UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA E MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

JACILENE ADAILMA DE LIMA SILVA

TEOREMA DAS CINCO CORES: UMA APLICAÇÃO DA TEORIA DOS GRAFOS

CUITÉ - PB
2018

JACILENE ADAILMA DE LIMA SILVA

TEOREMA DAS CINCO CORES: UMA APLICAÇÃO DA TEORIA DOS GRAFOS

Monografia apresentada à Banca Examinadora, como exigência parcial à conclusão do Curso de Licenciatura Plena em Matemática, da Universidade Federal de Campina Grande, sob orientação do profº Dr. Aluízio Freire da Silva Júnior.

CUITÉ - PB

2018

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA NA FONTE
Responsabilidade Jesiel Ferreira Gomes – CRB 15 – 256

S586t Silva, Jacilene Adailma de Lima.

Teorema das cinco cores: uma aplicação da teoria dos grafos. / Jacilene Adailma de Lima Silva. – Cuité: CES, 2018.

59 fl.

Monografia (Curso de Licenciatura em Matemática) – Centro de Educação e Saúde / UFCG, 2018.

Orientador: Aluízio Freire da Silva Júnior.

1. Leonnhard euler. 2. Grafos. 3. Teorema das quatro cores. 4. Grafos conexos. I. Título.

Biblioteca do CES - UFCG CDU 51

JACILENE ADAILMA DE LIMA SILVA

TEOREMA DAS CINCO CORES: UMA APLICAÇÃO DA TEORIA DOS GRAFOS

Monografia apresentada à Banca Examinadora, como exigência parcial à conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática, da Universidade Federal de Campina Grande, sob orientação do Profº Dr. Aluízio Freire da Silva Júnior.

Aprovada em: ___/___/_____

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Aluízio Freire da Silva Júnior

Orientador

Universidade Federal de Campina Grande (UFCG)

Prof. Me. Maria de Jesus Rodrigues da Silva

Universidade Federal de Campina Grande (UFCG)

Prof. Me. Edna Cordeiro de Souza

Universidade Federal da Paraíba (UFPB)

CUITÉ - PB

2018

DEDICATÓRIA

Aos meus pais e irmãos, por acreditarem e terem investido em mim e aqueles que contribuíram de alguma forma para realização deste sonho.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus, pois sem ele não tinha tido forças para continuar e terminar esse trabalho.

Aos meus pais Jacinta Lima da Silva e Antonio Soares da Silva por sempre me estimular e incentivar a estudar, me mostrando que os estudos era o caminho mais fácil a seguir.

Agradeço também aos meus irmãos Adailton e Adelmo que sempre me motivaram e torceram por mim.

A minha avó Clotilde, minha madrinha Socorro, minha segunda mãe dona Ritinha pelo apoio e orações. De uma forma geral, a toda minha família.

A um amigo especial, Genilson Dantas que esteve comigo durante todo o curso, me ajudando e não deixando desistir nos momentos difíceis do curso e da vida.

A todos os professores da Unidade Acadêmica de Física e Matemática da UFCG-CES, em especial a profª. Dra. Jaqueline Lixandrão, por ter sido mais que uma amiga, me dado força no momento mais difícil; Luciano Barros, Maria de Jesus, Célia Maria, Aluska Ramos, Leonardo Brito, Edna Souza e Renato Ignácio pelo apoio e incentivo, e exemplo de professores.

Ao meu orientador e profº. Dr. Aluizio Freire pelo apoio, motivação, paciência, contribuições na minha vida profissional, um verdadeiro exemplo de profissional a ser seguido.

Aos meus amigos Emilia, José Felix, Kenilda, Luciana, Ronaldo, Tida, José Pereira, Madalena, Janaina, Elias, André, Junior, Seu Muniz, Anderson, Igor, Elder, Jucimere, Ivo e Ítalo pelos momentos felizes, brincadeiras, conversas jogadas fora e apoio.

De uma forma especial aqueles amigos que são mais que amigos, é minha outra família, Mônica Soares, Ivo Sena, Girlene, Vanderlúcia, Anailde, Fernando, Carlinhos, Kaline, Joseane, Maria da Paz, Rafaela, Jessyka, Ismaiara, Gildemar, Mariza, Ana Maria, Ismael, Loandson, Ailton, Joelia, Isaac, Jayane pelo apoio, carinho, momentos únicos e felizes vividos juntos e paciência em conviver comigo durante esses anos.

Agradeço de uma forma especial aos meus amigos Ailton e Joelia por ajudar na construção e formatação desse trabalho.

A CAPES pelo apoio financeiro. A Coordenação de Assistência Estudantil pelo auxílio moradia durante todos esses anos.

A todos os funcionários do CES, de uma forma especial a Seu Zé e Diana pelos, “Bom Dia” carinhosos e os conselho construtivos por todos esses anos.

Por fim, a todos que de alguma forma contribuíram para realização desse sonho de criança.

EPÍGRAFE

"Não há ramo da Matemática, por mais abstrato que seja, que não possa um dia vir a ser aplicado aos fenômenos do mundo real.".

(*Lobachevsky*)

RESUMO

Neste trabalho abordamos um pouco da história de Leonard Euler, uma vez que o mesmo foi responsável pelo surgimento da teoria dos grafos. Além disso, serão apresentados alguns dos principais conceitos da teoria dos grafos. Além do mais, apresentamos um teorema muito importante dessa área, o teorema das quatro cores, o qual é utilizado em grafos planares e até os dias atuais não foi possível a demonstração do mesmo sem o auxílio do computador. O teorema das quatro cores é muito útil na coloração de mapas, o problema que levou a esse teorema tinha relação com a coloração de um mapa. Finalmente, o principal objetivo desse trabalho é demonstrar um teorema mais simples do que o teorema das quatro cores, porém mais interessante já que esse teorema, o teorema das cinco cores, pode ser provado a mão, sem o auxílio de horas de cálculo de um computador. Concluímos que apesar da teoria dos grafos não ser muito conhecida, é de grande importância e muito utilizada no nosso dia a dia.

Palavras-chave: Leonhard Euler. Grafos. Teorema das quatro cores. Grafos conexos.

ABSTRACT

In this work we approach a little of the history of Leonard Euler, since it was responsible for the emergence of graph theory. In addition, some of the main concepts of graph theory will be presented. Moreover, we present a very important theorem of this area, the four-color theorem, which is used in planar graphs and until today it was not possible to demonstrate it without the help of the computer. The four-color theorem is very useful in coloring maps, the problem that led to this theorem was related to the coloring of a map. Finally, the main objective of this work is to demonstrate a simpler theorem than the four-color theorem, but more interesting since this theorem, the five-color theorem, can be proved by hand, without the aid of calculation hours of one computer. We conclude that although graph theory is not very well known, it is of great importance and much used in our day to day life.

Keywords: Leonhard Euler. Graphs. The four color theorem. Related graphs.
.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O surgimento da teoria dos grafos teve início com Leonard Euler, com o problema das sete pontes da cidade de Konigsberg. Depois de várias tentativas de resolver o problema e não obterem êxito, foi Euler quem chegou a uma solução correta do problema, e ao tentar simplificar tal solução surgiu a teoria dos grafos. A teoria dos grafos é utilizada em várias áreas, entre elas na computação. A ideia desse trabalho é fazer uma pequena introdução à teoria dos grafos e aplicá-la na prova do teorema das cinco cores.

Assim, no capítulo 1 estaremos apresentando um pouco da vida e trajetória de Leonard Euler, uma vez que o mesmo foi de grande importância para a teoria dos grafos.

No capítulo 2 procuraremos apresentar alguns conceitos importantes sobre grafos, tentando facilitar o entendimento desses conceitos. Assim, serão apresentadas as definições e exemplos, e para facilitar ainda mais o entendimento do leitor, serão apresentadas diversas ilustrações de casos particulares.

No capítulo 3, depois de termos feito um estudo sobre grafos, buscaremos apresentar um dos teoremas mais importantes na teoria dos grafos, o teorema das quatro cores. O teorema das quatro cores é de suma importância e foi muito questionado na época em que foi conjecturado, e apesar de não ter uma demonstração tão simples, o mesmo é muito utilizado. Concluiremos esse trabalho com a apresentação da demonstração de um caso particular do teorema das quatro cores: o teorema das cinco cores.

Capítulo 1

1 UM BREVE RELATO HISTÓRICO SOBRE LEONHARD PAUL EULER

Neste primeiro capítulo será apresentado um pouco da historia de Leonhard Euler, uma vez que o mesmo foi quem resolveu o problema das sete pontes de Konigsberg, problema que deu origem à teoria dos grafos, que irá ser discutido mais adiante.

1.1 Leonhard Paul Euler

Euler nasceu na cidade de Basileia, divisa da suíça com Alemanha, em 1707, sendo filho de Paul Euler e Margaret Brucker. O pai de Euler era pastor e sempre o incentivou a estudar teologia (estudo da existência de Deus), em uma universidade localizada na cidade onde nasceu. Porém ainda jovem, com a permissão do pai, passou a estudar além de teologia, física, astronomia, medicina e línguas orientais. Segundo Justino (2013, pág. 5), Leonhard Euler:

> [...] Em 1720, inscreveu-se na Universidade de Basileia, na Faculdade de Filosofia, para estudar seguimentos religiosos que era do agrado do seu pai. Lá estudava matemática, sua matéria preferida mas também teologia, medicina e outras disciplinas.

Na referida universidade Euler passou a ser aluno de Johann Bernoulli, era um importante matemático da época.

> Johann Bernoulli, além de ter sido considerado excelente professor, foi um dos grandes responsáveis pela divulgação do Cálculo na Europa. É responsável pelo desenvolvimento do método da determinação da forma indeterminada $\frac{0}{0}$; estudou fenômenos ópticos relacionados a reflexão e refração; retificação de curvas, quadraturas de áreas usando séries e muitos outros assuntos. Assim como o século XVII, o século XVIII foi caracterizado pelos desafios e torneios, e apesar de muita coisa errada devido ao aparecimento de demonstrações precipitadas, esses desafios, ou torneios, tiveram parcela importante no desenvolvimento da Matemática e Johan Bernoulli não ficou fora dessa corrente. (CONTADOR, 2006, pág. 319)

De acordo com Justino (2013), pouco tempo depois de Euler ter começado a estudar com Bernoulli, apresentou sua tese em Física, onde trabalhou com som, que a partir do seu trabalho deu início os estudos da acústica.

Aos vinte anos Euler deixou a Suíça e foi para a academia de ciências de São Petersburgo, construída em 1727 na Rússia pelo imperador Pedro o Grande (1689-1727). O mesmo passou a ser membro da academia, porém não na área de matemática, mas sim nas áreas de medicina e fisiologia. Por sorte do próprio, segundo Garbi (2010), e felicidades dos doentes que não foram atendidos por Euler, ele foi transferido logo para área de Física, e assim pode trabalhar em sua área, que era ciências exatas. Nos primeiros dias em que passou na Rússia, ele morou na casa de ninguém menos que Daniel Bernoulli, onde os dois puderam discutir muito sobre física matemática, fazendo com que a estadia de Euler na casa de Daniel fosse muito útil para ambos. Euler passou quatorze anos de sua vida na academia de ciência, na Rússia.

> No mesmo dia em que Leonhard desembarcou em São Petersburgo, a Imperatriz Catarina I, viúva de Pedro, o Grande, morreu e o poder passou às mãos de um grupo retrógrado e repressivo, que considerava supérfluos os gastos com a Academia. Mesmo assim, para felicidade de todos, inclusive dos pacientes que não tratou, Euler conseguiu ser transferido para a área de Física e ali, silenciosamente, procurando não chamar a atenção de ninguém, passou a trabalhar naquilo que era sua paixão, as Ciências Exatas. Durante seus primeiros tempos na Rússia, ele morou na casa de Daniel Bernoulli, que veio a se celebrizar por suas realizações na Física matemática, em especial na Hidrodinâmica (quem estudou dinâmica dos fluidos conhece a famosa Equação de Bernoulli, formulada por Daniel). Ambos discutiam longamente os importantes temas da Física e da Matemática da época e isso permitiu a Euler ter também uma visão prática daquilo que estudava e descobria. (GARBI, 2010, pág. 248)

Depois de certo tempo morando na Rússia, Leonhard veio a se casar e teve seus 13 filhos, sendo que desses apenas cinco sobreviveram e dois morreram antes do pai. Garbi (2010, pág. 249) descreveu em seu livro que: "[...]. Anos mais tarde, um amigo descreveu desta forma a rotineira cena familiar: **"Uma criança no colo, um gato sobre o pescoço, assim escrevia ele suas obras imortais".** [...].". Logo, além de ser um grande matemático, também foi um pai presente na vida de seus filhos, e conseguia escrever com uma mão e segurar seus filhos com a outra sem nenhum problema, além do mais a família não atrapalhou, nem o impediu de produzir e estudar matemática e física naquela época.

De acordo com Contador (2006), Euler publicou seu primeiro trabalho em matemática, o qual tratava da solução do problema do mastreamento de navios, o que lhe proporcionou muitas referências virtuosas na Academia de Ciências de Paris, além do seu primeiro prêmio. Leonhard ainda ganhou mais doze vezes esse mesmo prêmio por mérito em outros trabalhos, tão bons quanto o primeiro. Em 1730 passou a ser professor de filosofia natural, mas por pouco tempo, em 1733 foi para a pesquisa matemática se tornando um dos principais matemáticos da academia. Como a matemática era uma das áreas que Euler mais se interessava, isso levou a crer que quase todas as descobertas do século XVIII eram do mesmo. Segundo Contador (2006, pág. 361), “A grande paixão de Euler era a Matemática pura, sendo capaz de escrever vários trabalhos num único dia, além de que, conta-se que entre um chamado e outro para o jantar, Euler desenvolvia um cálculo completo, [...].”.

