



Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Física

Dissertação de Mestrado

**Equação de Dirac com Potenciais Escalar e
Vetorial via Supersimetria**

Eriverton da Silva Rodrigues

Prof. Dr. Aécio F. Lima
Orientador

Campina Grande – PB
16 de Dezembro de 2011

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Física

Equação de Dirac com Potenciais Escalar e Vetorial via Supersimetria

Eriverton da Silva Rodrigues

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Campina Grande como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Mestre em Ciências no Domínio da Física.

Área de Concentração: Partículas Elementares e Teoria de Campos.

Prof. Dr. Aécio F. Lima
Orientador

Campina Grande – PB, Paraíba, Brasil

©Eriverton da Silva Rodrigues





FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL DA UFCCG

R696e Rodrigues , Eriverton da Silva.
Equação de Dirac com potenciais escalar e vetorial via supersimetria /
Eriverton da Silva . - Campina Grande: UFCCG, 2012.
59 f.: il.

Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia.

Orientador: Prof. Dr. Aécio F. Lima.

Referências.

1. Supersimetria MQ. 2. Equação de Dirac. 3. Potencial Generalizado.
I. Título.

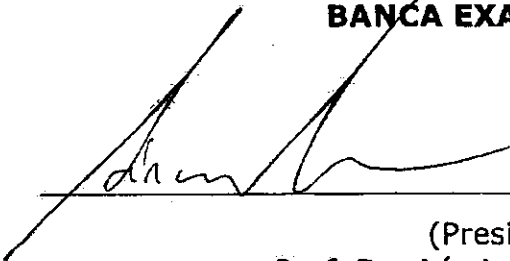
CDU 53.01(043)

ERIVERTON DA SILVA RODRIGUES

**EQUAÇÃO DE DIRAC COM POTENCIAIS ESCALAR E VETORIAL VIA
SUPERSIMETRIA**

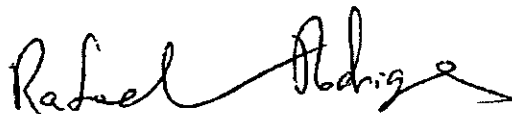
Dissertação aprovada em 16/12/2011

BANCA EXAMINADORA



(Presidente)

Prof. Dr. Aécio Ferreira de Lima
Unidade Acadêmica de Física - UFCG



(Membro interno)

Prof. Dr. Rafael de Lima Rodrigues
Unidade Acadêmica de Educação - UFCG



(Membro externo)

Prof. Dr. Ronaldo Silva Thibes
Departamento de Estudos Básicos e Instrumentais - UESB

Agradecimentos

Ao meu orientador, professor Aécio Ferreira de Lima e ao meu coorientador professor Rafael de Lima Rodrigues pelo apoio e compreensão durante a realização deste trabalho e incentivo nessa caminhada acadêmica.

A Deus pela oportunidade de ter uma vida, embora de muitos esforços mais cheia de alegrias e boas relações com todos aqueles que me rodeiam.

A minha Mãe e meu Pai, Lúcia e Luis, que tenho como uma parcela de amor que Deus deixou "cair" na Terra, buscando sempre me guiar pelos melhores caminhos e nunca deixando eu desanimar com os tropeços da caminhada. Com isso, unimos forças para vencer qualquer tipo de desafio, compartilhando momentos de tristeza e alegria dentro de nossa família. As minhas irmãs (Elisângela e Elidiana) e meus sobrinhos (Lucas, Leonardo e Kevin) pela amizade firme que temos dentro de nossa família em busca da harmonia e dedicação um com o outro. A minha namorada Geovânia e sua família pela compreensão e acolhimento de um lar cheio de bons relacionamentos.

Aos amigos que de forma direta ou indireta me ajudaram a alcançar este objetivo, em que depus a confiança do companheirismo e luta em busca do grande objetivo da formação acadêmica.

A minha força de vontade e humildade que prevaleceram durante todo meu percurso dentro da Pós Graduação em Física da Universidade Federal de Campina Grande.

Resumo

Neste trabalho, investigamos a dinâmica de uma partícula relativística de spin $\frac{1}{2}$ submetida a um potencial generalizado, constituído por um termo Coulombiano mais um termo escalar de Lorentz. A supersimetria é utilizada como recurso algébrico, bem como a atuação dos operadores escada, obtemos assim, um maior aperfeiçoamento matemático e entendimento físico do problema envolvido. Este formalismo é aplicado para o problema de Dirac-Coulomb generalizado que é um potencial exatamente solúvel em mecânica quântica relativística. As simetrias do problema coulombiano relativístico são pesquisadas a partir de um ponto de vista conceitual explorando analogias entre o caso clássico e o caso da mecânica quântica. A simetria do problema não-relativístico descrito pela álgebra de Lie $SO(4)$ é usado como idéia norteadora. As propriedades do problema Dirac-Coulomb são discutidas em detalhe e relações entre as várias abordagens algébricas para estes problemas são apontadas. A relação natural entre a simetria dinâmica e o hamiltoniano de Dirac via o operador de Johnson-Lippmann generalizado no problema Dirac-Coulomb é investigado na nossa dissertação.

Palavras-chave: supersimetria MQ, equação de Dirac, potencial generalizado.

Abstract

In this work, we investigate the dynamics of a relativistic particle of spin $\frac{1}{2}$ subjected to a generalized potential, consisting of a Coulomb term plus a Lorentz scalar term. The supersymmetry algebra is used as a resource, as well as the performance of the ladder operators, we obtain thus a further improvement in mathematical and physical understanding of the problem involved. This formalism is applied to the problem of generalized Dirac-Coulomb potential in exactly soluble relativistic quantum mechanics. The symmetries of the relativistic Coulomb problem are investigated from a conceptual point of view exploring analogies between the classical case and the case of quantum mechanics. The symmetry of the problem described by the non-relativistic Lie algebra $SO(4)$ is used as a guiding idea. The properties of the Dirac-Coulomb problem are discussed in detail and relationships between the various algebraic approaches to these problems are identified. The natural relationship between the dynamic symmetry and Dirac Hamiltonian via the Johnson-Lippmann operator in generalized Dirac-Coulomb problem is investigated in our paper.

Keywords: supersymmetric QM, Dirac equation, generalized potential.

Sumário

1	Introdução	1
2	Revisando a SUSI e a invariância de forma	3
2.1	Supersimetria em Mecânica Quântica	3
2.1.1	Hierarquia de Hamiltonianos Supersimétricos	8
2.1.2	Interpretação do superpotencial	10
2.2	Modelo de invariância de forma na SUSI	11
2.3	Operadores escada generalizados para potenciais invariantes de forma	12
3	Equação de Dirac e algumas aplicações	15
3.1	As matrizes de Dirac	16
3.2	Solução da onda plana da Equação de Dirac	18
3.3	A importância do Spin da Partícula de Dirac	21
3.4	A Covariância da Equação de Dirac	22
3.5	A Partícula de Dirac em campos eletromagnéticos	23
3.6	Solução da equação de Dirac para o potencial coulombiano	24
4	Resolvendo o problema do potencial coulombiano generalizado	30
4.1	Componente da autofunção do estado fundamental através da SUSI	33
4.2	Aplicação da condição de invariância de forma e SUSI	35
5	Simetrias dos operadores de Laplace-Runge-Lenz e Johnson-Lippmann	38
5.1	Operador Laplace-Runge-Lenz	38
5.2	Operador de Johnson-Lippmann	42
6	Constante de Movimento Adicional	44
7	Conclusão	48
	Referências Bibliográficas	49

Lista de Figuras

2.1	Representação do mapeamento de Sukumar.	9
5.1	Representação do vetor de Laplace-Runge-Lenz.	40

CAPÍTULO 1

Introdução

Nesta dissertação a álgebra da supersimetria (SUSI) em mecânica quântica (MQ) é usada como técnica para obter uma resolução espectral do Hamiltoniano da equação de Dirac com potenciais vetorial e escalar. O problema escolhido para essa técnica é o mesmo do problema de Dirac-Coulomb solucionável por um átomo de hidrogênio relativístico generalizado. Recentemente, o átomo de hidrogênio relativístico foi analiticamente investigado em várias dimensões espaciais [1, 2]. O caso especial do potencial de Coulomb em três dimensões tem sido tratado através de condições de invariância de forma [3] no contexto da SUSI MQ [4] em ambos os casos: não-relativístico [5], sob a simetria do vetor de Laplace-Runge-Lenz para o problema de Kepler e relativístico [6].

