UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE

CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE

UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA E MATEMÁTICA

CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

ILDA MARIA FERNANDES MANDÚ

MODELAGEM DE ARBOVIROSE COM USO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS.

CUITÉ - PB

2018

ILDA MARIA FERNANDES MANDÚ

MODELAGEM DE ARBOVIROSE COM USO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Monografia apresentada à Banca Examinadora, como exigência parcial à conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática, da Universidade Federal de Campina Grande campus Cuité.

Orientador: Prº. Ms. Anselmo Ribeiro Lopes

CUITÉ – PB

2018

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA NA FONTE
Responsabilidade Rosana Amâncio Pereira – CRB 15 – 791

M271e Mandú, Ilda Maria Fernandes.

Modelagem de arbovirose com uso de equações diferenciais ordinárias. / Ilda Maria Fernandes Mandú. – Cuité: CES, 2018.

55 fl.

Monografia (Curso de Licenciatura em Matemática) – Centro de Educação e Saúde / UFCG, 2018.

Orientador: Anselmo Ribeiro Lopes.

1. Epidemias. 2. Aplicações. 3. Mapas de pacientes. I. Título.

Biblioteca do CES - UFCG CDU 517.9

ILDA MARIA FERNANDES MANDÚ

MODELAGEM DE ARBOVIROSE COM USO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Monografia apresentada à Banca Examinadora, como exigência parcial à conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática, da Universidade Federal de Campina Grande Campus Cuité.

Aprovada em: 07 / 12 / 2018

BANCA EXAMINADORA

Prº Ms. Anselmo Ribeiro Lopes
UFCG/CES
Orientador

Glageane da Silva Souza

Profª. Drª. Glageane da Silva Souza
UFCG/CES
Examinador

Profº. Dr. Fábio Ferreira de Medeiros
UFCG/CES
Examinador

CUITÉ - PB

2018

Dedico a Mel (minha gatinha) e Marlei (meu cachorrinho) por me fazerem companhia todas as noites que passei acordada estudando e pela paciência de muitas vezes fazerem apenas uma refeição à meia noite, quando eu chegava em casa de mais um dia de trabalho e estudo.

AGRADECIMENTOS

A DEUS, que me deu força e coragem para vencer todos os obstáculos e dificuldades enfrentadas durante o curso, que me socorreu espiritualmente, dando-me serenidade e forças para continuar, pois sem Deus nada sou.

Ao professor orientador que me orientou com paciência e dedicação, e aos professores da banca examinadora que aceitaram o convite e se dispuseram a ler meu trabalho.

Ao professor Marciel por ser um exemplo de simplicidade e humildade.

Aos amigos que compreenderam meu nervosismo, falta de tempo, de paciência e que ainda assim estiveram do meu lado me dando força, coragem e auxílio edemonstrando total confiança e incentivo para que eu alcançasse mais este degrau em minha vida.

Agradeço a todos que de alguma forma colaboraram para a construção deste trabalho.

"O abandono da Matemática traz dano a todo o conhecimento, pois aquele que a ignora não pode conhecer as outras ciências ou as coisas do mundo."

(Roger Bacon).

RESUMO

Este trabalho expõe uma breve definição a cerca das arboviroses e por conseguinte falaremos sobre a modelagem matemática, como também das equações diferenciais ordinárias, seguido de exemplo e métodos, como também de soluções que envolvam as equações diferenciais ordinárias de primeira ordem. Separamos em duas partes. Na primeira parte, descreveremos sobre a Arbovirose. Na segunda parte, iremos definimos as equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, Em sequência direcionamos este trabalho para as equações diferenciais ordinárias lineares de primeira ordeme problema de valor inicial, e por fim apresentamos algumas modelagens das equações diferenciais ordinárias lineares, as quais limitam-se as equações lineares de primeira ordem. Para desenvolver este trabalho foi realizado um levantamento bibliográfico com pesquisa em livros, como também em alguns sites. Para a modelagem dos dados foram usados mapas de pacientes vítma de epidemias em meses correspondentes de maio à julho do ano em curso.

.**Palavras-chave:** Epidemias; aplicações; mapas de pacientes.

ABSTRACT

This work exposes a brief definition about arboviruses and therefore we will talk about mathematical modeling, as well as ordinary differential equations, followed by example and methods, as well as solutions that involve the first order ordinary differential equations. We will divide it into two parts. In the first part we talk about Arboviruse, in the second part, we will define the first order ordinary differential equations, in sequence we will direct this work to the linear first order differential equations and initial value problem, and finally we will present some modeling of the linear differential equations, which are limited to the first-order linear equations. To develop this work was carried out a bibliographic survey with research in sources books, as also in some sites. For the modeling of the date maps of victimpatients from epidemics were used in corresponding months from May to July of the current year.

Keywords: Epidemics; applications; patients maps.

LISTA DE FIGURAS

.

LISTA DE SIGLAS

AAS - Ácido acetilsalicílico

EDO – Equações Diferenciais Ordinárias

EDP – Equações Diferenciais Parciais

SESAP – Secretaria de Saúde Publica

SE – Semana Epidemiológica

SAD – Serviço de Atenção Domiciliar

SI – SuscetívelInfectado

SIS - SuscetívelInfectado Suscetível

SIR - SuscetívelInfectado Recuperado

SIRS - SuscetívelInfectado Recuperado Suscetível

PVI – Problema de Valor Inicial

UBV – Ultra Baixo Volume

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO.

Equações diferenciais são instrumentos matemáticos empregados para calcular a mudança de sistemas. O objetivo da modelagem é conseguir a taxa de variação com o tempo das grandezas que descrevem o problema, ou seja, a situação temporal do sistema de trabalho, o que dizemos em um curto intervalo de tempo. Resolvendo a equação diferencial (ou sistema de equações diferenciais) que caracteriza determinado processo ou sistema, pode-se retirar informações indispensáveis sobre os mesmos e, possivelmente, presumir o seu comportamento.

Deve-se ter em pensamento que a modelagem de um sistema em um conjunto de equações diferenciais oferecem, quase sempre, uma descrição aproximada e simplificada do processo existente. Assim sendo, a modelagem através de equações diferenciais fornece uma forma intensa para acessarmos o modo geral dos vários tipos de sistemas.

Tradicionalmente, o crescimento do ramo da matemática no qual se inclui o estudo das equações diferenciais aconteceu semelhante com o desenvolvimento da Física, funcionando como instrumento de cálculo das equações de movimento da mecânica newtoniana, das equações de onda da física ondulatória e do eletromagnetismo e, mais tarde, na formulação da mecânica quântica e da teoria da relatividade.

Nos dias atuais, o uso de equações diferenciais foi ampliado para as mais diversas áreas do conhecimento, comodescrever a natureza (aspectos físicos e naturais) usando uma linguagem comum.Temos alguns exemplos de aplicações de equações diferenciais em ciências naturais, como o problema da dinâmica de populações, o de disseminação de epidemias, a datação por carbono radioativo, a exploração de recursos renováveis, o conflito de espécies como, por exemplo, no sistema predador versus presa. Diferente das ciências naturais, as equações diferenciais também podem encontrar aplicação na economia, no sistema financeiro, no comércio, na indústria e nas atitudes de populações humanas, e assim por diante. Uma das importâncias principais das equações diferenciais é que mesmo elas sendo as mais simples equações são capazes ainda de representar sistemas vantajosos. Mesmo alguns sistemas naturais mais complexos aceitam modelagens em resultados de equações diferenciais bem conhecidas. Por outro lado, há problemas os quais exigem modelagem das equações diferenciais mais complexas, podendo utilizar métdos computacionais como o software Maxima, Matlab e o Mathematica.

Assim, o estudo e o desenvolvimento da área de modelagem de sistemas através de equações diferenciais são de muita relevância para a compreensão de problemas reais, apresentando aplicações nas mais diversas áreas do conhecimento e, em especial, nas areas das exatas.

No segundo capitulo, Iremos abordar neste trabalho a propagação de Arbovirose que se multiplica exponencialmente em um pequeno municipio do Rio Grande do Norte. Para a análise foram observadas fichas de pacientes e mapas de controle de Epidemias. Por motivos sigilosos não serão colocados o nome da cidade, o nome do hospital, como também o nome dos respectivos pacientes, usaremos apenas o banco de dados com o crescimento e decrescimento das arboviroses.

Para estes fins iremos utilizar a modelagem matemática através das equações diferenciais ordinárias de primeiraordem. Nesta ordem, terceiro capítulo falamos sobre a epidemiologia matemática, utilizando assim o controle das epidemias e então apresentar no capítulo seguinte a modelagem matemática, com suas respectivas etapas e utilização. Nos capítulos seguintes, afim de se ter ferramentas matemáticas capazes de nos dar uma leitura do tipo de problema que estamos abordando, estudamos sobre as equações diferenciais ordinárias e o problema de valor inicial., bem como descrevemos a dinâmica populacional e os modelos de Malthus e Verhuslt. Apresentamos ainda, os tipos de modelos comportamentais e por fim aplicamos em nosso problema real, mostrando análises e tirando conclusões importantes do mesmo, tanto no que se diz respeito ao processo de modelagem, bem como a prevenção e presença da arbovirose.

2. EPIDEMIOLOGIA CLINICA

2.1 APRESENTAÇÃO CLÍNICA DA ARBOVIROSE

O que é arbovirose: são as doenças causadas pelos chamados arbovírus O termo arbovírus deriva da expressão inglesa *ARthropod BOrne VIRUSES*, adotada, em 1942, para designar grupo de infecções virais através dos mosquitos; que incluem o vírus da dengue, zika vírus, chikungunya, febre amarela e microcefalia que é transmitida através de transmissão vertical (transmissão de uma infecção ou doença a partir da mãe para o seu feto no útero ou recém-nascido durante o parto).Geralmente transmitido pelo vetor: o mosquito *Aedes aegypti*. (BRASIL 2017).

As manifestações clínicas de infecção por arbovírus podem variar desde a doença febril leve e indiferenciada a síndromes febris neurológicas, articulares e hemorrágicas. Com frequência, os quadros graves são conhecidos somente após circulação viral em extensas epidemias, muitas vezes mostrando impacto imprevisível na morbidade e mortalidade, enquanto a ocorrência, até então, restringia-se a casos isolados ou pequenos surtos. (BRASIL 2015, P. 03)

O impacto das arboviroses na morbidade e mortalidade se intensifica à medida que extensas epidemias pressupõem grande número de indivíduos acometidos, com implicações sobre os serviços de saúde, principalmente diante da ausência de tratamento, vacinas e outras medidas efetivas de prevenção e controle.

2.2 Perspectivasda arbovirose

A arbovirose é um crescente problema de saúde pública no mundo principalmente pelo potencial de dispersão, pela capacidade de adaptação a novos ambientes e hospedeiros (vertebrados e invertebrados), pela possibilidade de causar epidemias extensas, pela susceptibilidade universal e pela ocorrência de grande número de casos graves, com acometimento neurológico, articular e hemorrágico. A introdução de qualquer arbovírus em área indene ou com a presença do vetor nunca deve ser negligenciada. O enfrentamento de arboviroses emergentes exige políticas e intervenções de amplo espectro, envolvendo vários setores da sociedade, não somente a área da saúde. (LOPES 2016)

2.2.1 Divulgação da arbovirose

A Secretaria de Estado da Saúde Pública (Sesap) divulgou as informações atualizadas sobre a situação epidemiológica da dengue, chikungunya e zika no Rio Grande do Norte. Os dados são referente à S.E(semana epidemiológia) nº 17, com informações coletadas até 28 de agosto do ano em curso.

