 5.3.2 Resposta em vibração livre

O melhor resultado obtido com o resistor de  $100\ \Omega$ , para os testes de vibração livre submetidos a uma entrada do tipo impacto em comparação com o circuito shunt não ativado (NA), foi de aproximadamente  $8,26\text{ dB}$  para a primeira frequência natural ( $3,84\text{ Hz}$ ) e de  $6,95\text{ dB}$  para a segunda frequência natural ( $11,53\text{ Hz}$ ), com visto na Figura 5.11.

Figura 5.11 – FRF do sistema em vibração livre.



Fonte: Autoria própria.

Já o resultado obtido na configuração 2 (resistor de 150 k $\Omega$ ) em comparação com o circuito shunt não ativado (NA), obteve-se uma redução de aproximadamente 9,01 dB para a primeira frequência natural (3,84 Hz) e de 6,02 dB para a segunda frequência natural (11,53 Hz), também apresentado na Figura 5.11.

Se compararmos os resultados obtidos para os dois valores de resistores, vemos que o resistor de menor valor (100  $\Omega$ ) teve uma redução ligeiramente maior para a segunda frequência natural, em relação ao resistor de maior valor (150 k $\Omega$ ). E o oposto ocorreu para a primeira frequência natural, onde o resistor de maior valor (150 k $\Omega$ ) obteve uma redução maior do que o alcançado com o resistor de menor valor (100  $\Omega$ ). Portanto, de acordo com a teoria do Máximo Fator de Perda apresentadas por Park e Park (2003), esses resultados estão coerentes.

Os valores encontrados para os fatores de amortecimento da estrutura pelo método da Largura de Banda, utilizando os resistores de 100  $\Omega$  e de 150 k $\Omega$  estão apresentados na Tabela 5.4. Já os resultados experimentais de frequência e amplitude dos picos de ressonância em vibração livre, submetidos a uma entrada do

tipo impacto estão resumidos e apresentados na Tabela 5.5, para os resistores de  $100 \Omega$  e de  $150 \text{ k}\Omega$ .

Tabela 5.4 – Fatores de amortecimento experimentais em vibração livre.

	Variável	Valor	Diferença
<b>1ª Freq. Natural</b>	<i>Fator de Amortecimento (<math>\xi_1</math>) P/ NA</i>	0,0156	-
	<i>Fator de Amortecimento (<math>\xi_1</math>) P/ <math>100 \Omega</math></i>	0,0104	33,33 %
	<i>Fator de Amortecimento (<math>\xi_1</math>) P/ <math>150 \text{ k}\Omega</math></i>	0,0117	25,00 %
<b>2ª Freq. Natural</b>	<i>Fator de Amortecimento (<math>\xi_2</math>) P/ NA</i>	0,0052	-
	<i>Fator de Amortecimento (<math>\xi_2</math>) P/ <math>100 \Omega</math></i>	0,0037	28,85 %
	<i>Fator de Amortecimento (<math>\xi_2</math>) P/ <math>150 \text{ k}\Omega</math></i>	0,0042	19,23 %

Fonte: Autoria própria.

Tabela 5.5 – Frequências naturais e amplitudes de resposta experimentais para vibração livre, submetidos a uma entrada do tipo impacto.

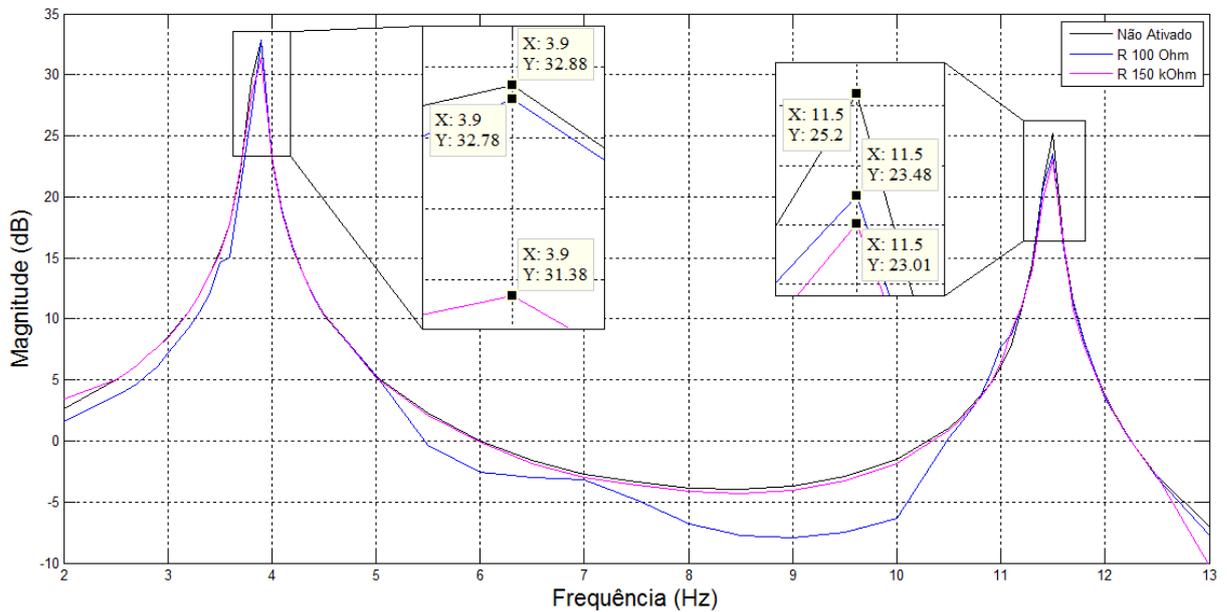
	1ª F. N.	Magnitude	Redução	2ª F. N.	Magnitude	Redução
<b>Não Ativado</b>	3,84 Hz	39,21 dB	-	11,53 Hz	34,21 dB	-
<b>Ativado (100 <math>\Omega</math>)</b>	3,84 Hz	30,95 dB	8,26 dB	11,53 Hz	27,26 dB	6,95 dB
<b>Ativado (150 <math>\text{k}\Omega</math>)</b>	3,84 Hz	30,20 dB	9,01 dB	11,53 Hz	28,19 dB	6,02 dB

Fonte: Autoria própria.

### 5.3.3 Resposta em vibração forçada

Para os testes de vibração forçada com excitação de base, seguimos os procedimentos descritos no quarto capítulo e obtemos as respostas em frequência do sistema, como ilustrado na Figura 5.12.

Figura 5.12 – FRF do sistema submetido à vibração forçada, medido no segundo piso da estrutura.



Fonte: Autoria própria.

Diferentemente dos resultados obtidos em vibração livre, as reduções das amplitudes de resposta do sistema não se mostraram tão significativas, embora também tenha havido uma diminuição. As frequências naturais do sistema, quando submetidos à vibração forçada, praticamente não se alteraram, ficando em 3,9 *Hz* a primeira frequência natural e em 11,5 *Hz* a segunda.

Na Tabela 5.6, estão expostos os valores dos coeficientes de amortecimento encontrados com o método da Largura de Banda para a estrutura submetida à excitação forçada de base, utilizando os resistores de 100  $\Omega$  e de 150 *k* $\Omega$ .

Tabela 5.6 – Fatores de amortecimento experimentais em vibração forçada de base.

	Variável	Valor	Diferença
<b>1ª Freq. Natural</b>	Fator de Amortecimento ( $\xi_1$ ) P/ NA	0,0365	-
	Fator de Amortecimento ( $\xi_1$ ) P/ 100 $\Omega$	0,0343	6,03 %
	Fator de Amortecimento ( $\xi_1$ ) P/ 150 k $\Omega$	0,0423	15,89 %
<b>2ª Freq. Natural</b>	Fator de Amortecimento ( $\xi_2$ ) P/ NA	0,0100	-
	Fator de Amortecimento ( $\xi_2$ ) P/ 100 $\Omega$	0,0109	9,00 %
	Fator de Amortecimento ( $\xi_2$ ) P/ 150 k $\Omega$	0,0111	11,00 %

Fonte: Autoria própria.

Os valores obtidos considerando a primeira frequência natural, foi um decréscimo nos picos de ressonância de 0,1 dB para o resistor de 100  $\Omega$  e de 1,5 dB para o resistor de 150 k $\Omega$ . Considerando agora, a segunda frequência natural, obtivemos um decréscimo de 1,72 dB para o resistor de 100  $\Omega$  e de 2,19 dB para o resistor de 150 k $\Omega$ , como demonstrado na Tabela 5.7. Dessa forma, o resistor de maior valor se mostrou mais eficiente nas reduções das amplitudes de resposta, tanto para a primeira frequência natural, como para a segunda.

Tabela 5.7 – Frequências naturais e amplitudes de resposta experimentais para vibração forçada, submetidos à excitação de base.

