UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA E MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

LOANDSON FÉLIX DANTAS BARROS LIMA

O TEOREMA DO PONTO FIXO DE BANACH E O MÉTODO DAS APROXIMAÇÕES SUCESSIVAS

CUITÉ - PB
2018

LOANDSON FÉLIX DANTAS BARROS LIMA

O TEOREMA DO PONTO FIXO DE BANACH E O MÉTODO DAS APROXIMAÇÕES SUCESSIVAS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Matemática da Unidade Acadêmica de Física e Matemática do Centro de Educação e Saúde da Universidade Federal de Campina Grande, como requisito parcial à obtenção do grau de licenciado em Matemática

Orientadora: Prof.ª Dra. Célia Maria Rufino Franco

CUITÉ - PB
2018

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA NA FONTE
Responsabilidade Jesiel Ferreira Gomes – CRB 15 – 256

L732t Lima, Loandson Félix Dantas Barros.

O teorema do ponto fixo de Banach e o método das aproximações sucessivas. / Loandson Félix Dantas Barros Lima. – Cuité: CES, 2018.

33 fl.

Monografia (Curso de Licenciatura em Matemática) – Centro de Educação e Saúde / UFCG, 2018.

Orientadora: Célia Maria Rufino Franco.

1. Espaços métricos. 2. Teorema de Picard. 3. Soluções aproximadas. I. Título.

Biblioteca do CES - UFCG CDU 51

LOANDSON FÉLIX DANTAS BARROS LIMA

O TEOREMA DO PONTO FIXO DE BANACH E O MÉTODO DAS APROXIMAÇÕES SUCESSIVAS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Matemática da Unidade Acadêmica de Física e Matemática do Centro de Educação e Saúde da Universidade Federal de Campina Grande, como requisito parcial à obtenção do grau de licenciado em Matemática

Trabalho de Conclusão de Curso aprovado em 06 de março de 2018.

BANCA EXAMINADORA

Prof.ª Dra. Célia Maria Rufino Franco - UFCG
Orientador

Prof. Dr. Denilson da Silva Pereira Costa - UFCG
Examinador

Prof. Me. Edna Cordeiro de Souza - UFCG
Examinador

RESUMO

Neste trabalho utilizamos a teoria de espaços métricos para apresentar a demonstração do Teorema do Ponto Fixo de Banach. Como aplicação, estudamos o Teorema de Existencia e Unicidade de Solução do problema de valor inicial para diferenciais de primeira ordem, conhecido como Teorema de Picard. O método das aproximações sucessivas foi utilizado para obter soluções aproximadas de equações integrais.

Palavras-chave: Espaços Métricos. Teorema de Picard. Soluções Aproximadas.

ABSTRACT

In this work we use the theory of metric spaces to present the demonstration of the Banach Fixed Point Theorem. As an application, we study the Theorem of Existence and Uniqueness of Solutions to the Initial Value Problem for first order Ordinary Differential Equations, known as Picard Theorem. The method of the successive approximations was used to get approximate solutions of integral equations.

Keywords: Approximate Solutions. Metric Spaces. Picard Theorem.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Este trabalho consiste em apresentar o Teorema do Ponto Fixo de Banach que é o análogo abstrato do método das aproximações sucessivas.

Durante a investigação de um problema físico, que envolva um problema de valor inicial, é natural querer saber se ele tem solução antes de gastar tempo e esforço para resolvê-lo. Além disso, se conseguir encontrar uma solução é interessante saber se deve continuar procurando outras soluções possíveis ou se pode ter certeza de que não existem outras soluções. (Boyce, 2006)

Para problemas de valor inicial de primeira ordem, as respostas a estes questionamentos são dadas pelo teorema de existência e unicidade, cuja demonstração é consequência do Teorema do Ponto Fixo de Banach.

Utilizamos conceitos de análise matemática, como por exemplo, sequência de Cauchy, noções de espaços métricos, convergência uniforme e teoria de Lipschitz para estudar o Teorema do Ponto Fixo de Banach. Como aplicação, reconhecer condições suficientes e/ou necessárias para a existência de solução de um problema de valor inicial de primeira ordem.

No capítulo 1 apresentamos uma breve teoria sobre Espaços métricos e resultados preliminares para o desenvolvimento dos capítulos 2 e 3.

No capítulo 2 apresentamos o Teorema do Ponto Fixo de Banach e sua demonstração.

No capítulo 3, estudamos uma aplicação do Teorema do Ponto Fixo de Banach, que consiste do Teorema de Picard (Teorema de Existência e Unicidade de soluções de equações diferenciais ordinárias). E para finalizarmos, utilizamos o método iterativo para resolver um problema de valor inicial (P.V.I.) e comparamos com a solução via método dos fatores integrantes.

1 RESULTADOS PRELIMINARES

Neste capítulo apresentaremos as noções básicas sobre Espaços Métricos e resultados preliminares para a demonstração do Teorema do Ponto Fixo de Banach.

1.1 Noções de Métrica

Definição 1.1.1 *Seja **M** um conjunto não vazio. Uma função d: $M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$ é chamada de métrica em **M** se vale as seguintes propriedades:*

1. *d(x,y) = 0 $\Leftrightarrow$ x = y $\forall$ x, y $\in$ M;*
2. *d(x,y) $>$ 0, $\forall$ x, y $\in$ M e x $\neq$ y;*
3. *d(x,y) = d(y,x), $\forall$ x, y $\in M$ (Simetria)*
4. *d(x,y) $\leq$ d(x,z) + d(z,y), $\forall$ x, y e z $\in M$ (Desigualdade Triangular)*

Chamaremos o par (M, d) de Espaço Métrico.

Exemplo 1.1.1 *Considere $M = \mathbb{R}$ o conjunto dos números reais e a função* d*: $M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:*

$$\mathrm{d}(x, y) = |x - y|.$$

Afirmamos que d *é uma métrica.*
De fato, sejam quaisquer $x, y, z \in \mathbb{R}$. Se $x = y$ então é imediato que $|x - y| = |x - x| = 0$. Por outro lado, se $|x - y| = 0$ então $x - y = 0$, logo, $x = y$, o que implica que $\mathrm{d}(x, y) = 0$ se e somente se $x = y$. Também, temos que, se $x \neq y$, então temos que $x - y \neq 0$, o que implica em $|x - y| > 0$. Logo, $\mathrm{d}(x, y) > 0$. Além disso,

$$\mathrm{d}(x,y) = |x - y| = |-(x - y)| = |y - x| = \mathrm{d}(y,x).$$

E, por fim, utilizando a desigualdade triangular, obtemos

$$|x - y| = |(x - z) + (z - y)| \leq |x - z| + |z - y|.$$

Exemplo 1.1.2 *Considere agora,*

$$M = \mathbb{R}^N = \{(x_1, x_2, ..., x_N); x_i \in \mathbb{R} \text{ e } i = 1, 2, ..., N\}$$

existem três métricas importantes em $\mathbb{R}^N$. Para $x = (x_1, x_2, ..., x_N)$ e $y = (y_1, y_2, ..., y_N)$, consideremos:

- d_e = $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por:*

$$d_e(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + ... + (x_N - y_N)^2}.$$

Vamos provar que d_e é uma métrica. Sejam $x, y, z \in \mathbb{R}^N$. Daí,

$$d_e(x,x) = \sqrt{(x_1 - x_1)^2 + (x_2 - x_2)^2 + ... + (x_N - x_N)^2} = \sqrt{0^2 + 0^2 + ... + 0^2} = 0.$$

Se $x \neq y$, então $x_i \neq y_i$ para algum $i \in \{1, 2, ..., N\}$. Assim, como $x_i - y_i \neq 0$, em particular, temos que $(x_i - y_i)^2 > 0$. Portanto,

$$d_e(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + ... + (x_N - y_N)^2} \geq \sqrt{(x_i - y_i)^2} > 0.$$

Para provar a simetria, sabemos que $(x_i - y_i)^2 = (y_i - x_i)^2$, para todo $i \in \{1, 2, ..., N\}$. Portanto, temos que:
$(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + ... + (x_N - y_N)^2 = (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + ... + (y_N - x_N)^2.$
Extraindo a raiz em ambos os lados da igualdade, temos:
$\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + ... + (x_N - y_N)^2} = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + ... + (y_N - x_N)^2}$
Assim, concluímos que $d_e(x,y) = d_e(y,x)$.
Finalmente, para que possamos mostrar a desigualdade triangular, é necessário que utilizemos a desigualdade de Cauchy-Schwarz em $\mathbb{R}^N$, a qual diz que para todo $a, b \in \mathbb{R}^N$, onde $a = (a_1, a_2, ..., a_N)$ e $b = (b_1, b_2, ..., b_N)$, então

$$|a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_N b_N| \leq (\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_N^2})(\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + ... + b_N^2}). \quad (1.1)$$

Antes de demonstrarmos 1.1, definiremos o que é uma norma.