Para este trabalho foi analisado um bairro da periferia de uma cidade de pequeno porte do interior do Rio Grande do Norte, com 1000 habitantes e posteriormente coletadas informações e dados referentes aos meses de maio e junho de 2018. Por normas sigilosas, referentes às patologias, não será divulgada a cidade, o hospital, como também os nomes dos pacientes.Utilizaremos para estes fins apenas o banco de dados, usando apenas os dados quantitativos crescentes e decrescentes. A seguir falaremos um pouco sobre prevenção, contágio, tratamento e combate.

Para fins de esclarecimentos, cuidados e controle ou erradicação, a SESAP divulga estas informações atualizadas sobre a situação epidemiológica da dengue, chikungunya e zika no Rio Grande do Norte.

2.3. O transmissor da arbovirose

O mosquito Aedes *aegypti* é o mosquito transmissor da dengue e da febre amarela urbana. Menor do que os mosquitos comuns é preto com listras brancas no tronco, na cabeça e nas pernas. Suas asas são translúcidas e o ruído que produzem é praticamente inaudível ao ser humano, conforme apresentamos na figura 1.

O macho, como de qualquer espécie, alimenta-se exclusivamente de frutas. A fêmea, no entanto, necessita de sangue para o amadurecimento dos ovos que são depositados separadamente nas paredes internas dos objetos, próximos a superfícies de água limpa, local que lhes oferece melhores condições de sobrevivência. No momento da postura são brancos, mas logo se tornam negros e brilhantes.

Em média, cada mosquito vive em torno de 30 dias e a fêmea chega a colocar entre 150 e 200 ovos. Se forem postos por uma fêmea contaminada pelo vírus da dengue, ao completarem seu ciclo evolutivo, transmitirão a doença.(SESAP 2015)

Figura1. Mosquito Aedes aegypti

Fonte:Ministério da saúde.

2.4 O que é dengue? Dengue é uma doença causada por um vírus, ou é transmitido de uma pessoa doente para uma pessoa sadia por meio de um vetor, o mosquito Aedes aegypti.

A doença pode se manifestar de duas formas: clássica e hemorrágica.

Dengue Clássica:

Dengue se inicia de maneira súbita com febre alta, dor de cabeça, dor atrás dos olhos, dores nas costas. Às vezes aparecem exantemas (manchas vermelhas no corpo). A febre dura cerca de cinco dias com melhora progressiva dos sintomas em 10 dias. Em alguns poucos pacientes podem ocorrer hemorragias discretas na boca, na urina ou no nariz. Raramente há complicações.

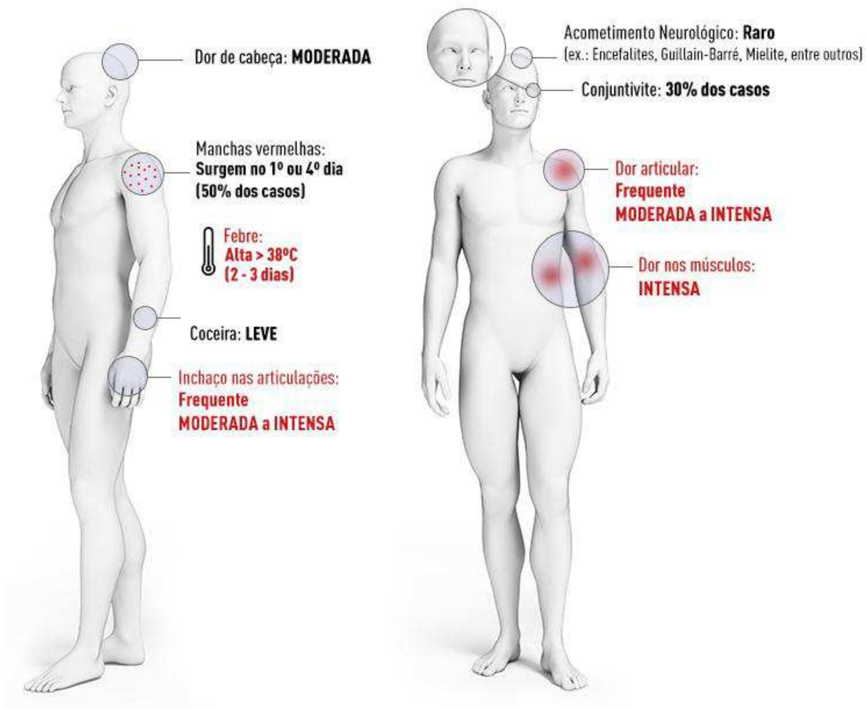
Dengue Hemorrágica

Dengue hemorrágica é uma forma grave de dengue, quando se tem a doença uma segunda vez. No início os sintomas são iguais ao da dengue clássica, mas após o 5º dia da doença alguns pacientes começam a apresentar sangramento e choque. Os sangramentos ocorrem em vários órgãos. Alguns doentes apresentam choque circulatório. Este tipo de dengue pode levar a pessoa à morte. A dengue hemorrágica necessita sempre de avaliação médica de modo que uma unidade de saúde deve sempre ser procurada pelo paciente. O médico irá avaliar a condição do doente e indicar o tratamento correto.

2.4.1 Sintomas e Tratamento

Não existe tratamento específico para dengue, apenas tratamentos que aliviam os sintomas. Mas cuidado: não devem ser usados remédios a base de ácido acetil salicílico, como por exemplo a aspirina e o AAS. Nos casos de dengue hemorrágico o tratamento realizado é de suporte, no sentido de evitar o choque. Não existem vacinas contra a dengue de tal forma que a prevenção é a única arma contra a doença. Toda pessoa que apresentar sintomas da doença, conforme apresentado na figura 2, deve procurar um Centro de Saúde para obter orientação médica.*A solução é a prevenção*(BRASIL 2009)

Figura 2. Sintomas da degue



Fonte: Ministério da Saúde

2.5 O que é Chikungunya?

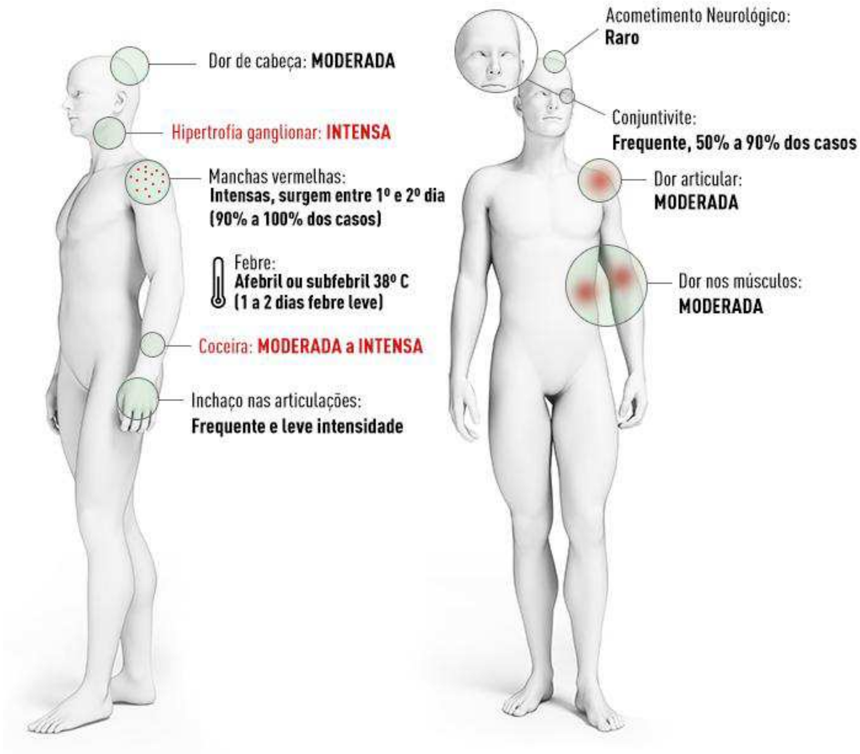
A Febre Chikungunya é uma doença transmitida pelos mosquitos aegypti Aedes albopictus. No Brasil, a circulação do vírus foi identificada pela primeira vez em 2014. Chikungunya significa "aqueles que se dobram" em swahili, um dos idiomas da Tanzânia. Refere-se à aparência curvada dos pacientes que foram atendidos na primeira epidemia documentada,

2.5.1 Sintomase tratamento

Os principais sintomas são febre alta de início rápido, dores intensas nas articulações dos pés e mãos, além de dedos, tornozelos e pulsos. Pode ocorrer ainda dor de cabeça, dores nos músculos e manchas vermelhas na pele. Não é possível ter chikungunya mais de uma vez. Depois de infectada, a pessoa fica imune pelo resto da vida.

Os sintomas iniciam entre dois e doze dias após a picada do mosquito, conforme apresentamos na figura 3. O mosquito adquire o vírus CHIKV ao picar uma pessoa infectada, durante o período em que o vírus está presente no organismo infectado. Cerca de 30% dos casos não apresentam sintomas (BRASIL 2015)

Figura 3. Sintomas da chikungunya



.Fonte: Ministério da Saúde

Tratamento de Chikungunya

Atualmente, não há tratamento específico disponível para a febre chikungunya. Para limitar a transmissão do vírus, os pacientes devem ser mantidos sob mosquiteiros durante o estado febril, evitando que algum Aedes aegypti o pique, ficando também infectado.

2.6 O que é Zika virus?

A febre por vírus zika é descrita como uma doença febril aguda, autolimitada, com duração de três a sete dias, geralmente sem complicações graves. Porém há registro de mortes e manifestações neurológicas, além de causar a microcefalia. (conforme 2.7)

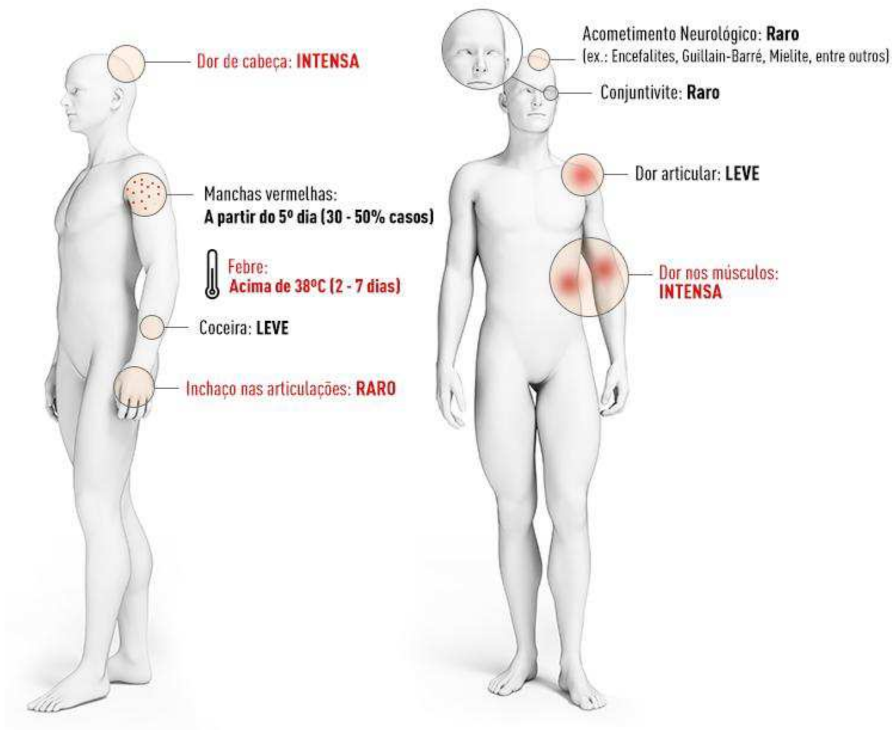
2.6.1 Transmissão da zika vírus

A principal forma de transmissão do vírus Zika é pela picada do mosquito infectado, principalmente o*Aedes aegypti*, em regiões tropicais. Os mosquitos*Aedes*picam, normalmente, durante o dia, sobretudo ao princípio da manhã e ao fim da tarde/princípio da noite.