	1ª F. N.	Magnitude	Redução	2ª F. N.	Magnitude	Redução
<b>Não Ativado</b>	3,90 Hz	32,88 dB	-	11,50 Hz	25,20 dB	-
<b>Ativado (100 <math>\Omega</math>)</b>	3,90 Hz	32,78 dB	0,10 dB	11,50 Hz	23,48 dB	1,72 dB
<b>Ativado (150 k<math>\Omega</math>)</b>	3,90 Hz	31,38 dB	1,50 dB	11,50 Hz	23,01 dB	2,19 dB

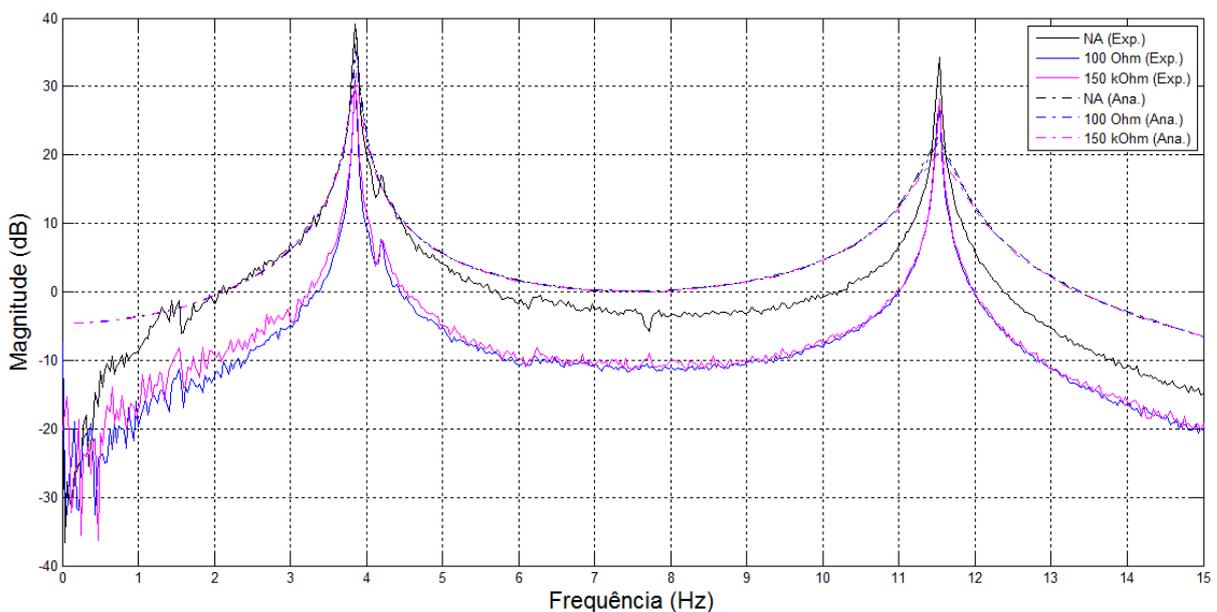
Fonte: Autoria própria.

## 5.4 Análise e comparação dos resultados

### 5.4.1 Vibração livre

Os resultados analíticos, em geral, se mostraram em concordância com os resultados experimentais em termos de amplitude e frequência submetidos à vibração livre, medidos no segundo piso, quando comparados as suas respostas em frequência, com o circuito *shunt* não ativado (NA) e ativado. A Figura 5.13 apresenta as curvas sobrepostas para fins de análise, e como observadas, as curvas de resposta apresentam comportamentos similares, porém com pequenas distorções nos picos relativos às frequências, com um erro percentual médio de aproximadamente 0,78 % para a primeira frequência natural e de 0,09 % para a segunda frequência, tanto para o sistema ativado, quanto para o sistema não ativado.

Figura 5.13 – Comparação entre a FRF experimental e analítica, com o circuito shunt ativado e não ativado, em vibração livre.

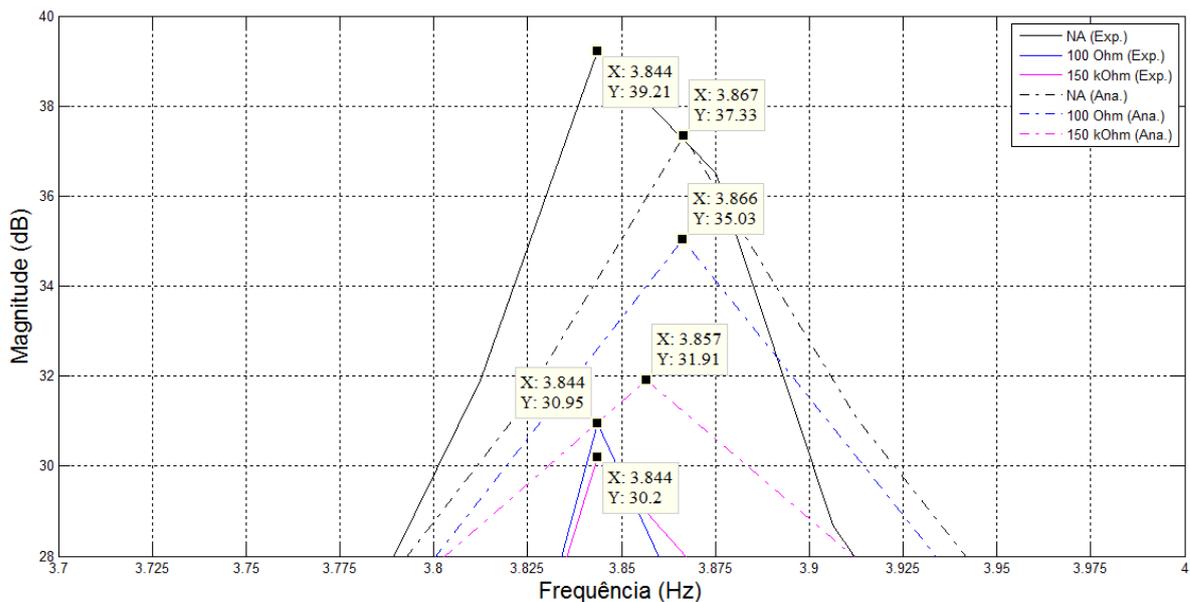


Fonte: Autoria própria.

Todos os valores de amortecimento, das frequências naturais e de magnitude apresentados na Figura 5.13 estão descritos nas Tabelas de 5.2 a 5.5. Podemos notar que embora os picos de amplitude para vibração livre tenham reduzido de forma significativa, houve um pequeno aumento nos fatores de amortecimento encontrados para essa configuração, quando o circuito shunt está ativado, porém esses valores estão dentro do esperado para um amortecimento estrutural.

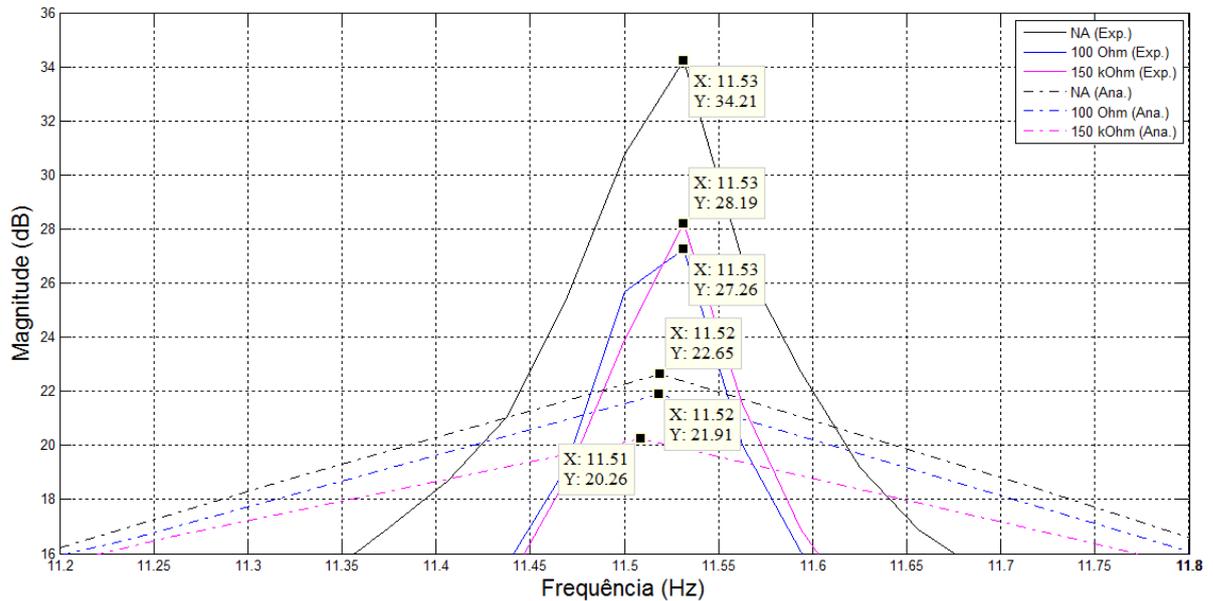
As Figuras 5.14 e 5.15 mostram as amplitudes dos picos de ressonância apresentados na Figura 5.13 de forma ampliada (*zoom*), para melhor visualização. Dessas figuras e dos valores apresentados nas Tabelas 5.3 e 5.5, podemos notar que os valores de magnitude analítico tiveram uma redução de 2,5 *dB* para o primeiro pico de ressonância e de 0,8 *dB* para o segundo pico de ressonância, utilizando o resistor de 100  $\Omega$ . Quando comparamos com os valores obtidos experimentalmente, de 8,26 *dB* para o primeiro pico de ressonância e de 6,95 *dB* para o segundo pico, vemos que os valores obtidos analiticamente, foram menores do que os experimentais.

