UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE- UFCG

CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE- CES

UNIDADE ACADÊMICA DE FISICA E MATEMÁTICA- UAFM

LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

MARIA DE FÁTIMA CARVALHO COSTA

O ESTUDO DA LEI DE RESFRIAMENTO DE CORPOS ATRAVÉS DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS DE PRIMEIRA ORDEM

CUITÉ-PB

2018

MARIA DE FÁTIMA CARVALHO COSTA

O ESTUDO DA LEI DE RESFRIAMENTO DE CORPOS ATRAVÉS DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINARIAS DE PRIMEIRA ORDEM

Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática, Centro de Educação e Saúde da Universidade Federal de Campina Grande, *campus* Cuité, em cumprimento às exigências para obtenção de título de Licenciado em Matemática, sob a orientação da professora Dra. Glageane da Silva Souza e do Professor Me. Anselmo Ribeiro Lopes

CUITÉ-PB

2018

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA NA FONTE
Responsabilidade Rosana Amâncio Pereira – CRB 15 – 791

C837e Costa, Maria de Fátima Carvalho.

O estudo da lei de resfriamento de corpos através das equações diferenciais ordinárias de primeira ordem. / Maria de Fátima Carvalho Costa. – Cuité: CES, 2018.

38 fl.

Monografia (Curso de Licenciatura em Matemática) – Centro de Educação e Saúde / UFCG, 2018.

Orientadora: Glageane da Silva Souza.
Coorientador: Anselmo Ribeiro Lopes

1. Lei de resfriamento de corpos. 2. Modelagem. 3. equações diferenciais ordinárias. I. Título.

Biblioteca do CES - UFCG CDU 517.91

A Deus, que nos criou e foi criativo nesta tarefa. A minha mãe, mulher que me deu a vida e que batalhou dia após dia para que meu sonho se tornasse realidade

AGRADECIMENTO

Agradeço primeiramente a Deus, por ter sido fiel em todas as batalhas traçadas e nunca ter me feito desistir mesmo quando a “cruz” pareceu pesada e as pedras no caminho se tornaram grandes demais.

A minha mãe Aparecida Carvalho por ter me feito a mulher que sou hoje, por todas as noites em claro orando a Deus para que meus objetivos fossem alcançados, por ter sido mãe e pai quando precisei de um abraço e de um puxão de orelha. Obrigada por durante todos esses anos ter acordado cedo, trabalhado dois horários e mesmo assim não ter fraquejado diante das dificuldades e ter me mostrado que nada é mais forte do que o amor que sente por mim. Obrigada por me entender quando não estive ao seu lado quando a senhora precisou.

A minha irmã Maria Helena, por cada conselho, cada abraço, cada ligação na madrugada e por me apoiar no momento que mais precisei, obrigada por ter me mostrado o amor mais puro e verdadeiro.

Aos meus tios e tias por cada conselho dado e por sempre me incentivar a ir mais longe e correr atrás do meu sonho e a minha afilhada Maria Letícia por entender quando sua madrinha não se fez presente.

Aos meus avós Jarbas Carvalho e Capitulina Carvalho (In memoriam) por me amar e me acolher em sua casa quando meu mundo pareceu desmoronar, o apoio de vocês, o amor e carinho me fizeram mais forte para passar por tudo aquilo e chegar até aqui.

Aos meus irmãos de residência e de vida, Robson, Eliane, Elissandra, Adenilza, Heloyse, Karina e Emanuele por cada sorriso, cada conselho e cada lágrima compartilhada, vocês tornaram o meu tempo aqui mais tranquilo e mais alegre.

Agradeço em especial ao meu amigo e irmão de alma João Crispim por cada aula, cada aprendizado, pela companhia nos momentos bons e ruins. Obrigada por ter sido um amigo, um irmão e um professor, nunca vou esquecer das aulas de fundamentos e calculo e da força que você me deu quando eu pensei em desistir.

As minhas amigas e irmãs de alma Ivanielma, Paloma, Ariadna Fernanda, Jany e Kalline sem dúvidas vocês foram os melhores presentes que esses anos me trouxeram e sem vocês chegar até aqui seria mais difícil.

Aos meus professores que me acompanharam durante toda a jornada da graduação em especial Maria de Jesus, Luciano, Renato Cristiano, Glageane e Anselmo, vocês são meus exemplos e espero que um dia consiga ser para os meus alunos o que vocês foram para mim.

Aos meus amigos da UFCG e de vida Seu Vital e Jardel, por cada conselho, cada conversa, cada copo de café durante esses anos de graduação, obrigada por compartilharem comigo suas histórias de vida e me permitir compartilhar com vocês a minha história.

Aos "Paçoqueiros" Mônica, Nytyeska, Aldemir, Nathan, Nohara, Railson, Ygor, Luciene e Josivaldo por cada risada e cada lágrima que compartilhamos nesses anos de graduação.

A todos aqueles que sempre me apoiaram e me incentivaram para que eu conquistasse e realizasse meu sonho o meu muito obrigada.

“A persistência é o caminho do êxito.”

(Charles Chaplin)

SUMÁRIO

RESUMO

O presente trabalho está centrado em um estudo sobre a Lei de resfriamento de corpos proposta por Isaac Newton e como ela pode ser aplicada dentro do universo das Equações Diferenciais Ordinárias (EDO). O presente estudo tem como objetivo expor uma breve história a respeito das equações diferenciais e também do físico e matemático Isaac Newton, seguido da definição e do estudo das equações diferenciais de primeira ordem e uma explicação sobre o que é modelagem matemática. Este trabalho traz ainda algumas modelagens matemática que podem ser solucionadas através das equações diferenciais ordinárias de primeira ordem em situações comuns que acontecem no dia-a-dia de qualquer estudante, e assim trazendo a EDO para realidade vivida no cotidiano.

Palavras-chave: Lei de Resfriamento de Corpos. Modelagem. Equação Diferencial Ordinária

ABSTRACT

The present work is centered in a study on the Law of resfriamento of bodies proposed by Isaac Newton and like her it can be applied inside of the universe of the Ordinary Differential Equations (EDO). The present study has as objective to expose an abbreviation history regarding the differential equations and also of the physicist and mathematical Isaac Newton, following by the definition and of the study of the equations differential of first order and an explanation on what is mathematical modelling. This work brings still some modelling mathematics that you/they can be solved through the ordinary differential equations of first order in common situations that they happen in the day by day of any student, and like this bringing EDO for reality lived in the daily

Word-key: Law of Resfriamento of Bodies. Modelling. Ordinary Differential equation.

1. INTRODUÇÃO

O estudo das equações diferenciais ordinárias é de grande importância para as diversas áreas do conhecimento humano, como matemática, física, engenharia, entre outras. Uma das principais razões para seu estudo é a maneira como a mesma se adequa em diversos conceitos, desde sistema mais simples até sistemas mais complexos, poderemos chegar ao resultado real e correto dos mesmo quando utilizamos e manipulamos as equações de maneira adequada utilizando as equações e métodos que as mesmas envolvem.