Sendo este o mesmo mosquito que transmite a dengue e a chikungunya.

2.6.2 Sintomas

Figura 4 – sintomas da zika vírus



Fonte: Ministério da Saúde

Os principais sintomas da Zika são semelhantes aos de outras infecções por arbovírus, como a dengue, e incluem febre, erupções cutâneas, conjuntivite, dores nos músculos e nas articulações, mal-estar ou dor de cabeça. Estes sintomas são, normalmente, ligeiros e duram de dois a sete dias, conforme apresentamos na figura 4.

2.6.3 Tratamento da Zika vírus

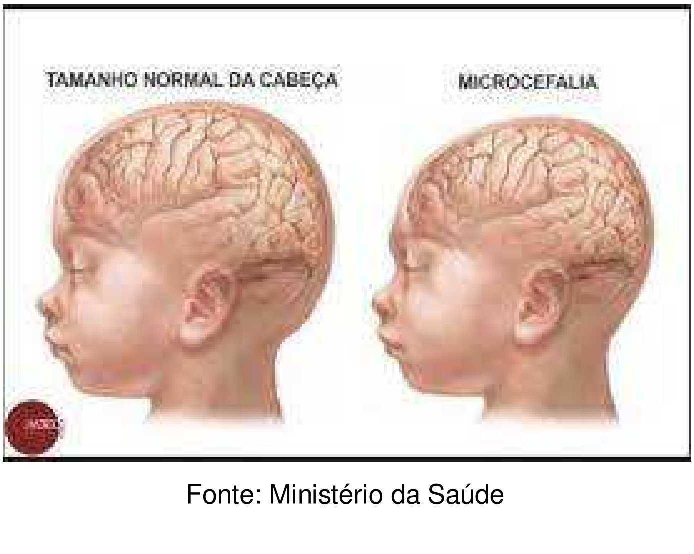
Não existe tratamento específico para febre por Zika. O tratamento dos casos sintomáticos recomendado é baseado no uso de acetaminofeno (paracetamol) ou dipirona para o controle da febre e manejo da dor. No caso de erupções pruriginosas, os anti-histamínicos podem ser considerados.

No entanto, é desaconselhável o uso ou indicação de AAS e outras drogas anti-inflamatórias em função do risco aumentado de complicações hemorrágicas descritas nas infecções por síndrome hemorrágica como ocorre com outros flavivírus. Se os sintomas piorarem, devem procurar cuidados médicos e aconselhamento de profissionais de saúde capacitados.(BRASIL 2017).

2.7 O que é microcefalia?

A microcefalia é uma doença em que a cabeça e o cérebro das crianças são menores que o normal para a sua idade, influenciando o seu desenvolvimento mental conforme apresentado na figura 5, ela é uma doença grave, que não tem cura, e a criança que a possui pode precisar de cuidados por toda a vida, sendo dependente para comer, se mover e fazer suas necessidades, dependendo da gravidade da microcefalia que possui e se ela possui outras síndromes além da microcefalia. Veja detalhes sobre como é a vida da criança com microcefalia em (BRASIL 2015)

Figura 5. - microcefalia



Fonte: Ministério da Saúde

2.8 Notificação da Arbovirose:

Em caso de suspeita de infecção por vírus da Dengue, Chikungunya ou Zika, deve ser realizada a notificação no SINAN e o registro oportuno de casos de microcefalia no Registro de Eventos de Saúde Pública - RESP (disponível em www.resp.saude.gov.br).

É fundamental notificar, para ativar o processo de investigação, visando confirmar os casos, bem como subsidiar as ações de atenção à saúde. Na suspeita de qualquer arbovirose, redobrar a atenção nas seguintes situações especiais: acamados prévios, grupos com maior risco de complicação (gestantes, indivíduos menores de 13 anos e maiores de 65 anos), doenças autoimunes, doenças hematológicas, em uso de anticoagulantes e portadores de hipertensão arterial sistêmica, diabetes, doenças pulmonares obstrutivas crônicas descompensadas.

Fica reforçada a importância de uma boa articulação do SAD com as Unidades Básicas de Saúde, urgência, hospitais e serviços de reabilitação para referência e contra referência asseguradas e imediatas, para promover o cuidado necessário à toda população na atual situação de emergência nacional.(Portal Saúde 2016)

2.9 O Combate da Arbovirose

O Departamento de Vigilância em Saúde esclarece que existem critérios técnicos para a solicitação e aplicação do fumacê. É importante salientar que o inseticida é pulverizado com óleo diesel para possibilitar fumaça e fixação.

Atualmente, a eficácia deste procedimento é contestada, uma vez que só atinge o mosquito alado (adulto), desta forma não combate os ovos e larvas do mosquito. O uso do fumacê, ou seja, a aplicação do inseticida de maneira espacial é uma forma apenas emergencial e complementar às demais técnicas de enfrentamento. Por isso, a indicação tem critérios muito bem definidos. Ele alerta que como o fumacê é uma técnica complementar, é preciso continuar as ações de bloqueio de transmissão com ações de eliminação de focos do mosquito, a educação com informações sobre prevenção e os mutirões de limpeza para que o fumacê tenha eficácia.(SESAP 2015).

3. EPIDEMIOLOGIA MATEMÁTICA

A epidemiologia matemática fundamenta-se em hipóteses que quantificam alguns aspectos biológicos da propagação de epidemias. Para isso, será apresentado o processo de desenvolvimento de modelagem matemática, especificamente para descrever as infecções de transmissão direta. Este tipo de transmissão é baseada em infecções viróticas ou bacterianas, cuja disseminação ocorre diretamente, através do meio físico, quando se dá um contato apropriado entre os indivíduos suscetíveis (aqueles que não tiveram contato com o vírus) e os indivíduos infectados, isto é, os que apresentam em seus organismos concentrações razoáveis de vírus e, assim, estejam eliminando para o ambiente.

São considerados aqui, doenças que exigem um vetor transmissor (mosquito, no caso de dengue) da infecção (Yang, 2001). Os modelos matemáticos procuram fornecer informações sobre dois parâmetros epidemiológicos relevantes: *a força de infecção e a razão de reprodutibilidade basal*. A estimativa desta força de infecção é a grande tarefa dos epidemiologistas, pois é ela que vai determinar não somente a dimensão da propagação de uma doença infecciosa como também o esforço necessário para combatê-la.

Os modelos matemáticos procuram fornecer informações sobre dois parâmetros epidemiológicos relevantes: a força de infecção e a razão de reprodutibilidade basalque *é*definido como o número esperado de casos secundários de uma doença produzidos por um indivíduo infectado em uma população suscetível durante seu período de infecciosidade. A incidência (número de novos casos por unidade de tempo) de uma doença, ou taxa com que a doença se propaga pela população, recebe o nome de força de infecção. A força de infecção depende somente do número de indivíduos infectantes, e não do número de indivíduos suscetíveis, pois ela indica o grau de contaminação do ambiente pelos vírus eliminados por todos indivíduos infectantes (Yang, 2001).

A razão de reprodutibilidade basal, comumente designado por R_0, é definida, no caso de doenças infecciosas, como sendo o número de casos secundários que um caso primário é capaz de produzir em uma população totalmente suscetível (Hethcote, 2000). Observe que a diminuição da força de infecção é devida a passagem de indivíduos do estado suscetível para imune sem passar pelo estado infeccioso. Como consequência desse declínio no número de indivíduos suscetíveis e, também, na força de infecção, tem-se a diminuição do número de casos secundários gerados por um indivíduo infectante (Anderson e May, 1992). Portanto os modelos epidemiológicos têm se mostrado uma importante ferramenta para compreender e analisar o comportamento de epidemias.

3.1 O controle das Epidemias.

O controle de Epidemias tem por objetivo reduzir a quantidade de casos de doenças, de modo a deixar de ser considerado um problema para a Saúde Pública. A tentativa de erradicar estas doenças já é algo mais complicado e precisa de métodos que possam tentar tornar estas doenças amenizadas. Um meio bem eficaz para a prevenção de epidemias foi o surgimento de vacinas para os vários tipos de epidemias. Mas até o momento não foi encontrado ainda um tipo de vacina para a Arbovirose, devido ela ser uma epidemia recente. Existem vários meios de controle destas epidemias, os quais mudam constantemente com o tempo, de acordo com o aparecimento de novos produtos e, consequentemente, novos meiospara realizar procedimentos.

Por exemplo, doenças como a malária, a doença de chagas, e a arbovirose, foram amenizadas devido ao uso de inseticidas. Com a modelagem matemática aplicada ao estudo de Epidemiologia, foi possível quantificar e buscar meios que controlem a dissipação destas doenças. Isto é algo de grande importância, pois as epidemias acarretam em numerosos casos de mortes. Com a Epidemiologia Matemática pode-se prever o nível que uma epidemia está afetando determinada população, isto é, o que pretendemos apresentar neste trabalho.

4. MODELAGEM MATEMÁTICA

Modelagem matemática é uma parte da matemática que precisamos dar um pouco de atenção aos dados extraidos, analisados, criticados para obter uma resposta mais precisa do estudo do caso. Diante disso, percebemos que não temos uma forma mágica, algo pronto para que possamos utilizar, a modelagem é um fato ou fenomeno real que precisa sempre ser melhorado.

É também uma forma de abstração e generalização com a finalidade de previsão de tendências. A modelagem consiste, essencialmente, na arte de transformar situação da realidade em problemas matemáticos de soluções reais e devem ser interpretadas na linguagem usual. A modelagem é realizada a partir do momento que nos conscientiza que estamos precisando de investigações com aproximações da realidade, ou seja, estamos elaborando sobre o que representa o sistema ou parte dele.