Figura 5.14 – Ampliação dos picos de ressonância referentes à primeira frequência natural, obtido analítico e experimentalmente.



Fonte: Autoria própria.

Figura 5.15 – Ampliação dos picos de ressonância referentes à segunda frequência natural, obtido analítico e experimentalmente.



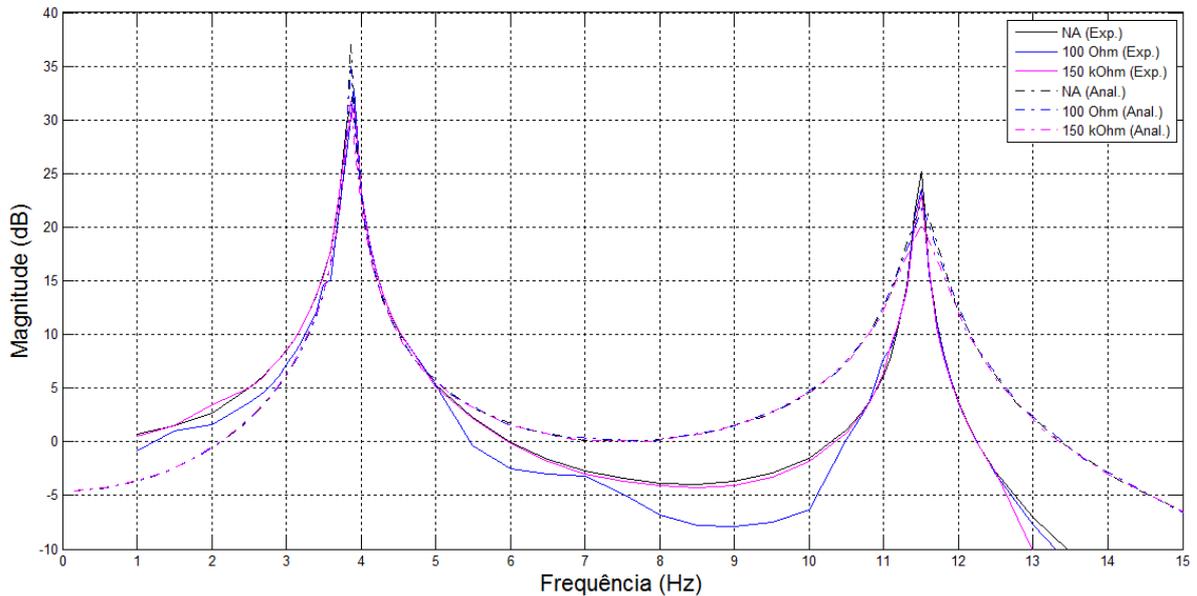
Fonte: Autoria própria.

Já os valores de magnitude obtidos para o resistor de  $150\text{ k}\Omega$  ficaram mais próximos, comparando-se o analítico com o experimental. A redução obtida de forma analítica para o primeiro pico de ressonância foi de  $5,4\text{ dB}$  e de  $2,4\text{ dB}$  para o segundo pico. Da mesma forma, para o experimental, obtemos uma redução de  $9,01\text{ dB}$  para o primeiro pico e de  $6,02\text{ dB}$  para o segundo pico de ressonância. Mais uma vez, observamos que as amplitudes obtidas experimentalmente, foram menores do que a redução esperada, obtida de forma analítica, ou seja, o comportamento do sistema se mostrou melhor do que o esperado.

#### 5.4.2 Vibração forçada

Embora os valores obtidos para vibração harmônica forçada por excitação de base tenha mostrado uma redução, esses valores foram pequenos e foram apresentados na Tabela 5.7. A comparação entre as curvas obtidas de forma analítica e experimental (vibração forçada) está apresentada na Figura 5.16.

Figura 5.16 – Comparação entre a FRF experimental e analítica, com o circuito shunt ativado e não ativado, em vibração forçada de base.



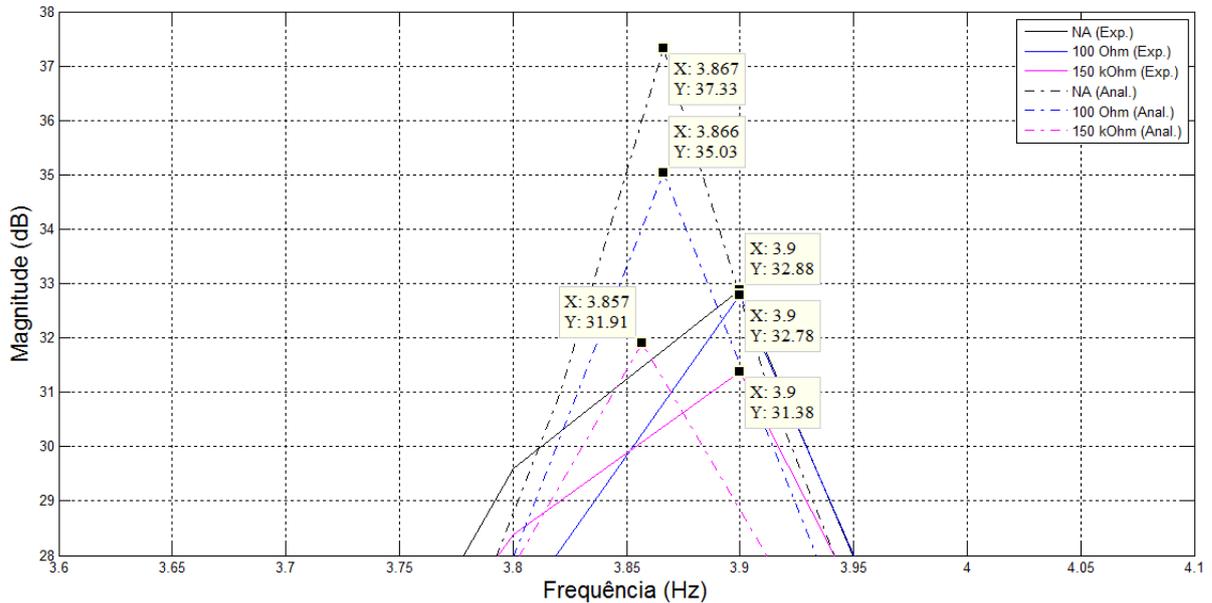
Fonte: Autoria própria.

Observando a Figura 5.16 vemos que os resultados obtidos de forma analítica estão em concordância com os resultados obtidos para excitação de base, tanto para os valores de frequência, como para as amplitudes de resposta. Houve apenas algumas pequenas distorções nos valores encontrados para as frequências naturais da estrutura, que tiveram um erro percentual médio de 2,69 % para a primeira frequência e de 0,17 % para a segunda.

Observando a Tabela 5.6, que apresenta os valores dos fatores de amortecimento encontrados para vibração forçada, vemos que esses valores, no geral, obtiveram um incremento, ainda que pequeno. Esse aumento pode ter se dado devido a aparente flexibilidade da base, onde a *Shake Table* está montada, e não mais em uma base rígida como uma mesa inercial, interferindo no amortecimento global da estrutura.

As Figuras 5.17 e 5.18 mostram os picos de ressonância apresentados na Figura 5.16 de forma ampliada (*zoom*), para melhor visualização dos valores das respostas e posterior comparação dos resultados.

