Universidade Federal de Campina Grande
Unidade Acadêmica de Física
Coordenação de Pós-Graduação em Física

Dissertação de Mestrado

ALGUNS RESULTADOS NO ESPAÇO-TEMPO DO MONOPÓLO GLOBAL COM CONSTANTE COSMOLÓGICA

Renato Pereira Braga

Campina Grande - PB
2011

Universidade Federal de Campina Grande
Unidade Acadêmica de Física
Coordenação de Pós-Graduação em Física

Dissertação de Mestrado

ALGUNS RESULTADOS NO ESPAÇO-TEMPO DO MONOPÓLO GLOBAL COM CONSTANTE COSMOLÓGICA

Renato Pereira Braga

Dissertação de mestrado apresentada à Coordenação do Programa de Pós-graduação em Física da Universidade Federal de Campina Grande (UFCG), como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Física.

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Geusa de Araújo Marques

Campina Grande - PB
2011

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL DA UFCG

B813a Braga, Renato Pereira.

Alguns resultados no espaço-tempo do monopólo global com constante cosmológica / Renato Pereira Braga. - Campina Grande, 2011.

52f.

Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal de Campina, Centro de Ciências e Tecnologia.

Orientadora: Profª. Drª. Geusa de Araújo Marques.

Referências.

1. Cosmologia. 2. Gravitação. 3. Monopólo Global. 4. Constante Cosmológica. I. Título.

CDU 524.8 (043)

ALGUNS RESULTADOS NO ESPAÇO-TEMPO DO MONOPÓLO GLOBAL COM CONSTANTE COSMOLÓGICA

Renato Pereira Braga

Aprovada em ____________________

Banca Examinadora

Prof^a. Dr^a. Geusa de Araújo Marques
Orientadora

Prof. Dr. Rômulo Rodrigues da Silva
Examinador - Interno

Prof. Dr. Valdir Barbosa Bezerra
Examinador - Externo

Aos meus queridos pais
Sebastião Pereira Braga
Maria da Glória Pereira Braga
À minha esposa e minha filha
Laniza Ferreira Almeida e
Letícia Almeida Braga.

Agradecimentos

A Deus, fonte de toda a Sabedoria, Força e Beleza, grande mentor de tudo que aconteceu, acontece e acontecerá no Universo, pois sem Ele, não haveria sentido para a vida.

-À Prof^a. Dr^a. Geusa de Araújo Marques, pela orientação, pela amizade, pela paciência, pelas sugestões, estímulos e pela competência e profissionalismo na orientação deste trabalho.

-À Coordenação da Pós-graduação, em particular, ao Prof. Dr. Francisco de Assis Brito pelo seu constante incentivo e pela sua dedicação com que administra o curso.

-Aos professores que compõem a admistração da unidade acadêmica de física que são peças fundamentais para a manutenção e crescimento deste.

-A todos os professores desta unidade acadêmica de física que contribuíram com a minha formação, especialmente aos Profs. Francisco de Assis Brito e Rômulo Rodrigues da Silva pelo incentivo constante e fundamental para que chegássemos ao final deste trabalho.

-À minha esposa Laniza Ferreira Almeida e minha filha Letícia Almeida Braga que sempre me apoiaram e incentivaram nos momentos difíceis, amenizados com a sua presença, confiança e incentivo.

-Aos colegas de Pós-graduação e funcionários da Unidade Acadêmica de Física pela grata convivência durante a minha permanência nesta Unidade. Especialmente a Emanuel Cunha, Fernando José de Almeida Gama, Jardel Lucena, Fabio Alves e José Jacinto que contribuiram significativamente para a realizaçao deste trabalho.

-A todos que direta ou indiretamente possibilitaram a conclusão deste trabalho.

- À CAPES pelo suporte financeiro e incentivo à pesquisa.

Resumo

Neste trabalho estudamos o comportamento de partículas quânticas livres não-relativisticas e relativisticas no espaço-tempo gerados por um monopolo global com constante cosmológica. Encontrmos os espectros de energia para esse sistema na presença desde defeitos topólogicos e mostramos como eles diferem dos correspondentes ao espaço-tempo plano e fazemos estimativas quantitativas para dois níveis adjacentes. Observamos que há uma discretização dos níveis de energia de natureza puramente topológica.

ABSTRACT

In this work we studied the behavior of non-relativistic and relativistic free quantum particles in the space-time generated by a global monopole with cosmological constant. We found the energy spectra for that system in the presence of this topological defect and showed as they differ from the corresponding to the flat space-time and we quantitative estimates for two adjacent levels. We observed that there is a discretization of the energy levels of a purely topological.

Alguns resultados sobre monopolo global com constante cosmológica

Renato Pereira Braga

26 de Abril de 2011

Resumo

Neste trabalho estudamos o comportamento de partículas quânticas livres não-relativísticas e relativísticas no espaço-tempo gerados por um monopolo global com constante cosmológica.

Encontramos os espectros de energia para esse sistema na presença deste defeito topológico e mostramos como eles diferem dos correspondentes ao espaço-tempo plano e fazemos estimativas quantitativas para dois níveis adjascentes. Observamos que há uma discretização dos níveis de energia de natureza puramente topológica.

Conteúdo

Introdução

Tem sido de grande interesse o estudo de sistemas quânticos interagindo com o campo gravitacional desde os anos vinte do século passado[1], quando a generalização das equações de Schrödinger e Dirac para espaço curvo foi discutida, motivada pela idéia de se construir uma teoria que combinasse física quântica e relatividade geral, na busca de uma possível teoria da gravitação quântica.

Tanto os níveis de energia quanto as diferenças desses níveis em um átomo colocado em um campo gravitacional são modificados pela sua interação com a curvatura quando colocado em uma região do espaço-tempo curvo[2]. Assim eles são distinguíveis dos deslocamentos causados pelo efeito Döppler e também pelo desvio para o vermelho gravitacional. Nestes casos, os deslocamentos nos espectros são os mesmos para todas as linhas espectrais. Na realidade, já foi mostrado que na geometria de Schwarzschild, os deslocamentos dos níveis de energia devido a efeitos gravitacionais são diferentes dos produzidos pelos efeitos Stark e Zeeman, e então, em princípio, é possível distinguir entre os deslocamentos nos níveis de energia causados por perturbações eletromagnéticas e gravitacionais[2]. Podemos, então, dizer que, o espectro de energia contém informações precisas sobre as características locais do espaço-tempo, no qual o sistema atômico se encontra localizado, que podem ser separadas daquelas associadas às outras causas.

Detectar estas mudanças nos níveis de energia sob a influência de um campo gravitacional é de considerável interesse tanto do ponto de vista teórico quanto observacional. No primeiro caso, com vistas à construção de uma teoria que combine mecânica quântica e relatividade geral, e no segundo, para se ter a ordem de grandeza da intensidade do campo gravitacional em uma dada região.

A primeira experiência que comprovou a influência do campo gravitacional sobre um sistema quântico, foi feita por Colella et al.[3] através da medida da diferença de fase quântica de dois feixes de nêutrons. Outro efeito gravitacional que aparece em consequência da interferência quântica devido a um campo gravitacional é o fenômeno da oscilação de neutrino[4].

A teoria geral da relatividade, como uma teoria métrica, prediz que a gravitação é manifestada através da curvatura do espaço-tempo. Esta curvatura é caracterizada pelo tensor de Riemann $R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}$. Por outro lado, sabemos que há conexões entre as propriedades topológicas do espaço e as leis físicas locais, de tal modo que a geometria intrínseca do espaço não é suficiente para descrever completamente a física de um determinado sistema. Assim, também é importante investigar o papel exercido pela topologia não-trivial, por exemplo, sobre um sistema quântico. Como exemplos destas investigações sobre o papel da topologia, podemos mencionar o cálculo da amplitude de espalhamento no contexto da mecânica quântica no cone[5] e a interação de um sistema quântico com uma singularidade cônica[6]. Essas investigações mostram que, a ação de um campo gravitacional não está exclusivamente associada ao efeito da curvatura local, pois, a topologia também tem sua relevância.

Então, para se determinar o espectro de energia de um átomo na presença de um campo gravitacional é necessário levar em conta a estrutura geométrica e os aspectos da topologia que caracterizam o espaço-tempo considerado. Podemos, então, afirmar que a física que descreve a interação de sistemas quânticos com campos gravitacionais é determinada tanto pela curvatura quanto pela topologia dos espaços-tempos associados a estes campos.

Os monopólos globais[8] são defeitos topológicos exóticos[9], cujos espaços-tempos possuem propriedades particulares e bastante peculiares. Até o momento não há nenhuma evidência observacional que comprovem a existência destes objetos, no entanto, a riqueza das novas idéias que os estudos acerca dessas estruturas trazem para a relatividade geral, justificam plenamente o grande interesse no estudo desses defeitos topológicos nos seus vários aspectos, e na sua influência sobre os sistemas físicos de um modo geral, em particular, em sistemas quânticos, considerando a constante cosmológica, os quais são tratados nesta dissertação.

Em 1929, o astrônomo Edwin Powell Hubble, com a utilização de um telescópio que possibilitava visualizar estrelas de forma individual, observara que as linhas espectrais das galáxias sofriam um deslocamento para o vermelho. Ao medir as distâncias entre as galáxias ele percebera que a velocidade de afastamento era proporcional à sua distância, ou seja, quanto mais distante a galáxia se encontrasse, maior a velocidade com a qual se afastaria. Isto mostrava, portanto, que o Universo, diferentemente do que se imaginava, encontrava-se em processo de expansão, o que fez com que Einstein renegasse a constante cosmológica declarando que aquele teria sido o pior erro de sua vida. Em 1998, uma vez mais, a cosmologia adentrava nova fase com um avanço significativo através de dados observacionais advindos de supernovas do tipo Ia, em altos redshifts. Os dois maiores programas da época, o Supernova Cosmology Project e o High-z Supernova Search, de maneira independente, e usando as SN Ia como velas-padrão, chegaram a uma mesma conclusão. Ambos observaram, de fato, que as SN Ia, eram menos brilhantes do que previam os modelos de Universos não-acelerados. Este era um forte indício de que a cosmologia deveria reaver os modelos para os quais o Universo estivesse expandindo de forma não acelerada.

A indicação de um Universo com este cenário implicava nova descrição para seu conteúdo material. Muitos pesquisadores recuperaram a constante cosmológica de Einstein, no intuito de produzir circunstâncias favoráveis à expansão. Esta nova componente, denominada energia escura, seria responsável por fazer o Universo acelerar e representaria uma enorme quantidade na fração da densidade de energia cósmica. Modelos contendo este fluido exótico se tornaram crescentes por estarem em acordo, em muitos sentidos, com os dados observacionais. Em geral, denominados de modelos de energia escura, buscam descrever o Universo utilizando um fluido com pressão negativa que seria responsável pelo efeito desta expansão acelerada.