Definição 1.1.2 *Uma norma sobre um espaço vetorial E sobre $\mathbb{R}$ é uma função que associa a cada $x \in E$ um número real não negativo, indicado por $||.||$, de maneira que:*
1. $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
2. $||ax|| = |a|.||x||, \forall a \in \mathbb{R}$ e $\forall x \in E$;
3. $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||, \forall x, y \in E$.

Agora, provaremos 1.1:
Demonstração: Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(t) = \| a - tb \|^2$ com $a, b \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, onde $d_e(a,b) = \| a - b \|$, o produto interno $\langle a, b \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_N b_N$ e a norma $||a||^2 = \langle a, a \rangle$. Note que, $f(t) \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}$, ou seja, $||a - tb||^2 \geq 0$, isso implica em

$$||a - tb||^2 = \langle a - tb, a - tb \rangle = \langle a, a \rangle - 2t\langle a, b \rangle + t^2 \langle b, b \rangle = ||a||^2 - 2t\langle a, b \rangle + t^2 ||b||^2 \geq 0. \quad (1.2)$$

Calculando delta em 1.2, temos que,

$$\triangle = (-2\langle a,b\rangle)^2 - 4||b||^2||a||^2 \leq 0.$$

Pois, para que $f(t) \geq 0$, então $\triangle \leq 0$. Daí,

$$\begin{gathered}(-2\langle a,b\rangle)^2 - 4||b||^2||a||^2 \leq 0\\ (-2\langle a,b\rangle)^2 \leq 4||b||^2||a||^2\\ 4|\langle a,b\rangle|^2 \leq 4||a||^2||b||^2\\ |\langle a,b\rangle|^2 \leq ||a||^2||b||^2.\end{gathered}$$

Extraindo a raiz quadrada de ambos os lados, concluimos que

$$|\langle a,b\rangle| \leq ||a||.||b||.$$

Agora, vamos provar a desigualdade triangular.
Demonstração: Temos que,

$$\begin{aligned}[d_e(x,y)]^2 &= \sum_{i=1}^{N}(x_i-y_i)^2\\ &= \sum_{i=1}^{N}[(x_i-z_i)+(z_i-y_i)]^2\\ &= \sum_{i=1}^{N}[(x_i-z_i)^2+2(x_i-z_i)(z_i-y_i)+(z_i-y_i)^2]\\ &\leq \sum_{i=1}^{N}(x_i-z_i)^2+|\sum_{i=1}^{N}2(x_i-z_i)(z_i-y_i)|+\sum_{i=1}^{N}(z_i-y_i)^2\\ &\leq \sum_{i=1}^{N}(x_i-z_i)^2+2\sqrt{\sum_{i=1}^{N}(x_i-z_i)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{N}(z_i-y_i)^2}+\sum_{i=1}^{N}(z_i-y_i)^2\\ &= d_e(x,z)^2+2d_e(x,z)d_e(y,y)+d_e(z,y)^2\\ &= [d_e(x,z)+d_e(z,y)]^2.\end{aligned}$$

Portanto, $d_e(x,y) \leq d_e(x,z)+d_e(z,y)$, o que completa a demonstração.
De forma mais simples, podemos mostrar que d_s e d_∞ descritas abaixo são métricas em $\mathbb{R}^N$

- $d_s : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ definida por:

$$d_s(x,y) = |x_1-y_1|+|x_2-y_2|+...+|x_N-y_N|.$$

- $d_\infty : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ definida por:

$$d_\infty(x,y) = max\{|x_1-y_1|,|x_2-y_2|,...,|x_N-y_N|\}.$$

Vejamos alguns espaços métricos mais abstratos:

Exemplo 1.1.3 *Seja $M = C[a,b] = \{f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}; f$ é contínua em $[a,b]\}$ com as métricas:*

- $d' : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por*

$$d'(f,g) = \max_{t\in[a,b]} |f(t) - g(t)|.$$

Vamos mostrar que d' é uma métrica. De fato, pelo Teorema de Weierstrass, encontrado na referencia [6], d' está bem definida. Sejam f e g funções quais quer de $C[a,b]$. Daí, temos que

$$d(f,f) = \max_{t\in[a,b]} |f(t) - f(t)| = \max_{t\in[a,b]} |0| = 0.$$

Se $f \neq g$, então existe $t_0 \in [a,b]$ tal que $f(t_0) \neq g(t_0)$. Assim,

$$0 < |f(t_0) - g(t_0)| \leq \max_{t\in[a,b]} |f(t) - g(t)| = d(f,g).$$

Também sabemos que vale

$$d(f,g) = \max_{t\in[a,b]} |f(t) - g(t)| = \max_{t\in[a,b]} |-(f(t) - g(t))| = \max_{t\in[a,b]} |g(t) - f(t)| = d(g,f).$$

Note que,

$$\begin{aligned} |f(t) - h(t)| &= |f(t) - g(t) + g(t) - h(t)| \\ &\leq |f(t) - g(t)| + |g(t) - h(t)| \\ &\leq \max_{t\in[a,b]} |f(t) - g(t)| + \max_{t\in[a,b]} |g(t) - h(t)| \end{aligned}$$

pois,

$$|f(t) - g(t)| \leq \max_{t\in[a,b]} |f(t) - g(t)|$$
$$|g(t) - h(t)| \leq \max_{t\in[a,b]} |g(t) - h(t)|.$$

Daí, concluimos que

$$\max_{t\in[a,b]} |f(t) - h(t)| \leq \max_{t\in[a,b]} |f(t) - g(t)| + \max_{t\in[a,b]} |g(t) - h(t)|.$$

Mostrando que, $d(f,h) \leq d(f,g) + d(g,h)$.

Também é possível provar que

- $d'' : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por:

$$d''(f,g) = \int_a^b |f(t) - g(t)| dt$$

é uma métrica em $C[a,b]$.

1.2 Convergência em Espaços Métricos

Definição 1.2.1 *Uma sequência (x_n) em um espaço métrico (M,d) é limitada quando existe c > 0 tal que $d(x_m, x_n) \leq c$, para quaisquer m,n $\in \mathbb{N}$.*

Exemplo 1.2.1 *Considere $M = \mathbb{R}$, utilizando a métrica usual e a sequência (x_n), tal que $x_n = (-1)^n$. Vemos que para quaisquer $n \in \mathbb{N}$, temos que $|(-1)^n| = 1$. Daí, sendo quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$, temos*

$$d(x_m, x_n) = |(-1)^m - (-1)^n| \leq |(-1)^m| + |(-1)^n| \leq 1 + 1 = 2.$$

Portanto, (X_n) é limitada.

Exemplo 1.2.2 *A sequencia $(sen(n))_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada, pois*

$$d(x_m, x_n) = |sen(m) - sen(n)| \leq |sen(m)| + |sen(n)| \leq 1 + 1 = 2.$$

Definição 1.2.2 *Uma sequência (x_n) em um espaço métrico (M,d) é dita convergente em M se existir x $\in M$ tal que $\lim_{n \longrightarrow \infty} x_n = x$. Ou seja, para todo $\epsilon > 0$, $\exists\, n_0$; $n > n_0$ tem-se $d(x_n, x) < \epsilon$. Chamaremos x de limite de (x_n). Usaremos a notação $x_n \longrightarrow x$ para indicar convergência.*

Lema 1.2.1 *Seja (M,d) um espaço métrico. Então,*
(i) Uma sequência convergente em M é limitada e seu limite é único.
(ii) Se $x_n \longrightarrow x$ e $y_n \longrightarrow y$ em M, então $d(x_n, y_n) \longrightarrow d(x, y)$.