Em 1735, Euler resolveu um problema matemático que alguns matemáticos da academia tinham estimado um prazo de vários meses, assim com os 28 anos ganhou o titulo de ser apto a resolver qualquer problema matemático. Nesse mesmo ano, Euler perdeu a visão de um olho devido às condições de trabalhos, mas isso não o parou, no ano seguinte publicou duas obras de mecânica analítica. No ano de 1742, conforme Contador (2006), Euler passou a dirigir a seção de matemática na academia de Berlim, onde ficou por vinte e cinco anos e passou a ser conhecido em toda a Europa. Leonhard publicou vários trabalhos muito rapidamente e apesar de ser apaixonado por matemática, suas obras não eram só voltadas para matemática pura, mas para várias outras como afirma Contador (2006 pág. 362):

> Seus trabalhos, que não limitavam-se somente à Matemática pura, eram desenvolvidos com tal velocidade e multiplicidade de assuntos difíceis de acreditar,entre eles Astronomia, Cálculo Diferencial, Cálculo de Variações, Teoria dos Números, Álgebra, Física, balística, teoria da navegação e Filosofia. Euler publicou mais de 500 livros e artigos durante sua vida. Uma bibliografia, incluindo itens póstumos, mostram que esta chega a 886 itens. Chegou a escrever 800 páginas por ano durante toda sua vida. Uma edição completa das obras de Euler chegaria próximo de cem grandes volumes.

Em 1766, Euler retornou à academia de São Petersburgo, nesse mesmo ano, por um problema no olho que lhe sobrava, notou que estava ficando totalmente cego e começou a escrever com os olhos fechados treinando para quando ficasse cego de vez, e assim conseguiu escrever no escuro. Nenhum dos problemas que surgia em sua vida o impedia de estudar e escrever sobre as ciências exatas, provando assim, mas uma vez, que era o que realmente amava. Em 1771, passou por uma cirurgia nos olhos, com o intuito de recuperar sua visão, porém não obteve êxito, já que só foi possível enxergar por alguns dias e logo ficou cego por completo até os últimos dias de sua vida, porém isso não o impediu de continuar escrevendo e publicando suas obras. Nesse mesmo ano, conforme Garbi (2010), ocorreu um incêndio na cidade que acabou atingindo a casa de Euler e destruindo sua biblioteca, entretanto foi possível salvar a grande maioria de seus manuscritos. Depois do ocorrido, a imperatriz Catarina, que foi quem patrocinou sua volta, mandou que tudo fosse devolvido para que o mesmo voltasse a sua rotina. Após o ocorrido, Leonhard voltou à rotina tendo ajuda de um de seus filhos, o qual fazia o papel de seu secretário, onde tinha a função de digitar as ideias e cálculos de seu pai. De acordo com Garbi (2010, pág. 251):

> [...]. Foi nesta fase de cegueira total que ele escreveu um tratado de 775 páginas sobre o Cálculo Integral, chamado **Institutiones calculi integralis**, onde tudo foi concebido apenas com os olhos de sua mente. Mas seu mais impressionante feito desse período de trevas foi um abrangente tratado sobre a teoria do movimento da Lua.[...].

Nesse período que estava em São Petersburgo, para ajudar e agradar a imperatriz Catarina, Euler fez uso da Álgebra e jurou ter desenvolvido uma equação que descrevia e provava a existência de Deus, a equação era a seguinte: $senhor \frac{a+b^n}{n} = x$. De acordo com Contador (2006, pág. 364):

> Foi durante sua estada na corte de Catarina que aconteceu um caso no mínimo engraçado, o grande filósofo francês Denis Diderot era ateu convicto e passava seus dias convertendo os russos ao ateísmo. Essa atitude de Diderot deixava Catarina tão furiosa que ela pediu ajuda a Euler de forma a deter o francês. Euler depois de pensar no assunto disse a Catarina que havia conseguido uma prova algébrica da existência de deus. Catarina rapidamente promoveu um encontro dos dois em seu palácio e convidou seus cortesãos para assistirem ao debate. Euler apresentou-se e a queima roupa disparou: $senhor \frac{a+b^n}{n} = x$, portanto deus existe, refute.

Logo como o filósofo não sabia sobre Álgebra, acreditou em Leonhard, até porque não ia discordar de um dos maiores matemáticos da época, assim deixou a imperatriz Catarina em paz e voltou à França. Assim, de acordo com Contador (2006), esse acontecido fez com que Euler voltasse a sentir interesse por teologia, e o levou a apresentar algumas provas falsas da existência de Deus.

Leonhard Euler foi quem mais escreveu no século XVIII, conforme Garbi (2010), e em uma velocidade que ninguém o alcançou. Foram cerca de 900 tratados, livros e estudos, em alguns livros contam que depois de cerca de 50 anos após sua morte, essa ocorrida em 1783, a academia de ciências de São Petersburgo ainda publicava seus trabalhos, já que não conseguiu acompanhar seu ritmo de produção. Euler não escrevia só sobre matemática, mas também em várias outras áreas, como topologia, música, astronomia, engenharia, mecânica celeste, mecânica, etc. Na matemática possui trabalhos nas diferentes áreas como geometria, álgebra, cálculo, teoria dos números, geometria diferencial, equação diferencial, cálculo das variáveis.

De acordo com Contador (2006, pág. 365), Leonhard foi responsável por fixar alguns símbolos e letras utilizados até hoje. Como:

> a, b, c para os lados de um triângulo e A, B, C para os ângulos opostos;R e r para os raios de um círculo circunscrito e inscrito num triângulo; s para o semiperímetro do triângulo; f(x) para funções; e para base dos logaritmos naturais; i para unidade imaginária, $\sqrt{-1}$; $\sum$ para somatórios; lx para logaritmo de x.

Além dos símbolos já citados, Euler também fez algumas abreviações na trigonometria que hoje ainda é utilizada em alguns programas matemáticos, e semelhante ao que utilizamos, são eles: sin, cos, tang, cot, sec e cossec, essas abreviações, segundo Contador (2006), eram em latim.

De acordo com Garbi (2010) um dos primeiro sucessos de Euler foi o cálculo da soma, a partir da descoberta que a função sen x poderia ser escrita em uma série infinita, do tipo:

$$senx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} \dots,$$

como a equação sen x= 0 tem infinitas raízes, Euler concluiu que a equação

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} \dots = 0,$$

tem as mesmas raízes, se for de grau infinito.

Como já foi comentado anteriormente, Euler escreveu em várias áreas da matemática e foi responsável por grandes descobertas e quase todas provou, além de provar a maioria de suas descobertas. Euler foi responsável por provar teoremas de outros grandes estudiosos, um deles foi Fermat. Euler foi responsável por demonstrar vários teoremas que Fermat enunciou, um deles foi sobre números primos do tipo 4k+1. Ele provou que “os primos do tipo 4k+1 podem sempre, e de forma única, ser decompostos como somas de dois quadrados." (Garbi, 2010, pág. 258). Outro fato importante sobre os primos desses tipos é que "qualquer potência inteira positiva deles pode ser hipotenusa de diferentes triângulos retângulos de lados inteiros.". Além dessas contribuições para teoria dos números existem muitas outras, porém ele também trabalhou em outras áreas, por exemplo, na geometria. Um importante teorema que aprendemos da geometria é o teorema de Euler dos poliedros, que afirma: "o número de vértices somado ao número de faces e subtraído do número de arestas é sempre igual a dois", ou seja, V-A+F=2, esse teorema é utilizado em poliedros simples. De acordo com Garbi (2010), Descartes já sabia dessa relação, mas como quem anunciou e provou foi Euler, ficou conhecido com o seu nome.

De acordo com Garbi (2010), uma das mais famosas descobertas de Euler na geometria, foi com relação aos triângulos, onde provou que o ortocentro, o baricentro e o circuncentro de qualquer triângulo estão sobre uma linha reta. Além disso, Euler provou que a distância do ortocentro ao baricentro é o dobro da distância do baricentro ao circuncentro.

> Talvez a mais famosa das descobertas de Euler na Geometria (publicada em 1767) tenha sido a que ele fez no triângulo, aquele polígono de simplicidade extrema, que os gregos haviam dissecado ao longo de tantos séculos. Parecia impossível que algo de realmente novo ou importante ainda restasse a ser achado no triângulo quando Leonhard provou que em qualquer deles o **ortocentro**, o **baricentro** e o **circuncentro** estão sobre uma mesma linha reta (hoje conhecida por Reta de Euler dos triângulos).[...]. (GARBI, 2010, pág. 261)

Para fazer algumas demonstrações na geometria, Euler fez uso da Geometria Analítica, porém depois de alguns tempos foram descobertas outras maneiras mais simples para essas demonstrações.

Segundo Garbi (2010, pág. 267), Euler também deu sua contribuição para o cálculo das áreas dos triângulos esféricos, aonde chegou que: "A área de um triângulo esférico é proporcional ao excesso da soma de seus ângulos em relação a dois retos".

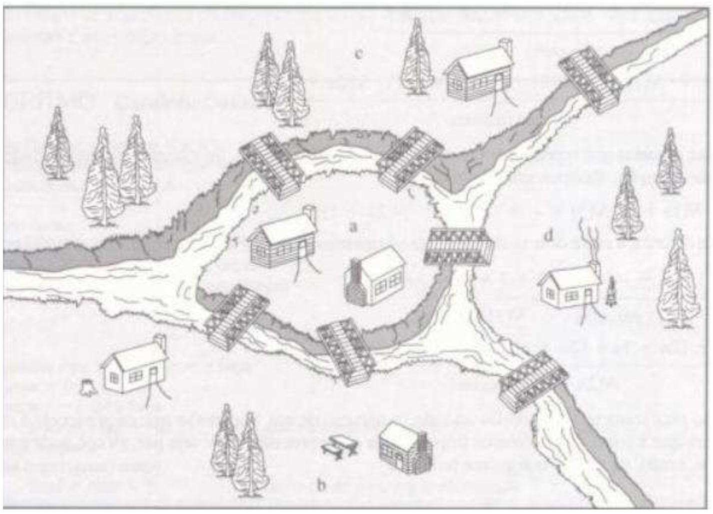
Após seus 43 anos de casado, segundo Garbi (2010), sua esposa vem a falecer em 1776, mas isso não o fez parar, ele continuou seus estudos, três anos mais tarde, em 1779, Euler veio a se casar novamente com a meia-irmã de sua falecida esposa. Depois de seus 76 anos de vida, em setembro de 1783, Euler veio a falecer, deixando vários estudos para serem continuados e legado jamais visto. Segundo Garbi (2010, pág. 251):

> Seu fim chegou em 18 de setembro de 1783, quando tinha 76 anos: pela manhã brincou com os netos, tratou de questões matemáticas ligadas ao vôo de balões e fez alguns cálculos sobre a órbita do planeta Urano, recentemente descoberto. Aquela órbita, à luz das equações da Mecânica Celeste que ele elevara a níveis tão altos, apresentava irregularidades que vieram a permitir que os astrônomos Leverrier e Adams, em 1846, previssem a existência e a localização do planeta Netuno, encontrado pela Matemática antes de ter sido visto através de um telescópio. No final da tarde, subitamente, um forte derrame cerebral fulminou-o em poucos instantes. Seu corpo foi enterrado em São Petersburgo e até hoje a Rússia o considera um de seus grandes matemáticos, pelos longos anos em que o teve a seu serviço e pelo carinho com que o abrigou por 3 décadas.

Euler foi sem dúvida um dos matemáticos que mais produziu e contribuiu para o desenvolvimento da matemática, e é impossível descrever um pouco de cada uma de suas obras aqui, então agora que já foi apresentado um pouco de seus trabalhos na matemática, será relatado um de seus trabalhos que deu origem à teoria dos grafos, que vai ser estudado de forma mais detalhada no próximo capítulo.

Esse estudo de Euler se deu na cidade de Kaliningrado, como é conhecida atualmente, mas naquela época era chamada de Konigsberg, a mesma foi construída às margens do rio Pregel. A cidade consiste em quatro bairros que são separados pelo rio e são ligados por sete pontes, como mostra a figura abaixo.

Figura 1.1: Ilustração da Cidade de Konigsberg.



Fonte: CAVALCANTE; SILVA, São Paulo, 2009.

O problema que rodeava essa cidade e foi tentado resolver por várias pessoas da própria cidade, e por alguns matemáticos, era se seria possível fazer um passeio por todos os bairros atravessando todas as pontes, uma e somente uma vez por cada ponte. Muitas rotas foram traçadas para chegar a uma solução, porém todas as tentativas foram fracassadas, daí surgiu o interesse de Euler pelo problema, mas será que ele foi capaz de traçar uma rota para esse problema? Será que isso era possível? Essas perguntas serão respondidas mais na frente.

Capítulo 2

2 UMA INTRODUÇÃO À TEORIA DOS GRAFOS

No capítulo anterior foi apresentado o problema das pontes de Konigsberg, e foi graças a esse problema e curiosidade de Leonhard Euler que surgiu um novo rumo da matemática, a topologia, que é um ponto de referência para a teoria dos grafos.

O grande desafio de Euler era saber se seria possível passear pela cidade, indo nos quatro bairros, passando por todas as sete pontes apenas uma vez. Será que era possível? Para responder essa pergunta Euler fez uma representação simplificada da cidade, e essa representação ficou conhecida como grafo.

Nesse capítulo iremos apresentar alguns conceitos básicos da teoria dos grafos, que serão fundamentais para o nosso estudo. O nome grafo é muito parecido com gráfico e são bem semelhantes quando estamos vendo a representação geométrica.

> Grafos são estruturas muito usadas para representar a existência ou não de relações entre elementos de um dado conjunto. Assim, redes de comunicação, fluxos em rede de transporte, mapas geográficos e relações binárias em geral podem ser representadas por grafos, e nesse caso várias questões de interesse podem ser investigadas. (CAVALCANTE; SILVA, 2009, pág. 19)

O grafo também é utilizado, segundo LOVÁSZ; PELIKÁN e VESZTERGOMBI (2003), para “descrever ligações entre átomos em uma molécula; conexões entre células no cérebro, descendência entre espécies, etc.”. Assim, podemos dizer que o surgimento do grafo contribuiu em diversas áreas, facilitando o entendimento com sua representação simples.