Esta dissertação está organizada da seguinte forma: No primeiro capítulo faremos uma breve revisão sobre relatividade geral e mecânica quântica não-relativística e relativística em espaços curvos. No segundo capítulo, abordaremos o monopólo global com constante cosmológica, encontramos a métrica correspondente, sob condições do tensor energia-momento devido ao campo do monopólo global fora do núcleo, onde consideramos as equações de Einstein com constante cosmológica. No terceiro capítulo, abordaremos um sistema quântico livre (potencial nulo) não-relativístico e outro relativístico no espaço-tempo do monopólo global com constante cosmológica. E por fim, apresentaremos conclusões e perspectivas referentes aos resultados apresentados nesta dissertação.

Capítulo 1

Mecânica quântica no espaço curvo

1.1 Introdução

Neste capítulo faremos uma breve revisão da teoria da relatividade geral e da generalização da mecânica quântica (não-relativística e relativística) para espaços-tempo curvos.

A generalização da mecânica quântica para o espaço curvo é desejável sob vários pontos de vista, quais sejam:

Primeiramente, esta generalização é indispensável se quisermos estudar e compreender o interessante problema relativo à relevância dos efeitos quânticos associados a campos gravitacionais externos[1], como, por exemplo, em processos astrofísicos envolvendo as alterações das linhas espectrais dos átomos e possivelmente, em experimentos para detecção de ondas gravitacionais.

Em segundo lugar, esta generalização também é importante pela possibilidade que ela apresenta no sentido de termos um melhor entendimento da estrutura da mecânica quântica do ponto de vista geométrico e topológico.

É importante chamar a atenção para o fato de que a generalização da mecânica quântica de modo a incorporar a relatividade geral não apresenta elementos conflitantes, pois, a natureza global da mecânica quântica contida na sua descrição no espaço de Hilbert é compatível com o caráter local da descrição geométrica da relatividade geral,

[1]No caso em que o campo gravitacional é suficientemente forte de modo que o processo de criação de partículas torna-se importante, devemos considerar a teoria quântica de campos.

que por sua vez incorpora também aspectos globais.

1.2 Relatividade geral

O princípio da teoria da relatividade especial afirma que as leis físicas são as mesmas em quaisquer referenciais inerciais. A idéia é que se considerarmos uma transformação de coordenadas entre dois referências inerciais, então, as leis físicas são invariantes, ou mais precisamente, covariantes, sob essa transformação.

O ponto de partida da relatividade geral[12] é considerar essa afirmativa de uma forma mais ampla, de modo que ela seja válida para quaisquer transformações de coordenadas entre dois referenciais.

A seguir, vamos apresentar uma dedução breve das equações de Einstein da relatividade geral, que são as equações do campo gravitacional, cujas soluções correspondentes à corda cósmica, ao monopólo global, ao cilindro com rotação, à corrente de matéria e à corda cósmica com rotação, que serão usadas nesta dissertação.

Contrariamente às equações matemáticas, as da física, equações de movimento, não são deduzidas de maneira formal. Devemos, portanto, fazer algumas hipóteses sobre o tipo de equações que desejamos obter. Estas hipóteses são baseadas em princípios físicos.

As equações assim obtidas são confrontadas e testadas com os resultados experimentais. Se elas estiverem erradas, abandonaremos as hipóteses feitas e consideraremos outras. É seguindo esse procedimento, adotando um certo conjunto de hipóteses, que chegamos às equações da teoria da relatividade geral de Einstein.

Para deduzir as equações do campo gravitacional, vamos escolher algumas hipóteses, que são elencados a seguir:

(i) A gravitação é descrita por uma métrica de Lorentz, $g_{\mu\nu}$ sobre uma dada variedade.

(ii) As equações de movimento para $g_{\mu\nu}$ devem depender somente de conteúdo do tensor energia-momento de todos os campos de matéria.

(iii) As equações de movimento devem ser covariantes gerais (isto é, covariantes sob transformações de coordenadas gerais), e devem ser equações tensoriais.

(iv) O tensor energia-momento $T^{\mu\nu}$ é tal que $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$, ou seja, o conteúdo de energia-momento dos campos de matéria deve ser conservado localmente.

(v) A matéria deve ter comportamento causal, isto é, a matéria nunca viaja com velocidade superior a da luz- todos os sinais estão dentro ou sobre o cone de luz.

(vi) A gravitação de Newton deve reaparecer no limite de campos fracos.

(vii) As equações devem ser, no máximo, de segunda ordem nas derivadas.

Se não impusermos esta última condição, teremos infinitas escolhas das equações. Por outro lado, derivadas de ordens superiores a dois implicam na necessidade de outras condições iniciais além da posição e velocidade, para determinar a evolução do sistema de campos, e isto é, em geral, não desejável.

Além das condições (i) - (vii), podemos adicionar uma outra, $(viii)$ que diz ″As equações de campo devem ser deriváveis de um princípio de mínima ação, na forma covariante geral″.

Se levarmos em conta as condições (i) - (vii), teremos basicamente uma opção, como veremos a seguir. O tensor energia-momento é conservado, então

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} \equiv 0. \tag{1.1}$$

Se $T^{\mu\nu}$ aparece no lado direito das equações de Einstein, que quantidade geométrica pode ser colocada no lado esquerdo da equação? Ela deve ser covariante, conter, no máximo, a derivada de segunda ordem da métrica e ter divergência nula. Então, a única possibilidade é

$$(G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}) = aT_{\mu\nu}, \tag{1.2}$$

onde $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}$ e Λ e a são constantes que serão determinadas.

O lado esquerdo da equação (1.2) possui divergência nula pois, $\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0$ e, portanto, $\nabla^\mu g_{\mu\nu} = 0$. Para ver que $\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0$, vamos lembrar a identidade de Bianchi, que é dada por

$$\nabla_{[\lambda} R_{\rho\sigma]_{\mu\nu}} \equiv 0,$$

ou seja

$$\begin{aligned}
g^{\mu\lambda}\left(\nabla_\lambda R_{\rho\sigma\mu\nu} + \nabla_\sigma R_{\lambda\rho\mu\nu} + \nabla_\rho R_{\sigma\lambda\mu\nu}\right) &\equiv 0, \\
\nabla^\mu R_{\mu\nu\rho\sigma} + \nabla_\sigma R_{\rho\nu} + \nabla_\rho R_{\sigma\nu} &= 0, \\
\nabla^\mu R_{\mu\nu\rho\sigma} &= 2\nabla_{[\rho} R_{\sigma]\nu}.
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Contraindo (1.3) com $g^{\nu\sigma}$, temos,

$$\nabla^\mu R_{\mu\rho} = \frac{1}{2}\nabla_\rho R. \tag{1.4}$$

Agora, apliquemos ∇^μ a $G_{\mu\nu}$

$$\begin{aligned}
\nabla^\mu G_{\mu\nu} &= \nabla^\mu\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}\right), \\
&= \frac{1}{2}\nabla_\nu R - \frac{1}{2}\nabla_\nu R = 0,
\end{aligned}$$

e portanto, $G_{\mu\nu}$ possui divergência nula.

Para que os termos da equação (1.2) possuam a dimensão correta, Λ deve ter a dimensão de (comprimento)$^{-2}$ (L^{-2}). Como $T_{\mu\nu}$ possui dimensão $ML^2T^{-2}L^{-3}$ (energia-momento por unidade de volume), então $''a''$ deve ter dimensão $M^{-1}L^{-1}T^2$. As constantes disponíveis para a determinação da constante $''a''$ são G, constante gravitacional de Newton, e c, a velocidade da luz, que possuem dimensões $M^{-1}L^3T^2$ e LT^{-1}, respectivamente. Então, $''a''$ deve ser dada por

$$a = \frac{kG}{c^4},$$

onde k é uma constante adimensional. O fato de que a força gravitacional é independente da natureza da fonte do campo significa que k deve ser uma constante universal que é dada por $k = 8\pi$. Este resultado é obtido impondo-se que no limite de campo fraco, a teoria da relatividade geral se reduza à teoria da gravitação de Newton.

A constante Λ é chamada constante cosmológica - é um parâmetro da teoria e deve ser medido. Assim, usando a expressão para $''a''$ e retornando à equação (1.2), podemos escrever

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \tag{1.5}$$

A equação acima é conhecida como equação de Einstein (em unidades *cgs.*) com constante cosmológica. Note que $T_{\mu\nu}$ é o conteúdo material (matéria/energia) e a fonte da geometria e topologia (campo gravitacional).

A expressão (1.5) representa as equações de campo da gravitação. Além de elegante, esta relação entre a geometria do espaço-tempo e a distribuição de matéria sugeria certa simplicidade de interpretação. Apesar disto, esta teoria somente foi aceita pela grande maioria dos cientistas da época depois de comprovado o desvio sofrido pela luz devido ao campo gravitacional do Sol durante o eclipse solar de 1919. Einstein havia previsto matematicamente $1,7$" de graus para o desvio da luz de uma estrela que passava perto do Sol.

Obviamente, muitos daqueles cientistas insistiam em refutar tal comprovação, alegando que a precisão dos instrumentos daquela época estava no limite da medida. Atualmente, a validade da teoria nesse âmbito não é mais questionada e as medidas podem ser feitas sem a necessidade de eclipses[2]e com alto grau de precisão. Outras previsões da relatividade geral, como o efeito das lentes gravitacionais[3], fazem da teoria uma proposição que descreve tão bem a realidade para grandes escalas que fica difícil a contestação.

Pouco depois de formular sua teoria da gravitação, Einstein voltou sua atenção para a cosmologia, aplicando suas equações com o intuito de descrever o Universo conforme seus conceitos. O termo cosmológico -"$\Lambda g_{\mu\nu}$", que foi adicionado ao lado esquerdo da equação (1.5), relacionando-o à geometria, segundo Einstein, garantiria um Universo

[2] Por exemplo, medidas feitas por meio do desvio da luz de quasares, objetos que emitem grande quantidade de radiação na faixa de ondas de rádio, dispensam o acontecimento de eclipses.

[3] O efeito de lentes gravitacionais é responsável por produzir múltiplas imagens, por exemplo, de um mesmo quasar distante, quando esse se encontra atrás de uma galáxia relativamente próxima da Terra.

estático.