O estudo das equações nos mostra como podemos realizar a modelagem matemática que tem o objetivo de encontrar uma taxa de variação com o tempo de grandeza que caracterizam o problema. A modelagem de um conjunto de equações vai nos fornece um resultado que se aproxima do problema real, o que é de grande importância para nos ajudar a compreender os problemas reais em diversas áreas do conhecimento.

Uma equação diferencial é uma equação que envolve derivadas. Ou seja, chamamos de equações diferenciais (E.D.) uma equação que tenha em sua estrutura derivadas de uma ou mais variáveis dependentes relacionadas a variáveis independentes. Para Bronson e Costa (2008) as equações diferenciais ordinárias conhecidas simplesmente por EDO's de primeira ordem são da forma $F(x,y,y')=0$, mas geralmente por meio simples manipulação algébrica é possível reescrever na forma de uma ou mais equações $y'=f(x,y)$.

O estudo das equações diferenciais está fortemente ligado ao desenvolvimento da própria matemática. As equações diferenciais surgem com o estudo do cálculo por Isaac Newton e Gottfried W. Leibniz no século XVII. Newton teve pouca atuação na área de equações diferenciais, mas ao dar início ao surgimento do cálculo e um esclarecimento aos princípios básicos da mecânica acabou dando a base para a aplicação das equações diferenciais no século XVIII especialmente por Euler.

Neste sentido, o trabalho tem como objetivo principal fazer um estudo sobre as equações diferenciais ordinárias, classificando-as em relação a ordem, tipo e linearidade e ainda apresentar uma aplicação da mesma em uma situação de nosso dia a dia.

Assim, abordaremos a teoria das equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, discutindo as propriedades e aspectos imprescindíveis. No que diz respeito as equações de primeira ordem nosso estudo apresentará as equações lineares e ainda as técnicas para obtenção de solução, e aplicação dessa teoria na lei de resfriamento de corpos.

2. CAPITULO II- PRELIMINARES

2.1. Contexto Histórico

Segundo Provenzano (2005) [...] as equações diferenciais são o coração da análise e do cálculo, dois dos mais importantes ramos da matemática nos últimos 300 anos. Diante disso é notório que este seja um dos ramos norteadores em diversos cursos.

Um dos principais contribuintes para o surgimento das equações diferenciais ordinárias é Leonhard Euler, sendo o mesmo o responsável por começar e terminar o surgimento da área, podemos ainda ressaltar outros matemáticos como Newton, Leibniz, Jakob Bernoulli, Daniel Bernoulli, Johann Bernoulli, Cauchy, Lagrange, Laplace, Gauss e Lipschitz, ambos contribuíram para que os resultados que são conhecido por nós se concretizassem de maneira correta e pudesse ser utilizada de diversas maneiras.

Segundo Boyer (1996) a resolução de equações diferenciais ordinárias num certo sentido tinha começado assim que a relação inversa entre a diferenciação e a integração tinha sido percebida. O estudo das equações diferenciais teve início com a invenção do cálculo, feita por Fermat, Newton, e Leibniz, foram estes que chegaram a notação da derivada e esta logo surgiu nas equações, dando assim o início do surgimento do nosso estudo. Porém, para encontrar as soluções destas equações não eram simples e o que até então tinha sido descoberto não lhes davam o suporte necessário para soluciona-las. Foi através disto que a integral ofereceu uma ajuda direta quando as equações estavam em forma de variáveis separadas. O método da separação de variáveis foi desenvolvido por Jakob Bernoulli e generalizado por Leibniz e através deles no início do século XVII nos permite um estudo das teorias e técnicas para os próximos estudiosos da época. Jakob Bernoulli estudou o movimento planetário através das equações diferenciais, utilizando os princípios que foram desenvolvidos por Newton, foi neste momento que dá-se o desenvolvimento da catenária e do uso das coordenadas polares.

Mesmo com diversos nomes envolvidos nos estudos das equações, Euler foi o que mais se destacou, pois, o mesmo encontrou e desenvolveu métodos e funções que eram a chave para compreender o estudo das equações diferenciais. No ano de 1739, ele desenvolveu o método de variação de parâmetros.

Após os resultados desenvolvido por Euler, Laplace estudou a estabilidade do sistema solar e contribuiu para melhorar o entendimento de integrais e em 1799 introduziu as ideias de um laplaciano de uma função. Em 1876 foi desenvolvido Lipschitz teoremas que garantiam a solução para as equações de primeira ordem. Após estudos realizados, as equações não lineares eram agora o grande obstáculo dos matemáticos, foi aí que Poincaré foi capaz de integrá-las pelo uso de funções Fuchsianas, ele observou que se ao invés de fazer substituições lineares com coeficientes reais, fosse utilizado coeficientes imaginários então seria obtido os grupos Kleinianos. Segundo Cajori (2007) a extensão de grupos não lineares surgiu com L. Fuchs e H.Poincaré. Provoca muito interesse a determinação de quais equações diferenciais lineares podem ser integradas por funções mais simples, tais como algébricas, elíptica ou abeliana. Após isso diversos estudos seguiram até que chegássemos ao que temos hoje sobre as equações diferenciais ordinárias.

Um dos mais importantes matemáticos para realização deste trabalho é Isaac Newton, o mesmo nasceu em 1643 na cidade de Londres e faleceu em 1727, era cientista, químico, físico, mecânico e matemático, "durante sua trajetória, ele descobriu várias leis da física, entre elas, a lei da gravidade", o binômio de Newton, a lei de resfriamento. "Newton sempre esteve envolvido em questões filosóficas, religiosas, teológicas e também com a alquimia, suas obras mostraram claramente seu conhecimento a respeito destes assuntos", como o Método das Fluxões, Princípios Matemáticos da Filosofia Natural, Óptica, Aritmética Universal. (SUAPESQUISA.COM, s.d.).

A Lei de Resfriamento de Newton é uma aplicação em equações diferenciais utilizada para resolver problemas relacionados à variação de temperatura, assim como afirma Alitolif (2011),

> Esta forma de aplicação é ligada diretamente a física, mas cálculos voltados para as leis de temperatura são de grande utilidade em várias outras ciências, alguns exemplos são os utilizados nas engenharias, na variação de temperatura de uma simples xícara de café durante o seu resfriamento ou no derretimento de uma bola de sorvete, ou ainda no processo de resfriamento de um bolo, entre outras aplicabilidades deste modelo. (ALITOLIF, 2011, p.18).

Com isso, a Lei de resfriamento de Newton é um dos principais métodos de aplicação para matemáticos e físicos que desejam realizar estudos em diferentes áreas, entre elas a Equação Diferencial Ordinária, que nos abre um leque de opções de aplicações e modelagens matemáticas.