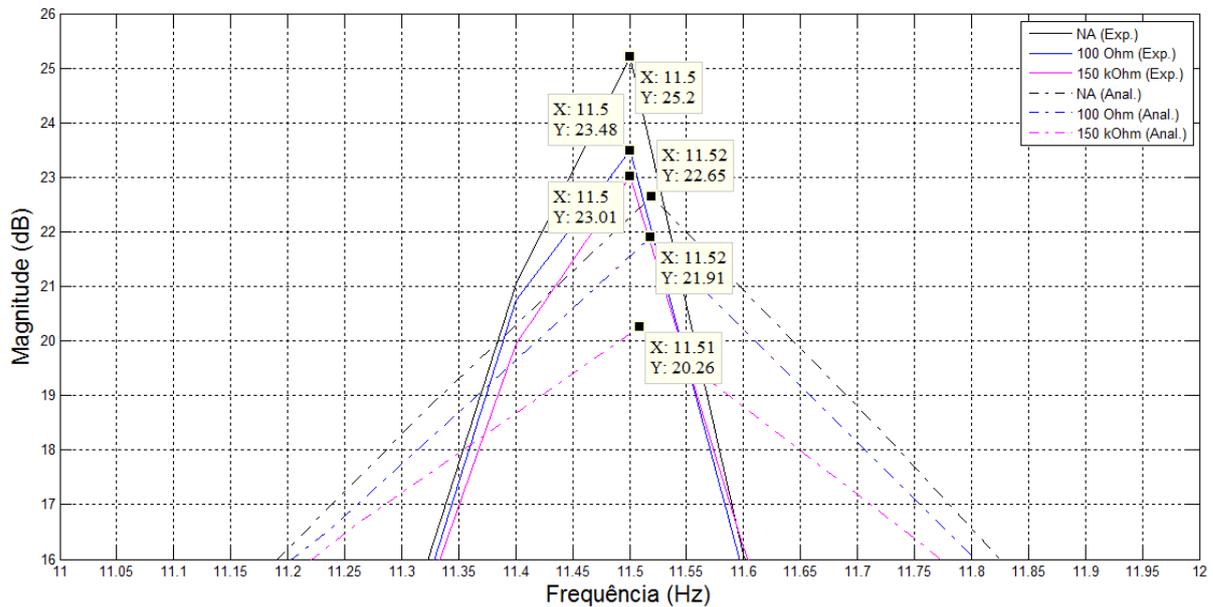
Figura 5.17 – Ampliação do pico referente à primeira frequência natural, obtido analítico e experimentalmente.



Fonte: Autoria própria.

Utilizando os valores obtidos nas Figuras 5.17 e 5.18, apresentados nas Tabelas 5.3 e 5.7, vemos que os valores dos picos de ressonância analíticos foram de 2,5 dB para a primeiro pico de ressonância e de 0,8 dB para o segundo pico, utilizando o resistor de 100  $\Omega$ . Já os valores obtidos analiticamente foram de 0,10 dB e de 1,72 dB para as duas primeiras frequências naturais, respectivamente, utilizando o resistor de 100  $\Omega$ .

Figura 5.18 – Ampliação do pico referente à segunda frequência natural, obtido analítico e experimentalmente.



Fonte: Autoria própria.

Se compararmos os valores obtidos analiticamente e os obtidos experimentalmente, observamos que tivemos um valor muito menor do que o esperado para o primeiro pico, e para o segundo pico tivemos um valor maior do que o esperado.

Para o resistor de  $150\text{ k}\Omega$ , obtivemos uma redução analítica de  $5,4\text{ dB}$  para o primeiro pico e  $2,4\text{ dB}$  para o segundo pico de ressonância. Se compararmos esses resultados com os obtidos experimentalmente, de  $1,50\text{ dB}$  e de  $2,19\text{ dB}$  para os dois primeiros picos de ressonância, respectivamente, utilizando o resistor de  $150\ \Omega$ , podemos observar que os valores obtidos experimentalmente são menores do que os obtidos de forma analítica.

Quando comparamos os valores dos picos de ressonância experimentais com os analíticos para vibração forçada por excitação de base, para ambos os valores de resistência elétrica, vemos que no geral, tivemos valores menores do que os esperados, diferentemente dos resultados encontrados para vibração livre, onde os

valores experimentais obtidos se mostraram maiores do que o esperado analiticamente.

Essa diferença pode ser justificada devido à aparente influência do mecanismo de excitação que age sobre o sistema, quando este está submetido à vibração forçada, alterando parâmetros como amortecimento e rigidez. Além da saturação do circuito elétrico, o que dificulta a transferência de energia entre os meios.

A Tabela 5.8 faz uma comparação dos resultados obtidos no nosso trabalho com os encontrados em parte da literatura consultada para diferentes estruturas.

Tabela 5.8 – Comparação com os resultados encontrados na literatura.

<b>Autor</b>	<b>Estrutura</b>	<b>Redução</b>
<b>Gonçalves (2016)</b>	<i>Pórtico - Vibração Livre</i>	<i>1ª Fn – 9,0 dB 2ª Fn – 6,9 dB</i>
<b>Gonçalves (2016)</b>	<i>Pórtico - Vibração Forçada</i>	<i>1ª Fn – 1,5 dB 2ª Fn – 2,19 dB</i>
<b>Behrens, Fleming e Moheimani (2001)</b>	<i>Viga</i>	<i>1ª Fn – 6,1 dB 2ª Fn – 16,3 dB 3ª Fn – 15,2 dB 4ª Fn – 11,7 dB 5ª Fn – 10,2 dB</i>
<b>Behrens, Fleming e Moheimani (2003)</b>	<i>Placa Plana</i>	<i>1ª Fn – 5,8 dB 2ª Fn – 20,13 dB 3ª Fn – 18,24 dB 4ª Fn – 3,8 dB 5ª Fn – 6,3 dB 6ª Fn – 17,2 dB</i>
<b>Marneffe e Preumont (2008)</b>	<i>Estrutura Flexível</i>	<i>1ª Fn – 21,9 dB 2ª Fn – 18,4 dB</i>
<b>Beck et al. (2011)</b>	<i>Painel Rígido</i>	<i>1ª Fn – 3,7 dB (1 PZT) 1ª Fn – 8,0 dB (5 PZT)</i>

Fonte: Autoria própria.

Dessa forma, podemos observar que os valores obtidos em vibração livre da estrutura (pórtico) foram coerentes com os resultados obtidos por outros autores, utilizando estruturas mais simples e uma maior quantidade de piezoelétricos. Embora os resultados encontrados para vibração forçada tenham sido menores, seus valores também ficaram próximos dos esperados.

## 6. CONCLUSÕES E SUGESTÕES

### 6.1 Conclusões

Os resultados encontrados de forma analítica, computacional e experimental, se mostraram representativos, do ponto de vista do comportamento das curvas de resposta em frequência do sistema e dos valores de frequência e magnitude obtidos.

Apesar de a modelagem analítica, complementada com a computacional, ter sido feita de forma simplificada, podemos afirmar que as equações desenvolvidas ao longo do trabalho, são capazes de representar o comportamento real da estrutura, com e sem o circuito *shunt* acoplado.

Foram obtidos bons resultados na simulação da estrutura utilizando o *Ansys®* em relação aos resultados analíticos e experimentais, com uma diferença média de 8,21 % para o primeiro pico de ressonância, e de 3,89 % para o segundo pico de ressonância. Mesmo com a limitação na imposição dos parâmetros de malha dos sólidos gerados, devido à versão do *software* ser gratuita, chamada de *Academic*, e da não consideração do contato entre as partes.

Os fatores de amortecimento encontrados estão dentro da faixa de valores esperados para amortecimento em estruturas, que pode variar de 0,001 a 0,07. Se compararmos os valores dos amortecimentos obtidos em vibração livre, veremos que houve uma redução desses valores. Em relação à vibração forçada, onde observamos um aparente aumento dos fatores de amortecimento, muito provavelmente, ocasionado pela interação da estrutura com a base (*Shake Table*).

O valor ótimo do resistor “dissipador” do circuito *shunt*, foi obtido de forma experimental, e se mostrou capaz de suprir as expectativas. Assim, foram escolhidos os dois resistores que apresentaram o melhor desempenho durante os testes, que foram os resistores de 100  $\Omega$  e de 150  $k\Omega$ , embora os valores dos picos de ressonância analítico e experimental tenham se mostrado menores para o resistor de 150  $k\Omega$ .

Foi observado também, que a atenuação das amplitudes de resposta para o primeiro pico de ressonância é mais eficiente quando utilizamos o resistor de 150

$k\Omega$ , e para o segundo pico, quando utilizamos o resistor de  $100 \Omega$ . Porém se o objetivo for atenuar os dois picos de ressonância, ambos os resistores podem ser utilizados de forma eficiente.

Se observarmos todos os casos experimentais e analíticos, iremos ver que não houve variação significativa nas frequências naturais do sistema – cerca de 7,34 % para a primeiro pico de ressonância e de 3,35 % para o segundo, quando acoplamos o circuito *shunt* a estrutura. Dessa forma, pode-se afirmar que a rigidez da estrutura não foi alterada com a incorporação dos transdutores piezoelétricos, ficando seu efeito mais restrito ao amortecimento.

Conseguiu-se uma redução máxima de 9,01 *dB* para o primeiro pico de frequência e de 6,95 *dB* para o segundo pico, para o caso de vibração livre. Para o caso de vibração forçada, obtivemos 1,5 *dB* para o primeiro pico de frequência e de 2,19 *dB* para o segundo pico de frequência. Tais valores estão dentro da faixa obtida por outros trabalhos encontrados na literatura consultada, como mostrado na Tabela 5.8, para diversas frequências naturais. Sendo assim, podemos afirmar que os objetivos do trabalho foram alcançados com êxito.