É sabido que existe um operador, que é uma constante de movimento, para o problema Coulombiano na mecânica quântica não relativística chamado operador de Laplace-Runge-Lenz [7, 8], que está relacionado com a SUSI MQ [9]. No caso relativístico, como uma constante de movimento no problema de Dirac-Coulomb é o operador de Johnson-Lippmann [10, 11], que foi investigado por meio de álgebra SUSI [12, 13]. A conexão entre o operador de Johnson-Lippmann generalizado do problema de Dirac-Coulomb tem sido estudada em três dimensões espaciais.

Neste trabalho nós consideramos um cálculo alternativo em que os métodos da mecânica quântica supersimétrica são usados para obter os espectros do estado fundamental e o primeiro estado excitado do potencial de Dirac-Coulomb generalizado. Sendo assim, organizado da seguinte forma: No capítulo 2 fazemos uma revisão sobre a supersimetria, como também destacamos o estudo da invariância de forma com operadores generalizados. No capítulo 3, destacamos a origem da Equação de Dirac e sua utilização tão importante para o desenvolvimento do nosso estudo, bem como descrevemos as matrizes de Dirac e suas propriedades. No capítulo 4 encontramos a resolução do problema do potencial coulombiano generalizado, utilizando o método de invariância de forma para encontrar as autofunções e os autovalores de energia do primeiro estado excitado. No capítulo 5, estudamos as simetrias envolvidas nos operador LRL e JL, bem como trabalhamos a algebra de Lie e a obtenção da simetria $SO(4)$. No capítulo 6, abordamos

as relações de espaço com os respectivos operadores, encontrando assim o operador de Johnson-Lippmann generalizado, bem como as autofunções de onda e os autovalores de energia para o estado fundamental.

Então no presente trabalho, nós introduzimos a supersimetria no mesmo nível que a simetria $SU(4)$, isto é, como uma simetria no espaço com pleno funcionamento estendido as soluções da equação de Dirac. Com isto, damos uma descrição detalhada da supersimetria e mostramos que é, de fato, gerado pelo operador Johnson-Lippmann generalizado para o prolema de Dirac-Coulomb.

CAPÍTULO 2

Revisando a SUSI e a invariância de forma

A simetria é um importante conceito para as teorias físicas. Existem vários exemplos de simetria na Natureza que são utilizadas para descrição mecânica de sistemas físicos. A ferramenta matemática apropriada para tratar a simetria é a teoria de grupos. Assim, a simetria de um sistema físico está associada a invariância sob ação de um determinado grupo.

O espaço Euclidiano é caracterizado pelos seus grupos de transformações, que são as rotações, translações e reflexões. É um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno. Uma propriedade do espaço Euclidiano é a sua planitude.

As simetrias são úteis não apenas na descrição clássica de um sistema físico mas também no entendimento dos sistemas quânticos. Após o surgimento da mecânica quântica, trabalhos surgiram fazendo uso da simetria para obtenção do espectro [14].

Na física clássica nós tratamos apenas com simetrias externas, enquanto que na física quântica os graus de liberdade externo e interno são necessários. A seguir apresentamos uma breve descrição do que se convencionou denominar Supersimetria em Mecânica Quântica.

2.1 Supersimetria em Mecânica Quântica

Realmente, a SUSI surgiu na década de setenta e, logo em seguida, alguns pesquisadores da linha de trabalhos sobre uma descrição unificada das teorias Físicas relutaram com a grande ambição de que a mesma fosse a teoria de grande unificação das quatro interações básicas existentes na natureza (forte, fraca, eletromagnética e gravitacional). Mas, após um grande número de trabalhos abordando a SUSI nesse contexto, está faltando uma constatação experimental para que a SUSI se torne uma teoria de unificação a altas energias, ou seja, uma Teoria Quântica de Campos consistente com a descrição da natureza. Não obstante, no momento há uma grande perspectiva da existência da SUSI em Física de Altas Energias [15].

Nas referências [16–19] indicamos alguns livros sobre a SUSI em Teoria de Campos e para uma conexão da abordagem de teoria de grupos e o oscilador isotrópico tridimensional em Mecânica Quântica na descrição de Schrödinger, veja a Ref. [20]. Recentemente, uma

generalização da técnica de fatorização em Mecânica Quântica foi aplicada para os seguintes potenciais: oscilador isotrópico tridimensional, potenciais de Morse e Coulomb [21].

Artigos sobre Supersimetria em Mecânica Quântica (SUSI MQ), partindo da super-partícula não-relativística, e Supersimetria em Mecânica Clássica (SUSI MC), a qual não será estudada nessa dissertação, podem ser encontrados em [22]. Nestes trabalhos também foi implementado o procedimento de quantização canônica de Dirac [23], no contexto não-relativístico e tal procedimento de quantização aplica-se a sistemas com vínculos de segunda classe.

Após a formulação da SUSI MQ por Witten [4, 24, 25] e da SUSI MC [26–30], surgiram algumas evidências fenomenológicas a baixas energias, em Mecânica Quântica Não-relativística Supersimétrica [31]. Atualmente, existem alguns livros-texto [32] sobre Mecânica Quântica contendo aplicações da SUSI MQ [33]. Já existem também livros exclusivos sobre SUSI em Mecânica Clássica e Mecânica Quântica [14].

A SUSI MQ tem sido aplicada principalmente como técnica de resolução espectral para potenciais invariantes de forma [34] para se construir novos potenciais iso-espectrais em uma dimensão [35], em três dimensões [36] e para um potencial escalar [37].

Uma das aplicações interessantes foi a investigação do universo inflacionário via SUSI MQ [38]. Recentemente, tem sido investigado também a conexão entre a técnica algébrica da Mecânica Quântica Supersimétrica unidimensional e a Teoria de Campos com 2 e 3 campos reais acoplados em espaço-tempo bidimensional (1+1 dimensões) [39, 40]. Além disso, essa técnica também vem sendo estudada na Mecânica Quântica Relativística, com a equação de Dirac, o que será visto nessa dissertação.

A equação de Schrödinger independente do tempo é dada por

$$H\psi = E\psi \quad (2.1)$$

ou

$$-\frac{\hbar^2}{2M} \frac{d^2\psi}{dx^2} + V(x)\psi = E\psi, \quad (2.2)$$

onde o operador hamiltoniano será a soma do termo de energia cinética e o termo de energia potencial, ou seja, no caso não relativístico para a equação de Schrödinger

$$H = -\frac{\hbar^2}{2M} \frac{d^2}{dx^2} + V(x), \quad (2.3)$$

onde veremos que o mesmo será associado a um hamiltoniano supersimétrico no espaço de Hilbert.

Existem várias maneiras de classificar as álgebras SUSI MQ na literatura. Uma maneira é através da contagem do número de geradores hermitianos anticomutantes $Q_i, i = 1, \dots, N$ de modo que a álgebra da supersimetria estendida em N teria

$$[Q_i, Q_j]_+ = 2H\delta_{ij}, \quad Q_i = Q_j^\dagger, \quad [H, Q_i]_- = 0, \quad (2.4)$$

onde $i, j = 1, \dots, N$ e δ_{ij} é chamado de Delta de Kronecker's.