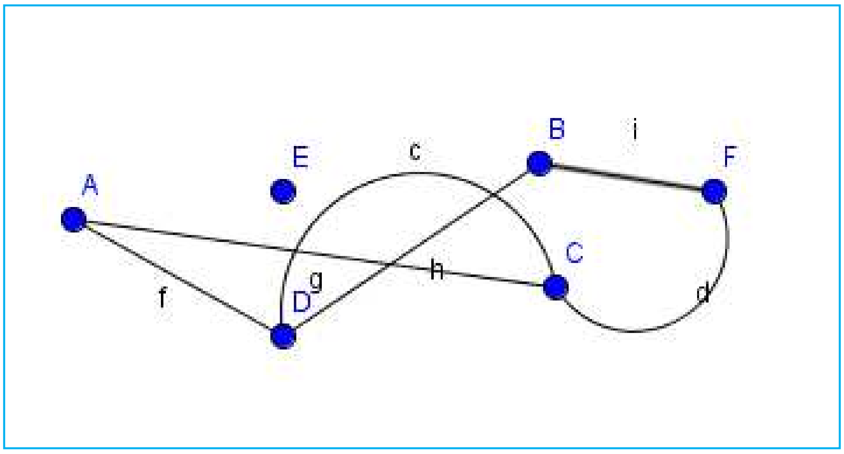
Grafos podem ser definidos de uma forma mais formal ou por meio de sua representação geométrica, como vamos ver a seguir.

2.1 Definição geométrica de grafos

Uma definição direta de grafo e fácil de ver é a seguinte: um grafo é um conjunto não vazio de pontos (nós, vértices), e um conjunto de arestas (arcos), sendo que cada aresta deve estar ligada a dois vértices. Essa definição ficará mais clara nos exemplos a seguir.

Exemplo 2.1.1. O grafo da Figura 2.1 tem seis vértices e seis arestas. A aresta f conecta-se aos vértices A e D, já a aresta i conecta-se aos vértices B e F, e assim sucessivamente.

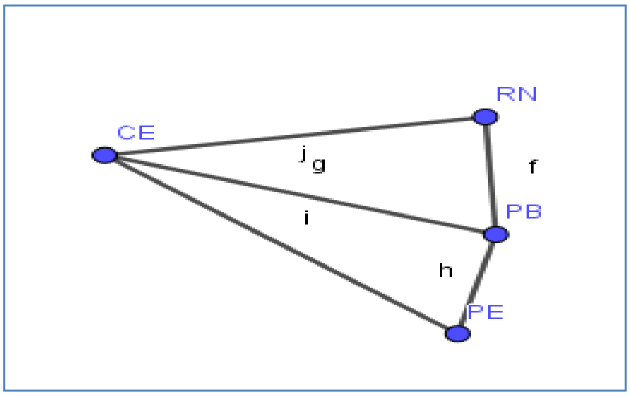
Figura 2.1: Grafo de seis arestas e seis vértices



Fonte: Autoria Própria.

Exemplo 2.1.2: O grafo da Figura 2.2, representa de uma forma mais simplificada alguns estados, entre eles, Paraíba, Pernambuco, Rio Grande do Norte e Ceará, onde foi feito um trajeto que liga esses estados. Esse grafo tem quatro vértices e cinco arestas. Podemos observar que da Paraíba para o Pernambuco tem uma aresta, do Ceará para o Rio Grande do Norte tem outra aresta e assim por diante, cada aresta é contada a partir do número de vértices que ela se conecta.

Figura 2.2: Grafo de cinco arestas e quatro vértices



Fonte: Autoria Própria.

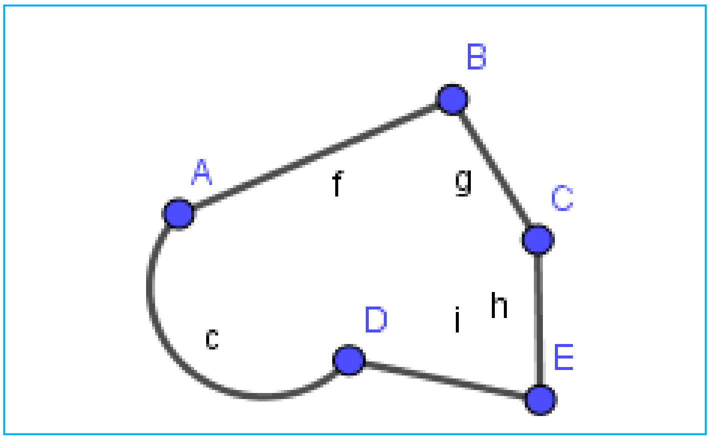
2.2 Definição de grafos

Definição 2.2.1: Definimos como *grafo* um par (V(G), E(G)), onde V(G) é um conjunto finito não vazio de elementos chamados vértices e E(G) é uma família finita de pares não ordenados de elementos de V(G) chamados de arestas.

Note que o uso da palavra "família" permite a existência de múltiplas arestas. Chamaremos V(G) de conjunto de vértices e o E(G) de família de arestas de G.

Exemplo 2.2.1: Considere a Figura 2.3. Note que V(G) é o conjunto {A, B, C, E, D} e E(G) é formada pela família das arestas {A, B}, {B, C}, {C, E}, {E, D} e {A, D}.

Figura 2.3: Grafo



Fonte: Autoria Própria.

Outra forma de representar um grafo é por meio de uma lista, dizendo quem está ligado a quem, como o exemplo a seguir proposto por Cavalcante e Silva (2009).

Exemplo 2.2.2: Certa escola resolveu realizar um torneio de futebol, onde resolveram participar do torneio as turmas 6*A*, 6*B*, 7*A*, 7*B*, 8*A* e 8*B*. Foram realizadas as seguintes partidas até agora:

6*A* jogou com 7*A*, 8*B*

6*B* jogou com 7*A*, 8*A*, 8*B*

7*A* jogou com 6*A*, 6*B*

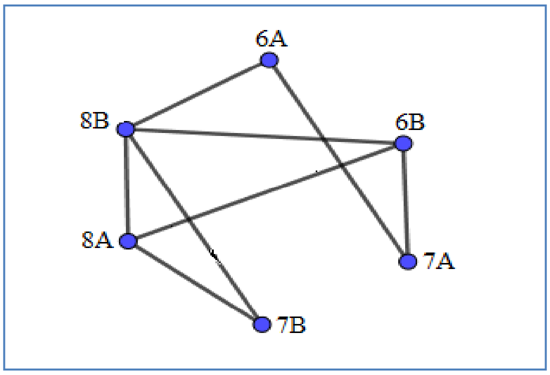
7*B* jogou com 6*A*, 8*A*, 8*B*

8*A* jogou com 6*B*, 7*B*, 8*B*

8*B* jogou com 6*A*, 6*B*, 7*B*, 8*A*

Assim, podemos ver que foi feita uma lista, dizendo quem jogou com quem. Também podemos fazer um desenho com a representação gráfica, onde as turmas serão representadas por pontos e os jogos por linhas, como mostra Figura 2.4.

Figura 2.4: Torneio de futebol.



Fonte:CAVALCANTE e SILVA (2009)

Com a figura ficou mais simples de compreender qual turma jogou com quem, e isso é um grafo. Assim, de acordo com Cavalcante e Silva (2009), é possível fazer representação de grafo, tanto geométrica, como por meio de uma lista.

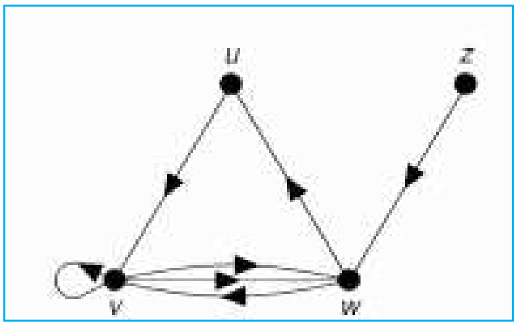
2.3 Grafos direcionados

Definição 2.3.1: Definimos *grafo direcionado* como sendo um conjunto finito não vazio V(D) de elementos chamados de vértices e uma família finita A(D) de pares ordenados de elementos de V(D) chamados arestas.

O que diferencia grafo de grafo direcionado é justamente o fato que nos grafos direcionados as arestas são pares ordenados. Chamamos V(D) o conjunto de vértices e A(D) a família de arestas de D. Um arco cujo primeiro elemento é v e cujo segundo elemento é w é chamado de arco de v para w e é escrito (v, w), ou simplesmente vw, note que duas arestas da forma vw e wv são diferentes.

Exemplo 2.3.1: Na figura 2.5, podemos obsevar um grafo, onde V(D) é o conjunto {u, v, w, z} e A(D) consiste as arestas uv, vv, vw, vw, wv, wu e zw. A ordenação dos vértices em um arco está sendo indicado por uma seta.

Figura 2.5: Grafo



Fonte: WILSON, (1996).

2.4 Grafos simples

Definição 2.4.1: Chamaremos um Grafo de *simples* quando as arestas dos grafos são distintas.

Definição 2.4.2: Definimos *laço* de grafo como um arco vw tal que v=w.

Assim, para que um grafo seja simples ele não pode ter laços e nem arestas paralelas.

Definição 2.4.3: Definimos *arestas paralelas* duas arestas que tem as mesmas extremidades.

Exemplo 2.4.1: Note na Figura 2.5, que a aresta {vv} é um laço, pois começa e termina no mesmo nó. Por outro lado, as arestas {vw, wv, vw} são paralelas, pois tem as mesmas extremidades.

Exemplo 2.4.2: Note na Figura 2.5, que o grafo não é simples, pois o arco {vv} é um laço e por definição de grafo simples, não pode ter laço.

Exemplo 2.4.3: Observe a Figura 2.6. Todos os grafos dessa Figura são simples, já que satisfazem a definição de grafos simples.

Figura 2.6: Grafos simples.

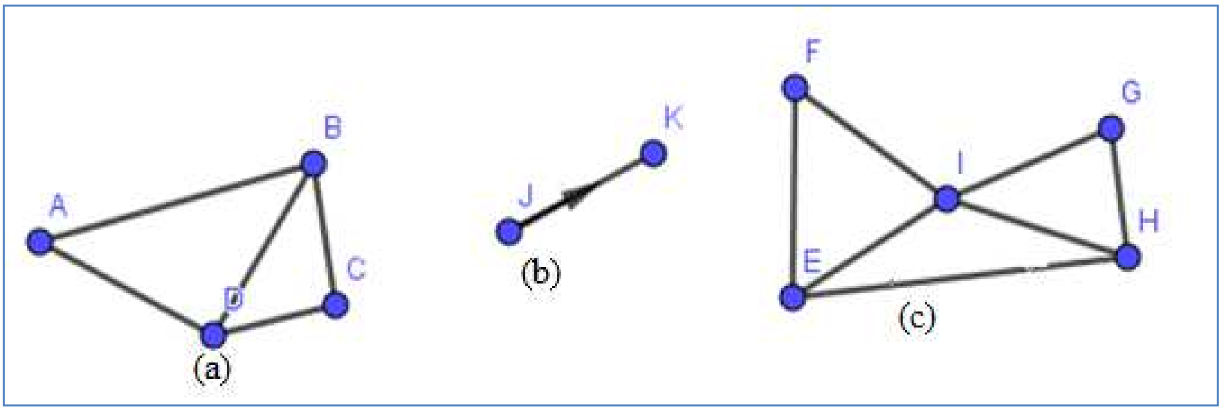


Figura 2.6: Autoria Própria

Como pode ser observado na Figura 2.6(b), o grafo simples pode ser grafo direcionado, pois o grafo é simples e direcionado, mas nem todo grafo direcionado é grafo simples, como pode ser visto na figura 2.5, onde o grafo é direcionado, porém não é simples já que possui laço e arestas paralelas.

2.5 Vértices adjacentes; vértice isolado e grau de um vértice

Definição 2.5.1: Definimos *vértices adjacentes* de um grafo, se os dois vértices são as extremidades de um mesmo arco.

Exemplo 2.5.1: Volte ao grafo da Figura 2.1. Podemos observar que os vértices A e D são ditos adjacentes, mas os vértices A e F não.

Um vértice também pode ser adjacente a si mesmo, no caso de um laço.

Definição 2.5.2: Definimos *vértice isolado*, quando esse vértice não é adjacente a nenhum outro.

Exemplo 2.5.2: Considere a Figura 2.1, onde podemos verificar que o vértice E, é um vértice isolado.

Definição 2.5.3: Definimos *grau de um vértice* o número de arestas que tem extremidade naquele vértice. Considere o vértice v, usaremos como notação do grau de v a seguinte: $\rho(v)$.

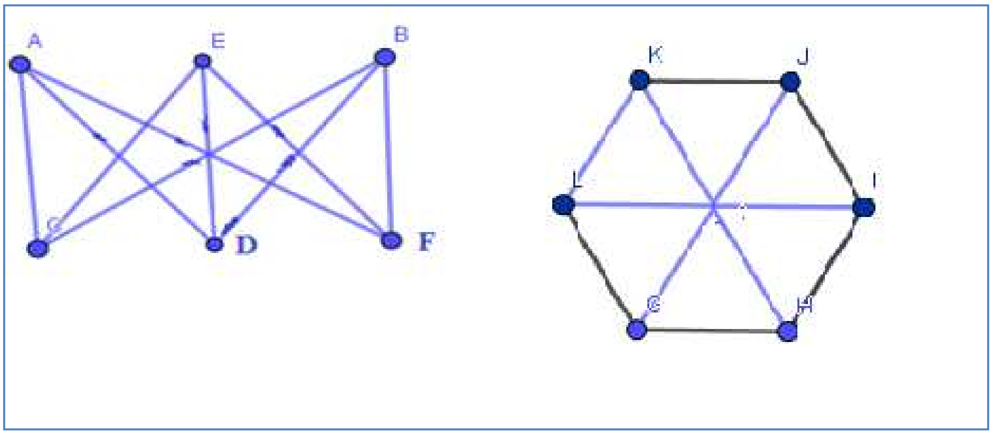
Exemplo 2.5.3: Na Figura 2.1, os vértices A, B e F têm grau dois, o vértice D e C têm grau três, já o vértice E tem grau zero.

2.6 Grafos isomórficos e subgrafo

Definição 2.6.1: Dois grafos G_1 e G_2 são definidos *isomorfos* se existe uma correspondência um a um entre os vértices de G_1e os de G_2 com a propriedade de que o número de arestas que unem dois vértices de G_1 é igual ao número de arestas que unem os vértices correspondentes de G_2.

Exemplo 2.6.1: Considere a Figura 2.7. Os dois grafos mostrados são isomorfos sob a correspondência A↔K, E↔I, B↔G, C↔J, D↔H, F↔L. Note que existem apenas seis vértices e os outros pontos em que as arestas se tocam não são vértices.