2.2. Equação Diferencial de primeira ordem.

A equação diferencial ordinária é uma relação entre uma função de única variável independente e suas derivadas, além da própria variável independente. Definimos a ordem de uma EDO como aquela mais alta derivada que ocorre na equação. Uma equação de primeira ordem é da relação (1.1)

$$F(x, y, y') = 0 \qquad (1.1)$$

Onde x, é a variável independente, $y = y(x)$, é a função incógnita, $y' = \frac{dy}{dx}$ sua derivada e F é a função dada de três variáveis, e não necessariamente está definida para todos os valores de seus argumentos, assim para uma característica completa de uma EDO (1.1) é exigido uma especificação do domínio de definição Ω, da função $F(x, y, y') = 0$. A relação (1.1) conecta três variáveis $x, y \; e \; y'$. A equação descrita acima ainda pode ser colocada na forma explícita ou padrão (1.2)

$$y' = f(x, y) \qquad (1.2)$$

A forma explícita (1.2) é mais adequada para a formulação de uma teoria geral. O domínio da definição da forma explícita está coberto por curvas, portanto a EDO (1.2) caracteriza-se como um conjunto de curvas e para estuda-las temos que considerar condições. Essas condições e equações são chamadas de Problema de Valor Inicial (PVI).

2.1.3. Problemas de Valor Inicial (PVI)

Para resolvermos uma equação diferencial de primeira ordem, que esteja sujeita a uma condição inicial, utilizamos o método do PVI, no qual nos são dadas a condição inicial, um número no intervalo e um número real arbitrário. A EDO no PVI é denominado de EDO linear de primeira ordem, as EDO’s que não possuem a forma descrita abaixo são consideradas não-lineares (1.3)

$$\begin{cases} y' + P(x)y = Q(x), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad (1.3)$$

2.1.4. Teorema 1: Existência de uma única solução

“Seja R uma região retangular no plano xy definida por $a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$, que contém o ponto (x_0, y_0) em seu interior. Se $f(x, y) e \; \partial f / \partial y$ são contínuas em R, então existe um intervalo I centrado em x_0 e uma única função $y(x)$ definida em I que satisfaz o problema de valor inicial.” (1.3)

O teorema 1, possui critérios de continuidade de $f(x,y)$ e $\partial f/\partial y$ que são relativamente fáceis de ser verificado.

Exemplo 1: (SANTOS, 2011) A equação

$$\frac{dy}{dt} = e^{3t},$$

pode ser resolvida por integração direta obtendo

$$y(t) = \int e^{3t}\,dt = \frac{e^{3t}}{3} + c,$$

que é a solução geral da equação diferencial dada

Para encontramos a solução do PVI:

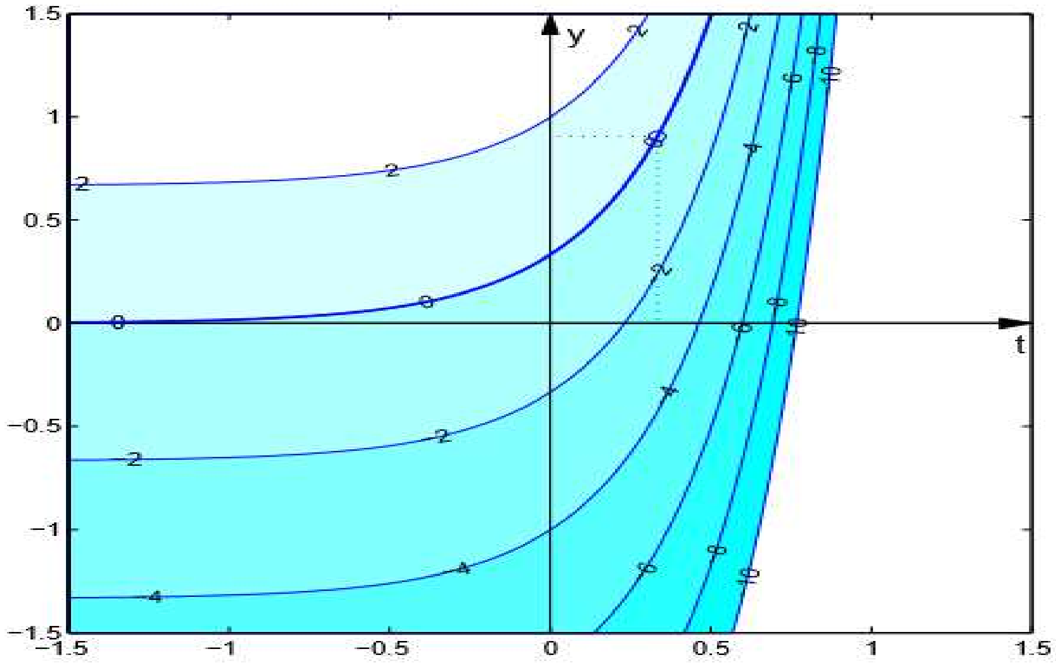
$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = e^{3t} \\ y\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{e}{3} \end{cases}$$

Substituímos $t = \frac{1}{3}$ e $y = \frac{e}{3}$ na solução geral encontrada obtendo c=0. Assim a solução do PVI é:

$$y = \frac{e^{3t}}{3}$$

Válida para $-\infty < t < \infty$ que é o maior intervalo em que a solução e sua derivada estão definidas.

Figura 1: Soluções da equação e do PVI do Exemplo



Fonte: imagem disponível em (SANTOS,2010)

2.1.5. Equação Separável

As equações separáveis são aquelas nas quais podemos separar de acordo com suas constantes de derivação e após isto integrá-las de acordo com cada uma delas. Esta equação se apresenta da forma (1.4)

$$g(y)\frac{dy}{dx} = f(x). \qquad (1.4)$$

Seja

$$h(y) = \int g(y)dy.$$

Então

$$\frac{dh}{dy} = g(y).$$

Substituindo-se g(y) por $\frac{dh}{dy}$ na equação (1.4) obtemos.

$$\frac{dh}{dy}\frac{dy}{dx} = f(x). \qquad (1.5)$$

Utilizando a regra a cadeia temos,

$$\frac{d}{dx}h\big(y(x)\big) = \frac{dh}{dy}\frac{dy}{dx},$$

o que implica que (1.5) pode ser escrita como (1.6),

$$\frac{d}{dx}h\big(y(x)\big) = f(x) \qquad (1.6)$$

A equação (1.6) é do tipo

$$\frac{dY}{dx} = f(x)$$

Em que, Y (x) = h(y(x). Assim, integrando (1.6) em ambos os lados temos:

$$h\big(y(x)\big) = \int f(x)dx + c$$

Exemplo 2: (SANTOS, 2011) Vamos, agora, encontrar a solução geral da equação diferencial

$$2y\frac{dy}{dx} = -4x \; ou \; 2yy' = -4x$$

Solução:

Para solucionarmos esse tipo de equação devemos primeiro integrar ambos os lados em relação a x, deste modo temos:

$$\int 2yy'dx = -\int 4xdx + c$$

Substituindo $y'dx = dy$, temos:

$$\int 2ydy = -\int 4xdx + c$$

Assim, a solução desejada é do tipo:

$$y^2 = -2x^2 + c$$

2.1.6. Equações homogêneas

Uma função $f = f(x, y)$ é denominada homogênea de grau k se, para todo t ∈ R, vale a relação (1.7)

$$f(tx, ty) = t^k f(x, y) \; (1.7)$$

Uma função $f = (x, y)$ é homogênea de grau 0 se, para todo t ∈ R, vale relação $f(tx, ty) = f(x, y)$.