A álgebra graduada de Lie associada à SUSI MQ estendida $N = 2$, em termos das supercargas Q_{\pm} , dada por

$$Q_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q_1 \pm iQ_2), \quad (2.5)$$

onde Q_1 e Q_2 estão relacionados com os operadores de criação A^{\dagger} e aniquilação A e envolvendo comutador $[A, B]_- = AB - BA$ e anticomutador $[A, B]_+ = AB + BA$, é:

$$[Q_-, Q_+]_+ = H_{SUSI}, \quad Q_+ = Q_-^{\dagger}, \quad Q_- = Q_+^{\dagger}, \quad (2.6)$$

$$[H_{SUSI}, Q_-]_- = 0 = [H_{SUSI}, Q_+]_-, \quad Q_+^2 = Q_-^2 = 0. \quad (2.7)$$

Os elementos desta super-álgebra podem ser representados em termos dos operadores diferenciais de primeira ordem A^{\pm} , dado por

$$A^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\mp \frac{d}{dx} + W(x) \right), \quad (2.8)$$

em que $W(x)$ é denominado superpotencial, tendo sua interpretação discutida no capítulo 2.

Isto nos permite identificar

$$V(x) = W^2(x) - \frac{1}{\sqrt{2}}W'(x), \quad (2.9)$$

que é a equação de Riccati [14].

Dessa forma, as supercargas são dadas por:

$$Q_- = \sigma_- A^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A^- & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_+ = Q_-^{\dagger}, \quad (2.10)$$

onde $\sqrt{2}\sigma_- = \sigma_1 - i\sigma_2$, com σ_1 e σ_2 sendo as matrizes de Pauli, satisfazendo as seguintes propriedades

$$[\sigma_i, \sigma_j]_- = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k, \quad \sigma_1\sigma_2 = i\sigma_3, \quad \sigma_i^2 = \mathbf{1}. \quad (2.11)$$

Assim, o hamiltoniano SUSI torna-se

$$\begin{aligned} H_{SUSI} &= \hat{H} = \begin{pmatrix} H_- = A^+ A^- & 0 \\ 0 & H_+ = A^- A^+ \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} W^2 - \frac{\sigma_3}{2} W', \end{aligned} \quad (2.12)$$

onde $W' = \frac{dW}{dx}$.

A energia do estado fundamental do setor bosônico H_- é zero, ou seja, $E_-^{(0)} = 0 = E_{SUSI}^{(0)}$.

Iniciando com a equação de autovalor para H_- que está relacionado ao operador Hamiltoniano na equação de Schrödinger

$$H_-|\psi_- \rangle = E_-|\psi_- \rangle, \quad H_- = H - E^{(0)}, \quad A^-H_-|\psi \rangle = E_-(A^-|\psi \rangle) \quad (2.13)$$

e multiplicando ambos os lados por A^- , obtemos:

$$H_+(A^-|\psi_- \rangle) = E_+(A^-|\psi_- \rangle). \quad (2.14)$$

Analogamente iniciando com a equação de autovalor para H_+

$$H_+|\psi_+ \rangle = E_+|\psi_+ \rangle \quad (2.15)$$

e multiplicando ambos os lados por A^+ , obtemos:

$$H_-(A^+|\psi_+ \rangle) = E_-(A^+|\psi_+ \rangle). \quad (2.16)$$

A equação de Schrödinger para a função de onda que descreve um estado quântico SUSI na representação abstrata,

$$\hat{H}|\Psi \rangle_{SUSI} = E|\Psi \rangle_{SUSI}, \quad |\Psi \rangle_{SUSI} = \begin{pmatrix} |\psi \rangle_- \\ |\psi \rangle_+ \end{pmatrix}, \quad E \equiv E_{SUSI} \geq 0, \quad (2.17)$$

nos fornece as seguintes relações entrelaçadas entre as autofunções dos setores bosônico, $|\psi \rangle_-$, e fermiônico, $|\psi \rangle_+$:

$$|\psi \rangle_+ = \frac{1}{\sqrt{E}}A^-|\psi \rangle_-, \quad |\psi \rangle_- = \frac{1}{\sqrt{E}}A^+|\psi \rangle_+. \quad (2.18)$$

Com bases nas formulações anteriores podíamos nos perguntar por que a energia $E_{SUSI} \geq 0$. Mas, veja como isso ocorre

$$\begin{aligned} E_{SUSI} &= \langle H_{SUSI} \rangle = \langle [Q_-, Q_+] \rangle \\ &= \langle Q_- Q_+ \rangle + \langle Q_+ Q_- \rangle \\ &= \|Q_+|\psi \rangle\|^2 + \|Q_-|\psi \rangle\|^2 \geq 0, \end{aligned} \quad (2.19)$$

pois

$$\langle Q_- Q_+ \rangle = \langle \psi | Q_- Q_+ | \psi \rangle = \| Q_+ | \psi \rangle \|^2. \quad (2.20)$$

Por conseguinte, vemos que os operadores A^\pm não são os operadores de simetria, mas eles graduam os dois subespaços de Hilbert da SUSI MQ, levando o setor bosônico no setor fermiônico e vice-versa. Os operadores de simetria são as supercargas Q_\pm . Na descrição de Schrödinger, a função de onda depende de x e está relacionada com a representação abstrata, através do seguinte produto escalar: $\Psi_{SUSI}(x) = \langle x | \Psi \rangle_{SUSI}$. Justifica-se esta denominação de setores bosônico e fermiônico, devido ao fato de que o operador de número fermiônico, $N_f = (1 - \sigma_3)/2$, $N_f N_f = N_f$, possui o auto-espinor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ associado ao autovalor $n_f = 0$ (nenhum férmion) e o auto-espinor $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ com $n_f = 1$ (um férmion). Lembre-se que, pelo *teorema de spin-estatística*, cada estado quântico só pode ser ocupado por no máximo um férmion ou um número inteiro de bósons.

Abordamos agora a quebra espontânea da SUSI em Mecânica Quântica. Quando o vácuo deixa de ser invariante SUSI, diz-se que há uma quebra espontânea da SUSI. Isto se dá precisamente quando $E_{SUSI}^{(0)} \neq 0$. A supercarga clássica Q corresponde ao operador Q_- da versão quântica. Dado uma curva de potencial, se ocorrer pelo menos um mínimo com valor zero, o potencial não apresenta quebra espontânea de SUSI. Obviamente, estamos considerando o caso em que o potencial é uma função positiva dependente exclusivamente da posição da partícula.

Agora, assumindo que $|\Psi_{SUSI}^{(0)}\rangle$ é invariante SUSI e Q_\pm são os operadores de supercargas mutuamente adjuntos, temos:

$$E_{SUSI}^{(0)} = \langle \Psi_{SUSI}^{(0)} | H_{SUSI} | \Psi_{SUSI}^{(0)} \rangle = 0 \Leftrightarrow Q_\pm | \Psi_{SUSI}^{(0)} \rangle = 0, \quad (2.21)$$

ou seja, se $E_{SUSI}^{(0)} = 0$, dizemos que não há quebra espontânea de supersimetria e, portanto, a SUSI é uma simetria exata sempre que existir uma solução normalizável da equação de Schrödinger associada à energia zero. Podemos implementar uma análise precisa da normalizabilidade da função de onda, $\Psi_{SUSI}^{(0)}(x)$, que descreve o estado fundamental, em termos do superpotencial $W(x)$. De fato, considerando que em uma dimensão $\Psi_{SUSI}^{(0)}(x)$ é aniquilada pela supercarga matricial Q_- , dada pela equação (2.10), obtemos:

$$Q_- \Psi_{SUSI}^{(0)}(x) = 0 \Rightarrow \Psi_{SUSI}^{(0)}(x) = \begin{pmatrix} \psi_-^{(0)}(x) \\ 0 \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} \exp(-\int_0^x W(y) dy) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.22)$$

a qual é normalizável quando $\int_0^x W(y) dy \rightarrow \infty$, com $x \rightarrow \pm\infty$. Neste caso, N é a constante de normalização. Um aspecto bastante importante é a impossibilidade do nível de energia do estado fundamental ser degenerado quando não há quebra espontânea da SUSI. Da definição de

A^\pm em (2.41), obtém-se a seguinte relação entre as soluções de $A^-\psi_-^{(0)}(x) = 0$ e $A^+\psi_+^{(0)}(x) = 0$:

$$\psi_-^{(0)}(x)\psi_+^{(0)}(x) = C, \quad (2.23)$$

onde C é uma constante real. Note que se $\psi_-^{(0)}(x)$ normalizável implica em $\psi_+^{(0)}(x)$ não-normalizável e, portanto, a energia zero de H_- não será permitida para H_+ . Neste caso, $\psi_+^{(0)}(x)$ é uma solução da equação de Schrödinger, mas não é aceitável fisicamente.