Com isto, Einstein acreditava que as novas equações, não mais admitindo o espaço plano como solução, estariam em acordo com sua proposta de Universo estático. Todavia, para a surpresa de Einstein, as observações mostraram um Universo dinâmico e o termo cosmológico se apresentou dispensável. Ademais, Willem de Sitter já havia mostrado que existia uma solução de vácuo para as equações, com espaço-tempo curvo, mesmo mantendo o termo da Constante Cosmológica. De Sitter, portanto, obtivera o primeiro modelo cosmológico[13] para um Universo em expansão. Posteriormente, Friedmann obteve soluções [14]-[15] para um Universo em expansão dominado por matéria e na ausência da constante cosmológica. As contribuições de Friedmann e Lemaître foram fundamentais para a obtenção do modelo cosmológico que seria considerado como padrão. Além do mais, com a descoberta de Hubble da relação distância-redshift[16]. Até que em 1998, uma vez mais, a cosmologia adentrava em uma nova fase com um avanço significativo através de dados observacionais advindos de supernovas do tipo Ia em altos redshifts. Os dois maiores programas da época, o Supernova Cosmology Project e o High-z Supernova Search, de maneira independente, e usando as SN Ia como velas-padrão, chegaram a uma mesma conclusão. Ambos observaram, de fato, que as SN Ia eram menos brilhantes do que previam os modelos de Universos não-acelerados. Este era um forte indício de que a cosmologia deveria reaver os modelos para os quais o Universo estivesse expandindo de forma acelerada. Esses dados observacionais nos leva a pensar numa constante cosmológica não nula, porém agora, ela possue uma interpretação diferente da proposta por Einstein, pois, no contexto atual, esse constante tem que dar conta da expansão acelerada observada hoje no universo.

No vácuo, para $\Lambda = 0$, temos $T_{\mu\nu} \equiv 0$ e portanto $T = T^{\mu}_{\mu} = 0$. Neste caso, as equações de Einstein ficam simplesmente

$$R_{\mu\nu} = 0. \tag{1.6}$$

Na obtenção da equação (1.6) usamos o fato[4] de que $R = -\frac{8\pi G}{c^4}T^{\mu}_{\mu}$. No caso em que $\Lambda \neq 0$, a equação (1.6) fica

$$R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu}. \tag{1.7}$$

Observe que a constante cosmológica possui a interpretação física de energia do vácuo ou energia do ponto zero, ou seja, é uma simples constante aditiva na densidade de energia. Em qualquer outra teoria da física, a energia do ponto zero é completamente irrelevante para a dinâmica, mas no caso da gravitação é diferente e a dinâmica é sensível à presença de Λ.

O termo $\Lambda g_{\mu\nu}$ foi introduzido por Einstein por razões cosmológicas, e por esta razão, Λ é chamada constante cosmológica.

1.3 Mecânica quântica na presença de campos gravitacionais

O princípio da covariância afirma que uma dada equação física é válida na presença de um campo gravitacional se as seguintes condições forem satisfeitas:

(i) A equação é válida na ausência de campo gravitacional, quando o tensor métrico, $g_{\mu\nu}$, é igual ao tensor métrico do espaço de Minkowski[5] η_{ab}, e a conexão afim $\Gamma^{\mu}_{\rho\sigma}$ é identicamente nula.

(ii) A equação é covariante, isto é, ela preserva a forma sob uma transformação geral de coordenadas.

1.3.1 Equação de Schrödinger

Uma característica importante que deve ser levada em conta quando a mecânica quântica não-relativística é generalizada para o âmbito da relatividade geral, é o fato de o

[4] $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$,
$g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg^{\mu\nu}g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}$,
$R - 2R = \frac{8\pi G}{c^4}T^{\mu}_{\mu}$,
$R = -\frac{8\pi G}{c^4}T^{\mu}_{\mu}$.

[5] Usaremos os índices latinos quando estivermos considerando o espaço plano e também para designar a parte espacial no caso de espaços curvos. Os índices gregos serão usados no caso de espaços curvos.

contínuo espaço-tempo ter que ser separado em espaço e tempo. Nesta seção, não vamos levar em conta nenhum rigor para procedermos à generalização da mecânica quântica não-relativística para o espaço-tempo curvo. O nosso procedimento será, simplesmente, admitir que neste contexto a equação de Schrödinger é dada por[7]

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2_{LB}\psi + V(\mathbf{r}), \tag{1.8}$$

onde o operador covariante de Laplace-Beltrami é dado por $\nabla^2_{LB} = g^{-\frac{1}{2}}\partial_i\left(g^{ij}\sqrt{g}\partial_j\right)$, com $i, j = 1, 2, 3$; e $g = \det\left(g_{ij}\right)$ é o determinante do tensor métrico g_{ij}; μ é a massa da partícula e $V(\mathbf{r})$ é um potencial externo.

A dedução da equação de Schrödinger poderia ser feita através da quantização de um sistema clássico, cuja Lagrangiana é dada por $\frac{1}{2}\dot{q}^2 - V(q)$, e assim, chegar à Hamiltoniana contida na equação (1.8). A equação assim obtida seria confrontada com a experiência, com a finalidade de confirmar, desta forma, a generalização da mecânica quântica não-relativística sob a influência de campos gravitacionais.

1.3.2 Equação de Klein-Gordon

O quadrivetor energia-momento é dado por

$$p^a = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right) \text{ e } p_a = \left(-\frac{E}{c}, \vec{p}\right). \tag{1.9}$$

Assim, o invariante $p^a p_a$ é dado por

$$p^2 = -\frac{E}{c^2}^2 + \vec{p}^2,\ E = \mu c^2, \tag{1.10}$$

Podemos, portanto, escrever a equação que descreve o comportamento de partícula com spin-0, obtida a partir do invariante p^2, através da substituição de E e $\vec{p}$ pelos operadores

$$E \;\rightarrow\; \frac{i\hbar}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \tag{1.11}$$

$$\vec{p} \;\rightarrow\; -i\hbar\vec{\nabla}. \tag{1.12}$$

Estas substituições nos levam à equação

$$\left[\Box - \left(\frac{\mu c}{\hbar}\right)^2\right]\Psi = 0, \tag{1.13}$$

onde μ é a massa da partícula. A equação (1.13) é a equação de Klein-Gordon e o operador $\Box = \eta^{ab}\partial_a\partial_b = -\frac{\partial^2}{c^2\partial t^2} + \vec{\nabla}^2$ é conhecido como operador d′Alembertiano, onde η^{ab} (ver A.4) é o tensor métrico do espaço de Minkowski. A equação (1.13) pode ser escrita também na forma

$$\left[\eta^{ab}\partial_a\partial_b - \left(\frac{\mu c}{\hbar}\right)^2\right]\Psi = 0. \tag{1.14}$$

A generalização óbvia para o espaço curvo, obtida a partir da equação (1.14), é feita pela substituição de η^{ab} por $g^{\mu\nu}$ e da derivada parcial ∂_a pela derivada covariante ∇_μ, onde $\nabla_\mu V^\rho = \partial_\mu V^\rho + \Gamma^\rho_{\mu\nu}V^\nu$. Dessa forma, a equação de Klein-Gordon para o espaço curvo pode ser escrita como

$$\left[g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu - \left(\frac{\mu c}{\hbar}\right)^2\right]\Psi = 0. \tag{1.15}$$

Podemos escrever a equação dada por (1.15), por um procedimento equivalente ao considerado anteriormente, e que consiste na covariantização do operador d′Alembertiano, que é dado, neste caso, pela seguinte expressão

$$\Box = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu\left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\right), \tag{1.16}$$

onde g é o determinante[6] de $g_{\mu\nu}$. Portanto, a equação de Kein-Gordon no espaço curvo também pode ser escrita na forma

$$\left[\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu\left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\right) - \left(\frac{\mu c}{\hbar}\right)^2\right]\Psi(x) = 0. \tag{1.17}$$

No caso em que queremos acoplar uma interação escalar (potencial escalar $V(r)$) à equação (1.17), devemos fazer a substituição $\mu^2c^2 \rightarrow \mu^2c^2 + V(r)$.

No caso da presença de um campo de gauge, é acrescentado à equação de Klein-Gordon um potencial de gauge externo de A^μ, e a mesma é escrita na forma

$$\begin{aligned}&\left[\Box + ie\frac{A^\mu}{\sqrt{-g}}\left(\partial_\mu\sqrt{-g}\right) + \frac{ie}{\hbar c^2}\partial_\mu A^\mu\right.\\&\left.+2\frac{ie}{\hbar c^2}A^\mu\partial_\mu + \frac{e^2}{\hbar^2c^2}A^\mu A_\mu - \left(\frac{\mu c}{\hbar}\right)^2\right]\Psi(x) = 0.\end{aligned} \tag{1.18}$$

[6] A massa μ da partícula que aparece na equação (1.13) não tem nada a ver com o índice μ que aparece nos operadores.

Esta equação descreve a interação de uma partícula de spin zero, tratada do ponto de vista quântico, com os campos eletromagnéticos e gravitacionais, que são tratados classicamente.

Nesta dissertação, vamos considerar a constante gravitacional de Newton, G, c e $\hbar$ iguais a unidade.

Capítulo 2

Monopólo global com Constante Cosmológica

2.1 Introdução

Segundo o mecanismo de Kibble, diferentes tipos de objetos topológicos podem ter sido criados por transições de fase que ocorreram no Universo primitivo[17]. No cenário cosmológico, os defeitos topológicos se originaram ao processo de formação de estrutura[18], quando considerados na presença de um cenário com inflação. A recente descoberta de uma assinatura não-Gaussiana da radiação cósmica de fundo propõe que os defeitos se formaram em algum momento durante a evolução do Universo[19]. Estes defeitos incluem paredes de domínio, cordas cósmicas e monopólos. Dentre esses, as cordas cósmicas e monopólos parecem ser os melhores candidatos a serem observados. Um monopólo global é um objeto pesado formado na fase de transição de um sistema composto de um campo escalar tripleto φ^a cuja simetria global original $O(3)$ é espontaneamente quebrada para $U(1)$.

Esses monopólos têm um campo de Goldstone com sua densidade de energia diminuindo com a distância como r^{-2}. Em um trabalho pioneiro de Barriola Vilenkin[20] mostra-se que a existência de uma solução deste tipo de monopolo resulta da quebra da simetria global $SO(3)$ de um campo escalar tripleto, em um cenário de Schwarzschild. Eles encontraram um resultado peculiar: o espaço-tempo produzido por um monopólo global não tem potencial gravitacional Newtoniano, apesar de que a geometria produzida por este objeto pesado tenha uma curvatura diferente de zero.

No meio científico, tem havido uma grande discussão sobre o campo gravitacional do monopólo global, começando com o trabalho de Barriola eVilenkin[20] -[21].