Uma equação diferencial de primeira ordem na forma normal $y' = f(x, y)$ é dita homogênea se $f = f(x, y)$ é uma função homogênea de grau zero.

Exemplos de equações diferenciais homogêneas:

1. $y' = \frac{x^2+y^2}{xy}$;
2. $y' = \frac{x^2}{y^2}$;
3. $y' = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$.

Pode-se resolver uma equação diferencial homogênea, fazendo a transformação da mesma em uma equação de variáveis separáveis com a substituição $y(x) = xv(x)$ ou de uma forma mais simples $y = vx$, onde $v = v(x)$ é uma nova função incógnita. Assim, $dy = xdv + vdx$ é uma equação da forma $y' = f(x, y)$ que pode ser transformada em uma equação separável da forma (1.8)

$$x\frac{dv}{dx} + v = f(x, xv) \quad (1.8)$$

e após as simplificações obtemos uma equação com variáveis separáveis.

Exemplo 3: (SODRÉ, 2003) Para resolver a equação diferencial homogênea

$$y' = \frac{x^2 + y^2}{xy}$$

Tomamos $y = xv, y' = xv' + v$ e substituímos na equação homogênea para obter:

$$xv' + v = \frac{1 + v^2}{v}$$

Separando a fração, obtemos

$$xv' + v = \frac{1}{v} + v$$

e cancelando os termos iguais, obtemos

$$xv' = \frac{1}{v}$$

Como $v'(x) = \frac{dv}{dx}$, podemos escrever

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{1}{v}$$

assim,

$$vdv = \frac{dx}{x}$$

Integrando os dois lados da equação, temos

$$v^2 = 2\ln(x) + C$$

assim temos a relação

$$y^2 = x^2[2\ln(x) + C]$$

2.1.7. Equação exata

Uma expressão diferencial (1.9)

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy \qquad (1.9)$$

é uma diferencial exata em uma região R do plano xy se ela corresponde à diferencial total de alguma função $f(x,y)$. Uma equação diferencial da forma (1.10)

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \quad (1.10)$$

é chamada de uma equação exata se a expressão do lado esquerdo da igualdade é uma diferencial exata.

Exemplo 4: (SODRÉ, 2003) Para resolver a EDO $(3x^2 + 2y)dx + (2x + 2y)dy = 0$, devemos mostrar que esta EDO é exata.

Solução:

Para resolvermos esta equação devemos primeiro fazer a identificação dos parâmetros:

$$M(x,y) = 3x^2 + 2y \; e \; N(x,y) = 2x + 2y$$

e mostramos que

$M_y = 2 = N_x$,

para garantir que existe $F = F(x, y)$tal que

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 + 2y \ (I)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2x + 2y \ (II)$$

Integrando (I) em relação a x:

$$F(x, y) = \int (3x^2 + 2y)dx = x^3 + 2xy + g(y) \ (*)$$

Temos que $g = g(y)$ depende apenas de y, derivando (*) em relação a y

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^3 + 2xy) + g'(y) = 2x + g'(y)(**)$$

Igualando (**) a (II)

$$2x + g'(y) = 2x + 2y$$

Assim, concluímos que o valor de $g'(y)$ é:

$$g'(y) = 2y$$

Com isso, segue que:

$$g(y) = y^2 + K$$

Assim,

$$F(x, y) = x^3 + 2xy + y^2 + K.$$

e a solução da EDO exata será dada por

$$x^3 + 2xy + y^2 = C$$

2.1.8. Teorema 2. Critério para uma diferencial exata

Sejam $M(x, y)\ e\ N(x, y)$ funções contínuas com derivadas parciais continuas em uma região retangular R definida por $a < x < b, c < y < d$. Então uma condição necessária e suficiente para que (1.11)

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy \qquad (1.11)$$

seja diferencial exata é (1.12)

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \ (1.12)$$

2.1.9. Fator de Integração

Em alguns casos nos deparamos com equações não exatas e podemos converte-las para equações exatas, utilizando o método do fator integrante, que consiste em multiplicar a equação por $\mu(x, y)$, assim temos que nossa equação exata resultante é da forma (1.13):

$$\mu M(x, y)dx + \mu N(x, y)dy = 0 \ (1.13)$$

Para encontramos o valor de μ, façamos:

$$\mu(t) = e^{\int p(t)dt}$$

Exemplo 5: (SANTOS, 2011) Considere a equação:

$$\frac{dy}{dt} + \frac{2}{t}y = t.$$

O fator integrante é

$$\mu(t) = e^{\int \frac{2}{t}dt} = e^{2\ln(t)} = e^{\ln(t^2)} = t^2.$$

Agora, multiplicando a equação por μ(t), vamos obter:

$$t^2 \frac{dy}{dt} + 2ty = t^3.$$

O lado esquerdo é igual a derivada do produto $t^2y(t)$. Logo a equação acima é equivalente a:

$$\frac{d}{dt}\left(t^2y(t)\right) = t^3$$

Integrando ambos os lados da equação temos:

$$t^2(y(t) = \frac{t^4}{4} + C$$

Encontrando o valor de $y(t)$,

$$y(t) = \frac{t^2}{4} + \frac{C}{t^2}$$

2.1.10. Equação linear

Uma equação é dita linear quando todos os coeficientes são funções de x somente e que y e todas as suas derivadas são elevadas à primeira potência. Agora quando $n = 1$, obtemos uma equação linear de primeira ordem. Diante disto temos que uma equação linear é da forma (1.13)

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x), \quad (1.13)$$

onde $a_1(x)$, $a_0(x)$ e $g(x)$ dependem somente da variável independente x e não de y.

Exemplo: (NAGLE et al., 2012) Encontre a solução geral para

$$\frac{1}{x}\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x^2}y = xcos(x), x > 0$$

Solução:

Para colocar essa equação linear na forma padrão, multiplicamos por “x” para obtermos

(*) $\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x}y = x^2\cos(x)$

Aqui, P(x)=$-\frac{2}{x}$, de modo que

$$\int P(x) = \int -\frac{2}{x}dx = -2\ln|x|.$$

Assim, um fator integrante é

$$\mu(x) = e^{-2ln|x|} = e^{\ln(x^{-2})} = x^{-2}$$

Multiplicando (*) por $\mu(x)$, obtemos

$$x^{-2}\frac{dy}{dx} - 2x^{-3}y = \cos(x)$$

$$\frac{dy}{dx}(x^{-2}y) = \cos(x)$$

Agora, integramos os dois lados e resolvemos para y, para encontrarmos

$$x^{-2}y = \int \cos(x)\, dx = sen(x) + c$$

$$y = x^2 sen(x) + Cx^2$$

2.2. Modelagem

Na perspectiva presenteada por D'Ambrósio (1986) "Modelagem é um processo muito rico de encarar situações e culmina com a solução efetiva do problema real e não com a simples resolução formal de um problema artificial" (p. 11). Diante disso observamos que D'Ambrósio visa promover o estudo da matemática através de problemas do dia a dia e trabalhar como modelos reais e que sejam de fácil entendimento do aluno em sala de aula, nesse contexto a modelagem matemática permite que o professor esteja sempre em busca de algo que seja comum aos alunos.