## 6.2 Sugestões para trabalhos futuros

Como trabalhos futuros, podemos sugerir:

- A utilização de mais transdutores piezoelétricos acoplados a estrutura, para maximizar a perda de energia;
- A utilização de métodos computacionais associados ao circuito *shunt*, semelhantes aos controles híbridos;
- Realizar a formulação matemática do sistema, com o circuito *shunt* acoplado a estrutura utilizando métodos de transferência de energia para comparar com as deduções encontradas na literatura;
- Utilizar amplificadores operacionais de maior potência, para tentar aumentar a eficiência do circuito;

- Utilizar o transdutor piezoelétrico como elemento gerador (*Energy Harvesting*) e atuador, ao mesmo tempo;
- Realizar a simulação computacional da interação da estrutura com os transdutores piezoelétricos e o circuito *shunt*, utilizando o *Ansys®*;
- Otimização do circuito, através da implementação de métodos analíticos e/ou numéricos para determinação da resistência ótima, assim como a avaliação do comportamento dos outros componentes do circuito.

## REFERÊNCIAS

ANTONIOU, A. **Realisation of Gytrators Using Operational Amplifiers, and Their use in RC-Active-Network Synthesis**. Proceedings of the Institution of Electrical Engineers, v. 116, n. 11, p. 1838-18850, 1969.

BALACHANDRAN, B.; MAGRAB, E. B. **Vibrations**, 2009. Ed. 2<sup>a</sup>, Editora CENGAGE Learning, p 737.

BCC RESEARCH BLOGGER: Advanced Materials Market Research Reports. **Smart Materials and Their Applications: Technologies and Global Markets**, 2012. Disponível em: <<http://bccresearch.blogspot.com.br/2012/05/smart-materials-and-their-applications.html#.VkOWLrerS01>>. Acesso em: 11 novembro 2015.

BCC RESEARCH BLOGGER: Advanced Materials Market Research Reports. **Smart Materials and Their Applications: Technologies and Global Markets**, 2015. Disponível em: <<http://www.bccresearch.com/market-research/advanced-materials/smart-materials-applications-technologies-markets-report-avm023e.html>>. Acesso em: 11 novembro 2015.

BECK, B. S.; CUNEFARE, K. A.; COLLET, M.; RUZZENE, M. **Active Vibration Control of a Stiffened Panel through Application of Negative Capacitance Shunts**. Active and Passive Smart Structures an Integrated Systems, v. 7977, p. 12, 2011.

BECK, B. S. **Negative Capacitance Shunting of Piezoelectric Patches for Vibration Control of Continuous Systems**, 2012. 183 f. Dissertação (Mestrado). Georgia Institute of Technology, Georgia, 2012.

BEHRENS, S. **Passive and Semi-active Vibration Control of Piezoelectric Laminates**, 2000. 101 f. Tese (Mestrado). The Department of Electrical and Computer Engineering, University of Newcastle, Australia, 2000.

BEHRENS, S.; MOHEIMANI, S. O. R. **Optimal Resistive Elements for Multiple Mode Shunt Damping of a Piezoelectric Laminate Beam**. Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control, v. 4, p. 6, 2000.

BEHRENS, S.; FLEMING, A. J.; MOHEIMANI, S. O. R. **New Method for Multiple-mode Shunt Damping of Structural Vibration using a Single Piezoelectric Transducer**. Smart Structures and Materials, v. 4331, p. 239-250, 2001.

BEHRENS, S.; FLEMING, A. J.; MOHEIMANI, S. O. R. **A Broadband Controller for Shunt Piezoelectric Damping of Structural Vibration**. Smart Materials and Structures, v. 12, p. 18-28, 2003.

CALIÒ, R.; RONGALA, U. B.; CAMBONI, D.; MILAZZO, M.; STEFANINI, C.; PETRIS, G. de; ODDO, C. M. **Piezoelectric Energy Harvesting Solutions**. Sensors, v. 14, p. 4755-4790, 2014.

CHENG, F. Y.; JIANG, H.; LOU, K. **Smart Structures: Innovative Systems for Seismic Response Control**, 2008. Ed. 1<sup>a</sup>, Editora Taylor & Francis Group, p 672.

CHOPRA, A. K. **Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering**, 2012. University of California at Berkeley, California. Ed. 4<sup>a</sup>, Editora Pearson, p. 980.

DORF, R. C.; BISHOP, R. H. **Sistemas de Controle Modernos**, 2001. Ed. 8<sup>a</sup>. Editora LTC, p. 680.

FARIA, A. R.; MULLER, S. F. A. **Modeling of Actively Damped Beams with Piezoelectric Actuators with Finite Stiffness Bond**. Journal of Intelligent Material Systems and Structures, v. 7, n. 6, p. 677-688, nov. 1996.

FLEMING, A. J.; BEHRENS, S.; MOHEIMANI, S. O. R. **Synthetic Impedance for Implementation of Piezoelectric Shunt-Damping Circuits**. Electronics Letters, v. 36, n. 18, p. 1525-1526, 2000.

FLEMING, A. J.; BEHRENS, S.; MOHEIMANI, S. O. R. **Optimization and Implementation of Multimode Piezoelectric Shunt Damping Systems**. IEEE/ASME Transactions on Mechatronics, v. 7, n. 1, p 87-94, 2002.

FLEMING, A. J.; BEHRENS, S.; MOHEIMANI, S. O. R. **Reducing the Inductance Requirements of Piezoelectric Shunt Damping Systems**. Smart Materials and Structures, v. 12, n. 1, p 57-64, 2003.

GILAT, A. **MATLAB®: Com Aplicações em Engenharia**, 2006. Department of Mechanical Engineering, The Ohio State University. Ed. 2<sup>a</sup>, Editora Bookman, p. 362.

GONÇALVES, A. P. S. **Sistema de Controle Ativo de Vibrações em Estrutura do Tipo Pórtico**, 2013. 62 f. Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso). Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, 2013.

HAGOOD, N. W., VON FLOTOW, A. **Damping of Structural Vibrations with Piezoelectric Materials and Passive Electrical Networks**. Journal of Sound and Vibration, v. 146, p. 243-268, 1991.

IIEGBUSI, O. J.; BALLAS, M. W. **Effect of Bonding on the Performance of Segmented Piezoceramic Actuators**. Journal of Intelligent Material Systems and Structures, v. 10, n. 11, p. 920-929, nov. 1999.

**JWG CERAMICS**. Disponível em: <<http://www.ceramic-metal-parts.com/>>. Acesso em: 03 dezembro 2015.

KOVALOV, A.; BARKANOV, E.; GLUHIHS, S. **Active Control of Structures Using Macro-Fiber Composite (MFC)**. Journal of Physics: Conference Series, v. 93, p. 8, 2007.

LEO, D. J. **Engineering Analysis of Smart Material Systems**, 2007. Department of Mechanical Engineering, Virginia Polytechnic Institute and State University, Virginia. Editora John Wiley & Sons, INC., p 569.

MARNEFFE, B.; PREUMONT, A. **Vibration Damping with Negative Capacitance Shunts - Theory and Experiment**. Smart Materials and Structures, v. 72, p. 9, 2008.

MENNA, C.; AURICCHIO, F.; ASPRONE, D. **Applications of Shape Memory Alloys in Structural Engineering (Chapter 13)**, 2015. Shape Memory Alloy Engineering: For Aerospace Structural and Biomedical Applications, Italy. Pages 369 – 403. Disponível em: <[http://www-2.unipv.it/compmech/publications/2014\\_3b.pdf](http://www-2.unipv.it/compmech/publications/2014_3b.pdf)>. Acesso em: 13 novembro 2015.

MOHEIMANI, S. O. R. **A Survey of Recent Innovations in Vibration Damping and Control Using Shunted Piezoelectric Transducers**. Control Systems Technology, IEEE, v. 11, n. 4, p. 482-494, 2003.

MOHEIMANI, S. O. R.; FLEMING, A. J.; BEHRENS, S. **On the Feedback Structure of Wideband Piezoelectric Shunt Damping Systems**. *Smart Materials and Structures*, v. 12, n. 1, p. 49-56, 2003.

MOHEIMANI, S. O. R.; FLEMING, A. J. **Piezoelectric Transducers for Vibration Control and Damping**, 2006. School of Electrical Engineering and Computer Science, University of Newcastle, Australia. Editora Springer, p. 279.

MOUTINHO, C. M. R. **Controlo de Vibrações em Estruturas de Engenharia Civil**, 2007. 394 f. Dissertação (Doutorado). Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto, 2007.

NEUBAUER, M.; OLESKIEWICZ, R; POPP, K; KRZYZYNSKI, T. **Optimization of Damping and Absorbing Performance of Shunted Piezo Elements Utilizing Negative Capacitance**. *Journal of Sound and Vibration*, v. 298, n. 1-2, p. 84-107, 2006.