Recentes observações de Supernovas do tipo Ia[22] e medições da anisotropia da radiação cósmica de fundo[23], indicam que o Universo se encontra hoje em expansão acelerada, mais uma vez mais voltamos nossa atenção para a possível existência, na época atual, de um termo positivo Λ (constante cosmológica). Acredita-se que o positivo termo Λ pode dominar a densidade de energia total do Universo.

Observações do deslocamento para o vermelho de Supernovas do tipo Ia parecem sugerir que o Universo pode está acelerado com uma grande fração da densidade cosmológica na forma de um termo cosmológico Λ[24].

A incompatibilidade de observações com o satélite COBE e modelo de matéria escura fria (CMD) para a formação de estruturas no Universo com $\Omega_m = 1$ é sanado se o universo é plano, e a maioria da matéria é suavemente distribuída na forma da constante cosmológica e apenas uma pequena fração ($\Omega_m H \approx 0,2$) em matéria dos aglomerados (aqui, H é a constante de Hubble em unidades de $100km/s/Mpc$[1])[25]. Assim, a constante cosmológica pode desempenhar um papel significativo na formação de estruturas no Universo, em outras palavras, o termo Λ pode estar ligado à formação e evolução dos defeitos topológicos. Por isso, é perfeitamente justificável a estudar os defeitos topológicos com o termo Λ.

Vale a pena salientar que, os efeitos da "**matéria escura**"são completamente distintos dos efeitos da "**energia escura**". A matéria escura é um conteúdo energético concentrado em determinadas regiões do Universo, responsável por exemplo, pelas velocidades de recessão (local) e peculiar (global) das galáxias nos seus respectivos aglomerados[25]. Já a energia escura é um conteúdo energético que permeia todo Universo, associado à expansão acelerada do Universo.

[1] $1\ Mpc = 3,086 \times 10^{22} m.$

.

Neste capítulo, vamos investigar o espaço-tempo do monopólo global com constante cosmológica. O modelo mais simples que dá origem ao monopólo global, é descrito pela Lagrangiana (que segue o formalismo de Barriola e Vilenkin[20])

$$L = \frac{1}{2}\partial_\mu \phi^a \partial^\mu \phi^a - \frac{1}{4}\lambda \left(\phi^a \phi^a - \eta^2\right)^2. \tag{2.1}$$

onde ϕ^a é um campo escalar tripleto, $a = 1, 2, 3$, η é a escala de energia de quebra de simetria e λ é uma constante. O modelo tem simetria global $O(3)$, que é espontaneamente quebrada para $U(1)$. A configuração do campo descrevendo um monopólo é

$$\phi^a = \eta f\left(r\right)\left(\frac{x^a}{r}\right). \tag{2.2}$$

onde $x^a x^a = r^2$. Desde que o espaço-tempo aqui seja estático e esfericamente simétrico, a métrica toma a forma

$$ds^2 = -e^\gamma dt^2 + e^\mu dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + sen^2\theta d\phi^2\right). \tag{2.3}$$

onde μ e γ são funções de r apenas. O tensor energia-momento associado ao campo do monopólo, fora do núcleo (onde $\delta = \lambda^{-1/2}\eta^{-1}$ é o raio do núcleo do monopólo) torna-se[20], é dado por

$$T_t^t = T_r^r = \eta^2/r^2,$$

$$T_\theta^\theta = T_\phi^\phi = 0. \tag{2.4}$$

As equações de campo de Einstein com constante cosmológica podem ser escritas na forma

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}. \tag{2.5}$$

2.2 Métrica do monopólo global com constante cosmológica

A principal motivação para a introdução da constante cosmológica no estudo do campo gravitacional do monopólo vem do fato de que os últimos dados das sondas da NASA, BOOMERANG e MAXIMA [22]-[24], apontam para um universo espacialmente plano, cuja densidade de energia é dominada por um termo tipo constante cosmológica, isto é, um termo Λ pode ter desempenhado um papel importante no Universo primitivo, quando defeitos topológicos como cordas cósmicas, monopólos e paredes de domínio podem ter surgido.

Pode-se escrever esses tensores na forma $T_{\mu\nu}$, onde, $T_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}T^{\nu}_{\mu}$. Então, para $\nu = \mu$ obtém-se

$$T_{tt} = g_{tt}T^{t}_{t} = -e^{\gamma}\eta^2/r^2, \tag{2.6}$$

$$T_{rr} = g_{rr}T^{r}_{r} = e^{\mu}\eta^2/r^2, \tag{2.7}$$

$$T_{\theta\theta} = g_{\theta\theta}T^{\theta}_{\theta} = T_{\phi\phi} = g_{\phi\phi}T^{\phi}_{\phi} = 0. \tag{2.8}$$

Sabendo que $g_{tt} = -e^{\gamma}$, $g_{rr} = e^{\mu}$, $g_{\theta\theta} = r^2$ e $g_{\phi\phi} = r^2 sen^2\theta$ a partir da métrica Utilizada. As expressões encontradas para os tensores de Ricci e para o escalar de curvatura, foram obtidos, em relação a consideração $A(r) = e^{\gamma}$ e $B(r) = e^{\mu}$, então

$$\begin{aligned} R_{tt} = -\tfrac{1}{4B^2(r)A(r)r} \Big[2r \left(\tfrac{d^2A(r)}{dr^2}\right) A(r)B(r) - r \left(\tfrac{dA(r)}{dr}\right)^2 B(r) \\ -r \left(\tfrac{dA(r)}{dr}\right)\left(\tfrac{dB(r)}{dr}\right) A(r) + 4\left(\tfrac{dA(r)}{dr}\right) B(r)A(r) \Big], \end{aligned} \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned} R_{rr} = \tfrac{1}{4A^2(r)B(r)r} \Big[2r \left(\tfrac{d^2A(r)}{dr^2}\right) A(r)B(r) - r \left(\tfrac{dA(r)}{dr}\right)^2 B(r) \\ -r \left(\tfrac{dA(r)}{dr}\right)\left(\tfrac{dB(r)}{dr}\right) A(r) - 4\left(\tfrac{dB(r)}{dr}\right) A^2(r) \Big], \end{aligned} \tag{2.10}$$

$$R_{\theta\theta} = -\frac{1}{2B^2(r)A(r)} \left[\left(\frac{dB(r)}{dr}\right) rA(r) + 2B^2(r)A(r) - \left(\frac{dA(r)}{dr}\right) rB(r) - 2A(r)B(r) \right], \tag{2.11}$$

$$R_{\phi\phi} = \frac{1}{2B^2(r)A(r)}\left[\left(\frac{dA(r)}{dr}\right)rB(r) - \left(\frac{dA(r)}{dr}\right)rB(r)cos^2\theta - \left(\frac{dB(r)}{dr}\right)rA(r) + \left(\frac{dB(r)}{dr}\right)rA(r)cos^2\theta + 2A(r)B^2(r)cos^2\theta - 2A(r)B^2(r) + 2A(r)B(r) - 2A(r)B(r)cos^2\theta\right]. \tag{2.12}$$

e

$$R = R^{\mu}_{\nu} = g^{tt}R_{tt} + g^{rr}R_{rr} + g^{\theta\theta}R_{\theta\theta} + g^{\phi\phi}R_{\phi\phi}. \tag{2.13}$$

onde o valor do escalar de curvatura pode ser obtido a partir da simplificação com a multiplicação de $g^{\mu\nu}$ nas equações de Einstein com constante cosmológica, que é dada por

$$g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg^{\mu\nu}g_{\mu\nu} + \Lambda g^{\mu\nu}g_{\mu\nu} = 8\pi g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}. \tag{2.14}$$

Para $g^{\mu\nu}g_{\mu\nu} = \delta^{\mu}_{\mu} = \delta^0_0 + \delta^1_1 + \delta^2_2 + \delta^3_3 = 4$, levando em consideração as matrizes de Pauli, então pode-se determinar o valor de R. Lembrando que: $g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = R^{\mu}_{\mu} = R$ e que $g^{\mu\nu}T_{\mu\nu} = T^{\mu}_{\mu} = T$. Seguintes resultados da equação (**??**) obtemos os:

$$R - \frac{1}{2}4R + 4\Lambda = 8\pi T,$$

$$R - 2R + 4\Lambda = 8\pi T,$$

Portanto,

$$R = -8\pi T + 4\Lambda.$$

Fazendo a substituição desse resultado nas equações de Einstein (2.5), obtém-se

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}(-8\pi T + 4\Lambda)g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu},$$

$$R_{\mu\nu} + 4\pi T g_{\mu\nu} - 2\Lambda g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}.$$

Então, por equivalência, escreve-se

$$R_{\mu\nu} + (4\pi T - \Lambda)g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}. \tag{2.15}$$

Lembrando que $T = T^{\mu}_{\mu} = T^{t}_{t} + T^{r}_{r} + T^{\theta}_{\theta} + T^{\phi}_{\phi} = \frac{2\eta^2}{r^2}$, então para $\mu = \nu$, obtém-se

$$\begin{aligned}
R_{tt} + (4\pi T - \Lambda)\, g_{tt} &= 8\pi T_{tt} \quad , \\
R_{rr} + (4\pi T - \Lambda)\, g_{rr} &= 8\pi T_{rr} \quad , \\
R_{\theta\theta} + (4\pi T - \Lambda)\, g_{\theta\theta} &= 8\pi T_{\theta\theta} \quad , \\
R_{\phi\phi} + (4\pi T - \Lambda)\, g_{\phi\phi} &= 8\pi T_{\phi\phi}.
\end{aligned}$$

Fazendo as devidas substituições dos valores já obtidos para as componentes das equações acima, obtemos

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{4B^2(r)A(r)r}\left[2r\left(\frac{d^2A(r)}{dr^2}\right)A(r)B(r) - r\left(\frac{dA(r)}{dr}\right)^2 B(r) - r\left(\frac{dA(r)}{dr}\right)\times\right.\\
&\left.\left(\frac{dB(r)}{dr}\right)A(r) + 4\left(\frac{dA(r)}{dr}\right)B(r)A(r)\right]\\
&-\left(\frac{8\pi\eta^2}{r^2}T - \Lambda\right)A(r) = -\frac{8\pi\eta^2}{r^2}A(r)\ ,
\end{aligned} \tag{2.16}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4A^2(r)B(r)r}\left[2r\left(\frac{d^2A(r)}{dr^2}\right)A(r)B(r) - r\left(\frac{dA(r)}{dr}\right)^2 B(r)\right.\\
&\left.-r\left(\frac{dA(r)}{dr}\right)\left(\frac{dB(r)}{dr}\right)A(r) - 4\left(\frac{dB(r)}{dr}\right)A^2(r)\right]\\
&+\left(\frac{8\pi\eta^2}{r^2}T - \Lambda\right)B(r) = \frac{8\pi\eta^2}{r^2}B(r)\ ,
\end{aligned} \tag{2.17}$$