Yang (2002)afirma que a matemática teve o seu progresso associado ao esforço para a compreensão dos fenômenos naturais, graças aos espíritos inquiridores de pensadores que não se contentaram apenas com as descrições qualitativas dos mesmos. Desde tempos antigos, a geometria, por exemplo, tem sido desenvolvida para tratar de problemas de mensuração para calcular áreas de terras e volumes de celeiros. A linguagem concisa, precisa e abrangente - em termos de símbolos (ou notações) - da matemática tem sido útil para elaborar idéias e metodologias para compreender e explorar o mundo físico.

Não foi sem razão que Galileu defendeu ardentemente uma descrição quantitativa - e dedutiva - dos fenômenos naturais que pudesse ser preditiva (utilizando fórmulas matemáticas), deixando de lado a comodidade de descrições apenas qualitativas e factuais dos fenômenos. Com a busca de soluções de problemas do dia-a-dia, o homem pode encontrar na matemática uma ferramenta poderosa a seu favor. Com ela foi possível expandir seus conhecimentos em relação a muitos fenômenos da natureza. Segundo Bassanezi (2002, p.16)

> A modelagem matemática consiste na arte de transformar problemas da realidade e resolvê-los, interpretando suas soluções na linguagem do mundo real.

A capacidade do homem de pensar, analisar, questionar, investigar, permitiu a humanidade, juntamente com a matemática explorar e conhecer o ambiente em que vive. A modelagem matemática, além de uma alternativa de ensino, é também uma metodologia de pesquisa que permite modelar diversas situações do cotidiano, como por exemplo, os mecanismos que controlam a dinâmica de populações, ou problemas ligados à ecologia, à neurologia, à genética, às epidemiologias e aos processos psicológicos, dentre outros. Também sabemos que informalmente, a modelagem matemática, é muito utilizada por leigos no assunto.

> As vantagens do emprego de modelagem em termos de pesquisa podem ser constatadas nos avanços obtidos em vários campos da Física, Química, Biologia e Astrofísica, entre outros. A modelagem pressupõe a multidisciplinaridade. E, nesse sentido, vai ao encontro das novas tendências que apontam para a remoção de fronteiras entre as diversas áreas de pesquisa. (BASSANEZI, 2002, p. 16)

Yang (2002) enfatizaainda que uma vez que a compreensão de fenômenos naturais deve ser baseada em idéias desenvolvidas a partir de intuições (um novo pensamento) e conhecimentos já adquiridos, o uso de modelos é de grande valia. Os modelos são desenvolvidos a partir de uma elaboração cuidadosa de idéias voltadas para partes do fenômeno, que permitirão a aferição das suas hipóteses em confronto com as observações.

Assim, modelos podem ser modificados, aprimorados ou substituídos por outros para se obter uma compreensão correta daquilo que está ocorrendo na natureza. O desenvolvimento de modelos matemáticos para explicar as observações do mundo físico teve grande avanço desde tempos antigos. Por exemplo, a lei da atração gravitacional é um resultado de modelagem matemática, e a sua importância deve-se ao fato de ser uma lei universal, ou seja, consegue explicar tanto o movimento das estrelas e galáxias quanto o movimento de pequenos objetos em queda livre na Terra.Entretanto, no Brasil, o uso formal e científico da modelagem e de modelos matemáticos é recente.

Nos últimos anos, ela tem se sobresaído pela sua eficácia em resolver determinados problemas. Apesar de nova ao se comparar a outros métodos, essa prática já tem provocado efeitos. Existem várias publicações relatando experiências bem sucedidas do uso da modelagem matemática. Dentre eles destacam-se Biembengut & Hein, 2000; Matos & Carreira, 1996; Monteiro & Pompeu Jr., 2001; Bassanezi, 2002.

Também é possível perceber o número crescente de artigos acadêmicos publicados nessa área. Um que merece destaque refere-se ao trabalho publicado sobre Epidemiologia da Transmissão da Dengue escrito por Yang (2003) onde descreve a transmissão do vírus da dengue na população humana através de modelo matemático.

Porém, apesar de interessante a modelagem requer do pesquisador dois graus de atenção e intuição altos, pois o ambiente de Modelagem está associado à problematização e investigação. O primeiro refere-se ao ato de criar perguntas e/ou problemas, enquanto que o segundo, à busca, seleção, organização e manipulação de informações e reflexão sobre elas. Essas atividades não são separadas, mas articuladas no processo de envolvimento dos graduandos para abordar a atividade proposta. Nela, podem-se levantar questões e realizar investigações que atingem o âmbito do conhecimento reflexivo.

Segundo D'ambrosio (1986) a modelagem é um processo muito rico de encarar situações e culmina com a solução efetiva do problema real e não com a simples resolução formal de um problema artificial.

4.1. Etapasda Modelagem

Segundo Ramon (2011)"Muitas vezes, na modelagem, se faz necessário fazer várias tentativas e simulações para se chegar ao resultado desejado (aquele que solucione o problema ou amenize)". Para isso é necessário e coerente seguir uma série de procedimentos, os quais direcionem o seu trabalho para o objetivo principal, que é descrever, modelar e solucionar uma situação problema por meio de uma formulação matemática seja ela qual o tipo for. A seguir iremos elencar as etapas de modelagem matemática de acordo com Biembengut (2007).

Interação

É nessa etapa que ocorre o reconhecimento da sua situação problema, tais como a sua familiarização. Neste momento, é necessário analisar e aprofundar-se na situação problema, buscando referências em outros trabalhos para possibilitar um embasamento e então obter a familiarização com o problema.

Matematização

Nesta etapa é realizada a formulação do problema e a resolução da situação problema por meio de uma linguagem matemática. Nesse sentido, deve-se levar em consideração no ato do desenvolvimento dessa etapa alguns fatores:

- deve-se classificar as informações em relevantes ou não;
- decidir quais serão os fatores que serão estudados, levantando hipóteses;
- selecionar as variáveis que serão relevantes e suas constantes envolvidas;
- selecionar os símbolos devidamente apropriados para estas variáveis e descrever estas relações em termos matemáticos

Nesta etapa da modelagem o objetivo é chegar a um conjunto de expressões que sejam aritméticas ou fórmulas, ou expressões algébricas, ou programa computacional, dentre outros, que permitam chegar à solução ou dedução de uma solução.

Modelo matemático

Como finalização do modelo, é relevante realizar uma avaliação como verificação do nível em que ele se aproxima da situação problema que foi representada e com isso analisar o grau de confiabilidade na sua utilização. Para isso, faz-se necessário:

- a interpretação do modelo, de forma a analisar as implicações da solução que foi derivada do qual está sendo examinado;
- verificar a sua adequabilidade, de modo a retornar a situação problema e avaliar quanto significativa e relevante a sua solução e assim validar o modelo.

Caso após realizar essa etapa o modelo criado não tenha atendido as necessidades, deve-se voltar a etapa de matematização, de forma a realizar ajustes nas hipóteses, variáveis etc.

Um modelo matemático será bem formulado se seguir as três etapas de modelagem sem nenhum erro, caso ocorra algum, deve-se voltar para reformulação em alguma dessas etapas. Dessa forma, a modelagem matemática é baseada em investigação e problematização, seguindo as etapas citadas no decorrer deste texto. No qual a problematização é a parte em que surgem determinadas perguntas, ou problemas e a investigação engloba a organização, seleção e reflexões sobre as informações encontradas.

4.2 Utilização da Modelagem Matemática

Como já foi mencionado no decorrer deste trabalho que a modelagem matemática procura expor situações do nosso cotidiano por meio de uma simbologia matemática; utiliza-se o termo aplicação matemática, ao fato de procurar representar as atividades por meio de conceitos, para compreensão de atividades do mundo em que vivemos. Desta forma, a matemática aplicada moderna pode ser considerada a arte de aplicar a matemática à situações problemas, utilizando como recurso a modelagem matemática (BASSANEZI, 2006).

A modelagem matemática pode ser aplicada em diversas áreas, seja como método científico, como estratégia de ensino-aprendizagem, dentre outros. Ao ser trabalhada como método científico, pode-se elencar alguns tópicos para mostrar a relevância da modelagem matemática como ferramenta de pesquisa:

- Pode estimular o surgimento de novas ideias e técnicas experimentais;
- Pode completar espaços onde existem falta de dados experimentais;
- Pode servir de linguagem universal para compreensão e uma espécie de entrosamento entre pesquisadores em diversas áreas do conhecimento.

Desta forma, como método científico pode abranger diversas áreas possibilitando por meio de ideias matemáticas explicar diversas áreas de conhecimento. Depois do surgimento da modelagem matemática, diversas áreas tiveram subsídios para desenvolver teorias e novos ramos de pesquisa. Por exemplo, a Física Teórica, depois da modelagem, com a evolução e a complexidade dos modelos matemáticos para a teoria dos campos, deu um grande impulso para o desenvolvimento de sistemas de equações diferenciais ordinárias.

Cada vez mais vão evoluindo os métodos e surge a necessidade de trabalhar com teorias cada vez mais sofisticadas, as quais precisam de habilidades matemáticas. Tem-se também a Química Teórica que por sua vez necessita de modelos matemáticos para descrever a velocidade de suas reações, sendo estas descritas por equações diferenciais, o uso de matrizes e gráficos para descrever a estrutura de suas moléculas.

A Biomatemática que cada vez mais necessita de recursos matemáticos para descrever a representação dos fenômenos biológicos, como por exemplo, os modelos deepidemiologia de Kermack-McKendrick, os quais trabalham utilizando equações diferenciais para descrever o comportamento de epidemias.

Além destas áreas citadas, tem-se a matemática aplicada as engenharias, ciência da computação, que também utilizam a modelagem no processos de ensino-aprendizagem, como por exemplo, os cursos de mestrado e doutorado, onde os alunos são submetidos a adquirir um aprofundamento em relação aos conteúdos da matemática e como objetivo estimular o alunado a se tornar um modelador matemático, tentando descrever determinada situação em termos matemáticos. No decorrer deste trabalho de conclusão de curso veremos mais alguns exemplos de aplicações matemáticas, com visão no uso das equações diferenciais ordinárias.

5. EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

A teoria das equações diferenciais, foi aplicada primeiramente às ciências físicas, posteriormente a outras atividades humanas. Envolvendo desde a engenharia e a biologia até a medicina, os negócios, a história, os esportes e as artes. Elas associam uma função incógnita a uma ou mais de suas derivadas, resolvê-las significa encontrar todas as suas soluções, isto é, todas as funções que satisfazem a equação. Como por exemplo, a equação: $x' = x$, relaciona a função $x = x(t)$, assim como também a sua derivada $x' = \frac{dx}{dt}$. (Boyce, 2006)

Definição 1: Uma equação diferencial ordinária é uma equação que contém uma ou varias derivadas da função incógnita. (Kreyzig 2009).

As equações diferenciais ordinárias lineares de primeira ordem pode ser escrita da forma:

$$\frac{dy}{dx} = -p(t)y + q(t), \qquad (1)$$

no qual *p*:(*a,b*)→ℝ e q: *(a, b*)→ℝsão funções contínuas. Uma solução para (1) é uma função y que seja diferenciável e satisfaz a equação (1).

$$y' = \frac{dy}{dt}, \qquad (2)$$

onde, *y*' é a derivada de *y* com relação a variável independente *t.*

observando a equação (2) podemos perceber dois problemas básicos.

i) Determinar a solução geral da equação (2)

ii) Determinar a solução do P.V.I.