Demonstração:
(i) Suponhamos que $x_n \longrightarrow x$ em M. Então, fixando $\epsilon = 1$, encontramos n_0 tal que

$$d(x_n, x) < 1, \text{ para todo } n > n_0.$$

Note também que para todo $m \leq n_0$, temos que

$$d(x_m, x) \leq max\{d(x_1, x), d(x_2, x), ..., d(x_{n_0}, x)\}.$$

Daí, pela desigualdade triangular, temos que

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m),$$

logo,

$$d(x_n, x_m) \leq 1 + max\{d(x_1, x), d(x_2, x), ..., d(x_{n_0}, x)\}.$$

Mostrando que (x_n) é limitada, tomando

$$c = 1 + max\{d(x_1, x), d(x_2, x), ..., d(x_{n_0}, x)\}.$$

Agora, iremos considerar que $x_n \longrightarrow a$ e $x_n \longrightarrow b$ em M. Daí, pela desigualdade triangular,

$$d(a, b) \leq d(a, x_n) + d(x_n, b).$$

Tomando o limite quando $n \longrightarrow \infty$, obtemos $d(a, b) \leq 0$, que implica em $d(a, b) = 0$, pois $d(a, b) \geq 0$, portanto, obtemos $d(a, b) = 0$ se, e somente se, $a = b$. Logo, o limite é único.
(ii) Pela desigualdade triangular, obtemos

$$d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x) + d(x, y) + d(y, y_n).$$

Assim,

$$d(x_n, y_n) - d(x, y) \leq d(x_n, x) + d(y, y_n). \tag{1.3}$$

Por outro lado,

$$d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y_n) + d(y_n, y).$$

Que implica em

$$-[d(x, x_n) + d(y_n, y)] \leq d(x_n, y_n) - d(x, y). \tag{1.4}$$

De 1.3 e 1.4, temos que

$$|d(x_n, y_n) - d(x, y)| \leq d(x_n, x) + d(y, y_n).$$

Tomando o limite quando n $\longrightarrow \infty$ e usando o fato que

$$d(x_n, x) \longrightarrow 0$$

e

$$d(y_n, y) \longrightarrow 0$$

finalmente concluimos que $d(x_n, y_n) \longrightarrow d(x, y)$.

1.3 Sequências de Cauchy e Espaços métricos completos

Definição 1.3.1 *Uma sequencia (x_n) é de Cauchy num Espaço Métrico (M,d) quando qualquer que seja $\epsilon > 0$, temos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, escolhidos quaisquer $m, n > n_0$, temos que $d(x_n, x_m) < \epsilon$.*

Uma outra forma de mostrarmos que uma sequência é de Cauchy, é escrevermos o índice $m + n = p, p \in \mathbb{N}$ e mostrarmos que $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} d(x_n, x_{n+p}) = 0$.

Definição 1.3.2 *Um espaço métrico (M,d) é dito completo se toda sequencia de Cauchy em M, convergir em M.*

Exemplo 1.3.1 *O espaço dos números racionais $\mathbb{Q}$ não é completo quando dotado da métrica usual em $\mathbb{R}$. Para mostrarmos isso, considere a sequência em que $x_1 = 1$, $x_2 = 1 + \frac{1}{1!}$, $x_3 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}$, e assim sucessivamente. De fato, $d(x_n, x_{n+p}) = |\frac{1}{(n+p)!}|$, ou seja, $\lim_{n \longrightarrow \infty} d(x_n, x_{n+p}) = 0$. Mas, sabemos que pelo desenvolvimento da Série de Taylor, $x_n \longrightarrow e$. Porém, como $e \notin \mathbb{Q}$, temos que $\mathbb{Q}$ não é completo.*

Proposição 1.3.1 *Toda sequência de Cauchy em (M,d) é limitada.*

Demonstração: Tomemos uma sequência (x_n), de Cauchy em (M,d). Fixando $\epsilon = 1$, existe um $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que:

$$d(x_m, x_n) < 1, \forall\, m, n > n_0.$$

Para $m, n < n_0$, seja $c = max\{d(x_m, x_n); m, n \leq n_0\}$, então

$$d(x_m, x_n) \leq c + 1, \forall\, m, n \in \mathbb{N}.$$

Proposição 1.3.2 *Seja (x_n) uma sequencia de Cauchy em (M,d) e (x_{n_k}) uma subsequencia de (x_n). Se (x_{n_k}) converge, então (x_n) também converge.*

Demonstração: Considere (x_{n_k}) uma subsequencia de (x_n), tal que $x_{n_k} \longrightarrow a$, com $a \in M$. Tome $\epsilon > 0$. Como (x_n) é de Cauchy, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x_m, x_n) < \frac{\epsilon}{2}, \forall\, m, n > n_1$$

. Como $x_{n_k} \longrightarrow a$, existe $n_2 \in \mathbb{N}$, tal que

$$d(x_{n_k}, a) < \frac{\epsilon}{2}, \forall\, n_k > n_2$$

. Tomando $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, escrevendo $m = n_0 + 1$ e usando a desigualdade triangular, temos que:

$$d(x_n, a) \leq d(x_n, x_{n_0+1}) + d(x_{n_0+1}, a) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon, \forall\, n > n_0.$$

Portanto, concluimos que $x_n \longrightarrow a$.

Teorema 1.3.1 (Teorema de Bolzano-Weiestrass) *Toda sequência (x_n) limitada possui subsequencia convergente*

Demonstração:
Seja (x_n) limitada. Considere $M = \{n \in \mathbb{N}; x_n > x_m \,\forall\, m > n\}$. Suponha inicialmente que M é finito. Daí existe $n_1 \in \mathbb{N} - M$ tal que $n < n_1 \,\forall\, n \in M$. Supondo definidos $x_{n_1}, ..., x_{n_k}$ com $n_1 < ... < n_k$ e $x_{n_1} \leq ... \leq x_{n_k}$, como $n_k \notin M$, existe $n_{k+1} > n_k$ tal que $x_{n_k} \leq x_{n_{k+1}}$. Por indução, obtemos (x_{n_k}) subsequencia não decrescente de (x_n). Como (x_{n_k}) é limitada, temos que (x_{n_k}) converge. Suponha agora que M é infinito, digamos $M = \{n_1, n_2, ..., n_k, ...\}$ com $n_1 < n_2 < ... < n_k < ...$ Se $n_i < n_j$, como $n_i \in M$, então $x_{n_i} > x_{n_j}$. Daí, (x_{n_k}) é decrescente. Como (x_{n_k}) é limitada, temos que (x_{n_k}) converge.

Proposição 1.3.3 *A reta real,* $(\mathbb{R}, |.|)$*, é um Espaço Métrico Completo.*

Demonstração: Provamos acima que toda sequencia de Cauchy é limitada. Assim, pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, toda sequencia limitada de números reais possui uma subsequencia convergente. Deste modo, combinando as duas proposições acima, concluimos que $\mathbb{R}$ é um espaço métrico completo.

Proposição 1.3.4 *Toda sequencia convergente em (M,d) é uma sequencia de Cauchy.*

Demonstração: Se $x_n \longrightarrow a$, então, para todo $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x_n, a) < \frac{\epsilon}{2}, \forall\, n > n_0.$$

Aplicando a desigualdade triangular, para $m, n > n_0$, temos que:

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, a) + d(a, x_m) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Portanto, (x_n) é uma sequência de Cauchy.