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{2B^2(r)A(r)}\left[\left(\frac{dB(r)}{dr}\right)rA(r) + 2B^2(r)A(r) - \left(\frac{dA(r)}{dr}\right)rB(r)\right.\\
&\left.-2A(r)B(r)\right] + \left(\frac{8\pi\eta^2}{r^2}T - \Lambda\right)r^2 = 0\ ,
\end{aligned} \tag{2.18}$$

$$\frac{1}{2B^2(r)A(r)}\left[\left(\frac{dA(r)}{dr}\right)rB(r)-\left(\frac{dA(r)}{dr}\right)rB(r)cos^2\theta-\left(\frac{dB(r)}{dr}\right)rA(r)+\right. \tag{2.19}$$
$$\left(\frac{dB(r)}{dr}\right)rA(r)cos^2\theta+2A(r)B^2(r)cos^2\theta-2A(r)B^2(r)+$$
$$\left.2A(r)B(r)-2A(r)B(r)cos^2\theta\right]+\left(\frac{8\pi\eta^2}{r^2}T-\Lambda\right)r^2sen^2\theta=0\ .$$

Com auxílio das equações (2.16) e (2.17), obtém-se

$$-\quad\frac{1}{4B^2(r)A(r)r}\left[2r\left(\frac{d^2A(r)}{dr^2}\right)A(r)B(r)-r\left(\frac{dA(r)}{dr}\right)^2B(r)\right. \tag{2.20}$$
$$\left.-r\left(\frac{dA(r)}{dr}\right)\left(\frac{dB(r)}{dr}\right)A(r)+4\left(\frac{dA(r)}{dr}\right)B(r)A(r)\right]$$
$$-(\frac{8\pi\eta^2}{r^2}T-\Lambda)A(r)=\frac{8\pi\eta^2}{r^2}A(r)\ .$$

$$\frac{1}{4A^2(r)B(r)r}\left[2r\left(\frac{d^2A(r)}{dr^2}\right)A(r)B(r)-r\left(\frac{dA(r)}{dr}\right)^2B(r)\right. \tag{2.21}$$
$$\left.-r\left(\frac{dA(r)}{dr}\right)\left(\frac{dB(r)}{dr}\right)A(r)-4\left(\frac{dB(r)}{dr}\right)A^2(r)\right]$$
$$+(\frac{8\pi\eta^2}{r^2}T-\Lambda)B(r)=\frac{8\pi\eta^2}{r^2}B(r)\ .$$

Multiplicando (2.20) por $B(r)$ e (2.21) por $A(r)$, temos

$$-\frac{1}{4B(r)A(r)r}\left[2r\left(\frac{d^2A(r)}{dr^2}\right)A(r)B(r)-r\left(\frac{dA(r)}{dr}\right)^2B(r)\right.$$
$$\left.-r\left(\frac{dA(r)}{dr}\right)\left(\frac{dB(r)}{dr}\right)A(r)+4\left(\frac{dA(r)}{dr}\right)B(r)A(r)\right]$$
$$-(\frac{8\pi\eta^2}{r^2}T-\Lambda)B(r)A(r)=-\frac{8\pi\eta^2}{r^2}B(r)A(r)\ ,$$

$$\frac{1}{4A(r)B(r)r}\left[2r\left(\frac{d^2A(r)}{dr^2}\right)A(r)B(r)-r\left(\frac{dA(r)}{dr}\right)^2B(r)\right.$$
$$\left.-r\left(\frac{dA(r)}{dr}\right)\left(\frac{dB(r)}{dr}\right)A(r)-4\left(\frac{dB(r)}{dr}\right)A^2(r)\right]$$
$$+(\frac{8\pi\eta^2}{r^2}T-\Lambda)A(r)B(r)=\frac{8\pi\eta^2}{r^2}A(r)B(r)\ .$$

Agora, podem-se somar as duas equações, o que resulta em

$$\frac{4A(r)B(r)}{4B(r)A(r)r}\left(\frac{dA(r)}{dr}\right)-\frac{4A^2(r)}{4B(r)A(r)r}\left(\frac{dB(r)}{dr}\right)=0. \tag{2.22}$$

Multiplicando por (-1), Tem-se que

$$\frac{1}{r}\left(\frac{dA(r)}{dr}\right)+\frac{A(r)}{B(r)r}\left(\frac{dB(r)}{dr}\right)=0 \quad , \tag{2.23}$$

$$\frac{1}{r}\left[\frac{dA(r)}{dr}+\frac{A(r)}{B(r)}\frac{dB(r)}{dr}\right]=0, \tag{2.24}$$

$$\frac{dA(r)}{dr}+\frac{A(r)}{B(r)}\frac{dB(r)}{dr}=0 \quad , \tag{2.25}$$

$$\frac{dA(r)}{dr}=-\frac{A(r)}{B(r)}\frac{dB(r)}{dr},$$
$$\frac{1}{A(r)}\frac{dA(r)}{dr}=-\frac{1}{B(r)}\frac{dB(r)}{dr}.$$

Sabendo que $\frac{1}{B}\frac{dB(r)}{dr}=lnB(r)\frac{d}{dr}$, então

$$\left[lnA(r)+lnB(r)\right]\frac{d}{dr}=0, \tag{2.26}$$

$$lnA(r)+lnB(r)=c', \tag{2.27}$$

onde c' é uma constante de integração.

$$A(r)=e^{c'-lnB(r)}. \tag{2.28}$$

Logo,

$$A(r)=\frac{c''}{B(r)}. \tag{2.29}$$

Agora, trabalhando com as equações (2.18) e (2.19), obtém-se:

$$-\frac{1}{2B^2(r)A(r)}\left[\left(\frac{dB(r)}{dr}\right)rA(r)+2B^2(r)A(r)-\left(\frac{dA(r)}{dr}\right)rB(r)-2A(r)B(r)\right]$$
$$+\left(\frac{8\pi\eta^2}{r^2}T-\Lambda\right)r^2=0 \ ,$$

$$\frac{1}{2B^2(r)A(r)}\left[\left(\frac{dA(r)}{dr}\right)rB(r)-\left(\frac{dA(r)}{dr}\right)rB(r)cos^2\theta-\left(\frac{dB(r)}{dr}\right)rA(r)+\right.$$
$$\left.\left(\frac{dB(r)}{dr}\right)rA(r)cos^2\theta+2A(r)B^2(r)cos^2\theta-2A(r)B^2(r)+2A(r)B(r)-2A(r)B(r)cos^2\theta\right]$$
$$+\left(\frac{8\pi\eta^2}{r^2}T-\Lambda\right)r^2sen^2\theta=0\ ,$$

Multiplicando (2.18) por $cos^2\theta$, temos

$$-\frac{1}{2B^2(r)A(r)}\left[\left(\frac{dB(r)}{dr}\right)cos^2\theta rA(r)+2B^2(r)A(r)cos^2\theta+\right. \tag{2.30}$$
$$\left.-\left(\frac{dA(r)}{dr}\right)rB(r)cos^2\theta-2A(r)B(r)cos^2\theta\right]+$$
$$+\left(\frac{8\pi G\eta^2}{r^2}T-\Lambda\right)r^2cos^2\theta=0\ ,$$

$$\frac{1}{2B^2(r)A(r)}\left[\left(\frac{dA(r)}{dr}\right)rB(r)-\left(\frac{dA(r)}{dr}\right)rB(r)cos^2\theta-\left(\frac{dB(r)}{dr}\right)rA(r)+\right.$$
$$+\left(\frac{dB(r)}{dr}\right)rA(r)cos^2\theta+2A(r)B^2(r)cos^2\theta-2A(r)B^2(r)+2A(r)B(r)-$$
$$\left.2A(r)B(r)cos^2\theta\right]+\left(\frac{8\pi\eta^2}{r^2}T-\Lambda\right)r^2sen^2\theta=0\ .$$

Somando as equações (2.30) e (2.31), obtemos o seguinte resultado:

$$\frac{1}{2B^2(r)A(r)}\left[rB(r)\left(\frac{dA(r)}{dr}\right)-rA(r)\left(\frac{dB(r)}{dr}\right)-2B^2(r)A(r)+2A(r)B(r)\right]$$
$$+\left(\frac{8\pi\eta^2}{r^2}-\Lambda\right)r^2=0\ . \tag{2.31}$$

Lembrando que

$$\frac{1}{A(r)}\frac{dA(r)}{dr}=-\frac{1}{B(r)}\frac{dB(r)}{dr},$$

então,

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2B^2(r)A(r)}\left[rB(r)\left(\frac{dA(r)}{dr}\right)-rA(r)\left(\frac{dB(r)}{dr}\right)-2B^2(r)A(r)+2A(r)B(r)\right]=\\
&\frac{1}{2B^2(r)}\left[\frac{rB(r)}{A(r)}\left(\frac{dA(r)}{dr}\right)-r\left(\frac{dB(r)}{dr}\right)-2B^2(r)+2B(r)\right]=\\
&\frac{1}{2B^2(r)}\left[-\frac{rB(r)}{B(r)}\left(\frac{dB(r)}{dr}\right)-r\left(\frac{dB(r)}{dr}\right)-2B^2(r)+2B(r)\right]=\\
&\frac{1}{2B^2(r)}\left[-r\left(\frac{dB(r)}{dr}\right)-r\left(\frac{dB(r)}{dr}\right)-2B^2(r)+2B(r)\right]=\\
&-\frac{r}{B^2(r)}\left(\frac{dB(r)}{dr}\right)-1+\frac{1}{B(r)}.
\end{aligned}
\tag{2.32}
$$

Substituição (2.32)em (2.31) obtemos

$$
-\frac{r}{B^2(r)}\left(\frac{dB(r)}{dr}\right)-1+\frac{1}{B(r)}=-\left(\frac{8\pi\eta^2}{r^2}-\Lambda\right)r^2,
$$

$$
-\frac{r}{B^2(r)}\left(\frac{dB(r)}{dr}\right)-1+\frac{1}{B(r)}=-8\pi\eta^2+\Lambda r^2.
$$

Multiplicando por (-1) e reescrevendo a equação resultante, obtemos:

$$
\frac{r}{B^2(r)}\left(\frac{dB(r)}{dr}\right)=8\pi\eta^2-\Lambda r^2-1+\frac{1}{B(r)},
$$