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = p(t)y = q(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \qquad (3)$$

onde t_0Є *(a,b*) e $y_0$são os dados iniciais. Notemos ainda que o problema de valor inicial possui uma e somente uma solução.

Ao resolver uma equação diferencial de primeira ordem obtemos uma família de solução que dependem de uma constante arbitrária.

O modo mais simples da equação (2) é a equação de crescimento exponencial.

$$\frac{dy}{dt} = ky, \qquad (4)$$

onde *k* é uma constante.

5.2 Equações Diferenciais Ordinárias de primeira ordem.

A ordem de uma equação diferencial é a ordem da derivada de maior ordem que aparece na equação. Apresentamos a seguir a forma geral de uma equação diferencial de primeira ordem:

$$f(x,y,y') = 0 \quad (5)$$

Também podemos escrevê-la da seguinte forma:

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \quad (6)$$

Se a função *f* das equações (5) e (6) depender linearmente da variável dependente y, então a equação pode ser escrita na forma:

$$\frac{dy}{dx} = -p(x)y + g(x) \quad (7)$$

e é chamada de equação diferencial linear de primeira ordem. A equação (7) com *g(x)≡0* é chamada de equação linear homogênea. A solução do P.V.I homogêneo com $y(x_0) = y_0$ é dada por: $y(t) = y_0 e^{\int_{x0}^{x}[-p(s)]ds}$. Usaremos a notação

$$T(x,x_0) = e^{\int_{x0}^{x}[-p(s)]ds} \quad (8)$$

com o objetivo de simplificar a solução do problema de valor inicial (6)-(7) quando *f* for linear, ou seja, a equação diferencial estiver na forma (8), que é dada pela seguinte expressão:

$$y(t) = T(x,x_0)y_0 + \int_{x_0}^{x} T(x,s)g(s)ds. \quad (9)$$

Essa fórmula é chamada de fórmula de variação das constantes. Equações diferenciais da forma:

$$y' = \frac{f(x)}{g(y)}, \qquad g(y) \neq 0 \quad (10)$$

onde

$$y' = \frac{d}{dx}$$

denota a derivada da função y em relação à variável independente x, são chamadas de separáveis.

5.3 Problema de Valor Inicial (PVI)

O problema de valor inicial, consiste na resolução de equações diferenciais de primeira ordem, que pode ser definida geometricamente em algum intervalo I, tal que o gráfico passe por um ponto (x_0, y_0) determinando que a equação

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (11)$$

está sujeita a uma condição inicial

$$y\ (x_0) = \ y_0, \text{ onde}$$

$x_0$um número no intervalo I, ey_0 é número real arbitrário.

Teorema 1.

(Existência e unicidade) Seja R uma região retangular no plano xy definida por$a \leq x \leq b,\ c \geq y \leq d$ que contém o ponto (x_o, y_0) em seu interior.

Se f(x; y) e $\frac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas em $\mathbb{R}$, então existe um intervalo I centrado em x_0e uma única função y(x) definida em I que satisfaz o problema de valor inicial.

Para entendermos o problema de valor inicial (PVI), segue o exemplo.

Exemplo 1: Resolva o problema de valor inicial (PVI)

$$\frac{dy}{dx} + y = 0; \qquad y(0) = 1 (12)$$

Solução

Percebe-se que a equação já está na forma de equação de primeira ordem, sendo assim, temos p(x) = 1, então vamos calcular o fator integração μ(x)

$$\mu(x) = e^{\int 1dx} \Rightarrow \mu(x) = e^x$$

Multiplicaremos a equação (12) por μ(x) = e^x

$$e^x \left\lfloor \frac{dy}{dx} + y \right\rfloor = e^x . 0$$

Obtemos,

$$e^x \frac{dy}{dx} + e^x y = 0 \Rightarrow \frac{d}{dx} \lfloor e^x . y \rfloor = 0$$

Integrando ambos os lados

$$\int \frac{d}{dx} \lfloor e^x . y \rfloor dx = \int 0dx$$

resultará em

$$e^x . y = c \Rightarrow y = \frac{c}{e^x},$$

$$\Rightarrow y = ce^{-x}, \qquad (13)$$

assim, para encontrar o valor da constante c, tendo como condição inicial y(0) = 1; vamos substituir em (13)

$$y = ce^{-x} \Rightarrow 1\; ce^{-0} \Rightarrow c = 1$$

Logo, como c = 1, substituindo na equação (13), temos que a solução é dada por

$$y = \; e^{-x}.$$

Este resultado nos fornece as condições necessárias para que a solução de um PVI exista e seja única. A demonstração do teorema pode ser encontrada em (BOYCE, 2006).

Definiremos agora alguns conceitos que serão necessários para a análise dos modelos que serão apresentados na próxima seção.

***Definição** 2. Uma equação da forma*

$$y' = f(x) \text{(14)}$$

onde a função f : A → $\mathbb{R}$, A ⊂$\mathbb{R}$ aberto, depende somente de y e não da variável independente t, é chamada de equação autônoma.

Uma propriedade importante dessas equações é que, se y = y(t) é solução de (14), então y = y(t + c), onde c é constante, também é solução de (14). Logo, se y(t) é solução do PVI.

$$\begin{cases} y' = f(y) \\ y'(t_0) = \; y_0 \end{cases}$$

então y $(t + t_0)$ é solução de

$$\begin{cases} y' = f(y) \\ y'(0) = \; y_0 \end{cases}$$

Portanto, para estas equações, podemos considerar somente condições iniciais onde t_0= 0

***Definição2.1**. Se ȳ é um zero de f , isto é, f (ȳ) = 0, então y(t) ≡ ȳ é solução de (14) e é chamada de solução de equilíbrio ou estacionária e o ponto ȳ é chamado de ponto de equilíbrio ou singularidade.*

Definição 2.2.*Um ponto de equilíbrio ȳ é dito estável, se dado ε > 0, existe δ > 0, tal que para* $|y_0 - \bar{y}| < \delta$*, a solução do problema de valor inicial.*

$$\begin{cases} y' = f(y) \\ y'(0) = y_0 \end{cases}$$

é tal que $|y(t) - \bar{y}| < \varepsilon$ *para todo t ≥ 0. Um ponto de equilíbrio que não é estável é chamado de instável. Ainda, um ponto de equilíbrio ȳ é dito assintoticamente estável, se for estável e se existir* $\gamma > 0$ *tal que* $\lim_{t\to\infty} y(t) = \bar{y}$ *quando* $|y_0 - \bar{y}| < \gamma$

5.4. EQUAÇÃO DIFERENCIAL ORDINÁRIA LINEAR DE PRIMEIRA ORDEM

Podemos definir uma equação linear como uma equaçao diferencial da forma

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(y) = g(x)$$

dividindo a equação pelo coeficiente $a_1(x)$, obtemos:

$$\frac{a_1(x)}{a_1(x)}\frac{dy}{dx} + \frac{a_0(x)}{a_1(x)}y = \frac{g(x)}{a_1(x)}$$

tomando $P(x)= \frac{a_0(x)}{a_1(x)}$ e $f(x)= \frac{g(x)}{a_1(x)}$, substituindo na equação obtemos uma forma mais útil de uma equação linear.

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x) \qquad (15)$$

Usando diferenciais, multiplicando a equação por dx, obtemos:

$$dx\left[\frac{dy}{dx} + P(x)y\right] = dxf(x)$$

$$\Rightarrow dy + P(x)y\,dx = f(x)dx$$

reescrevendo, adicionando o inverso aditivo de $f(x)dx$, obtemos:

$$dy + [P(x)y - f(x)]dx = 0$$

multiplicamos a equação por $\mu(x)$,

$$\mu(x)dy + \mu(x)[P(x)y - f(x)]dx = 0$$

Pelo Teorema (Critério para uma Diferencial Exata), o lado esquerdo da equação é uma diferencial exata, se:

$$\frac{\partial}{\partial x}\mu(x) = \frac{\partial}{\partial y}y(x)[p(x)y - f(x)]$$

ou seja,

$$\frac{d\mu}{dx} = \mu P(x)$$

Separando as variáveis, obtemos

$$\frac{d\mu}{\mu} P(x)dx$$

integrando ambos os lados da igualdade, temos:

$$\int \frac{d\mu}{\mu} = \int P(x)dx$$

assim,

$$\ln|\mu| = \int P(x)dx$$

usando exponencial, temos:

$$e^{\ln|\mu|} = e^{\int P(x)dx}$$

dessa forma encontramos que o fator integração para a equação linear é:

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$$

Para exemplificar a resolução de equação lineares de primeira ordem, segue o exemplo:

Exemplo 1. Seja a equação

$$x\frac{dy}{dx} + y = e^x \quad (16)$$

Como podemos observar a equação (16), não se encontra na forma da equação linear de primeira ordem (16), então dividindo a equação por$x$ que é o coeficiente$\frac{dy}{dx}$, obtemos assim a equação.

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \frac{e^x}{x},$$

onde temos, $P(x) = \frac{1}{x}$. Calculando o fator integração $\mu(x)$,

$$\mu(x) = e^{\int \frac{1}{x}dx} \Rightarrow \mu(x) = e^{\ln x} = x.$$

Encontrando o $\mu(x) = x$, multiplicando a equação(16) por ele

$$x\left[\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x}\right] = x\left[\frac{e^x}{x}\right] \Rightarrow x\frac{dy}{dx} + y = e^x$$

reescrevendo a equação, obtemos

$$\frac{d}{dx}[x.y] = e^x$$

Integrando ambos os lados

$$\int \frac{d}{dx}[x.y]dx = \int e^x\,dx$$

obtemos assim,

$$x.y = e^x + c \Rightarrow y = \frac{e^x}{x} + \frac{c}{x},$$

onde c é a constante de integração.

Tendo em vista o estudo teórico de EDO, necessitamos agora estudar os tipos de modelos utilizados e suas hipóteses em epidemiologia.

6. MODELOS MATEMÁTICO EM EPIDEMIOLOGIA

Para formularmos um modelo matemático que envolva epidemias, faz-se necessário primeiramente entender quais são as variáveis e hipóteses que envolvem este tipo de problema.

6.1 Hipóteses dos modelos matemáticos

Para a criação de modelos são necessárias algumas hipóteses para que os mesmos tenham um significado e alcance o resultado esperado, que no caso de epidemias é prever o número de pessoas infectadas e a sua dissipação ao longo do tempo. Para que assim sejam tomadas algumas medidas preventivas para a dizimação destas epidemias.

1. Suponha que em um determinado instante a população divide-se em três subpopulações.

   a) Indivíduos Infectados -I(t): portadores da doença, os quais também são transmissores sejam de forma direta ou indiretamente, ou seja, no caso de algumas doenças ela pode ser transmitida diretamente de indivíduo para indivíduo ou por outros fatores externos, como por exemplo, troca de salivas, vírus ou parasitas.

   b) Indivíduos Suscetíveis - S(t): são aqueles que podem adquirir a doença quando entram em contato com os indivíduos infectados. E após um determinado período de infecção estes podem se tornar transmissores. Porém, muitas das vezes os indivíduos já estão infectados e não possuem sintomas e assim parecem sadios perante a população e após serem detectados infectados precisam passar por uma espécie de isolamento e tornam-se membros da população a seguir.

   c) Indivíduos Removidos - R(t): são aqueles que foram isolados, faleceram ou foram imunizados, ou por vacinas ou obtiveram a cura logo após contrair a doença.