Definição 1.3.3 *Sejam* (M, d_M) *e* (N, d_N) *espaços métricos. Uma aplicação* $f : M \longrightarrow N$ *é contínua no ponto* $a \in M$*, quando para todo* $\epsilon > 0$*, é possivel obter* $\delta > 0$ *tal que*

$$d_M(x, a) < \delta \Longrightarrow d_N(f(x),\ f(a)) < \epsilon.$$

Diz-se que $f : M \longrightarrow N$ *é contínua quando ela é contínua em todos os pontos de M.*

Proposição 1.3.5 *Uma função* $f : X \longrightarrow Y$ *definida entre os espaços métricos* (X, d_1) *em* (Y, d_2) *é contínua em um ponto* $a \in X$ *se, e somente se, para qualquer sequência* (x_n) *em X, tem-se:*

$$x_n \xrightarrow{d_1} a \Longrightarrow f(x_n) \xrightarrow{d_2} f(a).$$

Demonstração: Vamos assumir que f é contínua, daí, temos que para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que, para todo $x \in X$

$$d_1(x, a) < \delta \Longrightarrow d_2(f(x_n),\ f(a)) < \epsilon,$$

e, esta última desigualdade equivale dizer que $f(x_n) \xrightarrow{d_2} f(a)$.
Agora, assumindo que $x_n \xrightarrow{d_1} a \Longrightarrow f(x_n) \xrightarrow{d_2} f(a)$, provemos que f é contínua em a. Suponha, por absurdo, que isso seja falso. Daí, para todo $\delta > 0$, existe ϵ_0, e um $x \neq a$ satisfazendo

$$d_1(x, a) < \delta,$$

entretanto,

$$d_2(f(x),\ f(a)) \geq \epsilon_0.$$

Daí, como $\delta > 0$ é qualquer, em particular, para cada $n \in \mathbb{N}$, façamos $\delta = \frac{1}{n}$. Daí, teriamos que

$$d_1(x_n, a) < \frac{1}{n}$$

mas

$$d_2(f(x_n),\ f(a)) \geq \epsilon_0.$$

Assim, construímos uma sequencia onde $x_n \xrightarrow{d_1} a$, mas $f(x_n)$ não converge para $f(a)$, o que contradiz nossa hipótese.

1.4 Exemplos de Espaços Métricos Completos

Exemplo 1.4.1 *O $\mathbb{R}^N$ é completo com as métricas d_e, d_s e d_∞. Mostraremos que ele é completo com a métrica d_e.*

Temos que,

$$d_e(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + ... + (x_N - y_N)^2}.$$

Em que $x = (x_1, x_2, ..., x_N)$ e $y = (y_1, y_2, ..., y_N)$. Consideremos uma sequencia de Cauchy qualquer (x_m) em $\mathbb{R}^N$, tem-se $x_m = (x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, ..., x_N^{(m)})$. Como (x_m) é de Cauchy, então temos que, para todo $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x_m, x_p) = (\sum_{k=1}^{N} (x_k^{(m)} - x_k^{(p)})^2)^{\frac{1}{2}} < \epsilon,\ com\ m,\ p > n_0. \tag{1.5}$$

Elevando 1.5 ao quadrado, temos que:

$$\sum_{k=1}^{N} ((x_k^{(m)} - x_k^{(p)})^2) < \epsilon^2$$

portanto,

$$|x_k^{(m)} - x_k^{(p)}| < \epsilon, \text{com } m,\ p > n_0.$$

E a implicação ocorre, pois como temos uma soma de termos positivos menor que ϵ^2, então temos também que cada termo é menor que ϵ^2. Deste modo, para cada k fixo, temos que a sequencia $(x_k^{(1)}, x_k^{(2)}, ...,)$ é uma sequencia de Cauchy de números reais. Ela converge pela preposição 1.3.3, digamos $x_k^{(m)} \longrightarrow x_k$, quando $m \longrightarrow \infty$. Usando N vezes esse limite, definimos $x = (x_1, x_2, ..., x_N) \in \mathbb{R}^N$. Da expressão 1.5, aplicando o limite de ambos os lados, obtemos:

$$\begin{aligned}
\lim_{m \longrightarrow \infty} d(x_m, x_p) &= \lim_{m \longrightarrow \infty} [\sum_{k=1}^{N} (x_k^{(m)} - x_k^{(p)})^2]^{\frac{1}{2}} \\
&= [\sum_{k=1}^{N} (\lim_{m \longrightarrow \infty} x_k^{(m)} - \lim_{m \longrightarrow \infty} x_k^{(p)})^2]^{\frac{1}{2}} \\
&= [\sum_{k=1}^{N} (x_k - x_k^{(p)})^2]^{\frac{1}{2}} \\
&= d(x, x_p) \leq \epsilon, \ m > n_0.
\end{aligned}$$

O que nos mostra que a sequencia de Cauchy tomada é convergente em $\mathbb{R}^N$.

Definição 1.4.1 *Uma sequência de funções $f_n : M \longrightarrow \mathbb{R}$ converge uniformemente para a função $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ quando, para todo $\epsilon > 0$ dado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, dependendo apenas de ϵ, tal que $n > n_0 \Longrightarrow d(f_n(x),\ f(x)) < \epsilon$ seja qual for $x \in M$.*

Exemplo 1.4.2 *O espaço das funções contínuas $C[a, b]$ é completo com a métrica $d(f, g) = \max_{t \in [a,b]} |f(t) - g(t)|$.*

Deste modo, seja (f_n) uma sequência de Cauchy em $C[a, b]$. Então, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $m, n > n_0$, temos:

$$d(f_m, f_n) = \max_{t \in [a,b]} |f_m(t) - f_n(t)| < \epsilon. \tag{1.6}$$

Assim, para todo $t \in [a, b]$, temos que

$$|f_m(t) - f_n(t)| < \epsilon, \ m, \ n > n_0.$$

Daí, temos que $(f_1(t), f_2(t), ...,)$ é uma sequência de Cauchy de números reais. Já que $(\mathbb{R}, |.|)$ é completo, a sequência $(f_n(t))$ converge, digamos $f_n(t) \longrightarrow f(t)$. Assim, pela unicidade do limite, podemos associar que para cada $t \in [a, b]$ um único número real $f(t)$. Isso define uma função f em $[a, b]$. Agora, mostremos que f pertence a $C[a, b]$ e que $f_n \longrightarrow f$, uniformemente. Da expressão 1.6, quando $n \longrightarrow \infty$, temos que:

$$\begin{aligned}
\epsilon \geq \lim_{n \longrightarrow \infty} d(f_m, f_n) &= \lim_{n \longrightarrow \infty} \max_{t \in [a,b]} |f_m(t) - f_n(t)| \\
&= \max_{t \in [a,b]} |\lim_{n \longrightarrow \infty} f_m(t) - \lim_{n \longrightarrow \infty} f_n(t)| \\
&= \max_{t \in [a,b]} |f_m(t) - f(t)| \\
&= d(f_m, f).
\end{aligned}$$

Consequentemente, para todo $t \in [a, b]$, temos que

$$|f_m(t) - f(t)| \leq \epsilon.$$

Assim, mostramos que $(f_n(t))$ converge uniformemente em $[a, b]$. Visto que as funções $f_n(t)$ são contínuas em $[a, b]$, temos que a função limite $f(t)$ é contínua em $[a, b]$. Deste modo, concluímos que $C[a, b]$ é completo, em relação a métrica do máximo.

Definição 1.4.2 *Seja (M,d) um espaço métrico. Uma função f: $M \longrightarrow M$ é chamada de contração sobre M se existir um número real positivo $k < 1$, tal que:*

$$d(f(x),\ f(y)) \leq kd(x, y), \forall\ x,\ y \in M.$$

Exemplo 1.4.3 *Considere $M = \mathbb{R}$ com a métrica usual. A função $f : [1, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{x}$ é uma contração.*

Note que:

$$d(f(x),\ f(y)) = |\sqrt{x} - \sqrt{y}| = |\sqrt{x} - \sqrt{y}|.\frac{|\sqrt{x} + \sqrt{y}|}{|\sqrt{x} + \sqrt{y}|} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}.|x - y|$$

Como $x, y \geq 1$,temos que $\sqrt{x} + \sqrt{y} \geq 2$, ou seja, $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \leq \frac{1}{2}$.
Logo, temos que

$$d(f(x),\ f(y)) \leq \frac{1}{2}|x - y|.$$

Observação 1.4.1 *Note que, f não é uma contração quando definida no intervalo fechado [0,1], pois $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} f'(x) = +\infty$.*

Proposição 1.4.1 *Seja $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função real derivável no intervalo I. Se existir uma constante C tal que $|f'(x)| \leq\ C <\ 1$ para todo $x \in I$, então f é uma contração.*

Podemos encontrar a demonstração na referencia [6]

Observação 1.4.2 *A função $f : (0, 1) \longrightarrow (0, 1)$ definida por $f(x) = \frac{x^2}{2}$, não é uma contração, pois $|f'(x)| = x < 1\ \forall\ x \in (0, 1)$, mas não existe uma constante C tal que $x < C < 1\ \forall\ x \in (0, 1)$.*

Proposição 1.4.2 *Se E, F são espaços vetoriais normados, uma transformação linear T:E$\longrightarrow$F é uma contração se, e somente-se, sua norma $|T|$ é menor do que 1.*

2 O TEOREMA DO PONTO FIXO DE BANACH

Neste capítulo apresentaremos a definição e a demonstração do Teorema do Ponto Fixo de Banach, cujo o resultado é essencial para a demonstração do Teorema de Picard que iremos ver no próximo capítulo.