Cuja integração nos fornece a seguinte relação

$$
B(r)=\frac{1}{-8\pi\eta^2-\frac{\Lambda r^2}{3}+1+\frac{M}{r}}.
$$

Assim,

$$
e^{-\mu}=e^{\gamma}=1-8\pi\eta^2-\frac{\Lambda r^2}{3}+\frac{M}{r},
\tag{2.33}
$$

onde M é uma constante de integração e pode ser considerada como a massa do núcleo do monopólo. Aqui a métrica descreve um buraco negro de massa M carregando uma carga global do monopólo. Considerando regiões distantes do núcleo do monopólo, tal que, $r \gg M$, podemos desprezar o último termo em (2.33). Assim, fazendo a substituição de (2.33) em (2.3) e fazendo as seguintes transformações de coordenadas

$$\begin{aligned} t &\equiv \frac{T}{b};\; b^2 \equiv 1 - 8\pi\eta^2; \\ r &\equiv bR; \end{aligned}$$

a métrica dada por (2.3), torna-se

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\left(1 - \frac{\Lambda}{3}R^2\right) dT^2 + \left(1 - \frac{\Lambda}{3}R^2\right)^{-1} dR^2 \\ &+ b^2R^2\left(d\theta^2 + sen^2\theta d\phi^2\right). \end{aligned}$$

Sem perda de generalidade, podemos escrever, de uma forma geral

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\left(1 - \frac{\Lambda}{3}r^2\right) dt^2 + \left(1 - \frac{\Lambda}{3}r^2\right)^{-1} dr^2 \\ &+ b^2r^2\left(d\theta^2 + sen^2\theta d\phi^2\right). \end{aligned} \tag{2.34}$$

Observamos em (2.34) que quando $\Lambda = 0$, obtemos a métrica genuína já conhecida para o monopólo global[20].

Capítulo 3

Sistemas quânticos no espaço-tempo do monopólo global com constante cosmológica

Neste capítulo vamos analisar os **estados ligados** de uma partícula não-relativística e de uma partícula relativística de spin-zero no espaço-tempo do monopólo global com constante cosmológica.

3.1 Partícula não-relativística no espaço-tempo do monopólo global com constante cosmológica

Neste caso a considerar que o potencial $V(\tilde{\mathbf{r}})$ é nulo, então, a equação de Schrödinger para uma partícula de massa μ que é dada pela equação (1.8), no espaço-tempo do monopólo global com constante cosmológica, torna-se

$$\left[\frac{\left(1-\frac{\Lambda}{3}r^2\right)^{\frac{1}{2}}}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\left(1-\frac{\Lambda}{3}r^2\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial r}\right]\right.$$
$$\left.+\frac{1}{b^2r^2}\left(\cot\theta\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\csc^2\theta\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)+2\mu\beta\right]\Psi\left(\vec{r},t\right)=0. \tag{3.1}$$

Considerando que o espaço-tempo do monopolo global com constante cosmológica é estático, podemos escrever $\Psi\left(\vec{r},t\right)$ da seguinte forma

$$\Psi\left(\vec{r},t\right)=\exp\left(iEt\right)Y_l^m\left(\theta,\varphi\right)R(r); \tag{3.2}$$

onde fatorizamos a parte espacial e a temporal.

3.1.1 Estados ligados $(E < 0)$:

Nesta subseção iremos analisar o espectro de energia dos estados ligados de uma partícula não-relativística no espaço-tempo do monopólo global com constante cosmológica.

Substituindo a equação (3.2) na equação (3.1), considerando $E < 0$, obtemos

$$\frac{\sqrt{f(r)}}{r^2}\left[2\,r\sqrt{f(r)}\frac{d}{dr}R(r) + r^2\left(\frac{1}{2}\,\frac{\left(\frac{d}{dr}f(r)\right)\frac{d}{dr}R(r)}{\sqrt{f(r)}} + \sqrt{f(r)}\frac{d^2}{dr^2}R(r)\right)\right]$$
$$-\frac{l\,(l+1)\,R(r)}{b^2r^2} + 2\,\mu\,\beta R(r) = 0\,, \tag{3.3}$$

onde $f(r) \equiv 1 - \frac{1}{3}\Lambda\,r^2$.

Vamos fazer a seguinte mudança de coordenada:

$$y'' \equiv \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{9 - 3\,\Lambda\,r^2}, \tag{3.4}$$

e definir

$$R(r) \equiv \frac{\left(\frac{1}{3}\sqrt{9-3\,\Lambda\,r^2}+1\right)^{\frac{\sqrt{b^2+4\,l+4\,l^2}}{4b}}}{\sqrt{r}}\left(\left(\frac{1}{3}\sqrt{9-3\,\Lambda\,r^2}-1\right)^{1/4\,\frac{\sqrt{b^2+4\,l+4\,l^2}}{b}}\right)^{-1} \tag{3.5}$$
$$\left(\Gamma\left(\frac{2\,b-\sqrt{b^2+4\,l+4\,l^2}}{2b}\right)\right)^{-1} G(r).$$

Substituindo (3.5) e (3.4) em (3.3), com um pouco de álgebra, obtemos

$$G(y'') = C_1 F(a', \tilde{b}', c''; y'') + C_2 {y''}^{1-c''} F(a' + 1 - c'', \tilde{b}' + 1 - c'', 2 - c''; y''), \tag{3.6}$$

para $c \neq 0, \pm 1, \pm 2, \pm ...$ onde F é uma funcão hipergeométrica(apêndice B.3), e Γ é a função Gamma (veja apêndice(B.2)).

$$a' \equiv \frac{1}{2} + \sqrt{1 + \frac{6\mu E}{\Lambda}}\,, \tag{3.7}$$

$$\tilde{b}' \equiv \frac{1}{2} - \sqrt{1 + \frac{6\mu E}{\Lambda}}\,, \tag{3.8}$$

$$c'' \equiv \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{b^2 + 4\,l + 4\,l^2}}{2b}\,. \tag{3.9}$$

As observações astronômicas mostram que a constante cosmológica Λ não pode ser maior que $\Lambda \sim 10^{-46}m^2$[26].

Observe que o segundo termo da equação (3.6) diverge na origem, então, a solução para equação (3.3) fisicamente aceitável é

$$\begin{aligned} R(r) &= C_1 \frac{\left(\frac{1}{3}\sqrt{9-3\,\Lambda\,r^2}+1\right)^{\frac{\sqrt{b^2+4\,l+4\,l^2}}{4b}}}{\sqrt{r}} \left(\left(\frac{1}{3}\sqrt{9-3\,\Lambda\,r^2}-1\right)^{1/4\,\frac{\sqrt{b^2+4\,l+4\,l^2}}{b}}\right)^{-1} \times \\ & \left(\Gamma\left(\frac{2\,b-\sqrt{b^2+4\,l+4\,l^2}}{2b}\right)\right)^{-1} F(a',\tilde{b}',c'';y''), \end{aligned} \tag{3.10}$$

onde C_1 é uma constante. A solução (3.10) é válida para quaisquer a' e $\tilde{b}'$ tais que satisfaçam (3.7) e (3.8) e a condição $c'' \neq 0, \pm 1, \pm 2, \pm ...$ na região $r \in [0, \infty)$. No caso especial em que $a' = -n$ ou $\tilde{b}' = -n$, $(n = 0, 1, 2, ...)$, $F(a', \tilde{b}', c''; \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{9-3\,\Lambda\,r^2})$ reduz a um polinômio de grau n, conhecido como polinômio de Jacobi. Vamos considerar $a' = -n$, então

$$F\left(-n,\tilde{b}',c'';\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\sqrt{9-3\,\Lambda\,r^2}\right) = P_l^{m'}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\sqrt{9-3\,\Lambda\,r^2}\right),$$

onde

$$P_{m'}^{(\tilde{b}',c'')}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\sqrt{9-3\,\Lambda\,r^2}\right) = \sum_{m'=0}^{n}\frac{1}{m'!}\frac{(-n)_{m'}(\tilde{b}')_{m'}}{(c'')_{m'}}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\sqrt{9-3\,\Lambda\,r^2}\right)^{m'},$$

onde $(-n)_{m'}$, $(\tilde{b}')_{m'}$ e $(c'')_{m'}$ são os coeficientes dos polinômios de Jacobi[27].

Neste caso, obtemos[28]

$$E_n = \left[\left(n+\frac{1}{2}\right)^2+1\right]\frac{\Lambda}{6\mu};\; n = 0, 1, 2, ... \tag{3.11}$$

Como uma análise qualitativa, podemos observar que para dois quaisquer estados adjacentes temos que

$$E_n - E_{n-1} = 2n\frac{\Lambda}{6\mu}. \tag{3.12}$$

Considerando μ como sendo a massa de um elétron que é da ordem de $10^{-30}kg$, $n = 1$, e recuperando a constante $\hbar$, obtemos

$$E_n - E_{n-1} = 2\frac{\Lambda}{6\mu}\hbar^2 \sim 10^{-65}eV, \tag{3.13}$$

considerando $\Lambda \sim 10^{-46} m^2$[26]. Esse efeito é fraco, porém, pode ser uma possível forma de se medir a constante cosmológica no Universo atual.

Em (3.11) observamos que a partícula de massa μ exibe um espectro de energia discreto que depende apenas da constante cosmológica Λ. Observamos que se fizermos $\Lambda = 0$, não teremos mais estados ligados de energia. Assim, concluímos que o espectro discreto de energia exibido pela partícula é de natureza puramente geométrica traduzida pela constante topológica Λ.

3.2 Partícula relativística no espaço-tempo do monopólo global com constante cosmológica

Neste caso a considerar que o potencial V_0 é nulo, então, a equação de Klein-Gordon que é dada pela equação (1.17), com $A_0 = 0$, e que no espaço-tempo do monopólo global com constante cosmológica é escrita como segue

$$\left[-\left(1-\frac{\Lambda}{3}r^2\right)\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\left(1-\frac{\Lambda}{3}r^2\right)\frac{\partial}{\partial r}\right]\right.$$
$$\left.+\frac{1}{b^2r^2}\left(\cot\theta\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\csc^2\theta\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)-\mu^2\right]\Psi\left(\vec{r},t\right)=0. \tag{3.14}$$

Considerando que o espaço-tempo do monopólo global com constante cosmológica é estático, podemos escrever $\Psi\left(\vec{r},t\right)$ da seguinte forma

$$\Psi\left(\vec{r},t\right)=\exp\left(iEt\right)Y_l^m\left(\theta,\varphi\right)R(r); \tag{3.15}$$

onde fatorizamos a parte espacial e a temporal.

3.2.1 Estados ligados $(E < 0)$:

Nesta subseção iremos analisar o espectro de energia dos estados ligados de uma partícula relativística de spin-zero no espaço-tempo do monopólo global com constante cosmológica.