2. Supõe-se que rapidamente ao contrair a doença o indivíduo suscetível se torne transmissor. Esta hipótese não leva em consideração o período de incubação do indivíduo.

3. No caso de alguns modelos matemáticos não é considerado variações na população, nem por nascimentos nem por óbitos decorrentes de outras causas.

4. Em alguns modelos é considerada a hipótese de que os indivíduos curados ficam imunizados permanentemente, o qual permanece na subpopulação dos removidos e não volta ao grupo dos suscetíveis, ou seja, após obter a cura não contrai novamente a doença.

6.2 MODELOS DE DINÂMICA POPULACIONAL

Veremos alguns modelos populacionais que são descritos por equações de primeira ordem, ou seja, tratam do crescimento de uma única população. Dentre estes os mais estudados são os modelos de Malthus, Verhust e Gompetz.

6.2.1 Modelo de Malthus

O primeiro grande avanço na modelagem de populações foi dado pelo inglês Thomas Robert Malthus (1766-1834) que em 1798 publicou seu trabalho anonimamente no livro "An Essay on the Principle of Population as it Affects the Future Improvement of Society", onde usou um modelo que estabelecia que o crescimento populacional se daria segundo uma progressão geométrica.

O trabalho de Malthus teve grande influência na teoria da evolução de Charles Darwin (1809-1882) e também de Alfred Russel Wallace (1823-1913). No livro de Malthus havia poucos dados que comprovassem suas ideias, mas ele percebeu, por exemplo, que a população dos EUA dobrava a cada 25 anos durante o século XVIII. Ele não conseguiu traduzir corretamente suas ideias em modelos matemáticos, mas preparou o caminho para o trabalho de Adolphe Quetelet (1796-1874), Pierre-François Franco e Pierre François Verhulst (1804-1849).

Ao longo do tempo Malthus publicou seu trabalho em sucessivas edições, anexando novas matérias. As ideias de Malthus não foram completamente inéditas, pois a tese de que a população cresce geometricamente já era familiar a Euler meio século antes. No entanto, Malthus lidou com o assunto de forma polêmica. Vamos analisar matematicamente esse modelo.

Para isto, seja $P(t)$ o número de habitantes de uma espécie num instante t. Num intervalo de tempo Δt, supomos que os nascimentos e as mortes são proporcionais ao tamanho da população e ao tamanho do intervalo, ou seja, o número de nascimentos é igual a $\alpha P(t)\Delta t$ e o número de mortesé igual a $\beta P(t)\Delta t$, onde α é o coeficiente de natalidade e β o de mortalidade. Assim,

$$\Delta P = P(t + \Delta t) - P(t) = \alpha P(t)\Delta t - \beta P(t)\Delta t,$$
$$\Delta P = (\alpha - \beta)P(t).\Delta t,$$
$$\Delta P/\Delta t = (\alpha - \beta)P(t).$$

Aplicando limite com $\Delta t \to 0$, temos a equação diferencial.

$$\frac{dP}{dt} = (\alpha - \beta)P \qquad (17)$$

Logo, a taxa de variação de uma população é proporcional à população em cada instante. Note que $P \equiv 0$ é o único equilíbrio dessa equação. Caso contrário, da equação (17) obtemos,

$$\frac{dP}{dt}\left(\frac{1}{P}\right) = (\alpha - \beta).$$

Integrando ambos os membros em t,

$$\ln|P| = (\alpha - \beta)t + c \Rightarrow P(t) = ke^{(\alpha-\beta)t}$$

Lembrando que $P(t) \geq 0$ para todo $t \geq 0$ e considerando $P(0) = P_0$, então a solução do PVI é

$$P(t) = P_0 e^{(\alpha-\beta)t}.$$

Se $\alpha = \beta$, isto é, o índice de natalidade for igual ao de mortalidade, então $P(t) \equiv P_0$ e, portanto, a população não varia.

Se $\alpha > \beta$, isto é, natalidade é maior que mortalidade, então a população cresce exponencialmente com o tempo.

Se $\alpha < \beta$ a população diminui e tende a extinção à medida que t cresce.

A aplicação desse modelo às populações humanas gerou uma grande discussão no início do século XIX. Malthus afirmava que a população mundial crescia em razão geométrica, enquanto os meios de sobrevivência cresciam apenas em razão aritmética.Assim a população cresceria até um limite de subsistência e seria controlada por fome, miséria, epidemias, guerras, vícios, etc. Por isso é considerado um modelo muito simples.

Exemplo 2. (População brasileira). Vamos considerar a população brasileira, cujos dados são apresentados na tabela a seguir e que foi retirada do livro "EnsinoAprendizagem com modelagem matemática" de Bassanezi. O censo demográfico da população do Brasil de 1940 a 1991 é dado por

Ano	População	Taxa de Cresc. (% a.a)	Crescimento absoluto	Distribuição etária (%)		
				0-14	15-64	65 e mais
1940	41.236.315	23	10.708.082	42,6	55,0	2,4
1950	51.944.397	32	19.017946	41,9	55,5	2,6
1960	70.992.343	28	22.146.694	43,2	54,3	2,5
1970	93.139.037	25	25.863.669	42,6	54,3	3,1
1980	119.002.706	19	27.822.769	38,8	57,2	4,0
1991	146.825.475	-	-	35,0	60,2	4,8

Seja α a taxa de crescimento da população dada pela diferença entre as taxas de natalidade e a de mortalidade. Então o modelo discreto de Malthus é dado por

$$P(t+1) - P(t) = \alpha P(t)$$

Considerando a população inicial P(0) = P_0,obtemos

$$p_t = (\alpha + 1)^t p_0 \, (18)$$

Assim, dados dois censos P_0 e P_t, a taxa de crescimento demográfico em t anos é obtida de (17), fazendo

$$(\alpha + 1)^t = \frac{p_t}{p_0}, \text{ isto é}$$

$$\alpha = \sqrt[t]{\frac{p_t}{p_0}} - 1$$

Se considerarmos a população entre os censos de 1940 e 1991, então α é obtida por

$$\alpha = \sqrt[51]{\frac{146825475}{41236315}} - 1 = 0{,}0252131,$$

o que nos permite afirmar que a população brasileira cresceu a uma taxa média de, aproximadamente, 2,5% ao ano nestes 51 anos.

Agora aplicando o logaritmo natural em $P_t = (1+\alpha)^t P_0$ obtemos

$$lnP_t = t\,ln(1+\alpha) + lnP_0.$$

Desta forma

$$P_t = P_0 e^{(1+\alpha)t},$$

que é análoga à qual (18). Podemos comparar a solução do modelo discreto com a solução do modelo contínuo correspondente, considerando que

$$\frac{dP}{dt} = lim_{\Delta t \to 0} \frac{p(t + \Delta x) - P(t)}{\Delta t}$$

e que P(t + Δt) - P(t) = $\beta P(t)\Delta t$ (βé a taxa de crescimento).

Assim, podemos escrever o modelo contínuo por:

$$\begin{cases} \dfrac{dP}{dt} = \beta p(t), \\ p(0) = p_0 \end{cases}$$

cuja solução é dada por

$$P(t) = P_0 e^{\beta t}$$

Desta maneira, os modelos discretos e contínuos fornecem a mesma solução quando

$$\beta = \ln(1 + \alpha)$$

Então, quando α = 0.0252131 temos β = 0.0249.

A função

$$\mathrm{P(t)} = 41.236 e^{0.0249t}$$

fornece a população (em milhões de habitantes) em cada ano t

6.2.2. Modelo de Verhulst

Pierre-François Verhulst (1804-1849) nasceu em Bruxelas e obteve seu doutorado em Matemática na University of Ghent, em 1825. Em 1835 ele se tornou professor de matemática na recém-criada Free University in Brussels. No ano de 1835, seu compatriota Adolphe Quetelet (1796-1874), um estatístico e diretor do observatório de Bruxelas, publicou “A Treatise on Man and the Development of his Faculties”.

Quetelet sugeriu que as populações não poderiam crescer geometricamente por um longo período de tempo, porque os obstáculos mencionados por Malthus formariam uma espécie de “resistência”, que ele pensou, por analogia à Mecânica, ser proporcional ao quadrado da velocidade de crescimento da população. Esta analogia não tinha base real, mas inspirou Verhulst.

Em 1838 Verhulst publicou “Note on the law of population growth”. Verhulst percebeu que a analogia de Quetelet não era razoável e propôs a seguinte equação diferencial para a população P(t) no tempo t,

$$\frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{P_\infty}\right) (18)$$

onde $r > 0$ eP_∞ é o valor limite da população.

Quando a população P(t) é pequena em comparação com o parâmetro P_∞, obtemos a aproximação

$$\frac{dP}{dt} \cong rP,$$

Cuja solução é P(t) ≅ P(0) e^{rt}, isto é, crescimento exponencial. Assim, a taxa de crescimento diminui quando P(t) se aproxima de P_∞. Para obter a solução de (17) a reescrevemos da forma

$$\frac{1}{P\left(1 - \frac{P}{P_\infty}\right)} dP = rdt \qquad (19)$$

Mas, através de frações parciais temos que

$$\frac{1}{P\left(1 - \frac{P}{P_\infty}\right)} = \frac{A}{P} + \frac{B}{P\left(1 - \frac{P}{P_\infty}\right)} \Rightarrow \frac{1}{P\left(1 - \frac{P}{P_\infty}\right)} = \frac{A\frac{1}{\left(1-\frac{P}{P_\infty}\right)} + BP}{P\left(1 - \frac{P}{P_\infty}\right)}$$

$$\Rightarrow \mathrm{A}\left(1 - \frac{P}{P_\infty}\right) + BP = 1$$

Se $P = 0$ então$A = 1$. Se$P = P_{\infty,}$ então $BP_\infty = 1$,o que implica que $B = \frac{1}{P_\infty}$.

Logo,

$$\frac{1}{P\left(1-\frac{P}{P_\infty}\right)} = \frac{1}{P} + \frac{\frac{1}{P_\infty}}{\left(1-\frac{P}{P_\infty}\right)}.$$

$$\int \frac{1}{P\left(1 - \frac{P}{P_\infty}\right)} dP = \int \frac{1}{P} dP + \int \frac{\frac{1}{P_\infty}}{\left(1 - \frac{P}{P_\infty}\right)} dP$$

$$= \int \frac{1}{P} dP + \frac{1}{P_\infty} \int \frac{1}{\left(1 - \frac{P}{P_\infty}\right)} dP = \ln|P| - \ln\left|1 - \frac{P}{P_\infty}\right|$$

Assim, em (19), obtemos

$$ln\left|\frac{P(t)}{1-\frac{P(t)}{P_\infty}}\right| = rt + c \Rightarrow ln\left|\frac{P(t)P_\infty}{P_\infty - P(t)}\right| = rt + c \qquad (20)$$

Usando a condição inicial, $P(0) = P_0$, obtemos o valor da constante de integração

$$c = \ ln\left|\frac{P_0}{1-\frac{P_0}{P_\infty}}\right| = ln\left|\frac{P_0 P_\infty}{P_\infty - P_0}\right|.$$

Substituindo em (20), temos

$$ln\left|\frac{P(P_\infty - P_0)}{P_0(P_\infty - P)}\right| = rt.$$

Aplicando exponencial com base e, obtemos ainda que

$$\frac{P}{P_\infty - P} = \frac{P_0}{P_\infty - P_0}e^{rt}.$$

Explicitando $P(t)$, temos

$$P(t) = \frac{P_\infty}{\left(\frac{P_\infty}{P_0}-1\right)e^{-rt}+1} = \frac{P_\infty P_0}{(P_\infty - P_0)e^{-rt}+P_0}. \qquad (21)$$

A expressão da fórmula (21), é conhecida como **curva (ou equação) logística**, a qual utilizaremos em nosso problema com arbovirose.