Definição 2.0.1 (Ponto Fixo) *Um ponto fixo de uma aplicação* $f : M \longrightarrow M$*, é um ponto x* $\in$ *M tal que* $f(x) = x$*.*

Exemplo 2.0.1 *Considere a aplicação*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^N &\longrightarrow \mathbb{R}^N \\ x &\longrightarrow -x \end{aligned}$$

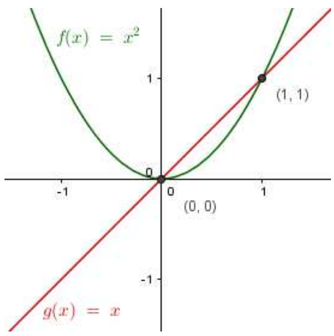
Note que f possui um único ponto fixo, que é a origem $0 \in \mathbb{R}^N$*.*

Exemplo 2.0.2 *A aplicação*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\longrightarrow x^2 \end{aligned}$$

Possui dois pontos fixos, 0 e 1, como podemos ver na figura abaixo:

Figura 1 – Fonte: Produzido pelo autor



Observação 2.0.1 *Os pontos fixos de uma função real de variável real* f *são as abscissas dos pontos do plano em que o gráfico de* f *intercepta a diagonal* $y = x$*. Se 0* $\neq$ $a \in \mathbb{R}^N$ *então a translação* $x \longrightarrow x + a$ *de* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *em si mesmo, não tem ponto fixo.*

Teorema 2.0.1 (Teorema do Ponto Fixo de Banach) *Considere (M,d) um espaço métrico completo e uma contração $f : M \longrightarrow M$. Então, f possui um único ponto fixo.*

Mais precisamente, se escolhermos um ponto qualquer $x_0 \in M$ e pusermos $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1)$, ..., $x_{n+1} = f(x_n)$, ... a sequência (x_n) converge em M e $a = \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} x_n$ é o único ponto fixo de f.

Demonstração: Considere $x_0 \in M$ e a sequência (x_n) em M, definida por $x_{n+1} = f(x_n)$. Vamos mostrar que (x_n) é uma sequência de Cauchy em M (pois toda sequência de Cauchy é convergente). Temos,

$$d(x_1, x_2) = d(f(x_0),\ f(x_1)) \leq kd(x_0, x_1) \Longrightarrow d(x_1, x_2)\ \leq\ kd(x_0, x_1)$$

e,

$$d(x_2, x_3) = d(f(x_1),\ f(x_2))\ \leq\ kd(x_1, x_2)\ \leq\ k^2 d(x_0, x_1) \Longrightarrow d(x_2, x_3)\ \leq\ k^2 d(x_0, x_1).$$

Assim, continuando o processo com um argumento indutivo, chegamos a conclusão que $d(x_n, x_{n+1})\ \leq\ k^n d(x_0, x_1)$. Da desigualdade triangular segue que para $n,\ p \in \mathbb{N}$ quaisquer:

$$d(x_n, x_{n+p})\ \leq\ d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + ... + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}). \tag{2.1}$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &\leq k^n d(x_0, x_1), \\ d(x_{n+1}, x_{n+2}) &\leq k^{n+1} d(x_0, x_1), \\ &\vdots \\ d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) &\leq k^{n+p-1} d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Daí, somando todos os termos acima e colocando $d(x_0, x_1)$ em evidencia, temos: $d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + ... + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \leq (k^n + k^{n+1} + ... + k^{n+p-1}) d(x_0, x_1)$. Para qualquer p fixado, temos

$$k^n + k^{n+1} + ... + k^{n+p-1} \leq\ k^n + k^{n+1} + ... + k^{n+p-1} + ...\ =\ \frac{k^n}{1-k},$$

Logo, de 2.1 obtemos:

$$d(x_n, x_{n+p}) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_0, x_1)$$

Daí, aplicando o limite quando $n \longrightarrow \infty$:

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} d(x_n, x_{x+p})\ \leq\ \lim_{n \longrightarrow \infty} (\frac{k^n}{1-k} d(x_0, x_1))$$

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} d(x_n, x_{n+p})\ \leq\ d(x_0, x_1) \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{k^n}{1-k}$$

Agora, note que $\lim_{n\longrightarrow\infty} k^n = 0$, pois $0 < k < 1$. Portanto,

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{k^n}{1-k} = 0,$$

ou seja,

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} d(x_n, x_{n+p}) = 0,$$

Assim, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n \geq n_0 \Rightarrow \; d(x_n, x_{n+p}) < \epsilon \, para \; algum \; \epsilon > 0, \; p \in \mathbb{N}.$$

Desta forma, concluimos que (x_n) é de fato uma sequencia de Cauchy em M.
Como (M, d) é um Espaço métrico Completo, então (x_n) converge em M. Assim, aplicando o limite na equação $x_{n+1} = f(x_n)$, temos:

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} x_{n+1} = \lim_{n\longrightarrow\infty} f(x_n).$$

Daí, como $\lim_{n\longrightarrow\infty} x_n = a$, e como a aplicação f é contínua, usando a proposição 1.3.5, temos que

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\longrightarrow\infty} x_n) = f(a).$$

Assim, obtemos

$$f(a) = a.$$

Com isso, provamos a existencia do ponto fixo. Agora, provaremos a unicidade. Sejam a e b em M, tais que $f(a) = a$ e $f(b) = b$. Assim,

$$d(a, b) = d(f(a), \; f(b)) \; \leq \; kd(a, b).$$

Isso nos leva a seguinte desigualdade:

$$(1-k)d(a, b) \; \leq \; 0.$$

Sendo $k < 1$, temos que $1 - k > 0$, o que implica que $d(a, b) \; \leq \; 0$. Mas, como $d(a, b)$ é um número real não negativo, segue que $d(a, b) = 0$, e isso só ocorre se, e somente se, $a = b$. Portanto, podemos concluir que f possui um único ponto fixo.

Colorário 2.0.1 *Seja $f : M \longrightarrow M$ uma aplicação sobre o espaço métrico $M = (M, d)$, e suponha que f^m é uma contração para algum inteiro positivo m. Então, f tem um único ponto fixo.*

Observação 2.0.2 *f^m é a notação utilizada para a composição de f com f m vezes.*

Demonstração: Seja $g = f^m$, assim, g é uma contração sobre M. Pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach, g tem um único ponto fixo, isto é, $g(y) = y$, logo $g^n(y) = y$. Daí, o teorema do ponto fixo de Banach implica que para todo $x \in M$, temos:

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} g^n(x) = y$$

Em particular, para $x = f(y)$, desde que $g^n = f^{m.n}$, temos que

$$\begin{aligned}
y &= \lim_{n\longrightarrow\infty} g^n(f(y)) \\
&= \lim_{n\longrightarrow\infty} \underbrace{f(f(f(...(f(y)))))}_{m.n\,+\,1\ vezes} \\
&= \lim_{n\longrightarrow\infty} f(\underbrace{f(f(f(...(f(y))))))}_{m.n\ vezes}) \\
&= \lim_{n\longrightarrow\infty} f(g^n(y)) \\
&= \lim_{n\longrightarrow\infty} f(y) \\
&= f(y)
\end{aligned}$$

Portanto, isto prova que y é um ponto fixo de f, mas como todo ponto fixo de f também é ponto fixo de g, então, temos que f tem um único ponto fixo.

3 O MÉTODO DAS APROXIMAÇÕES SUCESSIVAS

Um processo bastante conhecido para obter aproximaçoes de soluções de equações diferenciais da forma $x' = f(t,x)$ com valor inicial $x(t_0) = x_0$ é o método iterativo de Picard. Apresentaremos uma aplicação do Teorema do Ponto Fixo de Banach, observando que a sequência das aproximações sucessivas obtidas por este processo iterativo converge à solução da equação dada.