NEUBAUER, M.; WALLASCHECK, J. **Vibration Damping with Piezoceramics Shunted to Negative Capacitance Networks**. *IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics*, p. 1100-1105, 2009.

NGUYEN, C. H.; KORMANN, X. **A Comparison of Dynamic Piezoactuation of Fiber-based Actuators and Conventional PZT Patches**. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, v. 17, n. 1, p. 45-55, 2006.

PARK, C. H.; PARK, H. C. **Multiple-Mode Structural Vibration Control Using Negative Capacitive Shunt Damping**. *KSME International Journal*, v. 17, n. 11, p. 1650-1658, 2003.

PREUMONT, A. **Modeling of Piezoelectric Composite Transducers**, 2011. Université Libre de Bruxelles - Active Structures Laboratory. Disponível em: <<http://scmero.ulb.ac.be/project.php?id=10&page=index.html>>. Acesso em: 3 dezembro 2015.

QUICKPACK PIEZO PRODUCTS. **Material Properties & Spec Sheets**. Midé Technology Corporation. Disponível em: <[http://www.mide.com/pdfs/quickpack\\_specs\\_piezo\\_properties.pdf](http://www.mide.com/pdfs/quickpack_specs_piezo_properties.pdf)>. Acessado em: 8 setembro 2015

RAO, S. **Mechanical Vibrations**, 2011. University of Miami, Florida. Ed. 5<sup>a</sup>. Editora Pearson, p. 449.

RIORDAN, R. **Simulated Inductors Using Differential Amplifiers**. **Electronics Letters**, v. 3, n. 6, p. 291, 1967.

SANTANA, D. C. **Modelagem Numérica e Otimização de Shunts Piezelétricos Aplicados ao Controle Passivo de Vibrações**, 2007. 203 f. Tese (Doutorado). Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2007.

SHAKE TABLES AND SMART STRUCTURES FOR TEACHING AND RESEARCH. **Quanser**®. Disponível em: <[file:///C:/Users/Documents/Downloads/Shake\\_Tables\\_and\\_Smart\\_Structures\\_System\\_Specifications\\_v1.5-web.pdf](file:///C:/Users/Documents/Downloads/Shake_Tables_and_Smart_Structures_System_Specifications_v1.5-web.pdf)>. Acesso em: 28 dezembro 2015.

SODANO, H. A.; LLOYD, J; INMAN, D. J. **An Experimental Comparison Between Several Active Composite Actuators for Power Generation**. *Smart Materials and Structures*, v. 5390, n. 5, p. 370-378, 2004.

SOUTO, C. R. **Controle Ativo de Vibração em Placas Usando Atuadores Piezoelétricos**, 2008. 178 f. Tese (Doutorado). Universidade Federal da Paraíba, Paraíba, 2008.

ST MICROELECTRONICS. **Datasheet LM 324**, 2001. Disponível em: <[http://pdf.datasheetcatalog.com/datasheets/150/61350\\_DS.pdf](http://pdf.datasheetcatalog.com/datasheets/150/61350_DS.pdf)>. Acessado em: 17 outubro 2015.

TING-KONG, C. **Design of an Adaptative Dynamic Vibration Absorber**, 1999. Department of Mechanical Engineering. University of Adelaide, Australia. Thesis submitted for the degree of Master of Engineering Science. Disponível em: <<https://digital.library.adelaide.edu.au/dspace/bitstream/2440/37922/8/02whole.pdf>>. Acesso em: 17 novembro 2015.

TRANSPARENCY MARKET RESEARCH (TMR). **Smart Materials Market – Global Industry Analysis, Size, Share, Growth, Trends and Forecast (2014-2020)**, 2014. Disponível em: <<http://www.transparencymarketresearch.com/pressrelease/smart-materials-market.htm>>. Acesso em: 12 novembro 2015.

VENET, M. Z.; PEREIRA, A. H. A. **Materiais e Dispositivos Piezoelétricos: Fundamentos e Desenvolvimento**, 2004. Apostila – Curso de Piezoelétrico da ATCP do Brasil. São Carlos, São Paulo.

VIANA, F. A. C. **Amortecimento de Vibrações Usando Pastilhas Piezoelétricas e Circuitos Shunt Ressonantes**, 2005. 132 f. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2005.

VIANA, F. C. A.; STEFFEN, V. **Multimodal Vibration Damping through Piezoelectric Patches and Optimal Resonant Shunt Circuits**. Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering, v. 28, n. 3, p. 293-310, 2006.

WILLIAMS, R. B.; PARK, G.; INMAN, D. J.; WILKIE, W. K. **An Overview of Composite Actuators with Piezoceramic Fibers**. IMAC-XX: Conference & Exposition on Structural Dynamics, p. 421-427, 2002.

WING, S. O. R. **Overview of Smart Materials Technology**, 2003. Department of Applied Physics. The Hong Kong Polytechnic University. Disponível em: <[http://resources.edb.gov.hk/physics/articleIE/smartmaterials/SmartMaterials\\_e.htm](http://resources.edb.gov.hk/physics/articleIE/smartmaterials/SmartMaterials_e.htm)> . Acesso em: 12 novembro 2015.

WU, S. **Method for Multiple Mode Shunt Damping of Structural Vibration Using a Single PZT Transducer**. SPIE, v. 3327, n. 1, p. 159-168, 1998.

YOSHIKAWA, S.; FARRELL, M.; WARKENTIN, D.; JACQUES, R.; SAARMAA, E. **Monolithic Piezoelectric Actuators and Vibration Dampers with Interdigital Electrodes**. Active Control eXperts, Inc., v. 3668, p. 578-585, 1999.

## Anexo A – Rotina Utilizada no Matlab (Alan Gonçalves)

```

%*****
***
% Determinação das frequências naturais e modos de vibração de um
sistema
% não amortecido com 2 GDL.
% -----
---

clear all; clc; close all;

% Parâmetros do sistema (dados matriciais do problema):
E = 155e9;           % Módulo de elasticidade

% Dimensões da chapa inox (colunas inferior e superior)
e = 1.000e-3;       % Espessura [m]
b = 50e-3;          % Largura [m]
L1 = 200e-3;        % Comprimento coluna 1 [m]
L2 = 200e-3;        % Comprimento coluna 2 [m]
Io = b*e^3/12;      % Momento de Inercia de Área [m^4]

% -----
---
% Massas dos pisos
m1 = 0.986;         % Massa do 1o piso [kg]
m2 = 0.986;         % Massa do 2o piso [kg]

% Rigidez equivalente das colunas
ke1 = (24*E*Io)/L1^3 % Rigidez equivalente - coluna 1 [N/m]
ke2 = (24*E*Io)/L2^3 % Rigidez equivalente - coluna 2 [N/m]

% -----
---
% Matriz de coeficientes de influência de inércia
M=[m1 0; 0 m2];

% Matriz de coeficientes de influência de rigidez
K=[ke1+ke2 -ke1; -ke1 ke2];

% Matriz de coeficientes de influência de flexibilidade
Ki=inv(K);

% Matriz dinâmica, D=[inv(ki)].[m]
D=Ki*M;

% Matriz de autovalores e autovetores
[v,d]=eig(D);

% Autovalores (lambda=1/w^2)
lambda1=d(1,1);
lambda2=d(2,2);

% Autovetores - Frequências naturais [rad/s]
w1=sqrt(1/lambda2);
w2=sqrt(1/lambda1);

```

```

% Autovetores - Frequências naturais [Hz]
f1=w1/(2*pi)
f2=w2/(2*pi)

% -----
---
% Vetor modal
% 1o Modo
X2=[v(1,1)/v(1,1); v(2,1)/v(1,1)];
% 2o Modo
X1=[v(1,2)/v(1,2); v(2,2)/v(1,2)];

% -----
---
% Gráficos das modos de vibração
r1=linspace(0,2,3);
y1=zeros(size(r1));
m=[0 1 2];
x1=[0 X1(1) X1(2)];
x2=[0 X2(1) X2(2)];
subplot(211)
plot(r1,y1,'r',m,x1,'-bs')
legend('Repouso','1ª Modo de vibração'), grid
subplot(212)
plot(r1,y1,'r',m,x2,'-bs')
legend('Repouso','2ª Modo de vibração'), grid

% -----
---
% Cálculo utilizando as equações (4.11) e (4.12)

num1 = (m2*ke1+m2*ke2+m1*ke2);
num2 = ((m2*ke1+m2*ke2+m1*ke2)^2)-(4*m1*m2*ke1*ke2);
den = 2*m1*m2;

F1 = (sqrt((num1-sqrt(num2))/den))/(2*pi)
F2 = (sqrt((num1+sqrt(num2))/den))/(2*pi)