2.1.1 Hierarquia de Hamiltonianos Supersimétricos

O método SUSI nos fornece uma hierarquia de Hamiltonianos que permite calcularmos as autofunções e autovalores de energia de um hamiltoninano H_1 . A seguir, apresentaremos o método desenvolvido por Sukumar [35].

Considerando $H_1 = H_- + E_1^{(0)}$ e $H_2 = H_+ + E_1^{(0)}$, temos:

$$H_1 = A_1^+ A_1^- + E_1^{(0)}, \quad A_1^{(-)} = \psi_1^{(0)} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{d}{dx} \right) \frac{1}{\psi_1^{(0)}} = (A_1^+)^\dagger, \quad (2.24)$$

com o seu "companheiro supersimétrico" dado por

$$H_2 = A_1^- A_1^+ + E_1^{(0)}, \quad V_2(x) = V_1(x) - \frac{d^2}{dx^2} \ell n \psi_1^{(0)}. \quad (2.25)$$

O espectro H_1 e H_2 satisfaz

$$E_2^{(n)} = E_1^{(n+1)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.26)$$

com suas autofunções relacionadas por

$$\psi_1^{(n+1)} \propto A_1^+ \psi_2^{(n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.27)$$

Fatorizando H_2 em termos de sua função de onda do estado fundamental $\psi_2^{(0)}$, obtém-se

$$H_2 = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + V_2(x) = A_2^+ A_2^- + E_2^{(0)}, \quad A_2^- = \psi_2^{(0)} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{d}{dx} \right) \frac{1}{\psi_2^{(0)}}. \quad (2.28)$$

O companheiro SUSI de H_2 é dado por

$$H_3 = A_2^- A_2^+ + E_2^{(0)}, \quad V_3(x) = V_2(x) - \frac{d^2}{dx^2} \ell n \psi_2^{(0)}. \quad (2.29)$$

O espectro de H_2 e H_3 satisfaz a condição

$$E_3^{(n)} = E_2^{(n+1)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.30)$$

com suas autofunções relacionadas por

$$\psi_2^{(n+1)} \propto A_2^+ \psi_3^{(n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.31)$$

A repetição deste procedimento resulta na seguinte generalização:

$$H_n = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + V_n(x) = A_n^+ A_n^- + E_n^{(0)} = A_{n-1}^- A_{n-1}^+ + E_{n-1}^{(0)}, \quad (2.32)$$

$$A_n^- = \psi_n^{(0)} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{d}{dx} \right) \frac{1}{\psi_n^{(0)}} = (A_n^+)^{\dagger}, \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned} V_n(x) &= V_{n-1}(x) - \frac{d^2}{dx^2} \ell n \psi_{n-1}^{(0)} \\ &= V_1(x) - \frac{d^2}{dx^2} \ell n (\psi_1^{(0)} \psi_2^{(0)} \dots \psi_{n-1}^{(0)}), \quad n = 2, 3, \dots, M, \end{aligned} \quad (2.34)$$

cujos espectros satisfazem o mapeamento

$$E_1^{n-1} = E_2^{n-2} = \dots = E_n^{(0)}, \quad n = 2, 3, \dots, M, \quad (2.35)$$

onde M é o número de estados ligados de H_1 . Portanto, a autofunção do $n - 1$ -ésimo estado excitado de H_1 é dada por

$$\psi_1^n \propto A_1^+ A_2^+ \dots A_n^+ \psi_{n+1}^{(0)}. \quad (2.36)$$

Podemos resumir o processo engenhoso desenvolvido por Sukumar através do seguinte mapeamento, mostrado na figura abaixo:

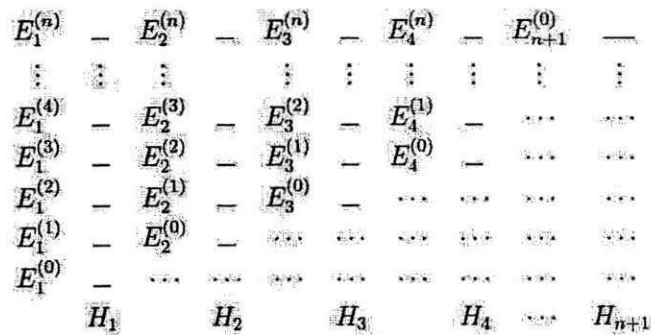


Figura 2.1 Representação do mapeamento de Sukumar.

Note que o nível de energia do estado fundamental do $(n + 1)$ ésimo-membro da hierarquia (H_{n+1}) é degenerado com o nível de energia do n -ésimo estado excitado do primeiro membro da hierarquia (H_1).

Potenciais Invariantes de Forma: São aqueles potenciais SUSI que satisfazem uma condição específica entre seus parceiros,

$$V_+(x; a_1) = V_-(x; a_2) + R(a_2), \quad a_2 = f(a_1), \quad (2.37)$$

onde a_1 é um conjunto de parâmetros, a_2 uma função dos parâmetros a_1 e $R(a_2)$ é a parte restante, independente de x .

Para o potencial do átomo de hidrogênio, obtém-se a seguinte condição de invariância de forma:

$$V_+(x; k, \lambda) = V_-(x; k \rightarrow k + 1, \lambda \rightarrow \lambda + 1) + R(k, \lambda), \quad (2.38)$$

onde $a_1 = (k, \lambda)$, $a_2 = (k + 1, \lambda + 1)$, $R = -(k + \lambda + 1)$, com $E_-^{(0)} = 0$, o que nos garante que a SUSI é não-quebrada. A condição de invariância de forma é uma condição suficiente para podermos resolver algebricamente a equação de autovalor de energia via o método SUSI desenvolvido por Gendenshtein [24]. No entanto, no caso da quebra espontânea da SUSI, podemos aplicar o método SUSI desenvolvido por Sukumar [35] ou fazendo transformações adequadas, restaurando o caso da SUSI não-quebrada [41]. O caso mais simples de potenciais invariantes [24] de forma é o oscilador SUSI em uma dimensão.

Portanto, a partir da análise da hierarquia de hamiltonianos SUSI, vemos que se a condição de invariância de forma for satisfeita os níveis de energia do n -ésimo estado excitado do primeiro membro da hierarquia tornam-se:

$$E_1^n = E_2^{n-1} = \dots = E_{n+1}^{(0)} = \sum_{s=2}^{n+1} R(a_s), \quad n = 1, 2, \dots,$$

onde o índice superior indica o nível de energia e o índice inferior indica o membro da hierarquia. Neste caso, a energia do estado fundamental do n -ésimo membro da hierarquia é dada por $E_n^{(0)} = \sum_{s=2}^n R(a_s)$.