3.1 O teorema de Picard

O Teorema de Picard é uma das mais importantes aplicações do Teorema do Ponto Fixo de Banach. Este teorema garante a existência e unicidade de solução para equações diferenciais e integrais. Considere o espaço euclidiano $\mathbb{R}^{N+1} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ com coordenadas retangulares (t,x), onde $t \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}^N$.

Definição 3.1.1 *Dada uma função contínua $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^N$, onde U é um aberto contido em $\mathbb{R}^{N+1} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ e $(t_0, x_0) \in U$, a equação diferencial de primeira ordem, com valor inicial, definida por f é escrita como:*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x' & = f(t,x) \\ x(t_0) & = x_0 \end{cases} \tag{3.1}$$

Observação: *O problema 3.1 também é conhecido como problema de Cauchy.*
Uma solução de 3.1 é uma função diferenciável $x : I \longrightarrow \mathbb{R}^N$, onde $I \subset \mathbb{R}$ e I é um intervalo tal que $t_0 \in I$ e $x(t_0) = x_0$ que satisfaz a equação $x' = f(t,x)$.

Exemplo 3.1.1 *Considere o problema de Cauchy:*

$$\begin{cases} x' & = ax \\ x(0) & = 1 \end{cases} \tag{3.2}$$

Neste caso, $f(t,x) = ax$ e a solução geral da Equação Diferencial Ordinária é $x(t) = ce^{at}$. O problema de Cauchy 3.2 tem como única solução $x(t) = e^{at}$.

Exemplo 3.1.2 *Verifica-se que as funções $x_1(t) = 0$ e $x_2(t) = t|t|$ são soluções do seguinte problema de Cauchy:*

$$\begin{cases} x' & = 2\sqrt{|x|} \\ x(0) & = 0 \end{cases}$$

O exemplo 3.1.2 mostra que um dado problema de Cauchy pode ter mais de uma solução. No exemplo 3.1.1, onde se tem unicidade de solução, a função $f(t,x) = ax$ juntamente com sua derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x}$ são contínuas numa vizinhança do ponto $P_0(0,1)$. Essencialmente, estas são as hipóteses necessárias para que se tenha existência e unicidade de solução do problema de Cauchy.

Definição 3.1.2 *Uma função $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^N$, onde U é um aberto contido em $\mathbb{R}^{N+1} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$, é dita Lipschitziana com respeito à segunda variável se existir $C > 0$, tal que*

$$||f(t,x_1) - f(t,x_2)|| \leq C||x_1 - x_2||$$

para quaisquer (t,x_1) e $(t,x_2) \in U$. A função é dita localmente lipschitziana com respeito a segunda variavel se todo ponto de U possui uma vizinhança restrita a qual f é lipschitziana com respeito a segunda variavel.

Teorema 3.1.1 (Teorema de Picard) *(Existencia e Unicidade de Soluções de Equações Diferenciais Ordinárias)*
Seja f: $I[t_0,a] \times B[x_0,b] \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$, onde $I = \{t \in \mathbb{R};\ |t - t_0| \leq a\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R}^N;\ ||x - x_0|| \leq b\}$, função contínua, Lipschitziana com respeito a segunda variável. Então, o problema de Cauchy

$$\begin{cases} x' & = f(t,x) \\ x(t_0) & = x_0 \end{cases} \tag{3.3}$$

possui apenas uma solução em uma vizinhança do ponto (t_0,x_0), definida no intervalo $|t - t_0| \leq \alpha$, onde $\alpha = min\{a, b/M\}$ e $M = sup\{||f(t,x)||, (t,x) \in I[t_0,a] \times B[x_0,b]\}$.

Demonstração: Procura-se uma aplicação $\varphi : I \longrightarrow B$ de classe C^1, satisfazendo $\varphi(t_0) = x_0$ e $\forall\, t \in I$, $\varphi'(t) = f(t,\varphi(t))$. Do Teorema Fundamental do Cálculo, o problema de Cauchy 3.3 é equivalente a equação integral:

$$\varphi(t) \ = \ x_0 \ + \int_{t_0}^{t} f(s,\varphi(s))ds,\ \forall\, t \in I$$

Seja X = $C(I[t_0,a],\ B[x_0,b])$ o espaço métrico formado pelas aplicações contínuas $\varphi : I \longrightarrow B$, e completo com a métrica do supremo:

$$d(\varphi,\psi) \ = \ \sup_{t\,\in\, I} ||\varphi(t) - \psi(t)||,\ \varphi,\ \psi \in X$$

Definimos então a aplicação F: $X \longrightarrow X$ da seguinte maneira:

$$F(\varphi)(t) := x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,\varphi(s))ds, \forall\, \varphi \in X \ e \ \forall\, t \in I.$$

Existem alguns pontos a serem verificados. Primeiramente, que $F(\varphi)(t) \in B$ para todo $\varphi \in X \ e \ t \in I$. Notemos que $\forall \ \varphi \in X$, temos:

$$\begin{aligned} ||F(\varphi)(t) - x_0|| &= || \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds|| \\ &\leq \int_{t_0}^{t} ||f(s, \varphi(s))||ds \\ &\leq M|t - t_0| \ \leq \ M\alpha \ \leq \ b \end{aligned}$$

Além disso, dados $t, \ t' \ \in I$ quaisquer, vale:

$$\begin{aligned} ||F(\varphi)(t) - F(\varphi)(t')|| &= || \int_{t}^{t'} f(s, \varphi(s))ds|| \\ &\leq \int_{t}^{t'} ||f(s, \varphi(s))||ds \\ &\leq M|t - t'| \end{aligned}$$

Isto é, $F(\varphi)$ é Lipschitziana e portanto $F(\varphi)$ é contínua. Logo, $F(\varphi) \ \in X \ \forall \ \varphi \ \in X$. Assim, F é bem definida.
Agora, vamos mostrar que F é uma contração. De fato, considere $K \ = \alpha.C < 1$, onde C é a constante de Lipschitz de F. Para quaisquer $\varphi, \ \psi \ \in X$, temos:

$$\begin{aligned} ||F(\varphi)(t) - F(\psi)(t)|| &= || \int_{t_0}^{t} [f(s, \varphi(s)) - f(s, \psi(s))]ds|| \\ &\leq \int_{t_0}^{t} ||f(s, \varphi(s)) - f(s, \psi(s))||ds \\ &\leq \int_{t_0}^{t} C||\varphi(s) - \psi(s)||ds \ = \ C \int_{t_0}^{t} ||\varphi(s) - \psi(s)||ds \\ &\leq C \int_{t_0}^{t} \sup_{s \in I} ||\varphi(s) - \psi(s)||ds \ = \ C. \sup_{s \in I} ||\varphi(s) - \psi(s)||.(t - t_0) \\ &\leq C.\alpha. \sup_{s \in I} ||\varphi(s) - \psi(s)|| \ = \ K. \sup_{s \in I} ||\varphi(s) - \psi(s)|| \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} ||F(\varphi)(s) - F(\psi)(s)|| \ &\leq \ K. \sup_{s \in I} ||\varphi(s) - \psi(s)|| \\ \Longrightarrow \sup_{s \in I} ||F(\varphi)(s) - F(\psi)(s)|| \ &\leq \ K. \sup_{s \in I} ||\varphi(s) - \psi(s)|| \\ \Longrightarrow d(F(\varphi), F(\psi)) \ &\leq \ K.d(\varphi, \psi), \ 0 < K < 1. \end{aligned}$$

Assim, F é uma contração do espaço métrico completo $X \ = \ C(I, B)$ em si mesmo. Pelo teorema do Ponto Fixo de Banach, existe uma única aplicação contínua $\varphi : I \longrightarrow B$ tal que $F(\varphi) = \varphi$. Logo,

$$F(\varphi)(t) = \varphi(t) \Longrightarrow \varphi(t) \ = \ x_0 \ + \ \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds$$

o que é equivalente a dizer que $\varphi(t_0) = x_0$ e $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)),\ \forall\, t \in I.$

Em particular, consideremos o problema no qual o ponto inicial $(t_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ é a origem, isto é,

$$\begin{cases} x' & = f(t,x) \\ x(0) & = 0 \end{cases} \tag{3.4}$$

Se for dado algum outro ponto inicial, então podemos fazer sempre uma mudança de variáveis preliminar, correspondendo a translação dos eixos, que leva o ponto dado (t_0, x_0) para a origem. Então, o teorema de existência e unicidade pode ser enunciado agora da seguinte forma:

Teorema 3.1.2 *Se f e $\partial f/\partial y$ são contínuas em um retângulo $R : |t| \leq a$, $|x| \leq b$, então existe algum intervalo $|t| \leq h \leq a$ no qual existe uma única solução $x = \phi(t)$ do problema de valor inicial 3.4.*

Pode-se encontrar a demonstração deste teorema na referencia [2].