Alguns autores defendem a Modelagem no âmbito da educação. Almeida e Dias (2004), por exemplo, defendem a metodologia como uma boa alternativa de tirar o aluno da zona de conforto e despertar a atenção do mesmo proporcionando a criação de um conhecimento mais crítico em relação aos conteúdos matemáticos; Burak (1992, p. 62) diz que Modelagem constitui-se de um "conjunto de procedimentos cujo objetivo é construir um paralelo para tentar explicar matematicamente, os fenômenos presentes no cotidiano do ser humano, ajudando-o a fazer predições e tomar decisões" De acordo com Biembengut e Hein (2003, p. 16) "A Modelagem Matemática consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real".

A Modelagem Matemática pode ser entendida como a:

> [...] oportunidade para os alunos indagarem situações por meio da Matemática sem procedimentos fixados previamente e com possibilidades diversas de encaminhamento. Os conceitos e ideias matemáticas exploradas dependem do encaminhamento que só se sabe à medida que os alunos desenvolvem a atividade. (BARBOSA, 2001, p. 05).

Percebemos com isso que a situação problema deve ser de acordo com o cotidiano e assim fica mais fácil a compreensão. Neste sentido, temos que trabalhar situações práticas para entender os estudos das equações diferenciais é algo que pode trazer resultados bastante positivos para as diversas áreas de ensino e estudo. No contexto da Lei de resfriamento de corpos proposto por Newton, fazer uso de aplicações reais facilitam a compreensão do método.

3. CAPÍTULO III- Lei de resfriamento de corpos

No ano de 1701, quando tinha quase 60 anos, Newton publicou anonimamente um artigo intitulado “Scala Graduum Caloris”, onde descreve um método para medir temperaturas de até 1000 °C, algo impossível aos termômetros da época (SOUZA, 2007). O método era fundamentado no que atualmente recebeu o nome de “lei do resfriamento de Newton” que afirma que “a taxa de variação temporal da temperatura de um corpo é proporcional à diferença de temperatura entre o corpo e o meio circundante” (BRONSON E COSTA, 2008, p.64).

Para compreendermos melhor a fórmula criada por Newton precisamos conhecer um fenômeno conhecido como: Equilíbrio térmico, sendo este um dos principais conceitos da termodinâmica. Assim, quando um corpo com temperatura T é exposto em um ambiente com temperatura T_0 e levando em consideração que $T \neq T_0$ o corpo irá entrar em equilíbrio térmico com o ambiente, em outras palavras o calor será transferido de onde a temperatura é maior para uma temperatura menor.

Newton observou que um corpo quente tem sua temperatura diminuída com o passar do tempo e não perdendo contato pelo calor, assim pelo princípio de conservação de energia que o equilíbrio térmico como ambiente só é possível porque o calor que é retirado do corpo é levado pelo vento. Diante disto, é possível verificar que algumas variáveis nas quais as taxas de resfriamento dependem são:

- A diferença entre a temperatura do corpo e do ambiente
- A superfície ao qual o corpo está sendo exposto
- O calor especifico
- As condições do ambiente
- E o tempo de contato entre o corpo e o meio externo

As variáveis citadas acima permitiram a Newton a representação de uma Equação Diferencial que se estabeleceu da seguinte maneira (1.14)

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a) \qquad (1.14)$$

Onde, T é a temperatura do corpo no instante t dado em graus Celsius, t o tempo de contato entre o corpo e o ambiente, sendo este dado em segundos, T_a é a temperatura do ambiente dada em Celsius e k a constante de proporcionalidade que irá depender da superfície, do material e do calor específico que o corpo é constituído.

Ao analisarmos a equação, observamos que a constante k aparece com o sinal de negativo, isto sugere que existe um processo de resfriamento, ou seja, a temperatura do corpo diminui com o passar do tempo. Sabemos que a lei de resfriamento de um corpo trata-se de uma EDO separável, assim ela se representa da seguinte forma (1.15):

$$\frac{1}{T - T_a}\frac{dT}{dt} = -k \; (1.15)$$

Integrando (1.15) em relação ao tempo, temos (1.16):

$$\ln(T - T_a) = -kt + k_0 \; (1.16)$$

Assim, aplicando a função exponencial em (1.16)

$$T - T_a = e^{-kt}e^{k0} \; (1.17)$$

E, substituindo e^{k0} pela constante C, assim, a solução da EDO na equação (1.14), será definida na equação (1.18)

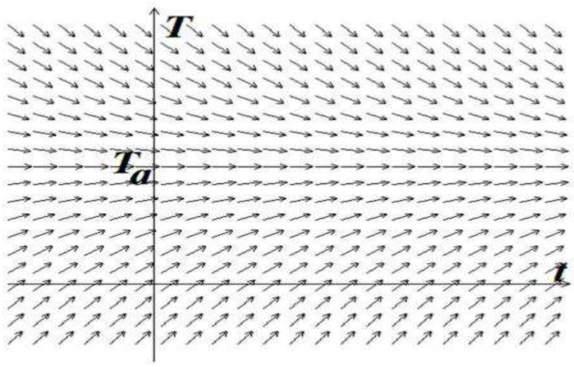
$$T(t) = T_a + Ce^{-kt} \quad (1.18)$$

Considerando que a temperatura inicial do corpo T(0)= T_0. A equação (1.18) ficará do tipo:

$$T(t) = T_a + (T_0 - T_a)e^{-kt} \quad (1.19)$$

A equação (1.19) é a solução geral da Equação Diferencial Ordinária (1.15). Assim, se k>0 a solução (1.19) converge para $T_a. Se\ k < 0$ então (1.19) diverge.

Figura 1: Campo de direções da EDO para k > 0.



Fonte: imagem disponível no artigo (BARIVIERA, et al, 2017)

3.1. Aplicações

3.1.1. Perícia criminal

Segundo (SOUZA, 2011, p.14) A perícia criminal no Brasil surgiu na época da monarquia no ano de 1832, quando o código de processo criminal foi criado no país.

O perito, aparece como uma pessoa que fica responsável por analisar fatos sobre um determinado acontecimento, a profissão existe a um tempo, porém o tempo estimado como marco para polícia criminalística brasileira é 1832. A função do perito criminal é checar local, realizar busca e fazer um reconhecimento no ambiente para encontrar soluções para os casos que estão sendo investigados. Quando o profissional termina todos procedimentos corretos é hora de ser feito o laudo pericial, este laudo deverá constar no inquérito de determinado crime e deve ser composto por imagens do corpo, do local e de outras evidencias. Como é dividido em etapas, o laudo deve contar com a chamada qualificação da vítima, onde será revelada as condições que foram encontradas, o local e a dimensão do ferimento que a levaram a óbito.

Outras etapas ainda são encontradas dentro do laudo pericial como "Realidade da morte", neste momento será explicado a causa da morte, "identificação" que informa em qual estágio da vida a vítima se encontrava o sexo do cadáver, a cor, biótipo normolíneo (altura), estado de nutrição eutrófico do indivíduo, compleição, tipo de cabelos, cor dos olhos, e por fim as características dos dentes. Também consta no laudo a chamada "vestes", que relata com detalhes com quais roupas a vítima foi encontrada e quais a características das mesmas. Outra parte importante é o "exame externo" que visa esclarecer quais as lesões sofridas pela vítima e por qual objeto elas foram provocadas.