2.1.2 Interpretação do superpotencial

O modelo hamiltoniano de Witten [4] em termos do superpotencial é:

$$\hat{H} = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} \{W^2(x) + W'(x)\sigma_3\} = \begin{pmatrix} H_- & 0 \\ 0 & H_+ \end{pmatrix}, \quad (2.39)$$

onde os setores de hamiltoniano (H_{\pm}) podem ser colocados em termos de operadores diferenciais de primeira ordem (mutuamente adjuntos, isto é, $A^+ = (A^-)^\dagger$, $A^- = (A^+)^\dagger$), a saber,

$$H_- = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + V_- = A^+ A^-, \quad (2.40)$$

e o seu companheiro supersimétrico H_+ é definido por

$$\begin{aligned} H_+ &= -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + V_+ = A^- A^+, \\ V_{\mp} &= \frac{1}{2} \{W^2(x) \pm W'(x)\}, \quad A^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \pm \frac{d}{dx} + W(x) \right\}. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Considerando as equações de autovalor para H_{\pm} , obtém-se o seguinte mapeamento entre os seus autovalores de energia:

$$E_+^{(n)} = E_-^{(n+1)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.42)$$

Vemos que todos os níveis de energia dos hamiltonianos H_{\pm} são degenerados, com exceção do estado fundamental não degenerado de H_- associado ao autovalor de energia zero.

Por que a denominação de superpotencial? A função $W(x)$ é chamada de superpotencial, devido às seguintes interpretações: $W^2(x)$ representa a interação bóson-bóson, e $W'(x)\sigma_3$ representa a interação bóson-férmion. Note que no modelo SUSI MQ de Witten não existe o termo de interação férmion-férmion.

2.2 Modelo de invariância de forma na SUSI

A conexão entre massa efetiva dependente da posição e forma invariante foi discutido na mecânica quântica não-relativística [42, 43]. Recentemente, alguns potenciais invariantes de forma tem sido investigados no caso relativístico [44]. Soluções exatas para os estados ligados nesse potencial misto pode ser obtido pelo método de separação de variáveis [45] e também pelo uso da álgebra dinâmica $SO(2, 1)$. Em um artigo recente a solução do problema de espalhamento para este potencial tem sido obtido por um método analítico e também por um método algébrico [46].

A forma invariante SUSI dos potenciais parceiros [47, 48] são semelhantes em forma e diferentes apenas nos parâmetros que aparecem nelas. Mais especificamente, se $V_-(x; a_1)$ é um potencial qualquer, ajustado para ter o estado fundamental de energia $E_-^{(0)} = 0$, seu parceiro SUSI $V_+(x; a_1)$ deve satisfazer a seguinte exigência:

$$V_+(x; a_1) = V_-(x; a_2) + R(a_2), \quad a_2 = f(a_1), \quad (2.43)$$

onde a_1 é um conjunto de parâmetros, a_2 uma função dos parâmetros a_1 e $R(a_2)$ é um remanescente independente de x . Então, começando com $V_1 = V_-(x; a_2)$ e $V_2 = V_+(x; a_1) = V_1(x; a_2) + R(a_2)$ em (2.43), se constrói uma hierarquia de hamiltoniano

$$H_n = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + V_-(x; a_n) + \sum_{s=2}^n R(a_s), \quad (2.44)$$

onde $a_s = f^s(a_1)$, isto é, a função f aplicada s vezes. Tendo as equações (2.43) e (2.44), nós temos

$$H_{n+1} = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + V_-(x; a_{n+1}) + \sum_{s=2}^{n+1} R(a_s) \quad (2.45)$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + V_+(x; a_n) + \sum_{s=2}^n R(a_s). \quad (2.46)$$

Comparando (2.44), (2.45) e (2.46), imediatamente notamos que H_n e H_{n+1} são parceiros SUSI dos hamiltonianos com espectros de energia idênticos, exceto para o nível do estado fundamental

$$E_n^{(0)} = \sum_{s=2}^n R(a_s) \quad (2.47)$$

de H_n , que decorre de (2.44) e da normalização. $V_-(x; a)$, $E_-^{(0)} = 0$. Assim, temos que

$$E_1^n = E_2^{n-1} = \dots = E_{n+1}^{(0)} = \sum_{s=2}^{n+1} R(a_s), \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.48)$$

e

$$\psi_1^{(n)} \propto A_1^+(x; a_1) A_2^+(x; a_2) \dots A_n^+(x; a_n) \psi_{n+1}^{(0)}(x; a_{n+1}). \quad (2.49)$$

As equações (2.48) e (2.49), sucintamente expressam a generalização algébrica SUSI para vários potenciais invariantes de forma de interesse físico. O método de construção das autofunções de energia ($\psi_{osc}^{(n)}$) para o problema usual do oscilador em 1D é um caso especial. Com efeito, quando $a_1 = a_2 = \dots = a_n = a_{n+1}$, nós obtemos $\psi_{osc}^{(n)} \propto (a^+)^n \psi_1^{(0)}$, $A_1^+ = \dots A_n^+ = a^+$, $\psi_{osc}^{(0)} = \psi_{n+1}^{(0)} = \psi_1^{(0)} \propto e^{-\frac{\omega x^2}{2}}$, onde ω é a frequência angular.

2.3 Operadores escada generalizados para potenciais invariantes de forma

A invariância de forma tem uma estrutura algébrica subjacente e pode ser associada com a algebra de Lie. Na seção 4.2 do capítulo 4, apresentamos nossa própria aplicação deste método. Iniciaremos esta seção com a seguinte indagação: Quais os operadores escadas para os potenciais invariantes de forma?

A resposta a esta pergunta foi encontrada independentemente por Fukui et al. (1993) e Balantekin (1998).

Partindo do conceito de invariância de forma, juntamente com a idéia de esta invariância está relacionada com a translação nos parâmetros, é possível definir o operador de translação $T(a_0)$ como:

$$T(a_0) = \exp\left(\eta \frac{\partial}{\partial a_0}\right) \quad (2.50)$$

e

$$T^{-1}(a_0) = T^\dagger(a_0) = \exp\left(-\eta \frac{\partial}{\partial a_0}\right), \quad (2.51)$$

onde η é o parâmetro de translação, sendo nulo no caso do oscilador harmônico.

A fim de introduzir os operadores criação e aniquilação generalizados, é necessário compor os operadores de translação T e os operadores bosônicos A^\pm definidos da seguinte forma:

$$B^+(a_0) = A^+(a_0)T(a_0) \quad (2.52)$$

$$B^-(a_0) = T^+(a_0)A^-(a_0) \quad (2.53)$$

Estes novos operadores B obedecem a estrutura algébrica necessária para identificá-los com os operadores escada [3, 49]. Dessa forma, eles correspondem a generalização dos operadores criação e aniquilação usados no estudo do oscilador harmônico simples.

O método para resolver a equação de Schrödinger baseado nos operadores escada para potenciais invariantes na forma é similar ao que é usualmente feito para o oscilador harmônico. Assim, tem-se inicialmente que o estado fundamental $\psi_0(x; a_0)$ deve satisfazer a condição:

$$B^-(a_0)\psi_0(x; a_0) = A^-(a_0)\psi_0(x; a_0) = 0, \quad (2.54)$$

ou seja, o resultado é idêntico ao obtido usando a superálgebra e obtém-se uma função de onda similar, apenas explicitando aqui a dependência dos parâmetros:

$$\psi_0(x; a_0) \propto \exp\left(\int^x W(x; a_0) dx\right). \quad (2.55)$$

Os estados excitados são obtidos pela ação repetidas vezes do operador de criação no estado fundamental:

$$\psi_n(x; a_0) = [B^+(a_0)]^n \psi_0(x; a_0). \quad (2.56)$$

É importante notar que o operador T não comuta com qualquer entidade que dependa do parâmetro a_0 e os operadores A^\pm não comutam com qualquer objeto que dependa da variável x . Dessa forma, não existe a relação de comutação $[T, a_0]_-$, assim como \hat{x} com \hat{p} não comuta, pois $\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$.