3.2 Método Iterativo de Picard

Se supormos, temporariamente, que existe uma função $x = \phi(t)$ que satisfaça o problema de valor inicial 3.4, então $f(t, \phi(t))$ é uma função contínua que só depende de t. Logo, integrando $x' = (f(t,x))$ do ponto inicial $t = 0$ para um valor arbitrário de t, obtemos:

$$\phi(t) = \int_0^t f(s, \phi(s))ds \tag{3.5}$$

onde usamos a condição inicial $\phi(0) = 0$. Usamos também s para denotar a variável de integração.

Como 3.5 contém uma integral da função desconhecida ϕ, ela é chamada de equação integral. Essa equação integral não é uma fórmula para a solução do problema de valor inicial, mas fornece outra relação que é satisfeita por qualquer solução das equações 3.4. Reciprocamente, suponha então que existe uma função contínua $x = \phi(t)$ que satisfaz o problema de valor inicial 3.4. Para mostrar isso, primeiro, substituimos t por zero em 3.5, o que mostra que a condição inicial é satisfeita. Além disso, como o integrando em 3.4 é contínuo, do teorema fundamental do cálculo, tem-se $\phi(t) = f(t, \phi(t))$. Portanto, o problema de valor inicial e a equação integral são equivalentes, ou seja, qualquer solução de um desses problemas também é solução do outro. É mais conveniente obter uma única solução da equação integral em algum intervalo $|t| \leq h$. Ao utilizar este método, começamos escolhendo uma função inicial ϕ_0, arbitrária ou que aproxima, de algum modo, a solução do problema de valor inicial 3.4. A escolha mais simples é

$$\phi_0(t) = 0$$

então ϕ_0 satisfaz a condição inicial nas equações 3.4, embora, presume-se que não satisfaça a equação diferencial. A próxima aproximação ϕ_1, é obtida substituindo-se $\phi(s)$ por $\phi_0(s)$ na integral na equação 3.5 e chamando o resultado dessa operação de $\phi_1(t)$. Assim,

$$\phi_1(t) = \int_0^t f[s, \phi_0(s)]ds$$

Analogamente, ϕ_2 é obtida de ϕ_1:

$$\phi_2(t) = \int_0^t f[s, \phi_1(s)]ds,$$

e, em geral

$$\phi_{n+1}(t) = \int_0^t f[s, \phi_n(s)]ds. \tag{3.6}$$

Desse modo, geramos a sequência de funções $\{\phi_n\} = \{\phi_0, \phi_1, ..., \phi_n, ...\}$ Cada elemento da sequência satisfaz a condição inicial, mas, em geral, nenhum deles satisfaz a equação diferencial. No entanto, se, em algum estágio, por exemplo, para $n = k$, encontrarmos $\phi_{k+1}(t) = \phi_k(t)$, então segue que ϕ_k é uma solução da equação integral 3.5. Portanto, ϕ_k também é solução do problema de valor inicial 3.4 e a sequência para nesse ponto. Isso normalmente não acontece e é necessário considerar toda a sequência infinita.

3.3 Solução de problemas de Cauchy pelo método das aproximações sucessivas

Como aplicação do teorema de Picard, considere o problema de valor inicial (PVI)

$$\begin{cases} x'(t) & = 2t(x+1) \\ x(0) & = 0 \end{cases} \tag{3.7}$$

Note que $f(t, x) = 2t(x + 1)$ é contínua e lipschitziana com respeito a x. Assim, segundo o teorema de Picard, o problema de valor inicial deve apresentar uma solução única utilizando a iteração proposta pelo teorema do ponto fixo de Banach. Daí, escrevendo a equação integral equivalente a $x'(t) = 2t(x + 1)$, pelo Teorema Fundamental do Calculo, temos

$$x(t) = \int_0^t 2s(x(s) + 1)ds \tag{3.8}$$

Começaremos exatamente de $x_0(t) = 0$ e para $n \geq 1$, usemos a fórmula iterativa:

$$x_{n+1} = \int_0^t 2s(x_n(s) + 1)ds \tag{3.9}$$

Daí, para $x_1(t)$, temos:

$$x_1(t) = \int_0^t 2sds = t^2 \tag{3.10}$$

Substituindo 3.10 na fórmula iterativa 3.9, obtemos $x_2(t)$. Ou seja,

$$x_2(t) = \int_0^t 2s(s^2+1)ds = t^2 + \frac{t^4}{2} \tag{3.11}$$

Agora, para obtermos $x_3(t)$, substimos 3.11 na fórmula iterativa 3.9, e daí temos que

$$x_3(t) = \int_0^t 2s\left(s^2 + \frac{s^4}{2} + 1\right)ds = t^2 + \frac{t^4}{2} + \frac{t^6}{3!}$$

Então, continuando dessa forma, obteremos uma sequencia $x_n(t)$, para $n \geq 1$ de modo que:

$$x_n(t) = t^2 + \frac{t^4}{2} + \frac{t^6}{3!} + ... + \frac{t^{2n}}{n!}$$

Logo, $x_n(t)$ é a n-ésima soma parcial da série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{2k}}{k!} \tag{3.12}$$

Desta forma, $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} x_n(t)$ existe se, e somente se, a série 3.12 converge. Aplicando o teste da razão, temos:

$$\left|\frac{t^{2k+2}}{(k+1)!}.\frac{k!}{t^{2k}}\right| = \frac{t^2}{k+1} \longrightarrow 0 \; quando \; k \longrightarrow \infty$$

Assim, a série 3.12 converge para todo t e sua soma $x(t)$ é o limite da sequência $\{x_n(t)\}$. Como a série 3.12 é uma série de Taylor, ela pode ser diferenciada ou integrada termo a termo desde que t permaneça no intervalo de convergência que, nesse caso, é todo eixo dos t.

Vamos verificar que

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{2k}}{k!}$$

é uma solução da equação integral 3.8. De fato, integrando, temos que

$$\begin{aligned}
\int_0^t 2s\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{s^{2k}}{k!}\right]ds &= \int_0^t \left(2s + 2s\sum_{k=1}^{\infty} \frac{s^{2k}}{k!}\right)ds \\
&= t^2 + \int_0^t 2s\left(\frac{s^2}{1!} + \frac{s^4}{2!} + \frac{s^6}{3!}...\right)ds \\
&= t^2 + \left.\frac{2s^4}{4}\right|_0^t + \left.\frac{2s^6}{2!6}\right|_0^t + \left.\frac{2s^8}{3!8}\right|_0^t + ... \\
&= t^2 + \frac{t^4}{2!} + \frac{t^6}{3!} + \frac{t^8}{4!} + ... = x(t)
\end{aligned}$$

Por outro lado, substituindo a função

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{2k}}{k!}$$

na equação 3.7, verifica-se que a função satisfaz o problema de valor inicial.