Diante do que foi exposto, podemos observar que a medicina legal por meio do perito oferece dados necessários para que haja uma aplicação real da lei de resfriamento proposta por Newton, anteriormente abordada, uma vez que a mesma necessita da temperatura do corpo no momento em que ele foi encontrado e do horário exato no qual o médico fez essa medição. Desta forma, observamos que a Equação Diferencial Ordinária de maneira separável é uma ferramenta que pode ser utilizada na solução de crimes. Nesse contexto, temos como exemplo prático e corriqueiro da aplicação da EDO, no âmbito da perícia criminal a solução de crime, isto ocorre pois através de cálculos feitos com os dados colhidos conseguimos não apenas descobrir a hora da morte, mas também quem será o culpado. Por exemplo, em uma cidade X, ocorreu um assassinato durante a madrugada, segundo alguns moradores, foram ouvidos tiros em dois horários diferentes, sendo o primeiro as 02h:30 min da madrugada e o outro disparo as 04h:40 min, o corpo só foi encontrado pelos policiais as 07 h da manhã, como polícia poderá determinar a hora da morte? Para que esse crime seja solucionado o perito deverá colher duas informações necessárias, a temperatura do corpo no momento em que ele foi encontrado e a temperatura ambiente, com esses dados em mãos o perito através de uma EDO de primeira ordem conseguirá determinar o horário exato em que houve o homicídio.

Problema proposto: (SILVA, 2010) O corpo de uma vítima de assassinato foi encontrado às 22 horas. Às 22h e 30min o perito criminal chegou e imediatamente tomou a temperatura do cadáver, que era de 32,5°C. Uma hora mais tarde, tomou a temperatura outra vez e encontrou 31,5°C. A temperatura do ambiente foi mantida constante a 16,5°C. Devemos admitir também que a temperatura normal de uma pessoa viva seja, aproximadamente, de 36,5°C. É possível determinar a hora aproximada em que essa pessoa veio a óbito?

*Os valores atribuídos neste exemplo são meramente ilustrativos.

Tabela 1: Horário de medições e temperatura do corpo

Horário das medições	Temperatura do Corpo
Hora de óbito?	T = 36,5ºC
22h30min	T = 32,5ºC
23h30min	T = 31,5ºC

Fonte: (SILVA, 2010)

Tomamos os seguintes parâmetros:

T- A temperatura do corpo

T_a- A temperatura do ambiente

Tomaremos como tempo inicial a primeira medição da temperatura $T_0 = 32{,}5^{\circ}$quando t=0, então,

$T_a = 16{,}5^{\circ}$

$T(0) = 32{,}5^{\circ}$(tempo em que o perito efetuou a 1ª medição da temperatura)

$T(1) = 31{,}5^{\circ}$(tempo em que o perito efetuou a 2ª medição da temperatura)

Como vimos, a função que determina a temperatura aproximada de um corpo em relação ao tempo é dada por:

$$T(t) = T_a + (T_0 - T_a)e^{-kt},$$

$$T(t) = 16{,}5 + (32{,}5 - 16{,}5)e^{-kt},$$

$$T(t) = 16{,}5 + 16.e^{-kt}.$$

Assim, no instante em que t=l, temos

$$T(1) = 16{,}5 + 16.e^{-kt},$$

$$31{,}5 = 16{,}5 + 16.e^{-kt},$$

$$e^{-k} = \frac{15}{16}.$$

Resolvendo esta equação exponencial, temos que,

$$lne^{-k} = \ln(\frac{15}{16}),$$

$$-k.\ln e = \ln\left(\frac{15}{16}\right),$$

$$-k.1 = \ln\left(\frac{15}{16}\right),$$

$$k = 0{,}0645385.$$

E dessa forma a função que determina a temperatura do corpo em qualquer instante é

$$T(t) = 16{,}5 + 16.e^{-0{,}0645385\mathrm{t}}.$$

Assim, para determinarmos o horário em que o indivíduo veio a óbito, substituímos T=36,5ºC na função:

$$T(t) = 16{,}5 + 16.e^{-0{,}0645385\mathrm{t}},$$

$$36{,}5 = 16{,}5 + 16.e^{-0{,}0645385\mathrm{t}},$$

$$e^{-0{,}0645385\mathrm{t}} = \frac{20}{16},$$

$$\ln e^{-0{,}0645385\mathrm{t}} = \ln\left(\frac{20}{16}\right),$$

$$-0{,}0645385\mathrm{t} = \ln\left(\frac{20}{16}\right),$$

$$t \approx \frac{\ln\left(\frac{20}{16}\right)}{0{,}0645385} \approx -3{,}4575\ horas\ ou - 3h{:}\,27min.$$

Como o perito realizou a primeira medição de temperatura às 22h:30min, concluímos que o indivíduo veio a óbito 3h:27min atrás. Logo, a hora aproximada do óbito ocorreu por volta das 19h:03min.

3.1.2. Aquecimento e resfriamento de prédios

Dentro da lei de resfriamento de corpos proposta por Newton encontramos um modelo matemático que faz uma relação entre a temperatura do corpo e a temperatura ambiente. Para aquecimento e resfriamento de prédios será formulado um modelo que irá descrever um perfil de temperatura em 24 horas dentro de uma função da temperatura externa, do calor gerado dentro do prédio e do aquecimento do aquecedor ou o resfriamento do ar-condicionado (NAGLE et al., 2012)

Para realizarmos a modelagem da temperatura de um prédio devemos observar a análise comportamental, deste modo, consideramos que T(t) é a temperatura no instante t e tomaremos o prédio como um único compartimento. Desta maneira, a mudança na taxa de temperatura é determinada por todos os fatores gerados ou que dissiparam calor.

Considerando agora os três fatores principais que segundo (NAGLE et al., 2012) afetam a temperatura dentro do prédio:

- O calor produzido por pessoas, lâmpadas e máquinas, que irá causar um aumento na temperatura e será indicado por H(t);
- O aquecimento ou resfriamento fornecido pelo aquecedor ou ar-condicionado, essa taxa de aumento ou resfriamento será representada por U(t);
- E por fim, a temperatura externa sobre a temperatura do interior do prédio que chamaremos de M(t).

Assim, temos pela Lei de Resfriamento de Newton que a taxa de mudança na temperatura T(t) é proporcional à diferença entre a temperatura externa M(t) e a interna T(t), assim, a taxa da mudança de temperatura do prédio devido a M(t) é (1.20):

$$K[M(t) - T(t)]. \qquad (1.20)$$

Onde a constante positiva K, irá depender das propriedades físicas do prédio e não de M, T ou t. Assim, quando a temperatura do interior do prédio for menor que a do exterior M(t)-T(t)>0 e assim haverá um aumento de temperatura causado por M(t). De maneira análoga o processo de aquecimento, temos que caso a temperatura do interior seja maior que a do exterior a temperatura irá diminuir, ou seja, M(t)-T(t)<0.