Figura 2.7: Grafos Isomórficos



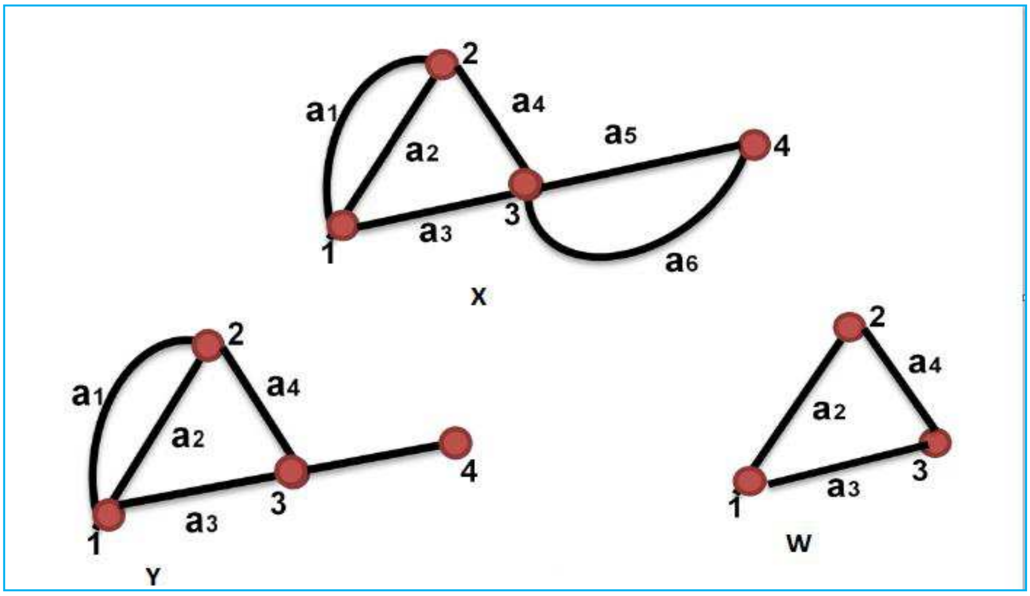
Fonte: WILSON, (1996). (Modificada pela Autora)

Definição 2.6.2: Definimos como *subgrafo* de um grafo, um conjunto de vértices e um conjunto de arestas que são subconjuntos do conjunto original de vértices e arestas, respectivamente, nos quais as extremidades de um arco têm que ser os mesmos vértices que o grafo original.

Assim, um subgrafo é obtido quando se apaga uma parte do grafo original, logo um subgrafo não deixa de ser grafo.

Exemplo 2.6.2: Considere a Figura 2.8. Note que os grafos Y e W são dois subgrafos do grafo X.

Figura 2.8: Subgrafos



Fonte: CAVALCANTE; SILVA, (2009).

2.7 Tipos importantes de grafos

Nesta seção apresentaremos as definições de alguns tipos importantes de grafos.

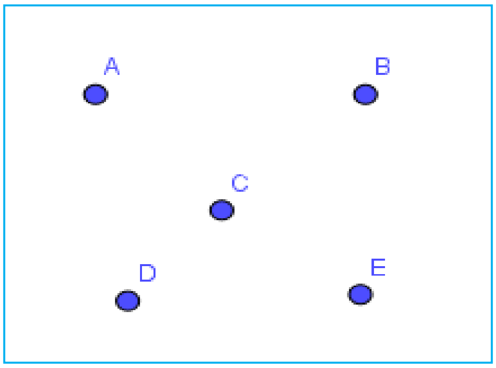
2.7.1 Grafo nulo

Definição 2.7.1.1: Definimos *grafo nulo* quando ele não possui arestas.

Podemos dizer que um grafo é nulo se o conjunto A(G) é um conjunto vazio. Em um grafo nulo (ou grafo totalmente desconexo, como também pode ser chamado), todos os vértices estão isolados. O grafo nulo com n vértices é denotado por N_n.

Exemplo 2.7.1.1: Considere a Figura 2.9. Todos os vértices são desconexo (isolados), assim, esse grafo é nulo e é denotado por N_5.

Figura 2.9: Grafo Nulo



Fonte: Autoria Própria.

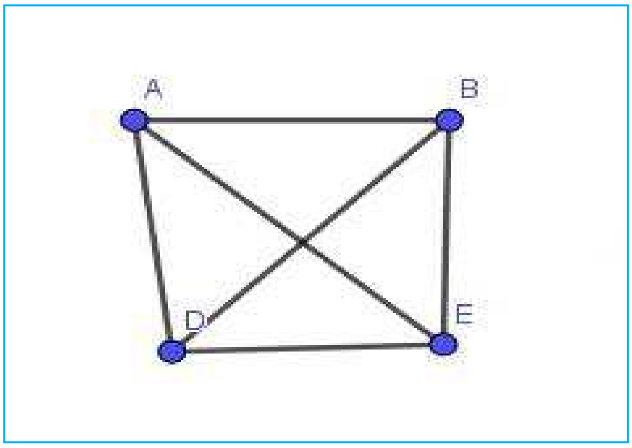
2.7.2 Grafo completo

Definição 2.7.2.1: Definimos *grafo completo* como um grafo onde todo par de vértices (ou nós) é ligado por uma aresta.

Notação: Um grafo completo com n vértices é denotado por K_n.

Exemplo 2.7.2.1: Note na Figura 2.10 que o grafo é completo, pois cada par de vértices estão ligados por uma aresta, o mesmo possui 4 vértices, logo é denotado por K_4.

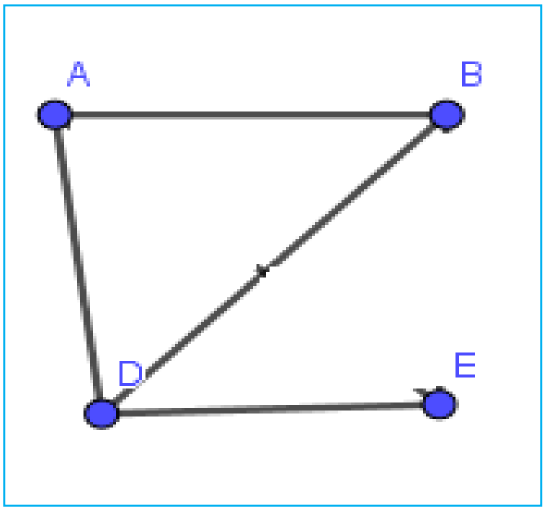
Figura 2.10: Grafo Completo



Fonte: Autoria Própria

Exemplo 2.7.2.2: Considerando a Figura 2.11, podemos observar que o grafo não é completo, pois nem todos os vértices são adjacentes a todos os outros vértices, como por exemplo, o vértice E.

Figura 2.11: Grafo não Completo



Fonte: Autoria Própria

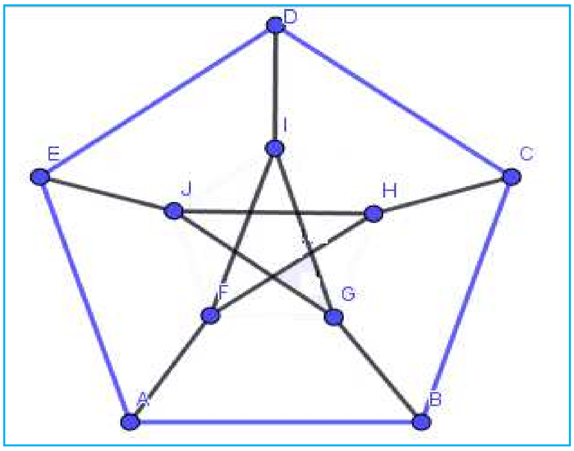
2.7.3 Grafo regular e grafo platônico

Definição 2.7.3.1: Dizemos que um grafo é *regular* se cada vértice possui o mesmo grau.

Quando o grafo é regular, e se um vértice tiver grau r, o grafo é chamado de regular de grau r.

Exemplo 2.7.3.1: Considere a Figura 2.12. O grafo é regular, já que cada vértice (ou nó) possui o mesmo grau, todos tem grau 3. Portanto é um grafo regular de grau 3.

Figura 2.12: Grafo Regular de Grau 3.



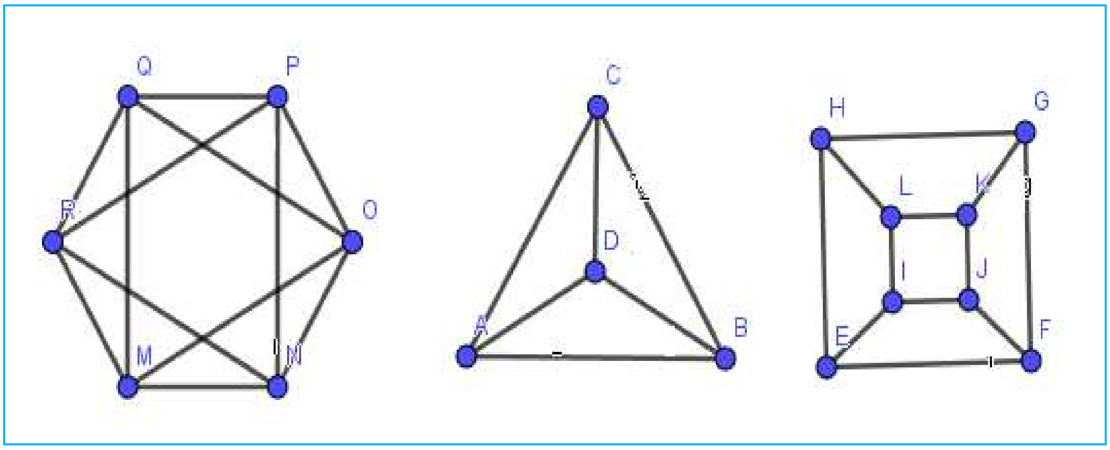
Fonte: WILSON, (1996). (Modificada pela Autora)

Definição 2.7.3.2: Definimos *grafos platônicos* os grafos formados pelos vértices e arestas dos cinco sólidos regulares (sólidos platônicos, ou seja, os sólidos de Platão) - o tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro.

Os grafos platônicos é um caso particular dos grafos regulares.

Exemplo 2.7.3.2: Observe a Figura 2.13, onde temos três grafos dos cincos grafos platônicos, são, os grafos do octaedro; tetraedro e o cubo.

Figura 2.13: Grafos Regulares platônicos: octaedro; tetraedro e o cubo.



Fonte: WILSON, (1996). (Modificada pela Autora)

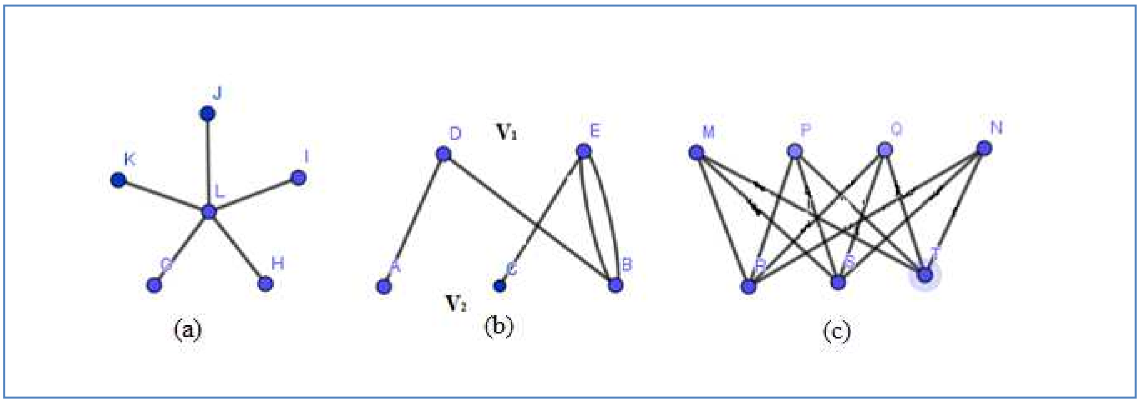
2.7.4 Grafo bipartido

Definição 2.7.4.1: Dizemos que um grafo é *bipartido* se o vértice de um grafo G pode ser dividido em dois conjuntos disjuntos V_1 e V_2, de tal forma que cada extremidade de G une um vértice de V_1 a um vértice de V_2.

Uma maneira alternativa de pensar em um grafo bipartido é termos de colorir seus vértices com duas cores, digamos verde e azul, esse grafo é bipartido se pudermos colorir cada vértice verde ou azul de tal maneira que cada extremidade tenha um fim verde e um fim azul. Em um grafo bipartido G(V_1, V_2), não é necessariamente verdade que todo vértice de V_1 está unido a cada vértice de V_2; porém se isso acontecer e se G for simples, então G é chamado de grafo bipartido completo, geralmente denotado por $K_{r,s}$, onde r e s são os números de vértices em V_1 e V_2, respectivamente. Um grafo bipartido completo também pode ser chamado de grafo de estrela, porém isso só ocorre quando o grafo tem um formato de uma estrela e é denotado por $K_{1,5}$.

Exemplo 2.7.4.1: Considere a Figura 2.14. Podemos observar na imagem (b) um grafo bipartido (às vezes denotado por G(V_1,V_2) se quisermos especificar os dois conjuntos envolvidos). Na imagem (c) o grafo bipartido é denotado por $K_{4,3}$ e a imagem (a) é um grafo bipartido completo, chamado de grafo de estrela, e é denotado por $K_{1,5}$.

Figura 2.14: Exemplos de Grafos bipartidos.