3.4 Método dos Fatores Integrantes

Utilizaremos do Método dos Fatores Integrantes para determinar a solução de um determinado problema de Cauchy. Inicialmente, note que o método dos fatores integrantes, é utilizado para resolver equações na forma:

$$x' + p(t)x = g(t) \tag{3.13}$$

onde $p(t)$ e $g(t)$ são funções com respeito a variável t.
Considere o problema 3.7 da sessão anterior. Perceba que 3.7 está na forma 3.13. Onde $p(t) = -2t$ e $g(t) = 2t$. Daí, definiremos uma função auxiliar $\mu(t)$ em que $\mu(t) = e^{\int p(t)dt}$. Logo,

$$\mu(t) = e^{\int -2tdt} = e^{-2.\frac{t^2}{2}} = e^{-t^2}$$

Multiplicando cada termo de 3.7 por $\mu(t)$, temos que

$$e^{-t^2}.x' - 2tx.e^{-t^2} = 2t.e^{-t^2} \tag{3.14}$$

Note que,

$$e^{-t^2}.x' - 2tx.e^{-t^2} = \frac{d}{dt}(e^{-t^2}.x) \tag{3.15}$$

Daí, substituindo 3.15 em 3.14 temos,

$$\frac{d}{dt}(e^{-t^2}.x) = 2t.e^{-t^2} \tag{3.16}$$

Integrando ambos os lados de 3.16 em relação a t e usando o Teorema Fundamental do Cálculo,

$$e^{-t^2}.x = -e^{-t^2} + C.$$

$$x(t) = -1 + C.e^{t^2}.$$

Aplicando o valor inicial $x(0) = 0$ na equação acima para achar o valor da constante, temos que

$$0 = -1 + C.$$

$$C = 1.$$

Logo,

$$x(t) = -1 + e^{t^2}$$

Mas, como sabemos

$$e^t = 1 + \frac{1}{1!}t + \frac{1}{2!}t^2 + ...$$

e,

$$e^{t^2} = 1 + \frac{1}{1!}t^2 + \frac{1}{2!}t^4 + ...$$

Logo,

$$x(t) = -1 + e^{t^2}$$

$$x(t) = \frac{1}{1!}t^2 + \frac{1}{2!}t^4 + ... = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{2k}}{k!}$$

Exemplo 3.4.1 *Determinar soluções aproximadas do problema de valor inicial*

$$\begin{cases} y'(x) & = 1 + y^2 \\ y(0) & = 0 \end{cases} \tag{3.17}$$

No caso, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $f(x,y) = 1 + y^2$, e a equação 3.6 se tornam

$$y_n(x) = \int_0^x [1 + y_{n-1}^2(t)]dt = x + \int_0^x y_{n-1}^2(t)dt$$

Partindo de $y_0 = 0$, obtemos

$$y_1(x) = x + \int_0^x 0.dt = x$$

$$y_2(x) = x + \int_0^x t^2 dt = x + \frac{1}{3}.x^3$$

$$y_3(x) = x + \int_0^x (t + \frac{t^3}{3})^2 dt$$

$$= x + \frac{1}{3}.x^3 + \frac{2}{15}.x^5 + \frac{1}{63}.x^7$$

etc. Naturalmente, podemos obter a solução exata do presente problema, separando as variáveis, obtendo

$$y(x) = tg(x) = x + \frac{1}{3}.x^3 + \frac{2}{15}.x^5 + \frac{1}{63}.x^7 + ...(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}) \tag{3.18}$$

Os tres primeiros termos de $y_3(x)$ e da série em 3.18 coincidem. A série em 3.18 converge para $|x| < \frac{\pi}{2}$, e tudo que podemos esperar é que a sucessão $y_1,\ y_2, ...$, seja convergente para a função que é a solução do problema para $|x| < \frac{\pi}{2}$. Isto mostra que o problema da convergência possui importância prática.

3.5 Algumas Aplicações

Exemplo 3.5.1 *Considere o Espaço Métrico sendo a reta real, com a métrica usual e a equação não linear:*

$$x = ksen(x)$$

onde $0 < k < 1$ *é uma constante Real. Essa equação possui solução? Caso possua, ela é única?*

Com a intenção de usar o Teorema do Ponto Fixo de Banach, já definimos nosso espaço métrico que é a reta real, agora nos resta verificar se $f(x) = ksen(x)$ é uma contração. Temos que

$$d(f(x), f(y)) = k|sen(x) - sen(y)| = k\left|\int_y^x cos(t)dt\right| \leq k\int_y^x |cos(t)|dt$$

Como $|cos(t)| \leq 1$, temos que

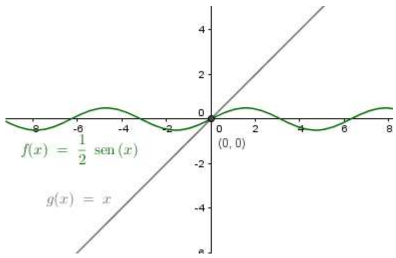
$$k\int_y^x |cos(t)|dt \leq k|y - x| = k|x - y| = kd(x, y)$$

Assim,

$$d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y).$$

Portanto, f é uma contração e pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach, admite um único ponto fixo, logo, a equação $x = ksen(x)$ admite solução única. Observando a figura abaixo, onde atribuimos $k = \frac{1}{2}$, podemos facilmente ver que o único ponto fixo de $f(x) = ksen(x)$ é 0.

Figura 2 – Produzido pelo autor



Exemplo 3.5.2 *Com o mesmo Espaço Métrico e métrica do exemplo anterior, consideremos agora a equação não linear:*

$$x = kcos(x)$$

onde $0 < k < 1$ *é uma constante real. Podemos achar uma solução para a equação?*

Vamos verificar se $f(x) = kcos(x)$ é uma contração. Temos que,

$$d(f(x), f(y)) = k|cos(x) - cos(y)| = k\left|\int_x^y sen(t)dt\right| \leq k\int_x^y |sen(t)|dt.$$

Como $|sen(t)| \leq 1$, temos que

$$k\int_x^y |sen(t)|dt \leq k|x - y| = kd(x, y)$$

Assim,

$$d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y).$$

Portanto, f é uma contração, e pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach, admite um único ponto fixo, portanto, a equação $x = kcos(x)$ admite solução única.

Agora, montando a sequência $x_{n+1} = f(x_n)$ e tomando $k = \frac{1}{4}$, por exemplo, e $x_0 = 0,5$ como valor inicial, chegamos aos seguintes cálculos:

$$x_1 = \frac{1}{4}cos(0,5) = 0,21939564047$$

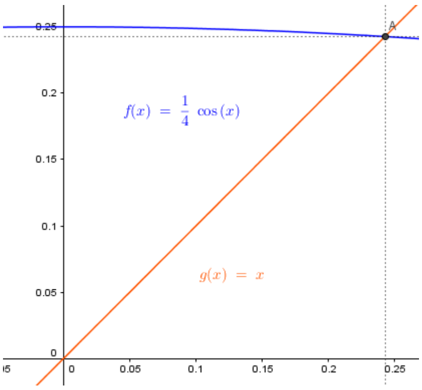
$$x_2 = \frac{1}{4}cos(0,21939564047) = 0,24400729006$$

$$x_3 = \frac{1}{4}cos(0,24400729006) = 0,24259440874$$

$$x_4 = \frac{1}{4}cos(0,24259440874) = 0,24267950218$$
$$x_5 = \frac{1}{4}cos(0,24267950218) = 0,24267439098$$
$$x_6 = \frac{1}{4}cos(0,24267439098) = 0,24267469804$$
$$x_7 = \frac{1}{4}cos(0,24267469804) = 0,24267467959$$

Observe que na quinta iteração temos uma precisão de 5 casas decimais, sendo a raiz da equação $x \approx 0,24267$, como podemos ver na figura abaixo:

Figura 3 – Produzido pelo autor



CONCLUSÃO

O Teorema de Ponto Fixo de Banach é uma ferramenta importante na investigação de problemas de existência e unicidade de soluções de Equações Diferenciais Ordinárias, bem como para o desenvolvimento de um método iterativo para obter soluções aproximadas de equações integrais. Foi possível concluir que o problema da convergência possui importância prática, visto que a solução aproximada converge para a solução exata. Além disso, observou-se também que o teorema do ponto fixo de Banach pode ser aplicado para garantir solução única de equações não lineares.

REFERÊNCIAS

BARROS, C.D.V. **O Teorema do Ponto Fixo de Banach e algumas aplicações**, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal da Paraíba (UFCG), 2013.

BOYCE, W. E., DIPRIMA, R. C., **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. 6ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006.

CASTELLI, M. **Teoremas de Ponto Fixo**, Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Maringá (UEM), 2016.

DOMINGUES H. H., **Espaços Métricos e Introdução à Topologia**, Ed. Atual, 1982.

KREYSZIG, E. **Equações Diferenciais Ordinárias**. 2ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 1983.

LIMA, E. L. **Analise Real**, Volume 1. Rio de janeiro: IMPA; CNPq, 1989.

LIMA, E. L. 2004. **Analise Real**, Volume 2, Projeto Euclides. 2 ed. Rio de Janeiro: IMPA.

LIMA, E. L., **Espaços Métricos**. Projeto Euclides. IMPA, CNPq. (1977). Livros Técnicos e Científicos, Editora.