De modo resumido temos que (1.21):

$$\frac{dT}{dt} = K[M(t) - T(t)] + H(t) + U(t), \qquad (1.21)$$

Onde a taxa de aquecimento adicional H(t) é sempre não negativa e U(t) é positiva para aquecimento e negativa para resfriamento. Observamos que a equação I é uma equação linear, utilizando o método descrito na Seção 2.7.8., e reescrevendo temos (1.22):

$$\frac{dT}{dt}(t) + P(t)T(t) = Q(t) \ (1.22)$$

Onde

$$P(t) = K,$$

$$(III)Q(t) = KM(t) + H(t) + U(t), \ \ (1.23)$$

Descobrimos que o fator integrante é (1.24)

$$\mu(t) = e^{\int Ktdt} = e^{Kt} \ \ (1.24)$$

Para resolver a equação (1.23) iremos multiplicar ambos os lados da equação por $\mu(t)$ e integrar, assim, (1.25)

$$e^{kt}\frac{dT}{dt}(t) + Ke^{kt}T(t) = e^{kt}Q(t),$$

$$e^{kt}T(t) = \int e^{kt}Q(t)dt + C. \qquad (125)$$

Encontrando o valor de T(t) temos:

$$T(t) = e^{-Kt}\int e^{kt}Q(t)dt + Ce^{-kt}$$

$$= e^{-Kt}\left\{\int e^{kt}[KM(t) + H(t) + U(t)]dt + C\right\}$$

Problema proposto: (NAGLE et al., 2012) Suponha, ao final do dia (no instante t_0) quando as pessoas saem do prédio, que a temperatura externa permaneça constante em M_0, a taxa de aquecimento adicional H dentro do prédio seja zero e a taxa de aquecedor/ar-condicionado U seja zero. Determine $T(t)$, dada a condição inicial $T(t_0)$ =t_0.

Solução:

Temos que M=M_0, H=0 e U=0, pela equação (IV):

$$T(t) = e^{-kt}\left[\int e^{kt}kM_0dt + C\right] = e^{-kt}[M_0e^{kt} + C]$$

$$= M_0 + Ce^{-kt}$$

Tomando t=t_0 e usando o valor inicial T_0 da temperatura, descobrimos que a constante C é $(T_0 - M_0)e^{kt_0}$. Logo,

$$T(t) = M_0 + (T_0 - M_0)e^{-k(t-t_0)}$$

Quando $M_0 < T_0$ a solução acima diminui exponencialmente da temperatura inicial T_0 para a temperatura final M_0. Para determinar uma medida de tempo gasto para a temperatura mudar "substancialmente", considere a equação linear simples $\frac{dA}{dt} = -\propto A$, cujas soluções tem a forma A(t)=A(0)$e^{-\propto t}$. Agora quando $t \to +\infty$, a função A(t) decai exponencialmente ($\propto > 0$) ou aumenta exponencialmente (($\propto < 0$). De qualquer forma, o tempo gasto para A(t) mudar de A(0) para $\frac{A(0)}{e} \approx 0{,}368\ A(0)$ é apenas $\frac{1}{\propto}$, pois

$$A\left(\frac{1}{\propto}\right) = A(0)e^{-\propto\left(\frac{1}{\propto}\right)} = \frac{A(0)}{e}$$

A quantidade $\frac{1}{|\propto|}$, que é independente de A(0), é chamada de constante de tempo para equação. Para equações lineares da forma mais geral $\frac{dA}{dt} = -\propto A + g(t)$, mais uma vez nos referimos a $\frac{1}{|\propto|}$ como a constante de tempo.

Retomando ao exemplo temos que a temperatura T(t) satisfaz as equações

$$\frac{dT}{dt}(t) = -KT(t) + KM_0$$

$$\frac{d(T-M_0)}{dt} = -K[T(t) - M_0],$$

Para M_0 sendo uma constante. De qualquer forma a constante de temperatura é apenas $\frac{1}{K}$, que representa o tempo gasto para a diferença de temperatura $T - M_0$ mudar de $T - M_0$ para $\frac{(T-M_0)}{e}$. Também chamamos $\frac{1}{K}$ de constante de tempo para o prédio sem aquecimento ou resfriamento. Um valor típico para a constante de tempo de um prédio é 2 a 4 horas, mas por ser muito mais curta se as janelas forem abertas ou se há um ventilador circulando o ar. Ou ser muito maior se o prédio estiver bem isolado.

3.1.3. Dilatação térmica

A dilatação é algo muito presente no nosso cotidiano, deste aos fios da rede elétrica até em trilhos de trem e muitas vezes a mesma é responsável por graves problemas. Uma explicação rápida e prática é dada por Halliday, et al. (2012, p.189).

> Às vezes para conseguir desatarraxar a tampa metálica de um pote de vidro, basta colocar o pote debaixo de uma torneira de água quente. Tanto o metal da tampa quanto o vidro do pote se expandem quando a água quente fornece energia aos átomos. Com a energia adicional, os átomos se afastam mais uns dos outros atingindo átomos unidos em um sólido. Entretanto, como os átomos no metal se afastam mais uns dos outros que os átomos do vidro, a tampa se dilata mais do que o pote e, portanto, fica frouxa.

Nussenzveig (2002, p. 163) trata que a dilatação corresponde a um aumento do espaçamento interatômico médio. Assim, num corpo sólido, se dois de seus pontos estão inicialmente à distância l_0, a variação Δl dessa distância é proporcional a l_0. Para uma variação de temperatura Δt suficientemente pequena, é também proporcional a l_0.

Logo (1.26):

$$\Delta l = \alpha . l_0 . \Delta t \ (1.26)$$

Onde a constante de proporcionalidade $\propto$ chama-se o coeficiente de dilatação linear

Pode ser bastante difícil observar a dilatação ocorrendo a olho nu, para isto, alguns experimentos físicos podem ser feitos para que esse efeito se torne algo mais fácil de entender. Segundo Souza (2007, p.8)

> Provavelmente a demonstração mais antiga datada seja a da "bola e anel", proposta no século 18 por Willem's Gravesande, filósofo, físico e matemático holandês. O aparelho de Gravesande consiste de uma pequena bola de metal em uma corrente ou cabo, e um anel de metal em um suporte. O anel é apenas suficientemente grande para que, quando o anel e esfera estão à mesma temperatura, a bola passe através do anel. No entanto, se a bola é aquecida por imersão em água fervente ou se tocar a chama de uma lâmpada de espírito sobre ele, o metal irá se expandir, e a bola não vai mais caber através do anel. Quando a bola tenha arrefecido, vai se encaixar através do anel novamente.

A dilatação é algo de grande importância para práticas diárias e que facilitam a vida dos seres humanos, desde a fabricação de joias, construção civil, uma vez que muitos metais devem passar pela dilatação para que possam ser moldados de acordo com sua função e encaixe.