Fonte: WILSON, (1996). (Modificada pela Autora)

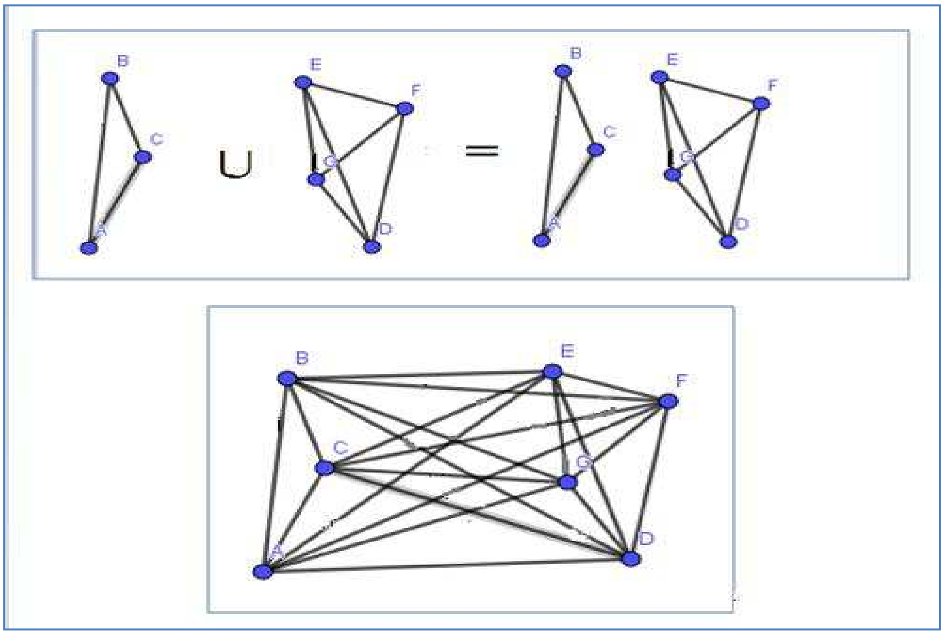
2.7.5 A união e a soma de dois grafos

Definição 2.7.5.1: Considere dois grafos G_1=(V(G_1), E(G_1)) e G_2=(V(G_2), E(G_2)), onde V(G_1) e V(G_2) são assumidos como sendo disjuntos. Então sua *união* $G_1 U G_2$ é definida como o grafo com o conjunto de vértices V(G_1) U V(G_2) e a familia de arestas E(G_1) U E(G_2).

Definição 2.7.5.2: Definimos a *soma* de G_1 e G_2 (denotada por G_1 + G_2) fazendo a união de G_1 e G_2 e desenhando cada aresta de cada vértice de G_1 para cada vértice de G_2.

Exemplo 2.7.5.1: Considere a Figura 2.15, onde foi feito a união dos grafos G_1 e G_2, ou seja, $G_1 U G_2$. Na mesma figura, embaixo, temos o grafo onde fizemos a soma de K_3+K_4. Podemos notar que $K_{r,s}$ poderia ter sido definido como a soma de N_r e N_s (onde N_r e N_s é o número de vértices dos grafos G_1 e G_2, respectivamente), que nesse caso, o r é igual a 3 e o s é igual a 4.

Figura 2.15: A União e a Soma de Dois Grafos



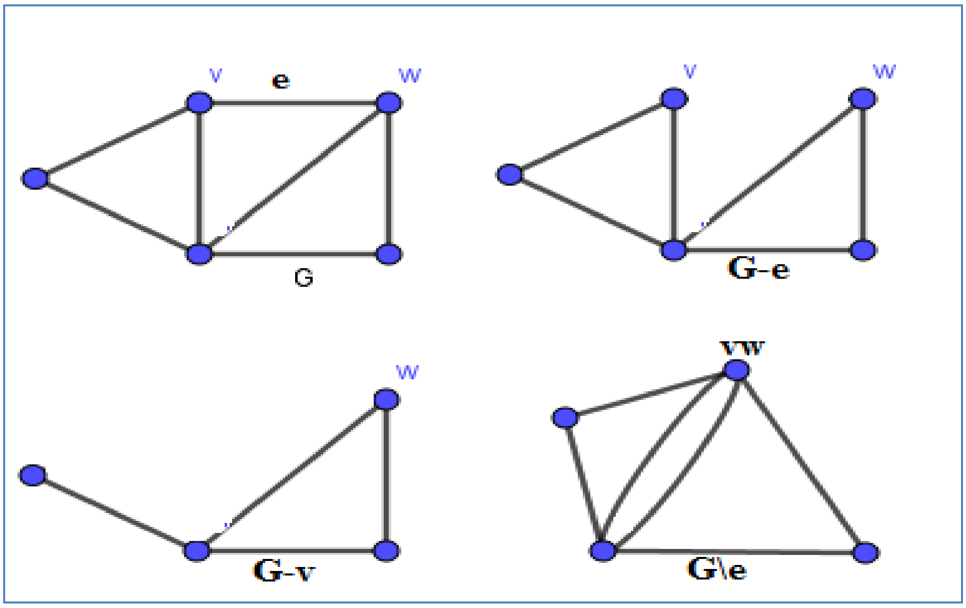
Fonte: Autoria Própria.

2.7.6 Deleções e contrações

Se e é uma aresta de um grafo G, denotamos por G - e o grafo obtido de G pela deleção da aresta e. Em geral, se F é um conjunto de aresta em G, denotamos por G-F o grafo obtido pela exclusão das arestas de F. Da mesma forma, se v é um vértice de G, denotamos por G-v o grafo obtido de G, excluindo o vértice v junto com as arestas incidentes em v. Se S é um conjunto de vértices em G, denotamos por G-S o grafo obtido pela exclusão dos vértices em S e todas as arestas que incidem sobre qualquer um deles.

Sejam G um grafo e vw uma aresta de G. Definimos G \ e (onde e é a aresta vw) o grafo obtido de G ao se deletar a aresta e e coincidir os vértices v e w. Uma contração de G é então definida como sendo qualquer grafo que resulta de G após uma sucessão de tais contrações de arestas.

Figura 2.16: Deleções e Contrações de Grafos**.**



Fonte: WILSON, (1996).

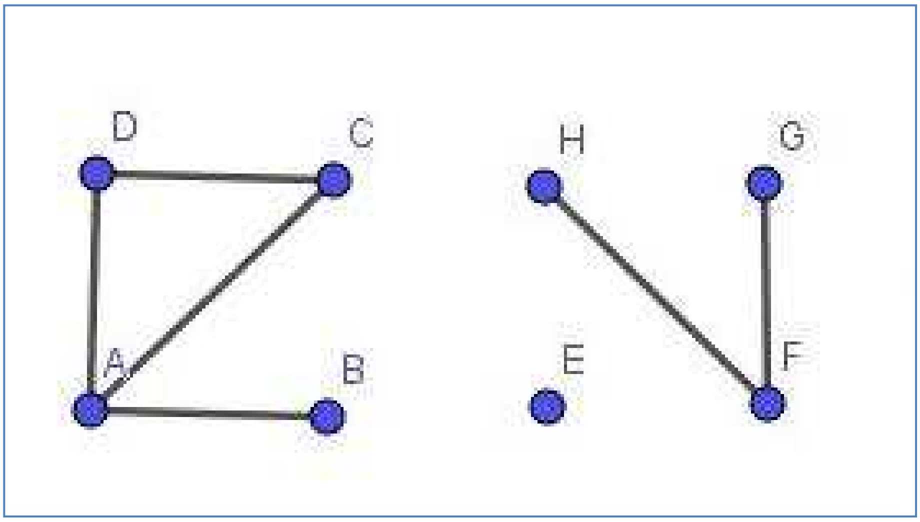
2.7.7 Grafos conexos

Definição 2.7.7.1: Dizemos que um grafo é conexo se não puder ser expresso como a união de dois grafos; caso contrário, ele é desconexo.

Um grafo é conexo se dado qualquer par de vértices v, w de G há um percurso que vai de v para w, ou seja, existirá um percurso entre cada par de vértices. É claro que qualquer grafo desconexo G pode ser expresso como a união de um número finito de grafos conexos - cada um desses grafos conexos é chamado de *componente* (conexo) de G.

Exemplo 2.7.7.1: Considere a figura 2.17. Podemos considerar três grafos: o grafo ABCD, que é um grafo conexo, porém é desconexo do grafo E e do grafo HGF.

Figura 2.17: Grafos Conexos



Fonte: WILSON, (1996). (Modificada pela Autora)

2.7.8 Grafos de circuitos e rodas

Definição 2.7.8.1: Definimos grafo de circuito quando ele é conexo e é regular de grau dois.

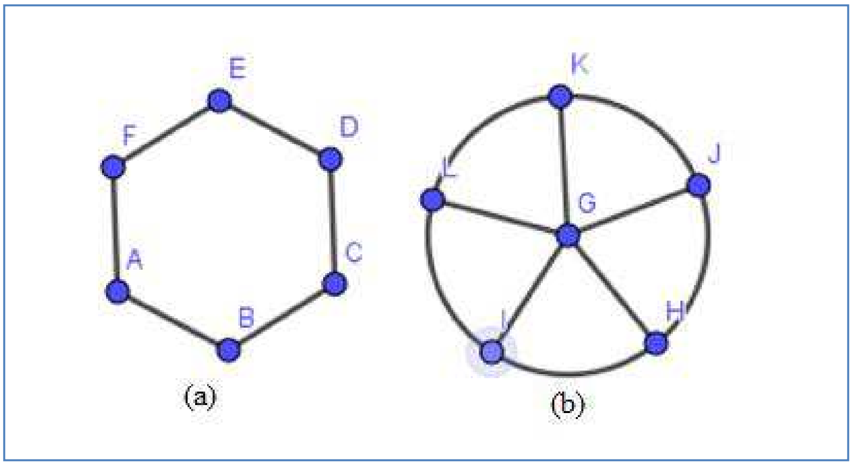
Notação: Um circuito de n vértices é denotado por C_n.

Definição 2.7.8.2: Definimos de roda a soma de N_1 e C_{n-1} $(n \geq 3)$.

Notação: Uma roda com n vértices é denotada por W_n.

Exemplo 2.7.8.1: Considedere a Figura 2.18. Temos na imagem (a) um grafo de circuito, que é denotado por C_6 e na imagem (b) um grafo de roda, denotado por W_6.

Figura 2.18: Grafos de Circuitos e Rodas



Fonte: WILSON, (1996). (Modificada pela Autora)

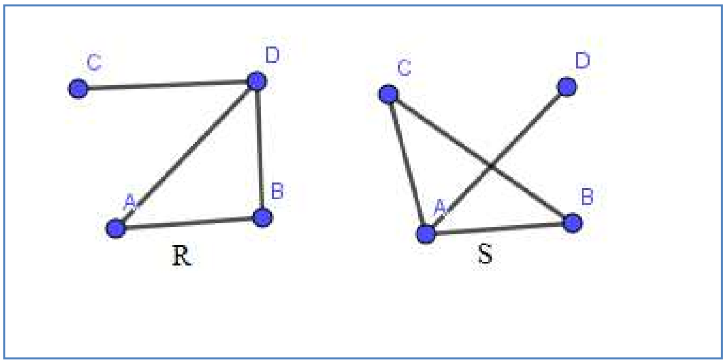
2.7.9 O complemento de um grafo simples

Definição 2.7.9.1: Definimos o complemento de G, e denotamos $\overline{G}$, o grafo simples que tem V(G) como seu conjunto de vértices, e dois vértices são adjacentes em $\overline{G}$, se e somente se não forem adjacentes em G.

Assim, se G tiver n vértices, então $\overline{G}$ pode ser construído removendo de K_n todas as arestas de G (G sendo considerado como um subgrafo de K_n).

Exemplo 2.7.9.1: Considere Figura 2.19, onde temos os grafos R e S. Note que o grafo S é o complementar do grafo R. Além disso, se somarmos R e S obtemos um grafo completo, como na Figura 2.10.

Figura 2.19: Grafos



Fonte: Autoria Própria.

Observe que o complemento de um grafo completo é um grafo nulo e o complemento de um grafo regular é regular.

2.8 Resultados importantes

Existem alguns resultados importantes na teoria dos grafos, dois deles são os teoremas a seguir. Uma maneira para se provar os teoremas é construindo um grafo, ou seja, arestas por arestas, e observar como os graus mudam.

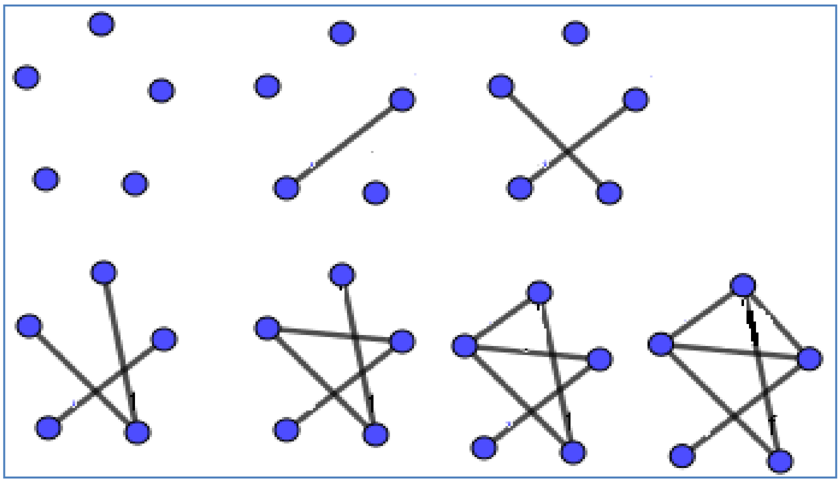
Teorema 2.8.1: Em todo grafo, o número de vértices com grau ímpar é par.

Prova: Considere um grafo nulo, logo o grau de todo vértice é zero, assim o número de vértice com grau ímpar é zero, que é um número par. Se fizermos a ligação de dois de seus vértices por uma aresta, teremos as seguintes possibilidades:

(i) se ambas as extremidades da nova aresta tinham grau par, aumentamos de 2 o número de vértices com grau ímpar;
(ii) se ambas as extremidades da nova aresta tinham grau ímpar, diminuímos de 2 o número de vértices com grau ímpar;
(iii) se uma extremidade da nova aresta tinha grau par e a outra tinha grau ímpar, então não mudamos o número de vértices com grau ímpar.

Se continuarmos, chegaremos que se o número de vértices com grau ímpar era par antes de se adicionar a nova aresta, ele permaneceu par após esse passo. Como iniciamos a construção a partir de um grafo cujo número de vértices com grau ímpar é par (grafo nulo) o resultado segue. ■

Figura 2.20: Grafos com cinco vértices.



Fonte: LOVÁSZ; PELIKÁN e VESZTERGOMBI, 2003.

Teorema 2.8.2: A soma dos graus de todos os vértices em um grafo é duas vezes o número de arestas.

Prova: Seja G um grafo e uv uma aresta de G. Note que na contagem dos graus dos vértices de G, a aresta uv é contada duas vezes (uma no grau de u e outra no grau de v), como isso ocorrerá para toda aresta de G, se n é a soma dos graus dos vértices de G, então o número de arestas de G será $^{n}/_{2}$, ou seja, a soma dos graus dos vértices de G é duas vezes o número de arestas. ■

2.9 Caminhos e ciclos

Definição 2.9.1: Dado um grafo G, dizemos que uma *sequência de arestas* em G é uma sequência finita da forma $v_0v_1, v_1v_2, \dots, v_{m-1}v_m$. Também podemos denotar uma sequência de arestas por $v_0 \to v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_m$.