O uso desses operadores escadas e suas respectivas propriedades consiste em uma maneira alternativa de resolução, usando o formalismo da supersimetria. Além disso, este estudo é de suma importância para que possamos encontrar as autofunções e autovalores de energia para o potencial coulombiano generalizado.

CAPÍTULO 3

Equação de Dirac e algumas aplicações

Na mecânica quântica (MQ), a equação de Dirac é uma equação de onda relativística proposta por Paul Dirac em 1928 que descreve com sucesso partículas elementares de spin 1/2, como o elétron. Hoje sabe-se que a equação de Klein-Gordon é uma equação diferencial de segunda ordem nas coordenadas de posição $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)$ e do tempo $\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)$, dada por

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi - \nabla^2\psi = M^2\psi, \quad (3.1)$$

onde $\hbar = c = 1$. A equação de Klein-Gordon é uma equação de movimento de um campo escalar e este campo descreve partículas sem spin.

Dirac observou que só uma equação de primeira ordem neste formato estaria livre das dificuldades experimentadas com relação a equação de Klein-Gordon, então, procurou postular a existência de um operador Hamiltoniano H para partículas relativísticas e percebeu mais adiante que este deveria ser linear ao se tratar das componentes de momento. Esta exigência foi feita para assegurar que (com a substituição $p \rightarrow -i\hbar\nabla$) a equação de onda seria linear no espaço dos operadores diferenciais como também em $\frac{\partial}{\partial t}$, preservando assim, de forma explícita, a simetria relativística entre espaço e tempo.

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = H\psi = -i\hbar c\alpha\nabla\psi + \beta M c^2\psi. \quad (3.2)$$

Todas as soluções da equação de Dirac são soluções da equação de Klein-Gordon, mas o inverso é falso.

O Hamiltoniano de Dirac então é dado por,

$$H = c\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta M c^2, \quad (3.3)$$

onde β , α_x , α_y e α_z , são as matrizes de Dirac e $(\vec{p} = p_x, p_y, p_z)$ é o operador de momento linear. Está claro que α_x , α_y , α_z e β tem que ser independentes desde que H seja linear como foi postulado. Estes devem ser independentes de x e t também; caso contrário tornam-se equivalentes em potenciais dependentes no espaço tempo. Não obstante α_x , α_y , α_z e β não são apenas números

e se eles fossem, a energia (Hamiltoniana) deveria conter termos proporcionais a $p_x p_y$, $p_x M c^2$, etc. Mas, a expressão relativística de energia não contém tal condição. Portanto, Dirac postulou que α_x , α_y , α_z e β não comutam entre si e a relação de comutação entre α_x , α_y , α_z e β é determinada requerendo que H^2 deve se reduzir a $c^2 p^2 + M^2 c^4$. Representando H^2 como HH para facilitar a observação da não comutação de operadores durante a multiplicação, temos que:

$$c^2 (\alpha_x p_x + \alpha_y p_y + \alpha_z p_z + \beta M c) (\alpha_x p_x + \alpha_y p_y + \alpha_z p_z + \beta M c) = c^2 (p^2 + M^2 c^2). \quad (3.4)$$

Comparando os coeficientes $(p_x)^2$, $(p_y)^2$, $(p_z)^2$ e $(M c^2)^2$ nos dois lados da equação, obtemos:

$$\alpha_x^2 = \alpha_y^2 = \alpha_z^2 = \beta^2 = 1. \quad (3.5)$$

À direita da equação (3.4), produtos como $p_x p_y$ não aparecem. Assim, o coeficiente $(\alpha_x \alpha_y + \alpha_y \alpha_x)$ no lado esquerdo da expressão deve desaparecer. Assim,

$$\alpha_x \alpha_y + \alpha_y \alpha_x = \alpha_y \alpha_z + \alpha_z \alpha_y = \alpha_z \alpha_x + \alpha_x \alpha_z = 0. \quad (3.6)$$

Por razões semelhantes, os coeficientes p_x , p_y , p_z no lado esquerdo da equação também devem desaparecer. Conseqüentemente,

$$\alpha_x \beta + \beta \alpha_x = \alpha_y \beta + \beta \alpha_y = \alpha_z \beta + \beta \alpha_z = 0. \quad (3.7)$$

Então α_x , α_y , α_z e β são levados a tornar-se matrizes quadradas. De acordo com (3.6) e (3.7), estas matrizes anticomutam entre si, isto é, o produto delas muda de sinal quando a ordem de fatores é invertida ($\alpha_x \alpha_y = -\alpha_y \alpha_x$). Cada matriz tem que ser hermitiana, para que H seja hermitiano também. Assim, a equação de Dirac torna-se:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi = -i\hbar c \alpha \cdot \nabla \psi + \beta M c^2 \psi, \quad (3.8)$$

onde α_x , α_y , α_z e β são matrizes constantes, hermitianas que satisfazem as equações (3.5), (3.6), e (3.7). Até o momento, ainda não temos as formas explícitas especificadas. Desde que ψ é multiplicado por estas matrizes da esquerda, ψ deve ser uma coluna com o mesmo número de elementos ou componentes com a dimensão da matriz. Veremos nas próximas seções que este número é 4. Cada um dos componentes $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$ de ψ são funções de x e t .

3.1 As matrizes de Dirac

A fim de adquirir uma idéia mais clara da natureza da equação de Dirac (3.8), nós precisamos determinar um grupo de matrizes que obedece a (3.5), (3.6) e (3.7). Considerando que são conhecidos os autovalores de uma matriz, nós podemos concluir, de (3.5), que os únicos

autovalores que qualquer uma de nossas matrizes pode obter são $+1$ e -1 . Secundariamente, nós podemos escrever $\alpha_x = \alpha_x \beta^2 = \alpha_x \beta \beta = -\beta \alpha_x \beta$. Considerando o traço (= soma dos elementos da diagonal = soma dos autovalores) das matrizes em ambos os lados, temos $\text{tr} \alpha_x = -\text{tr} \beta \alpha_x \beta = -\text{tr} \alpha_x \beta^2 = -\text{tr} \alpha_x$. Assim, $\text{tr} \alpha_x = 0$, o qual significa que α_x tem que ter o mesmo número de $+1$ autovalores, assim como -1 . Uma consequência deste resultado é que a dimensão n das matrizes tem que ser a mesma. A possibilidade de, $n = 2$ está descartada porque há três matrizes anticomutação nesta dimensão, quando são necessárias quatro. As três matrizes de Pauli

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

anticomutam, e o quadrado de cada uma é a matriz unitária:

$$\sigma_x \sigma_y = -\sigma_y \sigma_x = i\sigma_z, \quad \sigma_y \sigma_z = -\sigma_z \sigma_y = i\sigma_x \quad (3.10)$$

$$\sigma_z \sigma_x = -\sigma_x \sigma_z = i\sigma_y; \quad \sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = 1. \quad (3.11)$$

Com dimensão $n = 4$, podemos achar quatro matrizes que anticomutam. Neste caso, nossa escolha das matrizes de Dirac é

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

$$\alpha_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

Na verdade, o seguinte conjunto de matrizes não satisfaz todas as equações (3.5, 3.6, 3.7) e também a condição de hermiticidade.