Problema proposto: (MIOTTO et al.2013) Em um dia de inverno, um condutor da rede elétrica com comprimento de 101 m foi aquecido pelo sol durante o dia até uma temperatura de 55º C. Durante noite a temperatura ambiente era de -5º C, a partir das 20 horas. Às 22 horas mediu-se a temperatura no condutor, ela passou a ser 20ºC. Supõe-se que o condutor voltará a ser aquecido pelo sol às 6 horas da manhã seguinte. Busca-se calcular a dilatação térmica causada pela variação de temperatura no condutor durante a noite (20 horas - 6 horas). (Utilizar o coeficiente de dilatação linear do aço sendo 1,1x10-5°°C-1).

Solução:

Obtendo do problema as condições de contorno, que são restrições adicionais de um sistema de equações diferenciais

$$20\ horas \rightarrow T(0) = 55(*)$$

$22\ horas \rightarrow T(2) = 20$ (**)

Da modelagem de resfriamento proposta por Newton, temos:

$$\frac{dT}{dt} = -K(T - T_m)$$

Utilizando o método de separação de variáveis e integrando:

$$\int \frac{dT}{T - T_m} = -\int Kdt,$$

$$ln|T - T_m| = -Kt + c,$$

$$|T - T_a| = e^{-kt+c},$$

$$T = -5 + c.e^{kt}.$$

Utilizando a condição de contorno (*):

$$T(0) = -5 + c.e^{-k0},$$

$$55 = -5 + c,$$

$$c = 60.$$

Agora, utilizando a condição de contorno (**):

$$T(2) = -5 + 60.e^{-k2},$$

$$20 = -5 + 60.e^{-k2},$$

$$k = \frac{1}{2}.ln\frac{25}{60},$$

$$k = 0{,}4377.$$

Da equação de temperatura, obtemos:

$$T(t) = -5 + 60.e^{-0{,}4377}.$$

Temperatura final:

$$T(10) = = -5 + 60.e^{-0{,}4377},$$

$$T(10) = -4{,}2462.$$

Dilatação:

$$\Delta T = T_{final} - T_{inicial},$$

$$\Delta T = -4{,}2462 - 55,$$

$$\Delta T = -59{,}2462.$$

Agora se calcula a variação no comprimento do fio mediante a variação térmica ocorrida sobre ele:

$$\Delta l = \alpha.l_0.\Delta t$$

$$\Delta l = 1{,}1x10^{-5}.101.59{,}2462$$

$$\Delta l = 65{,}922m$$

4. Conclusão

Através da elaboração deste trabalho embasado em algumas aplicações da modelagem de equações comumente utilizadas pelas diversas áreas, com isto temos objetivo de se obter um resultado mais preciso e satisfatório sobre as aplicações em EDO e ainda trazendo um estudo sucinto sobre a Lei de Resfriamento de Newton.

Diante do exposto acima, nota-se a grande importância das equações diferenciais ordinárias, uma vez que as mesmas se fazem presentes em diversas situações diárias. O trabalho traz em seu texto uma discussão sobre as equações diferenciais ordinárias de primeira ordem e suas aplicações. Com o domínio da teoria que envolve as equações diferenciais, podemos utiliza-las em diversas áreas e com aplicações práticas.

Assim, podemos concluir que as Equações Diferenciais Ordinárias é uma das áreas de estudo da matemática que abre caminho para diversos estudos e que podem contribuir com meio de soluções de problemas diários. A utilização da modelagem matemática para solução de aplicações é uma forma mais simplificada e dinâmica de solucionarmos problemas de equações de primeira ordem que foram expostos, uma vez que conseguimos chegar aos resultados desejados.

Referências bibliográficas:

ALITOLEF, S. S. Algumas Aplicações das Equações Diferenciais. Ji Paraná: UNIR, 2011.

ALMEIDA, L. M. W. & DIAS, M. R. Um estudo sobre o uso da modelagem matemática como estratégia de ensino e aprendizagem. Bolema. Rio Claro. 2004

BIEMBENGUT, M. S. & Hein.N. Modelagem Matemática no ensino.São Paulo: Contexto, 2003

BOYER, C.B. História da matemática. Revista por Uta C. Merzbach; tradução Elza F. Gomide-2ª ed-São Paulo: Edgard Blücher,1996

BRONSON, Richard; COSTA, Gabriel. Equações Diferenciais – Coleção Schaum. 3. ed. São Paulo: Bookman, 2008.

BURAK, D. Modelagem Matemática: Ações e interações no processo de ensino aprendizagem. (Tese de Doutorado). Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Educação. 1992

CAJORI, Florian. Uma história da matemática. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderla Ltda, 2007. 664 p

D'AMBRÓSIO, U. Da realidade à ação: reflexos sobre educação e matemática. São

Paulo:Summus, 1986.

HALLIDAY, David; RESNICK, Robert; WALKER, Jearl. Fundamentos de física: gravitação, ondas e termodinâmica. 9. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2012. 394 p.

NAGLE, R. Kent; SAFF, Edward B.; SNIDER, Arthur David. Equações Diferenciais. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2012. 570 p

NUSSENZVEIG, Herch Moysés. Curso de física básica. 4. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2002. 3v.

OLIVEIRA, Edmundo Capelas de; TYGEL, Martin. Métodos matemáticos para engenharia. Rio de Janeiro: [s.n.], 2005. 375 p

PROVENZANO, L.F. Introdução as Equações Diferenciais − Um roteiro para estudo, UFMT, 2010. Disponível em: <https://www.ebah.com.br/content/ABAAAA0-8AE/introducao-a-equacoes-diferenciais>. Acesso em: 20 de set. 2018

SODRÉ, U. Equações Diferenciais Ordinárias, Maio de 2013.

SUAPESQUISA.COM. Biografia de Isaac Newton. Disponível em: <https://www.suapesquisa.com/biografias/isaacnewton/>. Acesso em: 08 de nov. 2018

Santos, Reginaldo J. S237i Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias / Reginaldo J. Santos - Belo Horizonte: Imprensa Universitária da UFMG, 2011. (IEDO)

SILVA, Jair Sandro Ferreira da. SOBRE O PROBLEMA DA VARIAÇÃO DE TEMPERATURA DE UM CORPO. Disponível em: <http://www.periodicos.univag.com.br/index.php/CONNECTIONLINE/article/view/123/372>. Acesso em: 10 de nov. 2018

SOUZA, Luiz Fernando. Um experimento sobre a dilatação térmica e a lei de resfriamento. 2007. 25 f. TCC (Graduação) - Curso de Licenciatura em Física, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro- RJ, 2007 Disponível em: <http://www.if.ufrj.br/~carlos/inic/luizfernando/monografiaLuizFernando.pdf>. Acesso em: 08 de nov. 2018.

SOUZA, Raquel Oliveira de. A perícia criminal no Brasil – Explanação histórica, legislativa e função do perito. (36 f.). TCC – Bacharelado em Química. Universidade de Brasília. 2011. Disponível em: <http://bdm.unb.br/bitstream/10483/3492/1/2011_RaquelOliveiradeSouza.pdf>. Acesso em: 08 de nov. 2018

ZILL, D. G.; CULLEN, M. R. Equações Diferenciais, volume 1. tradução Antonio Zumpano, revisão técnica: Antônio Pertence Jr. São Paulo: Pearson Makron /books, 2001.