Definição 2.9.2: Definimos um *caminho* de um grafo como uma sequência de arestas distintas, além disso, os vértices v_o, $v_{1,}$..., v_m são distintos (exceto $v_o = v_m$).

O número de arestas que um caminho tem é justamente seu comprimento.

Exemplo 2.9.1: Observe a Figura 2.21. Se percorremos o caminho que parte do vértice A e vai até o vértice B, temos uma seqüência de vértice, onde A é o vértice incial e B é o vértice final. Se o caminho for a sequência A→C→D→E→B, temos um caminho de comprimento 4.

Figura 2.21: Grafos com cinco vértices.

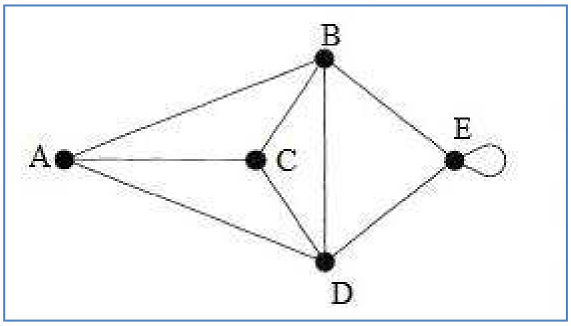
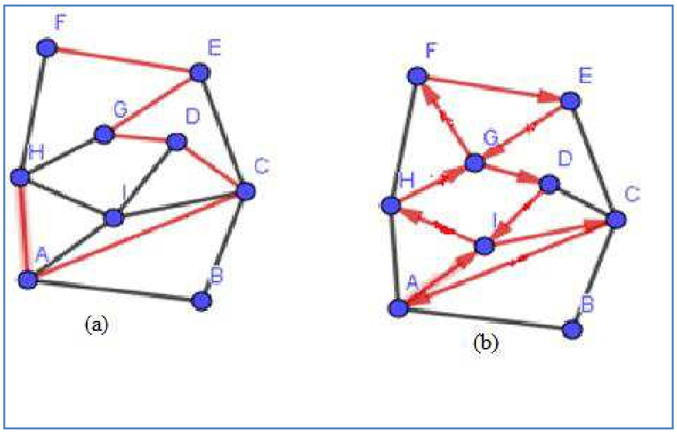


Figura 2.21: WILSON, (1996).

Definição 2.9.3: Definimos *trilha* como uma sequência de arestas, onde não há repetição de arestas.

Exemplo 2.9.2: Considere a Figura 2.22. O grafo da imagem (a) representa um caminho, pois na sequência FEGDCAH nenhum vértice e nenhuma aresta se repetem, por outro lado o grafo da imagem (b) é uma trilha, pois na sequência FEGDICAIHGF alguns vértices se repetem, mas nenhuma aresta se repete.

Figura 2.22: Grafos: caminho (a) e trilha(b).



Fonte: Autoria Própria.

Um caminho simples ou trilha é fechado se termina no mesmo vértice que inicia.

Definição 2.9.4: Chamamos de *ciclo* um caminho fechado de um grafo que começa e termina no mesmo vértice, de tal forma que nenhum vértice ou aresta apareça mais de uma vez no caminho, exceto o vértice que começa e termina.

Um grafo é acíclico, se não tem ciclos.

Exemplo 2.9.3: Observe a Figura 2.21. Temos dois ciclos: um formado pela aresta EE (um laço) e outro formado pelas arestas ABDA (o mesmo começa e termina no vértice A).

OBSERVAÇÃO: Note que um grafo conexo pode ser definido da seguinte forma: um grafo é dito conexo se dado qualquer par de vértices v e w de G há um caminho de v para w, ou seja, um grafo está conexo se, e somente se, houver um caminho entre cada par de vértices.

TEOREMA 9.1: Se G é um grafo bipartido, então cada ciclo de G tem comprimento par.

Prova: Como G é bipartido, podemos dividir o seu conjunto de vértices em dois conjuntos disjuntos A e B. Deste modo, cada aresta de G une um vértice de A e um vértice de B. Seja $v_0 \to v_1 \to \cdots \to v_m \to v_0$ um ciclo em G, e assumiremos (sem perda de generalidade) que v_0 está em A. Assim, v_1 está em B, v_2 está em A, e assim por diante. Uma vez que v_m deve estar em B (pois v_0 está em A), o ciclo tem comprimento par. ■

TEOREMA 9.2: Seja G um grafo simples com n vértices. Se G tiver k componentes, então o número m de arestas de G satisfaz

$$n-k \leq m \leq \frac{1}{2}(n-k)(n-k+1).$$

Prova: *Primeira parte do teorema:* Para provar que $m \geq n-k$, faremos uma indução sobre o número de arestas de G. Se $m=0$, então o grafo será nulo, e assim $n=k$. Daí, $m \geq n-k$.

Suponha que a propriedade vale para m', ou seja,

$$m' \geq n - k.$$

Assim, podem acontecer três casos diferentes:

1º Caso: O primeiro caso é quando acresentamos uma aresta e os vértices dessa aresta coincidem com vértices existentes no grafo, ou seja,

$$m' + 1 \geq m' \geq n - k,$$

logo, satisfaz a hípotese de indução.

2º Caso: No segundo caso, é quando acrecentamos uma aresta e apenas um vértices coincidem com um vértices já existente no grafo, ou seja,

$$m' + 1 \geq (n + 1) - k$$

o que satisfaz a nossa hipotese de indução.

3º Caso: O terceiro caso é quando acrecentamos uma aresta e nenhum dos dois vértices dessa aresta acrecentada coincidem com os vértices já existentes no grafo, ou seja, se eu considerar

$$m' + 2 \geq (n + 2) - k$$

$$m' + 2 - 1 \geq (n + 2) - k - 1$$

$$m' + 1 \geq (n + 2) - (k + 1)$$

o que satisfaz a nossa hipotese. Logo vale para m', ou seja, para $m' \geq n - k$.

Fórmula do número de arestas de um grafo completo: seja k_n um grafo completo com n vértices. Considere v um vértice de k_n. Como k_n é completo, v é adjacente aos $n - 1$ demais vértices, isto é, existem $n - 1$ arestas conectando v aos demais vértices de k_n, o número total de arestas será $n(n - 1)$. No entanto, cada aresta é contada duas vezes. Portanto, o número total de arestas é

$$\frac{1}{2}n(n - 1). \qquad (*)$$

Segunda parte do teorema: Para provar o outro lado da desigualdade, considere cada componente C_i de G um grafo completo com n_i vértices. Portanto, por $(*)$, temos que $\frac{1}{2}n_i(n_i-2)$. Além disso, é possível mostrar que

$$\sum_{i=1}^{k} {n_i}^2 \leq n^2-(k-1)(2n-k). \quad (**)$$

Assim, o número máximo de arestas de G é

$$\tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{i=1}^{k} n_i(n_i-1) = \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} {n_i}^2 - \tfrac{n}{2} \text{ por } (**) \text{, temos que}$$

$$\leq \frac{1}{2}[n^2-(k-1)(2n-k)]-\frac{n}{2}$$

$$=\frac{1}{2}[n^2-2nk+2n+k^2-k-n]$$

$$=\frac{1}{2}[(n-k)^2+(n-k)]$$

$$=\frac{1}{2}[(n-k)(n-k+1)] \quad (***)$$

Como $(***)$ é o número máximo de arestas em G, se m é o número exato de arestas, temos

$$m \leq \tfrac{1}{2}(n-k)(n-k+1). \qquad \blacksquare$$

2.10 GRAFOS EULERIANOS

Seja G um grafo que possui m arestas. Dizemos que G é *Euleriano* se for possível traçar uma trilha fechada de comprimento m em G.

OBSERVAÇÃO: Para que um grafo seja Euleriano tem que ser possível passar por todas as arestas dele apenas uma única vez e partindo de um nó e retornando ao mesmo.

Por outro lado, quando se tem uma trilha aberta de comprimento m no grafo G, esse grafo não é Euleriano e sim *semi-Euleriano*, melhor, ele é semi-Euleriano quando é possível passar por todas as arestas apenas uma vez, mas parte de um nó e termina em outro.

Esse grafo recebe esse nome devido o problema das sete pontes de Konigsberg, que já foi relatado anteriormente nesse trabalho. Como Euler foi o primeiro a chegar a uma solução do problema, então esse tipo de grafo recebeu o nome de grafo Euleriano. Assim, surgem alguns resultados importantes.

Lema 2.10.1: Se G é um grafo no qual o grau de todo vértice é pelo menos 2, então G contém um ciclo.

Prova: Se G tiver algumas arestas múltiplas ou laços, o resultado é trivial, pois um laço é um ciclo e arestas múltiplas formam um ciclo. Podemos, portanto, supor que G é um grafo simples. Seja v um vértice de G. Construímos um caminho $v \to v_1 \to v_2 \to \cdots$ indutivamente, escolhendo v_1 para ser qualquer vértice adjacente a v e, para cada $i > 1$, escolhendo v_{i+1} para ser qualquer vértice adjacente a v_i exceto v_{i-1}; a existência de um tal vértice é garantida por nossa hipótese, que diz que o grau é pelo menos 2. Uma vez que G tem um número finito de vértices, então devemos escolher um vértice que tenha sido escolhido antes. Se v_k for o primeiro vértice escolhido que se repete, então parte do caminho situado entre as duas ocorrências de v_k é o ciclo requerido. ■

Teorema 2.10.1: Um grafo conexo G é Euleriano se, e somente se, o grau de cada vértice de G é par.

Prova: (=>) Suponha que P seja uma trilha Euleriana de G. Sempre que P atravessa um vértice, há uma contribuição de 2 para o grau desse vértice. Como cada passagem ocorre exatamente uma vez em P, cada vértice deve ter grau par.

(<=) A prova é por indução sobre o número de arestas de G. Suponha que o grau de cada vértice seja par. Uma vez que G é conexo, cada vértice tem grau pelo menos 2 e, pelo lema anterior, G possui um ciclo C. Se C contém todas as arestas de G, a prova está completa. Caso contrário, removemos de G as arestas de C para formar um novo grafo, possivelmente desconexo. Seja H um subgrafo com menos arestas que G e em que cada vértice ainda tem grau par. Pela hipótese de indução, cada componente de H possui uma trilha Euleriana. Uma vez que cada componente de H tem pelo menos um vértice em comum com C, por conexão, obtemos a trilha Euleriana requerida de G, seguindo as arestas de C até um vértice não isolado de H ser alcançado, rastreando a trilha euleriana da componente de H que contém esse vértice, e depois continuando ao longo das arestas de C até alcançar um vértice pertencente a outro componente de H, e assim por diante. Todo o processo termina quando retornamos ao vértice inicial. ■

Corolário 2.10.1: Um grafo conexo é Euleriano se, e somente se, o seu conjunto de arestas pode ser dividido em ciclos disjuntos.

Prova: (=>) Suponhamos G um grafo conexo Euleriano. Pelo teorema 2.10.1, se o grafo é conexo Euleriano, o grau de cada vértice de G é par. Assim, pelo lema 2.10.1, G contém um ciclo C_1. Se C_1 contém todas as arestas de G, o resultado segue. Caso contrário, faça G-C_1. Note que cada vértice do novo grafo continua com grau pelo menos 2. Assim, esse grafo contém um ciclo C_2. Se C_2 contém todas as arestas desse grafo, o resultado segue. Caso contrário, repetimos o processo até eliminarmos todas as arestas de G.

(<=) Suponhamos G um grafo que pode ser decomposto em ciclos disjuntos. Como todo vértice de um ciclo é de grau par, o grau de cada vértice de G é necessariamente par. Então G é um grafo Euleriano. ■

Corolário 2.10.2: Um grafo conexo é semi-Eulionário se, e somente se, ele tiver exatamente dois vértices de grau ímpar.

Prova: (=>) Considere um G grafo de comprimento m semi-euleriano, ou seja, G possui uma trilha aberta que começa em v_k e termina em v_p e tem comprimento m. Como a trilha é aberta, temos que $v_k \neq v_p$. Logo, tanto v_k, quanto v_p possuem graus ímpares, pois a trilha não volta por onde começou.

(<=) Seja G um grafo conexo com um par de vértice v_k e v_p com grau ímpar. Pelo teorema 2.10.1, acrescentando uma aresta v_k a v_p, os graus de todos os vértices se tornam pares, e existe uma trilha fechada de comprimento m+1 que começa e termina em v_k, e uma trilha aberta de comprimento m que começa em v_k e termina em v_p, ao qual descreve um caminho semi-euleriano. ■

Definição 2.10.1: Definimos *ponte* de um grafo uma aresta cuja sua remoção deixa o grafo desconexo.

Teorema 2.10.2: Seja G um grafo Euleriano. Então, a seguinte construção é sempre possível, e produz uma trilha Euleriana de G. Comece em qualquer vértice e atravesse as arestas de forma arbitrária, sujeito apenas as seguintes regras:

(i) apague as arestas à medida que são percorridas, e se algum vértice isolado for obtido, apague eles também;
(ii) em cada estágio, use uma ponte somente se não houver alternativa.

Prova: Mostramos primeiro que a construção pode ser realizada em cada etapa. Suponha que partimos do vértice u e chegamos ao vértice v. Se v≠u, então o subgrafo H que permanece é conexo e contém apenas dois vértices de grau ímpar, u e v (pois nesse caso H é semi-Euleriano). Para mostrar que o a construção pode ser realizada, devemos mostrar que a remoção da próxima aresta não desconecta H ou, de forma equivalente, que v é incidente com no máximo uma ponte. Se a remoção da próxima aresta desconecta o grafo, então existe uma ponte vw tal que uma componente K (pois tinha grau par em G) de H-vw contém w, mas não contém u. Como o vértice w tem um grau ímpar em K, algum outro vértice de K também deve ter um grau ímpar (pois é semi-Euleriano), dando a contradição necessária, pois G é Euleriano e não possui vértice de grau ímpar. Se v = u, a prova é parecida, desde que existam arestas incidentes em u. Resta apenas mostrar que esta construção sempre produz uma trilha Euleriana. Mas isso é claro, uma vez que não pode haver arestas de G sem coincidir com u, pois de outra forma, a remoção de uma aresta anterior adjacente para uma dessas arestas teria desconectado o grafo, contradizendo (ii) do teorema. ■

2.11 Grafos Hamiltonianos

Como já vimos, para que uma grafo seja Euleriano tem que existir uma trilha fechada que passe por todas as arestas. Nos grafos Hamiltonianos a única coisa que é diferente é que também tem que passar em cada nó uma única vez, ou seja, existe uma trilha fechada que passa exatamente uma vez através de cada vértice de G. Essa trilha é possível desde de que esse grafo seja um ciclo, exceto quando G é o grafo N_1. Assim, esse ciclo é Hamiltoniano e G é um grafo hamiltoniano. Segundo Wilson (1996) “O nome 'ciclo hamiltoniano' decorre do fato de Sir William Hamilton ter investigado sua existência no grafo dodecaedral. Um grafo G não Hamiltonaino é semi-hamiltoniano se tiver um caminho passando por todos os vértices.