7. MODELOS COMPORTAMENTAIS

Os modelos matemáticos direcionados a área de epidemiologia, são tais que a sua população é dividida em compartimentos que refletem o estado no qual os indivíduos se encontram em relação ao desenvolvimento da doença. Como já vimos na seção 3.1, a população é dividida em três subpopulações, suscetíveis, infectados e removidos. O modelo a ser aplicado depende das características da doença. Estudamos quatro modelos comportamentais que são: SI, SIS, SIR e SIRS, apresentados a seguir.

7.1 Modelos SI

É o modelo mais simples dos modelos compartimentais. Este descreve a dinâmica da população em apenas duas subpopulações, os suscetíveis e os infectados. Este modelo considera que após o indivíduo contrair a doença, este não obterá a cura (RAMON, 2011). Deste modo, o indivíduo permanece infectado ao longo da sua vida, como é o caso aqui neste trabalho da microcefalia

- Suscetivel (S) indivíduos que podem contrair a doença;
- Infectados (I): indivíduos que irá permanecer com a doença.

7.2 Modelo SIS

Nesse caso o indivíduo passa um período de tempo infectado e, logo após, tornam-se novamente suscetível, já que a doença não confere imunidade.

- Suscetivel (S) indivíduos que podem contrair a doença;
- Infectados (I): indivíduos que irá permanecer com a doença.
- Sucetivel (S) indivíduos que podem contrair a doença;

7.3 Modelos SIR

O modelo epidemiológico SIR (Kermack e McKendrick, 1927) é um dos modelos mais utilizados para representação de doenças infecciosas. A partir deste modelo são retiradas as premissas básicas para a construção conceitual dos demais modelos. O modelo SIR é composto por equações diferenciais e utiliza a estratégia de compartimentos (Kermack e McKendrick, 1927).

Esse modelo epidemiológico analisa a disseminação de doença numa população. O modelo divide a população em três compartimentos, ou classes:

- Suscetíveis (S): indivíduos que podem contrair a doença;
- Infectados (I): indivíduos que podem transmitir a doença;
- Recuperados (R): indivíduos que se recuperaram da doença e não estão sujeitos a nova contaminação.

7.4 Modelos SIRS

Os modelos do tipo SIRS são uma alternativa aos modelos do tipo SIR. Foram introduzidos, em 1933, por Kermack e McKendrick para descrever infeções endémicas, sendo habitualmente utilizados para estudar a dinâmica da infeção da gripe e outro agentes causado por vírus. Este tipo de modelos são usados quando os indivíduos recuperados, após certo período de tempo, perdem a imunidade, voltando a ser suscetíveis. Assim, um indivíduo pode passar sucessivamente por estágios de suscetibilidade, infeção e recuperação, uma vez que a imunidade não é permanente pelo que, o indivíduo imune torna-se suscetível novamente.

- Suscetível (S):indivíduos que podem contrair a doença;
- Infectados (I): indivíduos que irá permanecer com a doença;
- Recuperados (R): indivíduos que se recuperaram da doença;
- Suscetível (S):indivíduos que podem contrair a doença.

8 RESULTADOS E DISCUSSÕES

8.1 Dinâmica da população do mosquito

Como já foi mencionado ao longo deste trabalho que não existe uma vacina específica para o vírus da Arbovirose, o mecanismo de controle fica restrito ao controle manual do vetor, seja ele feito pela eliminação direta do mosquito adulto ou mesmo pela redução dos seus criadouros.

A fêmea do Aedes aegypti deposita seus ovos em locais que contenham água parada para proporcionar o desenvolvimento da fase imatura do vetor. Dessa forma quando os criadouros são removidos do sistema é de se esperar que haja uma diminuição no tamanho populacional do vetor e, consequentemente, nos casos de arbovirose.

Para testar o impacto do controle mecânico na população de mosquitos adultos a diminuição da capacidade de suporte foi feita de forma periódica, a fim de abranger todos os três períodos do ano em termos de temperatura e precipitação. Também foi realizada uma simulação em que o controle foicontínuo ao longo de todo o ano aumentando ainda mais o esforço na eliminação dos criadouros através do agente de combate a edemias, e concientização da populção sobre o risco de uma maior contaminação .

Com a diminuição do número de criadouros e a redução no tamanho da população do mosquito é de se esperar que os índices de infecção por dengue na população humana se tornem baixos. Devido a isso é necessário considerar a presença da população humana, o que resulta em uma interação vetor-hospedeiro, a fim de avaliar como essa interação pode afetar o comportamento do sistema.

8.2 Modelo de epidemiacoma população humana

Analisaremos um modelo simplificado para propagação de uma arbovirose. Na construção do modelo que analisaremos, foram feitas as seguintes hipóteses (Zill 2003):

1) Uma fração x de uma determinada população compareceram ao hospital apresentando os sintomas de arbovirose, então uma fração $s = 1 - x$ não foi confirmado suspeita, conforme apresentaremos no mapa em apêndice.

2) Os membros desta população podem encontrar-se livremente (ao acaso).

3) A taxa de aumento de x é diretamente proporcional a x e s. Em consequência destas hipóteses, temos que o modelo é dado pela equação

$$\frac{dx}{dt} = rx(1 - x)(22)$$

onde *r* é uma constante positiva. Esta é uma equação diferencial ordinária separável, resolvendo-se a equação:

$$\frac{dx}{dt} = rx(1 - x)$$

$$rt = \int \frac{1}{x(1-x)} dx$$

$$rt = \int \frac{1}{x} + \int \frac{1}{1-x} dx$$

$$rt = logx - \log(1 - x) + c$$

$$rt = logx\left(\frac{x}{1-x}\right) + c$$

$$e^{rt} = \frac{x}{1-x} e^{c}$$

$$e^{rt} = \frac{x}{1-x} . e^{c} \Rightarrow ke^{rt} - ke^{rt}x + x$$

$$\Rightarrow x(1 + ke^{rt}) = ke^{rt}$$

$$\Rightarrow \mathrm{x} = \frac{ke^{rt}}{1+ke^{rt}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{k}\right)e^{-rt}+1}$$

Aplicando a condição inicial $x(0)$=x_0, obtemos

$$x = \frac{1}{\left(\frac{1}{x_0} - 1\right) e^{-rt} + 1}$$

$$x_0 = \frac{1}{\frac{1}{k} + 1} \Rightarrow \left(\frac{1}{k} + 1\right) x_0 = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{k} x_0 = 1 - x_0 \Rightarrow \frac{1}{k} = \frac{1}{x_0} - 1$$

Percebemos que mais cedo ou mais tarde cada pessoa vai contrair a doença, não importando quantas pessoas estavam infectadas inicialmente, a menos que a condição inicialx_0 seja igual a 0 (zero), pois neste caso teríamos $x=0$ para todo t e não considera, por exemplo, a possibilidade de que as pessoas infectadas possam ser isoladas ou que se recuperem da patologia.

Modelamos uma amostra de 1000 pessoas quereside em um dos bairro da periferia desta cidade aqui modelada. Então, x pessoas compareceram ao hospital municipal de uma cidade de pequeno porte no interior do Estado do Rio Grande do Norte para consulta médica no período correspondente entre maio à junho de 2018, dessas 1000 pessoas foram extraídos os resultados conforme mapa encontrado no apêndice deste trabalho.

8. 3 População humana

Para entender um processo infecto contagioso é imprescindivel poder compreender a dinâmica populacional dos sistemas imunológicos em ação contrao crecimento ou decrescimento populacionalP.F. Verhulst, preocupado com fórmulas matemáticas capazes de prever a população humana, estudou a fórmula conforme descrita no intem 6.2.2.

8.4 Uso da modelagem em casos de crescimento e decrescimento de arbovirose

Crescimento.

Numa população de um pequeno bairro em area vulnerável, x indivíduosestão infectados, portando quase os mesmos sintomas. Nesse bairro residem 1000 pessoas. Presumindo que a taxa na qual o vírus se espalha é proporcional não somente a quantidade x de individuos infectados, mas também a quantidade de pessoas não infectadas, determine o número de pessoas infectadas após 6 dias, sabendo que após 4 dias o número de infectados é x(4) = 50.É claro que para isto um vetor deverá picar um dos individuos já contaminados e em seguida picar outros sadios.

Solução:

Dados

1000 indivíduos

X(t) = quantidade de pessoas infectadas num instante t

X(0) = 1

X(4) = 50 (pessoas infectadas)

X(6) = ?

De acordo com a equação logística, vamos supor que ninguém se ausentou do bairro. Assim podemos desenvolver a seguinte equação:

$$\frac{dx}{dt} = kx(1000 - x) \Rightarrow \frac{dx}{dt} = x(1000k - kx)$$

Dessa maneira sendo a solução geral da equação acima, já que $x(0) = 1$, é dada por:

$$x(t) = \frac{1000k.1}{k.1 + (1000k - k.1)e^{-1000kt}} = \frac{1000k}{k + (1000k - k)e^{-1000kt}}$$

$$x(t) = \left[\frac{1000k}{k(1 + 999e^{-1000kt})}\right]$$

Assim, a função que representa a população infectada é:

$$x(t) = \frac{1000}{1 + 999e^{-1000kt}} \qquad (23)$$

Se em 4 dias, 50 pessoas foram infectadas, substituindo em (23), obtemos a constante$k$, a saber

$$x(4) = \frac{1000}{1 + 999e^{-1000k.4}} \Rightarrow 1000 = 50(1 + 999e^{-4000k})$$

$$\Rightarrow 20 = 1 + 999e^{-4000k} \Rightarrow 999e^{-4000k} = 19 \Rightarrow e^{-4000k} = \frac{19}{999}$$

Usando logaritmo na base e, temos que

$$-4000k = ln\left[\frac{19}{999}\right] \Rightarrow k = 0{,}0009906$$

Substituindo k na equação (19), vemos que

$$x(t) = \frac{1000}{1 + 999e^{-0.9906t}}$$

portanto, após 6 dias

$$x(6) = \frac{1000}{1 + 999e^{-0{,}9906.6}} = \frac{1000}{1 + 999e^{-5.9436}}$$

$$x(6) = 276$$

Dessa maneira conclui-se que segundo nosso modelo após 6 dias, 276 pessoas estavam infectadas com suspeitas de arbovirose. Observamos que este número corresponde exatamente aos dados coletados conforme o apêndice no que se refere ao **MAPA DE SUSPEITOS DE ARBOVIROSE**.