Dividindo as matrizes em blocos 2×2 formados por matrizes de Pauli ou as matrizes identidades I , podemos escrevê-las de uma forma mais compacta em termos de submatrizes 2×2 , onde,

$$\beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \alpha_x = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_x \\ \sigma_x & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_y = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_y \\ \sigma_y & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_z = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_z \\ \sigma_z & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

Tais matrizes particionadas podem ser multiplicadas como se as submatrizes fossem só elementos de uma matriz ordinária, desde que a ordem dos fatores permaneça inalterada. Por exemplo,

$$\alpha_x \alpha_y = \begin{pmatrix} \sigma_x \sigma_y & 0 \\ 0 & \sigma_x \sigma_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\sigma_z & 0 \\ 0 & i\sigma_z \end{pmatrix} \equiv i\Sigma_z. \quad (3.15)$$

3.2 Solução da onda plana da Equação de Dirac

De acordo com a equação (3.8), encontramos soluções de onda plana da forma

$$\psi(x, t) = u(p) e^{i(p \cdot x - Et)/\hbar} \quad (3.16)$$

que caracterizam partículas de momento p . Logo, a energia será

$$Eu(p) = (c\alpha \cdot p + \beta M c^2) u(p) \quad (3.17)$$

Considerando $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ e β como matrizes 4 x 4 em (3.29), de forma que ψ e u sejam componentes de 4 colunas nas quais estas matrizes possam operar. Tirando-se proveito da forma particionada de $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ e β , podemos também imaginar u dividido em duas partes de dois-componentes:

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ \omega \end{pmatrix}; \quad v = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad \omega = \begin{pmatrix} u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}. \quad (3.18)$$

Substituindo (3.30) e (3.49) em (3.48), obtemos:

$$E \begin{pmatrix} v \\ \omega \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 0 & \sigma \cdot p \\ \sigma \cdot p & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ \omega \end{pmatrix} + M c^2 \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ \omega \end{pmatrix}. \quad (3.19)$$

Levando em conta as multiplicações de matriz à direita da expressão acima e reorganizando seus termos, escrevemos a última equação como um jogo de duas equações com duas componentes quantitativas v e ω :

$$(E - M c^2) v = c(\sigma \cdot p) \omega, \quad (3.20)$$

$$(E + M c^2) \omega = c(\sigma \cdot p) v. \quad (3.21)$$

Multiplicando a primeira destas equações por $(E + M c^2)$ e substituindo para $(E + M c^2) \omega$ do segundo termo, obtemos

$$(E^2 - M^2c^4)v = c^2(\sigma \cdot p)^2v = c^2p^2v. \quad (3.22)$$

O último passo segue onde encontramos a coluna que v tem que ser aniquilada a menos que do fator numérico que é zero. Conseqüentemente,

$$E = \pm (c^2p^2 + M^2c^4)^{\frac{1}{2}} \equiv E_{\pm}. \quad (3.23)$$

O mesmo resultado é obtido se aniquilarmos v no lugar de ω de (3.21) e (3.23), ou seja, nossa hamiltoniana será

$$H^2 = \pm (c^2p^2 + M^2c^4). \quad (3.24)$$

Note que o espectro de energia de uma partícula de Dirac livre consiste em duas fileiras que correspondem aos dois sinais da equação (3.23). Os valores positivos começam em $E = Mc^2$ (quando $p = 0$) e estendem-se para $+\infty$ ($|p| \rightarrow \infty$) enquanto as energias negativas começam em $E = -Mc^2$ e decaem para $-\infty$, estendendo-se para $|p| \rightarrow \infty$. Há um ponto indefinido a altura de $2Mc^2$ entre as duas fileiras dentro as quais nenhum nível de energia existe. A presença de níveis com pontos de energia infinitamente negativos causa um problema sério.

Determinamos agora as autofunções $u(p)$ pertencentes a qualquer autovalor de energia E . Por certas razões usamos (3.21) quando $E = E_-$. Assim podemos escrever:

$$\omega = \frac{c(\sigma \cdot p)v}{E_+ + Mc^2}, \quad (E = E_+) \quad (3.25)$$

e

$$v = -\frac{c(\sigma \cdot p)\omega}{E_+ + Mc^2}, \quad (E = E_- = E_+). \quad (3.26)$$

Estas equações revelam um fato bastante útil que se a partícula é não relativística ($cp \ll Mc^2$, $E_+ - Mc^2 \ll Mc^2$, *i.e.* $E_+ \approx Mc^2$), ω é de muita magnitude menor que v para soluções de energia positivas. De acordo com (3.25), a relação entre eles é $\approx (cp/2E_+) = \frac{1}{2}v_p/c$, onde v_p é a velocidade da partícula. Um valor refere-se frequentemente para à metade superior (v) das funções de onda com os componentes grandes e a metade inferior (w) para os componentes pequenos em situações não relativísticas. Para soluções de energia negativa, são invertidas as posições dos componentes grandes e pequenos, como é evidente pelas equações (3.26).

Trataremos de resolver, explicitamente, as equações acima. Verificamos que a equação (3.25) fornece duas soluções independentes, uma vez que existem duas possibilidades linearmente independentes para a coluna de dois componentes v . Se tomarmos as possibilidades mais simples $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ para os objetos de dois componentes independentes, e usarmos o fato que

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{p} = \sigma_x p_x + \sigma_y p_y + \sigma_z p_z = \begin{pmatrix} p_z & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & -p_z \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_z \\ p_x + ip_y \end{pmatrix}, \quad \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_x - ip_y \\ -p_z \end{pmatrix}. \quad (3.28)$$

Chegaremos à equação (3.25) de duas soluções de energia positivas independentes:

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \omega = \begin{pmatrix} \frac{cp_z}{(E_+ + Mc^2)} \\ \frac{cp_+}{(E_+ + Mc^2)} \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} v \\ \omega \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

e

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \omega = \begin{pmatrix} \frac{cp_-}{(E_+ + Mc^2)} \\ \frac{-cp_z}{(E_+ + Mc^2)} \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} v \\ \omega \end{pmatrix}, \quad (3.30)$$

sabendo que

$$p_+ = p_x + ip_y, \quad p_- = p_x - ip_y. \quad (3.31)$$

A última declaração em cada uma das equações (3.29) e (3.30) são uma lembrança que a coluna de quatro-componentes u é composto por v e w .

De um modo semelhante, usando os dois linearmente independentes de duas componentes, partindo das equações contidas em (3.26), com a ajuda de (3.28), obtemos as seguintes soluções de energia negativas :

$$v = \begin{pmatrix} \frac{-cp_z}{(E_+ + Mc^2)} \\ \frac{-cp_+}{(E_+ + Mc^2)} \end{pmatrix}, \quad \omega = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} v \\ \omega \end{pmatrix} \quad (3.32)$$

e

$$v = \begin{pmatrix} \frac{-cp_-}{(E_+ + Mc^2)} \\ \frac{cp_z}{(E_+ + Mc^2)} \end{pmatrix}, \quad \omega = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} v \\ \omega \end{pmatrix}. \quad (3.33)$$

Para cada solução nós podemos organizá-las fazendo $u^\dagger u \equiv u_1 * u_1 + u_2 * u_2 + u_3 * u_3 + u_4 * u_4 = 1$, multiplicando todos os componentes por

$$\left\{ 1 + \left[c^2 p^2 / (E_+ + Mc^2)^2 \right] \right\}^{-\frac{1}{2}} = \left[\frac{1}{2} (1 + Mc^2/E_+) \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (3.34)$$

obtemos quatro soluções independentes da equação de Dirac agora para um determinado momento p . No que se diz respeito à segunda pergunta, sabemos que a partícula de Dirac tem spin $-\frac{1}{2}$ de forma que há duas orientações de spin independentes para determinado momento e energia.