Teorema 2.11.1: Se G é um grafo simples com n vértices (n≥ 3), e se

$$\rho(\mathrm{v}) + \rho(\mathrm{w}) \geq \mathrm{n}$$

para cada par de vértices não adjacentes v e w, então G é Hamiltoniano.

Prova: Suponha que o teorema seja falso. Então considere G um grafo não hamiltoniano com n vértices, satisfazendo a condição dada nos graus dos vértices. Ao adicionar arestas extras, se necessário, podemos assumir que G é não-Hamiltoniano maximal, no sentido de que a adição de qualquer outra aresta dá um grafo Hamiltoniano. (Observe que adicionar uma aresta extra não viola a condição no grau do vértices) Segue que G contém um caminho $v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_n$ passando por cada vértice. Mas, como G é não-Hamiltoniano, os vértices v_1 e v_n não são adjacentes, e assim ρ(v_1)+ρ(v_n)≥ n (caso contrário, essa soma daria 2). Assim, deve haver algum vértice v_i adjacente a v_1, com v_{i-1} sendo adjacente a v_n. Mas isso nos dá uma contradição uma vez que

$$v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_{i-1} \to v_n \to v_{n-1} \to \cdots \to v_{i+1} \to v_i \to v_1$$

é então um ciclo hamiltoniano. ■

Corolário 2.11.1: Se G é um grafo simples com n (≥ 3) vértices, e se ρ(v)≥ $n/2$ para cada vértice v, então G é Hamiltoniano.

Prova: Temos por hipótese que qualquer vértice v tem grau $\rho(v) \geq n/2$, assim, somando o grau de quaisquer dois vértices, inclusive os não-adjacentes, temos que

$$\rho(v) + \rho(w) \geq \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n.$$

Logo, pelo teorema 2.11.1, G é Hamiltoniano. ■

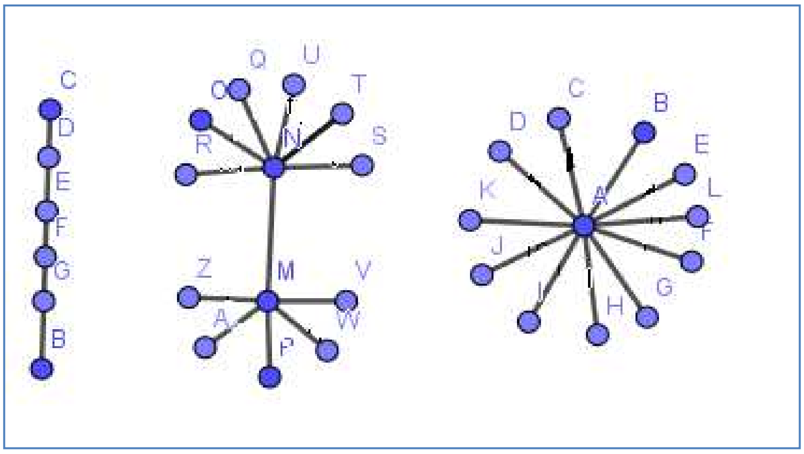
2.12 ÁRVORES

Nesta seção será apresentado um caso de grafos que recebe o nome de árvore.

Definição 2.12.1: Definimos árvore um grafo conexo que não contém qualquer ciclo como um subgrafo.

Uma floresta é uma união de árvores, e uma floresta conexa é uma árvore. Uma árvore é um dos grafos mais simples de serem compreendidos. Na figura 2.23, podemos obsevar alguns exemplos de árvores.

Figura 2.23: Árvores



Fonte: Autoria Própria

Iremos apresentar alguns teoremas que apresentam propriedades importantes das árvores.

Teorema 2.12.1: Seja G um grafo com n vértices. Em seguida, as seguintes declarações são equivalentes:

(i) G é uma árvore;

(ii) G não contém ciclos e possui arestas n-1;

(iii) G é conexo e possui arestas n-1;

(iv) G é conexo, e cada uma das arestas é uma ponte;

(v) Dois vértices de G estão conectados exatamente por um caminho;

(vi) G não contém ciclos, mas a adição de qualquer nova aresta cria exatamente uma ciclo.

Prova: Se n = 1, os seis resultados são triviais; portanto, assumimos que $n \geq 2$.

Seja G uma árvore. Então, por definição, G não possui ciclos. Deste modo, temos que:

(i) => (ii). A remoção de qualquer aresta deve desconectar G em dois grafos, cada um dos quais é uma árvore. Segue por indução que o número de arestas em cada uma dessas duas árvores é menor do que o número de vértices. Deduzimos que o número total de arestas de G é n - 1.

(ii) => (iii). Se G é desconexo, cada componente de G é um grafo conexo sem ciclos e portanto, como na parte anterior, o número de vértices em cada componente excede o número de aresta em 1. Segue que o número total de vértices de G excede o número total de arestas em pelo menos 2, o que contradiz o fato de que G possui n-1 arestas.

(iii) => (iv). A remoção de qualquer aresta resulta em um grafo com n vértices e n-2 arestas. Pelo teorema 9.2, os vértices são desconexos.

(iv) => (v). Como G é conexo, cada par de vértices está conectado por pelo menos um caminho. Se um dado par de vértices estiver conectado por dois caminhos, eles determinam um ciclo, contradizendo o fato de cada aresta ser uma ponte.

(v) => (vi). Se G contém um ciclo, então, dois vértices no ciclo estariam conectados por pelo menos dois caminhos, o que é uma contradição. Logo G não contém ciclos. Se uma aresta e for adicionada a G, então, uma vez que os vértices incidentes com e já estão conectados em G, um ciclo é criado.

(vi) => (i). Note que para G ser uma árvore, falta mostrar que ele é conexo. Suponha que G seja desconexo. Se adicionar a G qualquer aresta juntando um vértice de um componente para um vértice em outro, então nenhum ciclo é criado, o que é uma contradição. Logo G é conexo, e portanto, é uma árvore. ■

Corolário 2.12.1: Se G for uma floresta com n vértices e k componentes, então G tem n-k arestas.

Prova: a prova desse corolário é trivial, basta aplicar o item (iii) do teorema anterior a cada componente de G. Logo, G tem n-k arestas. ■

Dado um grafo G conexo, podemos escolher um ciclo e retirar qualquer aresta que o grafo ainda continua conexo, continuando esse processo com ciclos restantes até que não haja ciclos, restará uma árvore que conecta todos os vértices de G, a mesma é chamada de árvore geradora de G. Porém, se G é um grafo arbitrário com n vértices, m arestas e k componentes, então podemos realizar o mesmo processo em cada componente de G e o resultado é chamado de floresta geradora, e o número total de arestas removidas neste processo é o ciclo de G, denotado por y(G), onde y(G) = m-n + k (onde m é o número total de arestas do grafo). Agora apresentaremos um resultado simples em relação às florestas geradoras.

2.13 Grafos Planares

Será que todos os grafos são planares? Essa é uma pergunta que iremos responder, mas adiante, precisamos primeiramente saber o que são grafos planares.

Definição 2.13.1: Definimos *grafos planares* como sendo um grafo desenhado no plano de tal maneira que duas arestas não se interceptam exceto em um vértice no qual elas são incidentes.

OBSERVAÇÃO: Assim, um grafo planar é um grafo que é isomorfo a um grafo plano.

> A representação gráfica de um grafo é definida como a realização planar desse grafo. Um grafo é planar se for possível redesenhá-lo em um plano, mantendo a mesma estrutura de incidência de seus vértices e arestas, de maneira que suas arestas não se intersectem. Às vezes, a realização planar de um grafo não satisfaz essas condições, o que não quer dizer que não podemos imediatamente dizer que o grafo não é planar. Em muitos casos é possível encontrar uma representação planar para um grafo deformando suas arestas, de modo a torná-lo subconjunto de um plano. (JUNIOR E ALMEIDA, 2014, pág. 6)

Nem todos os grafos são planares, o resultado a seguir é uma prova que isso é verdade.

Teorema 2.13.1 (Fórmula de Euler): Num grafo planar conexo com n vértices, a arestas e f faces, vale que $n + f = a + 2$. ■

Teorema 2.13.2: O grafo completo K_5 (cinco vértices) não é um grafo planar.

Prova: Vamos considerar o grafo K_5, onde $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ são os cinco vértices desse grafo. Como o grafo é completo por hipótese, então temos um ciclo Hamiltoniano em G. Assim, esses vértices estão ligados por uma aresta, se formos acrescentando arestas, podemos observar que as últimas arestas vão se cruzar com pelo menos outra, mas num grafo planar isso não pode acontecer. Assim, o grafo k_5 é não planar. ■

Teorema 2.13.3: Um grafo planar sobre n vértices tem no máximo 3n-6 arestas.

Prova: suponha que o grafo tenha n vértices, a arestas, e f faces. Sabemos pela formula de Euler que

$$n + f = a + 2.$$

Obtemos outra relação entre esses números se contarmos arestas face - por - face. Cada face tem pelo menos três arestas sobre sua fronteira, portanto contamos pelo menos 3f arestas. Toda aresta é contada duas vezes, portanto, o número de aresta é pelo menos $3f/2$. Em outras palavras, $f \leq \frac{3}{2}e$. Usando isso com a fórmula de Euler, obtemos

$$e + 2 = n + f \leq n + \frac{2}{3}e,$$

Que após a rearrumação chega-se a $e \leq 3n - 6$. ■

Nesse capítulo estudamos alguns conceito básicos sobre teoria dos grafos, que é de fundamental importância para nossos estudos. No próximo capítulo vamos fazer um pequeno estudo sobre um teorema muito inportante na teoria dos grafos, que é o teorema das 4 cores.

Capítulo 3

3. TEOREMA DAS QUATRO CORES

Neste capítulo iremos apresentar um dos teoremas mais importante da teoria dos grafos. O mesmo surgiu apartir de uma pintura de um mapa, ou seja, esse teorema é ultilizado na coloração de mapa, de regiões, países, entre outros, que podem ser reais ou imaginários, onde os países que possuem fonteira não podem ter cores iguais.

Esse teorema surgiu na Inglaterra com Francis Guthrie, que segundo Sousa (2001), era um advogado, botânico e além disso, um matemático. O mesmo tentava pintar um mapa da Inglaterra de modo que dois estados vizinhos não tivessem a mesma cor, e assim conjecturou em 1852 que só era necessário quatro cores para colorir qualquer mapa. De acordo com Sousa (2001), Francis Guthrie tinha um irmão mais novo chamado Frederick Guthrie e o mesmo era aluno do matemático Augustus De Morgan.

De acordo com Sousa (2001), o irmão mais novo de Francis apresentou a conjectura de Francis ao seu professor De Morgan em outubro de 1852, para que o ele pudesse dar sua opinião, o próprio achou a conjetura um problema muito interessante e escreveu uma carta relatando o problema para Sir William Rowan Hamilton, porém, Hamilton não teve o mesmo ponto de vista e interesse pela conjectura.

> Em 23 de Outubro de 1852, Frederick apresentou a conjectura do seu irmão mais velho ao professor de De Morgan. Este ficou muito entusiasmado e, no mesmo dia, escreveu uma carta a Sir William Rowan Hamilton na qual explicava o problema. (Recorde-se a propósito que, de entre os vários feitos famosos de Hamilton, se encontra a descoberta dos quaterniões). Esta carta foi conservada e encontra-se hoje nos arquivos do Trinity College em

> Dublin. Contrastando com a animação de De Morgan, Hamilton não achou o problema interessante. Respondeu quatro dias mais tarde dizendo que tão cedo não tencionava debruçar-se sobre a questão. (SOUSA, 2001, pág. 132)

Apesar da falta de interesse de Hamilton, De Morgan continuou a pesquisar e estudar sobre o assuntou, e assim tornou conhecida na comunidade científica a conjectura das quatro cores. Segundo Sousa (2001, pág.132), "Depois de 1860, por um período de cerca de 20 anos, o interesse dos matemáticos pelo Problema das Quatro Cores esmoreceu. Pelo menos, não aparece discutido na literatura matemática desse tempo. Mas não foi esquecido.". Assim, em 1878, um advogado de renome, Arthur Cayley que dedicava seu tempo livre a matemática, voltou a questionar sobre o problema, o mesmo fez e publicou uma pequena análise sobre a conjectura.

O Teorema das Quatro Cores durou quase uma década para ter uma prova concreta. Porém durante esse tempo foi tentado prová-lo, mas não obtendo resultado certo. A dificuldade em provar esse teorema foi extrema que se tornou um problema-desafio.

> [...]. Por décadas ele foi jogado para cima por matemáticos como uma charada simples, porém enganadora, até que as dificuldades de se obter uma prova tornou-se aparente na década de 1870. [...]. A dificuldade do problema foi subestimada ao ponto de que em 1886 ele era posto no Clifton College como um problema-desafio aos estudantes; parte do requisito era que "Nenhuma solução pode exceder uma página, 30 linhas de manuscrito, e uma página de diagramas.". (LOVÁSZ; PELIKÁN e VESZTERGOMBI, 2003, pág. 201)

De acordo com Sousa (2001), em 1879 o advogado Alfred Bray Kempe, que tinha sido aluno de Cayley, publicou a primeira demonstração completa da conjectura das quatro cores, a mesma foi estudada e discutida por vários matemáticos importantes, que deram suas sugestões para melhoria da demonstração. Porém, apenas em 1879, a conjectura das quatro cores passou a ser conhecida como o Teorema das Quatro Cores.