Substituindo a equação (3.15) na equação (3.14), considerando $E < 0$

$$\frac{E^2}{f(r)}R(r) - \frac{1}{r^2}\left[2\,r f(r)\,\frac{d}{dr}R(r) + r^2\left(\left(\frac{d}{dr}f(r)\right)\frac{d}{dr}R(r) + f(r)\,\frac{d^2}{dr^2}R(r)\right)\right] +$$
$$\frac{l(l+1)}{b^2r^2}R(r) + \mu^2 R(r) = 0\,. \tag{3.16}$$

onde $f(r) \equiv 1 - \frac{1}{3}\Lambda\, r^2$.

Vamos fazer a seguinte mudança de coordenada:

$$y \equiv \frac{1}{3}\,\Lambda\, r^2, \tag{3.17}$$

e definir

$$R(r) \equiv\; r^{-1/2\,\frac{b-\sqrt{b^2+4\,l^2+4\,l}}{b}}\,\left(-3+\Lambda\, r^2\right)^{\frac{E}{2}\sqrt{\frac{3}{\Lambda}}}\,G(r).$$

Assim $R(r)$, torna-se

$$R(y) = y^{\frac{-b+\sqrt{b^2+4\,l^2+4\,l}}{4b}}\,(-1+y)^{\frac{E}{2}\sqrt{\frac{3}{\Lambda}}}\,G(y). \tag{3.18}$$

Substituindo (3.17) e (3.18) em (3.16), obtemos

$$G(y) = C_1 F(a,\tilde{b},c';y) + C_2 y^{1-c'} F(a+1-c',\tilde{b}+1-c',2-c';y), \tag{3.19}$$

para $c \neq 0, \pm1, \pm2, \pm...$ onde F é uma funcão hipergeométrica(apêndice B.3).

$$a \;\equiv\; \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\Lambda}}\left(-E + \frac{\sqrt{3\,\Lambda+4\,\mu^2}}{2}\right) + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{b^2+4\,l^2+4\,l}}{4b}\,, \tag{3.20}$$

$$\tilde{b} \;\equiv\; \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\Lambda}}\left(-E - \frac{\sqrt{3\,\Lambda+4\,\mu^2}}{2}\right) + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{b^2+4\,l^2+4\,l}}{4b}\,, \tag{3.21}$$

$$c' \;\equiv\; 1 + \frac{\sqrt{b^2+4\,l^2+4\,l}}{2b}\,. \tag{3.22}$$

Lembrando que no modelo Lambda-CDM, o melhor modelo atual do Big Bang (incluíndo a constante cosmológica Λ e a CDM (**cold dark matter** ou **matéria escura "fria"**), a energia escura é explicada pela presença de uma constante cosmológica na teoria da Relatividade Geral. Entretanto, o valor da constante que explica adequadamente a energia escura é surpreendentemente pequeno em relação a estimativas ingênuas baseadas em idéias sobre a gravitação quântica. As observações astronômicas mostram que a constante cosmológica Λ não pode ser maior que $\Lambda \sim 10^{-46} m^2$[26].

Observe que o segundo termo da equação (3.19) diverge na origem, então, a solução para equação (3.16) fisicamente aceitável é

$$R\,(r) \equiv C_1\, r^{\frac{-b+\sqrt{b^2+4\,l^2+4\,l}}{2b}} \left(-3+\Lambda\, r^2\right)^{\frac{E}{2}\sqrt{\frac{3}{\Lambda}}} F\left(a, \tilde{b}, c'; \frac{1}{3}\,\Lambda\, r^2\right), \tag{3.23}$$

onde C_1 é uma constante. A solução (3.23) é válida para quaisquer a e $\tilde{b}$ tais que satisfaçam (3.20) e (3.21) e a condição $c' \neq 0, \pm 1, \pm 2, \pm ...$, na região $r \in [0, \infty)$. No caso especial em que $a = -n$ ou $\tilde{b} = -n$, $(n = 0, 1, 2, ...)$, $F(a, \tilde{b}, c'; \frac{1}{3}\,\Lambda\, r^2)$ reduz a um polinômio de grau n, conhecido como polinômio de Jacobi. Vamos considerar $a = -n$, então

$$F\left(-n, \tilde{b}, c'; \frac{1}{3}\,\Lambda\, r^2\right) = P_l^{m'}\left(\frac{1}{3}\,\Lambda\, r^2\right).$$

onde

$$P_{m'}^{(\tilde{b},c')}\left(\frac{1}{3}\,\Lambda\, r^2\right) = \sum_{m'=0}^{n} \frac{1}{m'!} \frac{(-n)_{m'}(\tilde{b})_{m'}}{(c')_{m'}} \left(\frac{1}{3}\,\Lambda\, r^2\right)^{m'},$$

onde $(-n)_{m'}$, $(\tilde{b})_{m'}$ e $(c')_{m'}$ são os coeficientes dos polinômios de Jacobi[27].

Neste caso, obtemos[28]

$$E_n = \left(2n + 1 + \frac{\sqrt{b^2 + 4\,l^2 + 4\,l}}{2b}\right)\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} + \frac{\sqrt{3\Lambda + 4\mu^2}}{2b}; n = 0, 1, 2, ... \tag{3.24}$$

Como uma análise qualitativa, podemos observar que para dois quaisquer estados adjacentes temos que

$$E_n - E_{n-1} = 2\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}. \tag{3.25}$$

Recuperando as constrantes c e $\hbar$, obtemos

$$E_n - E_{n-1} = 2\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}\hbar c \sim 10^{-30} eV, \tag{3.26}$$

considerando $\Lambda \sim 10^{-46} m^2$[26].

Esse efeito é tênue, porém, pode ser uma possível forma de se medir a constante cosmológica no Universo independente da deficiência angular.

Em (3.24) observamos que a partícula relativística de massa μ exibe um espectro de energia discreto que depende da constante cosmológica Λ e do parâmetro b. Observamos que se fizermos $\Lambda = 0$, não teremos mais estados ligados de energia. E se considerarmos $b = 1$, obtemos a energia livre para uma partícula relativística. Assim, concluímos que o espectro discreto de energia exibido pela partícula é de natureza puramente geométrica traduzida pela constante topológica Λ.

Conclusões e perspectivas

Como podemos observar das equações (3.11) e (3.24), tanto a constante cosmológica Λ, quanto a deficiência angular traduzida pelo parâmetro b, modificam o espectro de energia de um sistema quântico. Analisando (3.12) e (3.25), concluímos que o espectro de energia associado a uma partícula livre, relativística ou não-relativística, é discreto e este só depende do valor da constante cosmológica Λ. Se fizermos $\Lambda = 0$, tanto em (3.12) como (3.25), obtemos o espectro de energia contínuo como era de se esperar. Observamos que esta discretização dos níveis de energia é de natureza puramente geométrica. Este resultado é surpreendente e nos motiva a dar continuidade a este trabalho. Assim, temos como perspectivas de continuidade deste trabalho, fazer as seguintes análises: Estudo do espalhamento quântico, considerando o centro espalhador de natureza puramente topológica. Analisar o espectro de energia de alguns sistemas físicos submetidos a um dado potencial, tais como, átomo de hidrogênio, oscilador harmônico, etc. Todas essas análises são feitas no cenário do monopólo global com constante cosmológica. Estudar a relevância desta constante nas modificações dos fenômenos físicos, tais como: espalhamento quântico, espectro de energia, etc. Também pretendemos em outro momento, fazer todas as análises citadas acima considerando, agora, o monopólo global com constante cosmológica e também estrutura interna.

Apêndice A

Notação, definições, e convenções

Neste Apêndice apresentaremos a notação, definições e convenções adotadas ao longo do texto. Os quadri-vetores contravariante e covariante são escritos como

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, x, y, z)\,, \tag{A.1}$$

$$x_\mu = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (-t, x, y, z)\,. \tag{A.2}$$

A relação entre essas duas quantidades é expressa por

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu\,, \tag{A.3}$$

onde a soma ocorre para os índices repetidos, sendo $g_{\mu\nu}$ o tensor métrico no espaço-tempo curvo a ser determinado pela geometria deste. O tensor métrico no espaço de Minkowski η_{ab} dado por

$$\eta_{ab} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\,, \tag{A.4}$$

e

Os índices latinos a, b referem-se às componentes espaços-temporal no espaço de Minkowski, assumindo valores $a,\ b = \{0\,,1\,,2\,,3\}$ e $\mu,\ \nu =.\{0\,,1\,,2\,,3\}$ referem-se às componentes no espaço-tempo curvo. Os índices latinos correspondem às componentes espaciais do vetor no espaço ordinário, sendo $i\,,j\ = \{1\,,2\,,3\}$.

Para as derivadas covariante e contravariante temos

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = (\partial_0, \partial_i)\,, \tag{A.5}$$

$$\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} = (-\partial^0, \partial^i)\,, \tag{A.6}$$

$$\partial_\mu \partial^\mu = -\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \triangle = \Box\,. \tag{A.7}$$

Nesta dissertação, estamos considerando a constante gravitacional de Newton G, $\hbar$ e c iguais a 1, quando escrevemos a métrica correspondente ao monopolo global, e em todos os desenvolvimentos posteriores, e não nos preocupamos em recuperar essa constante em nenhum momento.

Apêndice B

Funções úteis

Neste Apêndice apresentaremos algumas funções utilizadas ao longo do texto.

B.1 Harmônicos esféricos

Definição:

$$\begin{aligned} Y_l^m(\theta,\phi) &= (-1)^m \left[\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\right]^{\frac{1}{2}} P_l^m(\cos\theta)\, e^{im\phi},\ m \geq 0, && \text{(B.1)} \\ Y_l^{-m}(\theta,\phi) &= (-1)^m Y_l^{m*}(\theta,\phi)\,. && \text{(B.2)} \\ l &= 0,1,2,...;\ m=-l,-l+1,...+l. \end{aligned}$$

Equação diferencial:

$$\left[\frac{1}{sen\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sen\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{sen^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}+l\,(l+1)\right]Y_l^m(\theta,\phi)=0. \tag{B.3}$$

B.2 Função Gamma

Definição:

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt,\ \ \mathrm{Re}(z)>0. \tag{B.4}$$

Para $-(n+1) < Re(z) \leqslant -n$, $z \neq 0,-1,-2,...$ A função Γ é definida por meio da fórmula de recorrência

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z} = \frac{\Gamma(z+n+1)}{z\Gamma(z+1)...\Gamma(z+n)}. \tag{B.5}$$

[Note que o ponto $z = 0, -1, -2, ...$ são pólos simples de $\Gamma(z)$.]