Decrescimento.

Devido ao controle mecânico (fumacê) em meados de junho, houve diminuição do tamanho populacional total de mosquitos, e isto teve reflexo positivo na população de humanos infectados, que diminuiu em relação ao comportamento de quando o controle não havia sido utilizado.

Vejamos no PVI como se dá este decaimento.

Solução:

Dados

36 pessoas infectadas após 15 dias do uso do fumacê

X(t) = quantidade de pessoas num instante t

X(0) = 1

X(3) = 10 (pessoas infectadas)

X(4) = ?

De acordo com a equação logística, vamos supor que ninguém se ausentou do bairro.

Assim podemos desenvolver a seguinte equação

$$\frac{dx}{dt} = kx(36 - x),\ x(0) = 1$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = x(36k - kx)$$

como $x(0) = 1$, então

$$x(t) = \frac{36k.1}{k+36k-k.e^{-36kt}} = \frac{36k}{k\left(1+35e^{-36kt}\right)} = \frac{36}{1+35e^{-36kt}}$$

usando agora a informação que x(3) = 10, determinamos k da seguinte forma

$$10 = \frac{36}{1 + 35e^{-108k}}$$

$$\Rightarrow 10+350e^{-108k} = 36 \Rightarrow e^{-108k} = \frac{26}{350} = \frac{13}{175}$$

usando logaritmo na base e encontramos

$$-108k = \ln\frac{13}{175} \Rightarrow k = 0.02$$

Assim,

$$x(t) = \frac{36}{1 + 35e^{-0.02t}}$$

portanto, após 4 dias

$$x(4) = \frac{36}{1 + 35e^{-0,02.4}} = \frac{36}{1 + 35e^{-0.08}} = 1$$

Dessa maneira conclui-se, segundo nosso modelo, que após 4 dias, havia apenas uma suspeita de pessoa infectada pela arbovirose. Comparando com o mapa no apêndice, podemos afirmar que nosso modelo corresponde com a realidade, já que, uma pessoa, poderia estar infectada e não ter ido ao hospital. Se fizermos as contas acima com $t = 5$, obteremos que nenhuma pessoa estava infectada.

Podemos notar ainda que, mesmo existindo um número baixo de Aedes aegypti infectados, a arbovirose ainda permanece na população humana. Isso é possível, poisfoi comprovado, por meio de estudos histológicos e de campo, que o mosquito Aedes aegypti alimenta-se de sangue por várias vezes durante um único ciclo gonotrófico, podendo uma única fêmea contaminar vários humanos em um mesmo ciclo (MORRISON; GETIS; SANTIAGO., 1997).

Mas a persistência do Aedes aegypti no sistema, mesmo que não infectado, faz com que a arbovirose possa reaparecer a qualquer momento caso alguma pessoa infectada seja introduzida, e assim a arbovirose pode voltar a surgir na população humana, já que o vetor do vírus ainda está presente.

9. CONCLUSÃO

Com esse trabalho, procuramos estudar as etapas da modelagem matemática, os conceitos a respeito das Equações Diferenciais Ordinárias e algumas aplicações das mesmas. Descrevemos aqui alguns passos que conduziram este estudo, bem como a modelagem da arbovirose num pequeno bairro de uma cidade de pequeno porte do interior do Rio Grande do Norte, que por motivos sigilosos não mencionamos o nome de tal cidade. Foi realizada uma invetigação bibliográfica sobre Modelagem Matemática, Equações DiferenciaisOrdinária e Epidemiologia. Ficou evidente que tanto a modelagem matemática como as equações diferenciais são de relevante importância para o entendimento de doenças epidêmicas. De modo especial, o uso das mesmas como auxilio para o entendimento dos problemas acerca das epidemias.

Com base nas equações diferenciais foi feita uma pesquisa de modelos matemáticos aplicados a epidemiologia. A pesquisa se baseou em modelos simples. Mas existe modelos mais sofisticados que no momento não utlizamos neste trabalho.

No processo de modelagem de um sistema proposto, para que o modelo seja uma boa representação da realidade, é de suma importância identificar as variáveis que caracterizam o sistema, assim como determinar as leis teóricas ou empíricas que o controlam. As condições iniciais fornecidas para a solução da equação diferencial também devem contemplar a realidade do sistema representado.

A escolha do modelo mais adequado para simular o surto epidémico depende das características da doença infecto-contagiosa. Deve-se levarem conta sobretudo a maior ou menor facilidade de transmissão e o período de contágio da doença. Estas duas características são modeladas através das taxas de contágio e de recuperação. Os seus valores são determinantes para a evolução do surto contagioso, pelo que se deve procurar obter estes dados com grande exatidão.

10. REFERÊNCIAS

Anderson, R. M. and May, R. M. (1992**). Infectious Diseases of Humans**: Dynamics and Control, Oxford: Oxford University Press.

BOYCE, W.; DIPRIMA, R. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno.** 9a Edição. Rio de Janeiro: LTC, 2012.
Hethcote, H. W. (2000). The mathematics of infectious diseases, SIAM Review 42(4): 599 - 653.

BRASIL. Ministério da Saúde. Secretaria de Vigilância em Saúde. Departamento de Vigilância Epidemiológica. **Diretrizes nacionais para prevenção e controle de epidemias de dengue**. Brasília, 2009.

BRASIL. Ministério da Saúde**. Boletim Epidemiológico** - Monitoramento dos casos de dengue, febre de chikungunya e febre pelo vírus Zika até a Semana Epidemiológica 21, 2017. Vol. 49. 2017.

BRASIL. Ministério da Saúde. **Boletim Epidemiológic**o - Monitoramento dos casos de dengue, febre de chikungunya e febre pelo vírus Zika até a Semana Epidemiológica 35, 2018 − Ministério da Saúde. 2018

BIEMBENGUT, M. S., HEIN, N., **Modelagem Matemática no Ensino**, São Paulo: CONTEXTO, (2007).

D'AMBROSIO, U. **Da Realidade à Ação: Reflexões sobre Educação Matemática**. 2.ed. São Paulo: Summus, 1988.

Erwin Kreyszig. **Matemática Superior para Engenharia**. 9ª Edição, ed.LTC, Rio de Janeiro - 2000

Hyun Mo YANG – **Epidemiologia Matemática** – 3 ed. editora. Unicamp- Campinas 2001.

Hethcote, Herbert W.: **The basic epidemiology models**: models, expressions for R0, parameter estimation, and applications. Mathematical Understanding of Infectious Disease Dynamics, Eds. Stefan Ma and Yingcun Xia. World Scientic (2007).

http://portalarquivos2.saude.gov.br/images/pdf/2016/janeiro/13/**Diretrizes-de-Estimulacao-Precoce**.pdf, acesso em 06/09/2018 às 23:40h

http://**mosquito.saude.es.gov.br/aedes-aedypti**(2015) SESA - SECRETARIA DE ESTADO DA SAÚDE (AEDES AEGYPTI)

http://www.**saude.rn.gov.br**/Conteudo.asp?TRAN=ITEM&TARG=179357&ACT=&PAGE=&PARM=&LBL=Materia, Acesso em 09 de agosto de 2018 as 23:12h.

Lopes N, Nozawa C, Linhares REC. **Características gerais e epidemiologia dos arbovírus emergentes no Brasil**. Rev Pan-Amaz Saude. 2016.

Ministério da Saúde. Secretaria de Vigilância em Saúde. **Departamento de Vigilância das Doenças Transmissíveis.** Protocolo de vigilância e resposta à ocorrência de microcefalia relacionada à infecção pelo vírus Zika. Brasília, 2015b.

MINISTÉRIO DA SAÚDE**. O uso racional de inseticidas no controle do Aedes aegypti e sua utilização oportuna em áreas com transmissão de dengue**. NOTA TÉCNICA N.ž 109/ 2010 CGPNCD/DEVEP/SVS/MS Brasília, 2010.

MORRISON, A, C.; GETIS, A.; SANTIAGO, M. **Exploratory space-time analysis of reported dengue cases during an outbreak in Florida**, Puerto Rico, 1991-1992. American Journal of Tropical Medicine and Hygiene. v. 57, p. 119-125, 1997.

Nagle, R. Kent – **Equaçõesdiferenciais**/R. Kent nagle, Edward B. Saff, Arthur David Snider, [tradução Daniel Vieira]. – 8. Ed.- São Paulo: Pearson; Education do Brasil, 2012.Titulo Original: Fundamentals of differential equations.

Zill, Dennis G. **Equações Diferênciais**, volume 1/ Dennis G. Zill, Michael R. Cullen; tradução Antonio zumpano, revisão técnica: Antonio Pertence Jr. – São Paulo: Pearson Makron Books, 2001. Titulo Original: differential Equations with Bounday-Value Problems – 3rd edition.

Zill, Dennis G**. Equações Diferênciais com aplicações em modelagem**vol.2/ Dennis G. Zill; tradução Cyro Carvalho Patarra; revisão técnica: Antonio Luiz Pereira. - - São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2003. Titulo Original: A first course in diferencial equations with modeling applications; ISBN 85-221-0314-3.

Série Estudos Dirigidos - Ciclo Saúde / CEDAPS – **Centro de Promoção da Saúde**/Fundação Vale – Rio de Janeiro: 2016.

RAMON, R., **Modelagem matemática aplicada a Epidemiologia**, Monografia de Especialização, Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC)(2011).

Rodney, Carlos Bassanezi. **Ensino e aprendizagem com modelagem matemática**: uma nova estratégia/Rodney, Carlos Bassanezi. 3.ed. – são Paulo: Contexto, 2006.

YANG, Hyun Mo Yanghttp. **Modelagem Matemática Aplicada à Saúde Pública**. 2002. Acesso www.comciencia.br/reportagens/framedest.htm.

APÊNDICE

MAPA DE SUSPEITOS DE ARBOVIROSE CID Nº A-90 À A-99

Dados coletados e extraídos de mapa mensal de pacientes de um hospital de pequeno porte do interior do estado do Rio Grande do Norte. Com enfoque em bairro da periferia com um população de 1000 habitantes.

Por motivos sigilosos não foi exposto o nome da cidade, do hospital, como também o nome dos respectivos pacientes.

Meses correspondente de maio a junho de 2018

mapa 1: Crescimento Exponêncial

DATA	NUMERO DE PACIENTES ATENDIDOS NO HOSPITAL
20/05/2018	1
21/05/2018	3
22/05/2018	30
23/05/2018	120
24/05/2018	180
25/05/2018	276

Devido a utilização do Carro fumacê que aconteceu no dia 17 de junho de 2018, notamos que houve um decrescimento quanto aos infectados dos moradores do bairro que foi encontrado um maior foco da Arbovirose, com isso é notório perceber que com a utilização do fumacê e as estiagem consegue erradicar o mosquito e com isso acabar com a epidemia durante este ano.

mapa 2. Decrescimento Exponêncial

DATA	NUMERO DE PACIENTES
18/06/2018	14
19/062018	12
20/06/2018	10
21/06/2018	0