> Em 1879, Alfred Bray Kempe, que era também um advogado e que tinha estudado no Trinity College de Cambridge, onde fora aluno de Cayley, publicou uma demonstração completa do Teorema das Quatro Cores no *American Journal of Mathematics*. A demonstração de Kempe foi estudada por vários matemáticos de renome, alguns deles tendo feito sugestões para melhorar a demonstração. Portanto, em 1879, considerava-se definitivamente estabelecido o Teorema das Quatro Cores. (SOUSA, 2001, pág. 133)

Segundo Sousa (2001), só por volta de 1890, Percy John Heawood descobriu um erro na demonstração de Kempe, porém o mesmo não conseguiu chegar a uma prova certa do teorema.

Segundo Lovász; Pelikán e Vesztergombi (2003), depois da frustrada prova de Kempe, vários matemáticos profissionais e amadores tentaram chegar a uma prova correta do teorema das quatro cores, fazendo com que assim várias provas erradas fossem publicadas e depois negadas, isso durou por mais de um século.

De acordo com Lovász; Pelikán e Vesztergombi (2003), foi graças as tentativas de provar o teorema das quatro cores, que a Teoria dos Grafos passou a ser conhecida e a crescer. Porém, ainda é uma área da matemática que não é muito conhecida.

Finalmente, em 1976, foi possível chegar a uma demonstração verdadeira do teorema das quatro cores, essa demonstração foi feita por Kenneth Appel e Wolfgang Haken dois matemáticos que estudaram na universidade de Illinois. Quando se espalhou a notícia da descoberta, teve uma euforia entre os matemáticos, já que havia sido demonstrado um dos teoremas mais questionado da época. Porém, perdeu um pouco da sua glória quando descobriram que a demonstração foi feita com o auxilio do computador.

> [...]. Quando a notícia do feito se espalhou pelos vários departamentos de matemática, houve um enorme entusiasmo, muitos professores interromperam as aulas para comemorar. Mas a euforia esfriou em muitos deles quando souberam que essa demonstração incluía mais de mil horas do uso de computadores de alta velocidade. A prova era demasiado longa para ser verificada à mão e havia sempre a possibilidade de os computadores terem cometido algum erro de difícil detecção. [...]. (SOUSA, 2001, pág. 134)

Assim, depois de 90 anos da apresentação do problema, Kenneth Appel e Wolfgang Haken conseguiram chegar a uma demonstração, porém, com a ajuda de um IBM 360, em Urbana (Illinois), onde segundo Lovász; Pelikán e Vesztergombi (2003), "A solução real - 90 anos mais tarde - usou mais de 1000 horas de tempo de CPU!".

Essa demonstração não foi tão aceita, na época, mas hoje em dia já é aceita na comunidade matemática, porém continua sendo polêmica, já que segundo Sousa (2001), a enorme quantidade de cálculo feita pelo computador é impossível de ser verificada rigorosamente pelo ser humano, nem que o mesmo passe toda a sua vida analisando.

Até hoje ainda não foi possível dispensar o uso dos computadores na demonstração do teorema das quatro cores, porém essas provas vêm se aprimorando e ficando mais simples. O teorema das quatro cores, diz o seguinte:

TEOREMA 3.1 (Teorema das Quatro Cores): Todo grafo planar pode ser colorido com quatro cores.

A prova desse teorema no nosso trabalho torna-se inviável, e também não é o nosso objetivo. Iremos fazer uso do mesmo para demonstrar outro teorema, não menos importante, conhecido como o teorema das cinco cores.

De acordo com Sousa (2001), o mesmo matemático responsável por mostrar que Kempe havia se equivocado na demonstração do teorema das quatro cores, foi responsável por demonstrar o teorema das cinco cores. Assim, Percy John Heawood demonstrou que para colorir um mapa, não são necessárias mais de cinco cores, e assim os países com fronteiras comum terão cores diferentes.

> Mas, em 1890, Percy John Heawood provou que a demonstração de Kempe tinha um erro. No mesmo artigo, Heawood lamentava não ter sido capaz de obter nenhuma demonstração alternativa do teorema. Conseguiu no entanto dar mais um passo positivo, nomeadamente, provou o Teorema das Cinco Cores. Isto é, demonstrou que não são necessárias mais do que cinco cores para colorir um mapa plano onde países de fronteira comum têm cores diferentes. Heawood estudou também a questão do número de cores necessárias para colorir mapas sobre vários tipos de superfícies fechadas, para além da esfera, as chamadas superfícies esféricas com “asas”, [...]. Estas questões também já tinham sido abordadas por Kempe. (SOUSA, 2001, pág. 133)

O Teorema que iremos provar é o das cinco cores, porém para sua demonstração será necessário o lema a seguir:

LEMA 3.1: Todo grafo planar tem um ponto de grau no máximo 5.

Prova: Esse lema segue da Fórmula de Euler, mais especificamente do teorema que: Um grafo planar sobre n vértices tem no máximo $3n - 6$ arestas. Assim, suponha que todo vértice tenha pelo menos grau 6. Contando as arestas vértices a vértices, temos 6n arestas. Como cada aresta é contada duas vezes, assim o número de arestas é 3n o que contradiz o teorema 2.13.2. Logo, concluímos que todo grafo planar tem um ponto de grau no máximo 5. ■

Agora iremos apresentar o teorema principal do nosso trabalho, que é o teorema das cinco cores.

TEOREMA 3.2 (Teorema das Cinco Cores): Todo grafo planar pode ser colorido com cinco cores.

Prova: Para provar o teorema usaremos indução sobre o número de vértices do grafo. Para grafos com cinco ou menos vértices, o teorema e obviamente válido, já que podemos atribuir a cada vértice uma cor diferente. Na hipótese de indução temos que: Vamos supor que o resultado seja válido para os grafos com n vértices.

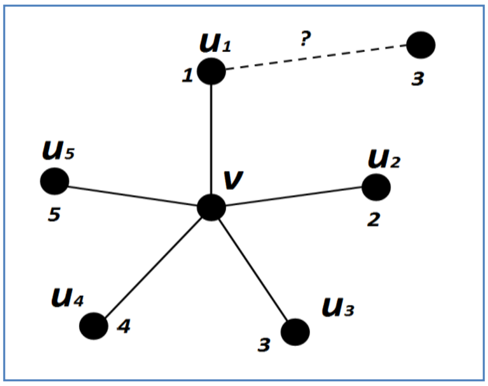
Consideramos um grafo planar G com $n + 1$ vértices. Pelo Lema 3.1, G contém um vértice v com grau menor ou igual a 5. Considere $\mathrm{G}' = \mathrm{G} - \mathrm{v}$. Note que G' também é planar e possui n vértices. Usando a hipótese de indução, G' pode ser colorido com 5 cores. Agora queremos estender essa coloração a G, colorindo o vértice v. Se, entre os vizinhos de v, foram utilizadas apenas 4 cores diferentes, isto significa que disponibilizamos de uma quinta cor para atribuir a v, tornando G colorido por 5 cores.

Se o grau do vértice v é ρ(v) = 5 e seus 5 vizinhos possuem cores diferentes, não temos como associar uma cor a v, pois, com apenas 5 cores, a cor de v necessariamente será igual à de algum de seus vizinhos. Dessa maneira, para atribuirmos uma cor ao vértice v que não seja a mesma de seus vizinhos, deveremos recolorir alguns vértices.

Suponhamos que todo vértice de G, exceto v, esteja colorido com os elementos do conjunto 1, 2, 3, 4, 5, que vamos chamar de cores. Vamos supor ainda que cada vizinho de v esteja colorido com uma cor diferente dentre as disponíveis. Sejam u_1; u_2; u_3; u_4; u_5 os vértices adjacentes a v e, sem perda de generalidade, vamos considerar que u_1 esteja colorido com a cor 1, u_2 com a cor 2 e assim por diante.

Além disso, por questão de organização, vamos considerar os vizinhos de v ordenados em sentido horário, conforme ilustrado na Figura 3.1.

Figura 3.1: Grafo



Fonte: JUNIOR, (2014).

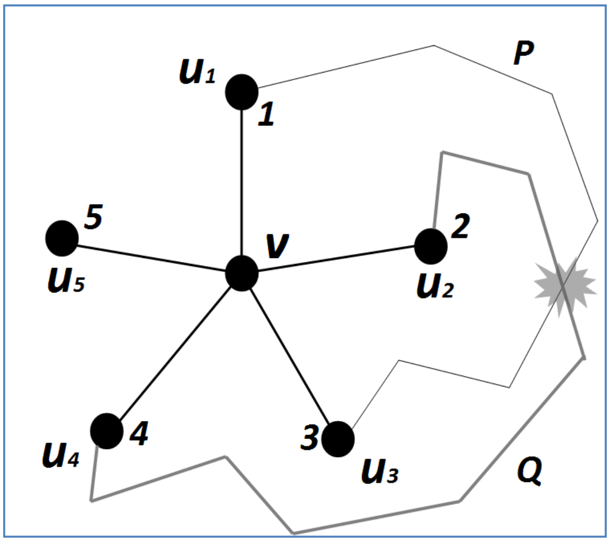
Podemos trocar a cor de um dos vizinhos de v. Vamos mudar, por exemplo, a cor de u_1 de 1 para 3. Agora teríamos a cor 1 disponível para colorirmos o vértice v. O problema é que u_1 pode ter um vizinho que já tenha a cor 3 e, nesse caso, não obteríamos uma coloração própria para G.

Vamos então tomar o subgrafo de G induzido por todos os vértices de cores 1 ou 3. Chamemos de $H_{1;\,3}$ esse subgrafo. Note que os vértices u_1 e u_3 estarão em $H_{1;\,3}$, mas não sabemos se estão na mesma componente, ou seja, numa mesma parte de $H_{1;\,3}$ que possui a propriedade de que a partir de qualquer vértice dessa parte existe um caminho para qualquer outro vértice dessa mesma parte. Se estiverem em componentes separadas, não há caminho entre u_1 e u_3 e, assim, podemos permutar as cores 1 e 3 na componente que contém u_1. Isso nos daria uma coloração própria para G' em que a cor 1 não mais estaria entre os vizinhos de v e, assim, poderíamos atribuir a v a cor 1.

Se u_1 e u_3 estiverem na mesma componente, a permuta entre as cores 1 e 3 não nos disponibiliza nenhuma cor para v. Então, vamos proceder como anteriormente, mas agora tentando recolorir u_2 com a cor 4. Tomemos $H_{2;\,4}$, um subgrafo de G induzido nos vértices de cor 2 ou cor 4. Se u_2 e u_4 estiverem em componentes separadas de $H_{2;\,4}$ podemos permutar as cores na componente em que está u_2, por exemplo. Essa coloração modificada ainda é própria de G' e poderíamos colorir v com a cor 2 obtendo, assim, 5 cores própria para G.

O problema é que, tal como antes, talvez u_2 e u_4 estejam na mesma componente de $H_{2;\,4}$. Nesse caso, a simples permuta das cores 2 e 4 ainda não nos permite uma coloração própria para G. Se u_2 e u_4 estão na mesma componente, existe uma caminho Q de u_2 até u_4, onde os vértices estão coloridos com as cores 2 e 4. Da mesma forma existe um caminho P entre u_1 e u_3 com vértices coloridos com as cores 1 e 3. Logo, P e Q não têm vértices em comum. Notemos que o caminho P, acrescentado de v, nos dá um ciclo, com u_2 na região interior e u_4 na região exterior ao ciclo, como mostra a Figura 3.2. Assim, Q, ao passar de u_2, na região interior, para u_4, na região exterior, cruzaria com P. Mas isso não pode ocorrer, porque G é planar e, portanto, não possui cruzamento de arestas. Logo, u_2 e u_4 estão em componentes separadas de $H_{2;4}$ e, então, podemos recolorir a componente que contém u_2, por exemplo, disponibilizando a cor 2 para que possamos atribuí-la ao vértice v, encontrando, assim, 5 cores própria para G, o que demonstra o teorema. ■

Figura 3.2: Grafo



Fonte: JUNIOR, (2014).

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao fim deste trabalho, foi possível compreender um pouco sobre essa área da matemática que é não muito estudada no Brasil, mas que é de uma importância imensurável. A realização desse trabalho me proporcionou uma ótima experiência pessoal, pois foi possível estudar algo totalmente novo para mim, que é a teoria dos grafos.

Neste trabalho foi abordado um pouco da vida de um dos grandes matemáticos da história da matemática, um dos grandes precursores da matemática. Foram estudados e apresentados alguns conceitos da teoria dos grafos, onde foi possível observar que os grafos estão relacionados a muitos problemas, que apesar de ter um enunciado simples, tem um significado matemático muito forte e importante. Nesse estudo foi demonstrado um teorema muito importante da teoria dos grafos, porém existem muitos outros resultados importantes.

Os grafos possuem um aspecto meio que lúdico e que fica mais fácil de compreender quando se faz o desenho do mesmo. Assim, acredito que pode ser uma porta para que a Matemática Discreta possa se fazer mais presente nos currículos da Matemática básica brasileira.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] CAVALCANTE, Fabiana Nascimento Santos; SILVA, Severino Domigos da. **Grafos e suas Aplicações**. PUCRS, 2009.

[2] CONTADOR, Paulo Roberto Martins. **Matemática, uma breve história**. Vol. II, São Paulo: editora livraria da Física, 2006.

[3] GARBI, Gilberto Geraldo. **A Rainha das Ciências: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática**. 5ª Ed. São Paulo: editora livraria da Física, 2010.

[4] JUNIOR, Divalde Luiz Froiz. **O Teorema das Cinco Cores.** Sociedade Brasileira de Matemática, 2014.

[5] JUSTINO, Gildeci José. **A Característica de Euler.** UFPB, 2013.

[6] LOVÁSZ, L.; PELIKÁN, J.; VESZTERGOMBI, K. **Matemática Discreta.** Sociedade Brasileira de Matemática, 2003.

[7] JUNIOR, Aluizio Freire da Silva. **Invariantes de Tutte-Grothendieck em Grafos.** CCT - UFCG, 2006.

[8] OYESTEIN Ore, **The four-color problem**, New York: Academic Press, 1967

[9] SOUSA, Lurdes. **O Teorema das Quatro Cores.** Instituto Politécnico de Veseu, 2001.

[10] WILSON, Robin James. **Introduction to graph theory.** 2º ed. LONGMAN, 1996.