```

## Anexo B – Rotina Utilizada no Matlab (Alan Gonçalves)

```

% Problema do Pórtico com 2 GDL

% Parâmetros do sistema
m1 = 0.986;
m2 = 0.986;
c1 = 0.801;
c2 = 0.0743;
k1 = 1.375e3;
k2 = 2.589e3;

% Função de Transferência
H = tf([0,0,(k1*m2),(c2*k1-c2*k2),(k1*k2-k2^2)],...
       [(m1*m2),(c1*m2+c2*m1+c2*m2),(c1*c2+k1*m2+k2*m1+k2*m2),...
        (c1*k2+c2*k1),(k1*k2)]);

[mag,fase,w] = bode(H);
mag = squeeze(20*log10(mag));
fase = squeeze(fase);
f = w/(2*pi);

% Gráfico da Função de Transferência
figure('Name','FRF - Não Ativado','NumberTitle','off')

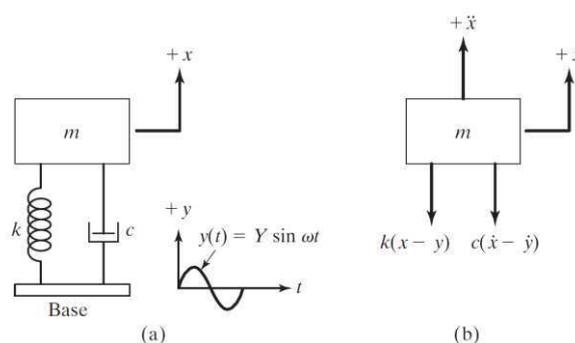
plot(f,mag,'m'),grid
title('Resposta em Frequência - Magnitude')
xlabel('Frequência (Hz)')
ylabel('Saída/Entrada (dB g/N)')
axis([0 15 -50 70])

```

**Anexo C –** Formulação de *vibração forçada amortecida submetida à excitação de base (Método da Impedância Mecânica)*

No caso mostrado na Figura C.1(a), temos um sistema massa-mola-amortecedor submetido à excitação de base. Considerando que  $y(t)$  seja o deslocamento de base e  $x(t)$  seja o deslocamento da massa em relação a sua posição de equilíbrio estático em função do tempo  $t$ . Então o deslocamento resultante da mola é  $x - y$  e a velocidade resultante relativa entre as duas extremidades do amortecedor é dado por  $\dot{x} - \dot{y}$ .

Figura C.1 – Excitação de base para um sistema com 1 GDL.



Fonte: Rao (2011).

Pelo diagrama de corpo livre (DCL) mostrado na Figura C.1 (b), obtemos a equação de movimento:

$$m\ddot{x} + c(\dot{x} - \dot{y}) + k(x - y) = 0 \quad (\text{C.1})$$

Se considerarmos que  $y(t)$  é uma função harmônica  $y(t) = Y \sin(\omega t)$ , a Equação (C.1) torna-se:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = ky + c\dot{y} = kY\sin(\omega t) + c\omega Y\cos(\omega t) = A\sin(\omega t - \alpha) \quad (\text{C.2})$$

Onde  $A = Y\sqrt{k^2 + (c\omega)^2}$  e  $\alpha = \tan^{-1}(-c\omega/k)$ . Isso mostra que fornecer uma excitação de base a um sistema é equivalente a aplicar uma força de magnitude “A” a massa. A razão entre a amplitude de resposta e a amplitude da excitação fornecida à base é denominada transmissibilidade de deslocamento  $X/Y$ .

As equações de movimento de um sistema amortecido generalizado com dois graus de liberdade submetido à excitação externa podem ser descritas segundo a seguinte equação (RAO, 2011):

$$[m].\ddot{\vec{x}}(t) + [c].\dot{\vec{x}}(t) + [k].\vec{x}(t) = \vec{F}(t) \quad (\text{C.3})$$

Onde  $[m]$ ,  $[c]$  e  $[k]$  são denominadas as matrizes de massa, amortecimento e rigidez, respectivamente, e que podem ser expandidas na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{12} & m_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{C.4})$$

Considerando que as forças externas que agem sobre o sistema sejam harmônicas:

$$F_j(t) = F_{j0} \cdot e^{i\omega t}, \quad j = 1, 2. \quad (\text{C.5})$$

Onde  $\omega$  é a frequência forçante. Então podemos escrever as soluções em regime permanente como:

$$x_j(t) = X_j \cdot e^{i\omega t}, \quad j = 1, 2. \quad (\text{C.6})$$

Onde  $X_1$  e  $X_2$  são, em geral, quantidades complexas que dependem de  $\omega$  e dos parâmetros gerais do sistema. Substituindo as Equações (C.3) e (C.4) na Equação (C.2), resulta em:

$$\begin{bmatrix} (-\omega^2 m_{11} + i\omega c_{11} + k_{11}) & (-\omega^2 m_{12} + i\omega c_{12} + k_{12}) \\ (-\omega^2 m_{12} + i\omega c_{12} + k_{12}) & (-\omega^2 m_{22} + i\omega c_{22} + k_{22}) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{10} \\ F_{20} \end{Bmatrix} \quad (\text{C.7})$$

Se definirmos a impedância mecânica  $Z_{rs}(i\omega)$  como:

$$Z_{rs}(i\omega) = -\omega^2 m_{rs} + i\omega c_{rs} + k_{rs}, \quad r, s = 1, 2. \quad (\text{C.8})$$

Portanto, podemos reescrever a Equação (C.7) como:

$$[Z(i\omega)] \cdot \vec{X} = \vec{F}_0 \quad (\text{C.9})$$

Onde,

$$[Z(i\omega)] = \begin{bmatrix} Z_{11}(i\omega) & Z_{12}(i\omega) \\ Z_{12}(i\omega) & Z_{22}(i\omega) \end{bmatrix} = \text{matriz de impedância}$$

$$\vec{X} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \vec{F}_0 = \begin{Bmatrix} F_{10} \\ F_{20} \end{Bmatrix}$$

A Equação (C.9) pode ser escrita na forma

$$\vec{X} = [Z(i\omega)]^{-1} \cdot \vec{F}_0 \quad (\text{C.10})$$

Onde a inversa da matriz de impedância é dada por:

$$[Z(i\omega)]^{-1} = \frac{1}{Z_{11}(i\omega) \cdot Z_{22}(i\omega) - Z_{12}^2(i\omega)} \begin{bmatrix} Z_{22}(i\omega) & -Z_{12}(i\omega) \\ -Z_{12}(i\omega) & Z_{11}(i\omega) \end{bmatrix} \quad (\text{C.11})$$

Fazendo-se algumas manipulações matemáticas, vemos que as Equações (C.10) e (C.11) levam a solução:

$$X_1(i\omega) = \frac{Z_{22}(i\omega) \cdot F_{10} - Z_{12}(i\omega) \cdot F_{20}}{Z_{11}(i\omega) \cdot Z_{22}(i\omega) - Z_{12}^2(i\omega)} \quad \text{e} \quad X_2(i\omega) = \frac{Z_{11}(i\omega) \cdot F_{20} - Z_{12}(i\omega) \cdot F_{10}}{Z_{11}(i\omega) \cdot Z_{22}(i\omega) - Z_{12}^2(i\omega)} \quad (\text{C.12})$$

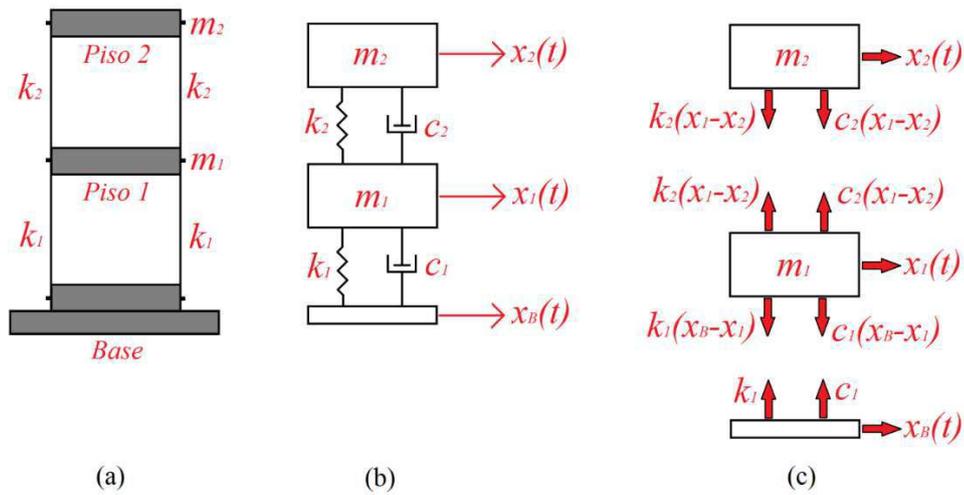
Substituindo a Equação (C.12) na Equação (C.6), podemos determinar a solução completa do sistema, dado por  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$ . Portanto,

$$x_1(t) = X_1(i\omega) \cdot e^{i\omega t} = \left[ \frac{Z_{22}(i\omega) \cdot F_{10} - Z_{12}(i\omega) \cdot F_{20}}{Z_{11}(i\omega) \cdot Z_{22}(i\omega) - Z_{12}^2(i\omega)} \right] \cdot e^{i\omega t}$$

$$x_2(t) = X_2(i\omega) \cdot e^{i\omega t} = \left[ \frac{Z_{11}(i\omega) \cdot F_{20} - Z_{12}(i\omega) \cdot F_{10}}{Z_{11}(i\omega) \cdot Z_{22}(i\omega) - Z_{12}^2(i\omega)} \right] \cdot e^{i\omega t} \quad (\text{C.13})$$

Então, temos que para a estrutura considerada na Figura C.2, junto com seu DCL, podemos aplicar as equações de equilíbrio para encontrar as respostas do sistema.