Relação funcional:

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z),$$

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{sen(\pi z)}. \tag{B.6}$$

Comportamento assintótico: Como $|z| \to \infty$:

$$\Gamma(z) \sim e^{(z-1/2)\ln\ z - z + (1/2)\ln\ 2\pi},\ |\arg\ z| \leq \pi - \delta,\ 0 < \delta \ll 1. \tag{B.7}$$

Para real x, como $x \to \infty$,

$$\Gamma(x) \sim \sqrt{2\pi} x^{x-1/2} e^{-x}.$$

Valores específicos: Se n é um inteiro positivo,

$$\Gamma(n+1) = n!,$$

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}, \tag{B.8}$$

Se β é qualquer número real,

$$|\Gamma(1+i\beta)|^2 = \frac{\pi\beta}{senh(\pi\beta)}. \tag{B.9}$$

B.3 Função hipergeométrica

Definição:

$$\begin{aligned} F(a,b,c;z) &= 1+\frac{ab}{c}\frac{z}{1!}+\frac{a(a+1)\,b(b+1)}{c(c+1)}\frac{z^2}{2!} \\ &+\frac{a(a+1)(a+2)\,b(b+1)(b+2)}{c(c+1)(c+2)}\frac{z^3}{3!}+... \end{aligned} \tag{B.10}$$

A série é convergente em todos os pontos dentro do círculo unitário $|z|=1$.

Equação Diferencial:

$$\left[z(1-z)\frac{d^2}{dz^2}+[c-(a+b+1)]\frac{d}{dz}-ab\right]u=0. \tag{B.11}$$

Para $c\neq -n$, $(n=0,1,2,...)$, $F(a,b,c;z)$ é a solução dessa equação o qual satisfaz a condição $u(0)=1$. A solução geral da equação diferencial (B.11) é então dada por

$$u=C_1F(a,b,c;z)+C_2z^{1-c}F(a+1-c,b+1-c,2-c;z),$$

para $|z|<1$ e $c\neq 0,\pm1,\pm2,....$ A analiticidade para pontos fora do círculo unitário, ou seja, para $|z|\geq 1$, com um corte $(+1,\infty)$,[1] é dada por

$$\begin{aligned} F(a,b,c;z) &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}F(a,b,a+b-c+1;1-z) \\ &+\frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}(1-z)^{c-a-b}F(c-a,c-b,c-a-b+1;1-z), \end{aligned} \tag{B.12}$$

$$\begin{aligned} F(a,b,c;z) &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)\Gamma(c-a)}(-z)^{-a}F\left(a,a-c+1,a-b+1;\frac{1}{z}\right) \\ &+\frac{\Gamma(c)\Gamma(a-b)}{\Gamma(a)\Gamma(c-b)}(-z)^{-b}F\left(b,b-c+1,b-a+1;\frac{1}{z}\right). \end{aligned} \tag{B.13}$$

Comportamento assintótico: Quando $|z|\longrightarrow\infty$,

$$F(a,b,c;z)\sim\frac{\Gamma(c)\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)\Gamma(c-a)}(-z)^{-a}+\frac{\Gamma(c)\Gamma(a-b)}{\Gamma(a)\Gamma(c-b)}(-z)^{-b}. \tag{B.14}$$

Caso especial: Para $a=-n$ ou $b=-n$, $(n=0,1,2,...)$, $F(a,b,c;z)$ reduz a um polinômio de grau n (polinômio de Jacobi).

[1] isto é, para $|arg(-z)|<\pi$.

Relação com as funções de Legendre:

$$
\begin{aligned}
P_l^m(z) &= \frac{\Gamma(l+m+1)}{\Gamma(l-m+1)} \frac{(z^2-1)^{m/2}}{2^m \Gamma(1+m)} F\left(m-l, m+l+1, m+1, \frac{1-z}{2}\right), \\
& |arg(z \pm 1)| < \pi \, . \qquad \text{(B.15)}
\end{aligned}
$$

Relação com os polinômios de Legendre:

$$
P_l(z) = F\left(m-l, l+1, m+1, \frac{1-z}{2}\right).
$$

Bibliografia

[1] H. Tetrode, Z. Phys. **50**, 336 (1928); V. Fock, ibid. **53**, 592 (1928); G. C. McVittie, Mon. Not. R. Astron. Soc., **92**, 868 (1932); E. Schrödinger, Physica (Amsterdam) **6**, 899 (1932); W. Pauli, Ann. Phys. (Leipzig) **18**, 337 (1933).

[2] L. Parker, Phys. Rev. **D25**, 3180 (1982).

[3] A. W. Overhauser e R. Colella,Phys. Rev. Lett. **33**, 1237 (1974); R. Colella, A. W. Overhauser e S. A. Werner, ibid. **34**, 1472 (1975); S. A. Werner, J. L. Staudenmann, R. Collela, Phys. Rev. Lett. **42**, 1103 (1979); J. L. Standenmann, S. A. Werner, R. Collela e A. W. Overhauser, Phys. Rev. **A21**, 1419 (1980).

[4] D. V. Ahluwalia e C. Burgard, Gen. Rel. Grav. **28**, 1161 (1996); Y. Kojima, Mod. Phys. Lett. **A11,** 2865 (1996); Y. Grosman e H. J. Lipkin, Phys. Rev. **D55**, 2760 (1997); C. Y. Cardall e G. M. Fuller, ibid. **D55**, 7960 (1997).

[5] P. de Sousa Gerbert e R. Jackiw, Commun. Math. Phys. **124**, 229 (1989).

[6] V. B. Bezerra, Class. Quantum Grav., **8**, 1939 (1991); Cláudio Furtado e Fernando Moraes, J. Phys. **A33**, 5513 (2000).

[7] J. S. Dowker, J. Phys. **A7**, 1256 (1974).

[8] M. Barriola e A. Vilenkin, Phys. Rev. Lett. **63**, 341 (1989).

[9] A. Vilenkin and E. P. S. Shellard, *Cosmic String and other Topological Defects,* Cambridge University Press, Cambridge (1994).

[10] Geusa de A. Marques e V. B. Bezerra, Mod. Phys. Lett. **A16**, 1253 (2001).

[11] Geusa de A. Marques e V. B. Bezerra, International. Journal of Mod. Phy. **A24**, 1549 (2009).

[12] Para uma excelente revisão sobre a teoria da relatividade geral ver: S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, Wiley, N.Y., 1972.; R. M. Wald, *General Relativity*, The University of Chicago Press, Chicago, 1984; Haus C. Ohanian, *Gravitation and Spacetime,* W.W. Norton and Company, London (1976).

[13] J. Bernstein, G. Feinberg, *The Cosmological Constants*, Columbia University Press, New york (1986).

[14] A. Friedmann, Z.Phys. **10**, 377 (1922).

[15] A. Friedmann, Z.Phys. **21**, 326 (1924).

[16] E. Hubble, *A Relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae*, Proc. Nat. Acad. Sci.**15**, 168 (1929).

[17] T.W.B. Kibble (1976) J. Phys. **A9**, (1387); A. Vilenkin, Phys. Rep.**121**, 263 (1985).

[18] A. Vilenkin and E.P.S. Shellard, *Cosmic String and other Topological Defects*, Camb. Univ. Press, Cambridge (1994).

[19] J. Pando, D. Valls-Gabaut e L. Fang, Phys. Rev. Lett. **81**, 8568 (1988).

[20] M. Barriola e A. Vilenkin, Phys. Rev. Lett. **63**, 341 (1989).

[21] D. Harrari e C. Lousto, Phys. Rev. **D42**, 2626 (1990); X. Shi e X. Li, Class. Quan. Grav. **8**, 761 (1990) ; P. Breitenlohner, P. Forgacs e D. Maison, Nucl. Phys. **B383**, 357 (1992); A. Linde astro-ph / 9402031; A. Banerji, S. Chatterji e A.A. Sen, Class. Quan. Grav. **13**, 3141 (1996); A. Banerji et al., Class. Quan. Grav. **15**, 645 (1998); I.

Cho e A. Vilenkin, Phys. Rev. **D56**, 7621 (1997); S. Chakraborty , Physica Scripta **58**, 294 (1998); A. Barros e C. Romero, Phys. Rev. **D56**, 6688 (1997); O. Dando e R. Gregory gr-qc/ 9709029; S. Liebling gr-qc/ 9906014; gr-qc/ 9904077; E. R. B. de Mello (2001) Braz. J. Phys. **31** 211; R. M. T. Filho e V. B. Bezerra (2001) Phys. Rev. **D64** 084009; J. Spinelly e U. de Freitas, E.R.B. de Mello hep-th / 0205046; K.A. Bronnikov, B. E. Meierovich e E. R. Podolyak gr-qc/ 0212091; E.R.B. de Mello hep-th/ 0210236; X. Li and J. Hao hep-th/ 0210058 K.A. Bronnikov gr-qc/ 0301084.

[22] S. Perlmutter et al., Astrophys. J. **517**, 565 (1999).

[23] R.R. Caldwell et al., Phys. Rev. Lett. **80**, 1582 (1998).

[24] V. Sahni e A. Strarobinsky astro-ph/9904398; S. Carroll et al. astro-ph/0004075 e suas referências.

[25] A. Liddle, *An Introduction to Modern Cosmology*, 2^a edição, Wiley (2007).

[26] Edmund J. Copeland e M. Sami, International Journal of Mod. Phys. **D15**, 1753 (2006); R. Amanullah, C. Lidman, D. Rubin, G. Aldering, P. Astier, K. Barbary, M. S. Burns, A. Conley, K. S. Dawson, S. E. Deustua, M. Doi, S. Fabbro, L. Faccioli,, H. K. Fakhouri, G. Folatelli1, A. S. Fruchter, H. Furusawa, G. Garavini1, G. Goldhaber, A. Goobar, D. E. Groom, I. Hook, D. A. Howell, N. Kashikawa, A. G. Kim, R. A. Knop, M. Kowalski, E. Linder, J. Meyers, T. Morokuma, S. Nobili, J. Nordin, P. E. Nugent, L. O¨ stman, R. Pain, N. Panagia, S. Perlmutter, J. Raux, P. Ruiz-Lapuente, A. L. Spadafora, M. Strovink, N. Suzuki, L. Wang, W. M. Wood-Vasey, e N. Yasuda, The Astrop. Journal, **716**, 712, (2010).

[27] Milton Abramowitz e Irene A. Stegun, *Handbook of mathematical functions*, Dover Publications, New York (1970).

[28] Renato P. Braga and Geusa de A. Marques, *Remarks on some quantum effects in a Köttler space-time*, a ser submetido (2011).