Figura C.2 – (a) Representação esquemática da estrutura, (b) diagrama de massas concentradas e (c) diagrama de corpo livre do pórtico.



Fonte: Autoria própria.

Aplicando as equações de equilíbrio de Newton, temos que:

$$m_1 \cdot \ddot{x}_1 - c_1(\dot{x}_B - \dot{x}_1) + c_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k_1(x_B - x_1) + k_2(x_1 - x_2) = 0$$

$$m_2 \cdot \ddot{x}_2 - c_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k_2(x_1 - x_2) = 0 \quad (\text{C.14})$$

Rearranjando os termos da Equação (C.14):

$$[m_1 \cdot \ddot{x}_1 + (c_1 + c_2) \cdot \dot{x}_1 + (k_1 + k_2) \cdot x_1] + [-c_2 \cdot \dot{x}_2 - k_2 x_2] = [k_1 \cdot x_B + c_1 \cdot \dot{x}_B]$$

$$[m_2 \cdot \ddot{x}_2 + c_2 \cdot \dot{x}_2 + k_2 \cdot x_2] + [-c_2 \cdot \dot{x}_1 - k_2 x_1] = 0 \quad (\text{C.15})$$

Em forma matricial, temos:

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \\
& = \begin{Bmatrix} k_1 \cdot x_B + c_1 \cdot \dot{x}_B \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{C.16}
\end{aligned}$$

Fazendo analogia da Equação (C.16) com a Equação (C.4) vemos que:

$$m_{11} = m_1; \quad m_{22} = m_2; \quad m_{12} = 0$$

$$c_{11} = c_1 + c_2; \quad c_{22} = c_2; \quad c_{12} = -c_2$$

$$k_{11} = k_1 + k_2; \quad k_{22} = k_2; \quad k_{12} = -k_2$$

$$F_1 = k_1 \cdot x_B + c_1 \cdot \dot{x}_B \quad e \quad F_2 = 0$$

Onde  $x_B = Y \cdot \text{sen}(\omega t)$ ,  $\dot{x}_B = Y \cdot \omega \cdot \text{cos}(\omega t)$ ,  $Y$  = Amplitude de deslocamento ( $m$ ) e  $\omega$  = Frequência de excitação imposta a estrutura ( $rad/s$ ), isto implica que:

$$F_1 = Y[k_1 \cdot \text{sen}(\omega t) + c_1 \cdot \omega \cdot \text{cos}(\omega t)] = A \cdot \text{sen}(\omega t - \alpha) \tag{C.17}$$

Com  $A = Y\sqrt{k_1^2 + (\omega \cdot c_1)^2}$  e  $\alpha = \tan^{-1}(-c_1 \cdot \omega / k_1)$ . Isso mostra que fornecer excitação externa à base, equivale a aplicar uma força harmônica de magnitude  $A$  a massa. Portanto,

$$\vec{F}_0 = \begin{Bmatrix} F_{10} \\ F_{20} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{C.18}$$

De acordo com a Equação (C.8), temos:

$$Z_{11}(i\omega) = -\omega^2 m_{11} + i\omega c_{11} + k_{11} = -\omega^2 m_1 + i\omega(c_1 + c_2) + (k_1 + k_2) \quad (\text{C.19})$$

$$Z_{12}(i\omega) = -\omega^2 m_{12} + i\omega c_{12} + k_{12} = -i\omega c_2 - k_2 \quad (\text{C.20})$$

$$Z_{22}(i\omega) = -\omega^2 m_{22} + i\omega c_{22} + k_{22} = -\omega^2 m_2 + i\omega c_2 + k_2 \quad (\text{C.21})$$

Substituindo os valores das Equações (C.18), (C.19), (C.20) e (C.21) na Equação (C.13), e considerando que  $e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i\text{sen}(\omega t)$ , obtemos as respostas do sistema (RAO, 2011):

$$x_1(t) = \left[ \frac{(-\omega^2 m_2 + i\omega c_2 + k_2).A.(\cos(\omega t) + i\text{sen}(\omega t))}{(-\omega^2 m_1 + i\omega(c_1 + c_2) + k_1 + k_2).(-\omega^2 m_2 + i\omega c_2 + k_2) - (-i\omega c_2 - k_2)^2} \right] \quad (\text{C.22})$$

$$x_2(t) = \left[ \frac{(i\omega c_2 + k_2).A.(\cos(\omega t) + i\text{sen}(\omega t))}{(-\omega^2 m_1 + i\omega(c_1 + c_2) + k_1 + k_2).(-\omega^2 m_2 + i\omega c_2 + k_2) - (-i\omega c_2 - k_2)^2} \right] \quad (\text{C.23})$$

Como a força excitadora que age sobre o sistema é uma função harmônica de senos como mostrado na Equação (C.17), a resposta do sistema também será uma função de senos, ou seja, será dada pela parte imaginária da resposta.

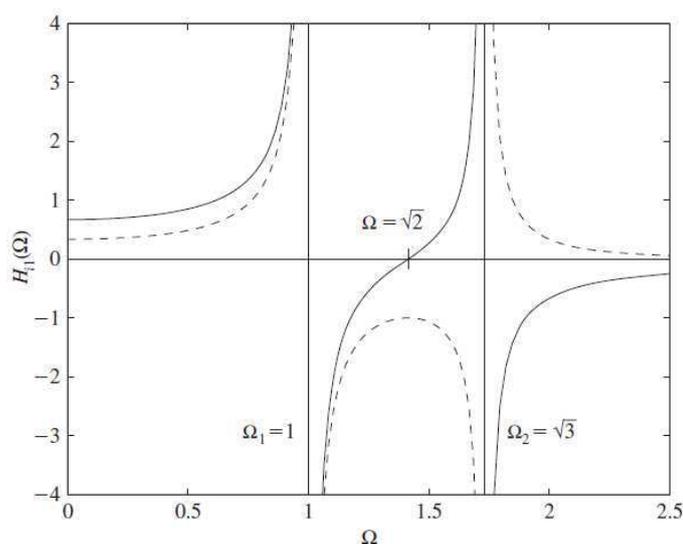
Para determinarmos a resposta em frequência do sistema, basta multiplicarmos a Equação (C.12) por  $k_1$  para  $X_1$  e por  $k_2$  para  $X_2$ , após isso, basta dividir ambas as equações por  $F_{10}$ . Dessa forma,

$$\frac{X_1.k_1}{F_{10}} = H_{11}(i\omega) \quad \text{e} \quad \frac{X_2.k_2}{F_{10}} = H_{21}(i\omega) \quad (\text{C.24})$$

Onde  $H_{j1}(i\omega)$  é conhecida como a resposta em frequência complexa do sistema. E seu valor absoluto  $|H_{j1}(i\omega)|$  representa a Função de Resposta em

Frequência (FRF) do sistema para as massas 1 e 2, representadas por  $j$ . Um gráfico típico das respostas em frequência para um sistema com dois GDL não amortecido quando submetido a uma força harmônica na massa 1, em função da razão de frequências, é apresentada na Figura C.3.

Figura C.3 – FRF de um sistema não amortecido com 2 GDL submetido a excitação harmônica aplicado a massa  $m_1$  (linhas sólidas:  $H_{11}$ ; linhas tracejadas:  $H_{21}$ ).



Fonte: Balachandran e Magrab (2009).

Pela Figura C.3 podemos observar que  $H_{11}$  e  $H_{21}$  tende pra infinito quando temos  $\Omega_1 = 1$  e  $\Omega_2 = \sqrt{3}$ . Onde quando  $\Omega < \sqrt{2}$ , a razão  $H_{11}/H_{21}$  é positiva e quando  $\Omega > \sqrt{2}$ , a razão é negativa. Isso pode ser explicado devido à participação dos termos do primeiro e do segundo modos de vibração. A inversão de sinal pode ser facilmente observada, sempre que há uma frequência de ressonância. Segundo Balachandran e Magrab (2009), essa alteração de sinal significa que o ângulo de fase da resposta passou de  $0^\circ$  a  $180^\circ$  ou de  $180^\circ$  a  $0^\circ$ , à medida que passam de um lado para outro da frequência de ressonância.