3.3 A importância do Spin da Partícula de Dirac

É um fato elementar da mecânica que o momento angular de qualquer partícula livre deve ser conservado. Consideraremos qualquer componente do momento angular operador $L = x \times p$. Usando L_z , e verificando que este é conservado para uma partícula cujo Hamiltoniano é determinado pela equação (3.3), temos

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{dL_z}{dt} &= [L_z, H] = [xp_y - yp_x, c\alpha p + \beta mc^2] \\ &= [xp_y, c\alpha_x p_x] - [yp_x, c\alpha_y p_y] = i\hbar c(\alpha_x p_y - \alpha_y p_x). \end{aligned} \quad (3.35)$$

Ao avaliar o comutador usamos o fato que x e y a partir de L_z não comutam respectivamente com p_x e p_y de H , mas todos os outros valores comutam. A equação (3.35) mostra que L_z não se conserva. Isto pode significar que somente L não representa o momento angular completo; deve haver outra parte (momento angular de spin S) tal qual $L + S$ é conservado. Verificaremos que se S_z é levado a ser $\frac{1}{2}\hbar\Sigma_z$ onde Σ_z é definido por (3.15), então $(L_z + S_z)$ comuta com H . Observamos que $\Sigma_z \equiv -i\alpha_x\alpha_y$ comuta com α_z e β em virtude das regras de anticomutação (3.6). Por exemplo $\alpha_x\alpha_y\alpha_z = -\alpha_x\alpha_z\alpha_y = \alpha_z\alpha_x\alpha_y$. Mas, $[\alpha_x\alpha_y, \alpha_x] = \alpha_x\alpha_y\alpha_x - \alpha_x\alpha_x\alpha_y = -\alpha_y\alpha_x^2 - \alpha_x^2\alpha_y = -2\alpha_y$ e similarmente $[\alpha_x\alpha_y, \alpha_y] = 2\alpha_x$.

Ao usar estes resultados obtemos

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}\hbar\Sigma_z \right) &= \frac{1}{2}\hbar [\Sigma_z, H] \\ &= -\frac{1}{2}i\hbar [\alpha_x\alpha_y, c\alpha_x p_x + c\alpha_y p_y] = -i\hbar c [\alpha_x p_y - \alpha_y p_x] \end{aligned} \quad (3.36)$$

De (3.35) e (3.36) nós vemos que $(L_z + \frac{1}{2}\hbar\Sigma_z)$ é conservado, e então $S_z = \frac{1}{2}\hbar\Sigma_z$ pode ser levado como o z-componente do spin do operador momento angular. Genericamente,

$$\vec{S} = \frac{1}{2}\hbar\vec{\Sigma}; \quad \Sigma_x = i\alpha_y\alpha_x, \quad \Sigma_y = -i\alpha_z\alpha_x, \quad \Sigma_z = -i\alpha_x\alpha_y. \quad (3.37)$$

Embora estes sejam matrizes 4 x 4, eles tem precisamente as mesmas propriedades algébricas das matrizes de Pauli:

$$\Sigma_x^2 = \Sigma_y^2 = \Sigma_z^2 = 1, \quad \Sigma_x\Sigma_y = i\Sigma_z, \quad \Sigma_y\Sigma_z = i\Sigma_x, \quad \Sigma_z\Sigma_x = i\Sigma_y \quad (3.38)$$

e a forma explícita de Σ é

$$\vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}. \quad (3.39)$$

Agora que nós temos os operadores de spin, temos como determinar o que o valor do spin. Desde que $\Sigma_z^2 = 1$ os autovalores de Σ_z são $+1$ e -1 , e conseqüentemente esses valores de S_z são $\frac{1}{2}\hbar$ e $-\frac{1}{2}\hbar$. Então,

$$S^2 = \frac{1}{4}\hbar^2 (\Sigma_x^2 + \Sigma_y^2 + \Sigma_z^2) = \frac{3}{4}\hbar^2 \quad (3.40)$$

A partir desses fatos, é evidente que a equação de Dirac descreve partículas de spin $\frac{1}{2}$, como o elétron.

3.4 A Covariância da Equação de Dirac

Antes de discutir a covariância da equação de Dirac nas transformações de Lorentz é conveniente adotar uma notação mais apropriada do que a utilizada até aqui. Para evidenciar a presença do quadrivector momento linear p_μ na equação de Dirac, vamos multiplicar a representação da equação de Dirac

$$(c\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta mc^2)|\psi\rangle = E|\psi\rangle \quad (3.41)$$

por $-\frac{i\beta}{c}$, obtendo assim,

$$\left(-i\beta\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta\frac{E}{c} - imc\right)|\psi\rangle = 0. \quad (3.42)$$

Interessa agora introduzir um novo conjunto de operadores

$$\vec{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = i\beta\vec{\alpha}, \quad \gamma_4 = \beta. \quad (3.43)$$

Na representação usual de Dirac-Pauli, usamos a representação matricial, dada por

$$\vec{\gamma} = i \begin{pmatrix} 0 & -\vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.44)$$

Utilizou-se de novo a notação abreviada introduzida inicialmente na equação (4.68). Uma outra representação que por vezes também se usa para as matrizes γ é a chamada representação de Majorana em que as matrizes $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ são imaginárias e γ_4 é real. Substituindo as relações (3.43) em (3.42) obtém-se a forma que se procurava para a equação de Dirac,

$$(\gamma_\mu p_\mu - imc)|\psi\rangle = 0. \quad (3.45)$$

Nesta equação a componente 4 do quadrivector momento linear é o operador

$$p_4 = \frac{-\hbar}{c} \frac{d}{dt}, \quad (3.46)$$

que resulta de proceder à substituição $E \rightarrow i\hbar \frac{d}{dt}$.

Ao escrever a equação de Dirac na forma (3.45) torna-se muito fácil generalizá-la para o caso em que a partícula tem carga elétrica Q e está num campo electromagnético com potencial vetor e potencial escalar.

3.5 A Partícula de Dirac em campos electromagnéticos

Atentaremos agora à resolução das dificuldades que surgem da existência de soluções com energias negativas $E_- = -(c^2 p^2 + m^2 c^4)^{\frac{1}{2}}$, as quais decaem até $-\infty$. A dificuldade fundamental é a de que até mesmo em um campo electromagnético fraco ou outra perturbação pode afetar uma partícula que está em um estado de energia positiva finita, fazendo com que esta sofra uma transição quântica a um estado de energia $E \rightarrow -\infty$, resultando no lançamento de uma quantia infinita de energia. Para contornar este problema sério, Dirac postulou que todos os estados de energia negativa estão normalmente ocupados através de elétrons e que este mar de elétrons de energia negativa não possui nenhum efeito fisicamente observável. Desde que estes elétrons obedeçam as estatísticas de Fermi-Dirac (o princípio da exclusão de Pauli) estes estados ocupados não podem acomodar mais nenhum elétron. Pode-se levar o ocupante de um dos saltos de estados de energia negativo (desocupado) para um estado de energia positivo e assim criar-se um buraco no mar de energia negativo provendo bastante energia para isto. (A quantidade de energia requerida para este propósito necessariamente tem que exceder a largura $2mc^2$ do intervalo entre a energia negativa e a positiva). O buraco representa um desvio do normal; sua criação significa a remoção de uma certa parcela de energia negativa do mar de elétrons, que é equivalente a criação de uma parcela igual de energia positiva. Assim o buraco se manifesta como uma partícula de carga $|e|$ de energia positiva. O elétron cuja expulsão criou o buraco é observado também, desde que vai para um estado de energia positiva. O processo inteiro pode, então, ser descrito como o desaparecimento do quantum de energia provido (diga-se fóton) com criação de um par de partículas observáveis; um elétron de energia positiva e outra partícula, só diferindo do elétron no sinal de sua carga. A descoberta da conversão de raios gama de alta energia em pares elétron-pósitron era um real triunfo da teoria de Dirac. Isto conduziu à conjectura que outras partículas como o próton também teriam pares de suas próprias antipartículas.

A associação entre a energia negativa de elétrons e pósitrons de energia positiva, que é a idéia básica na interpretação acima, não é puramente "ad hoc postulate". Pode ser realmente demonstrada considerando a equação de Dirac com interação electromagnética incluída. Seguindo a orientação habitual $\vec{p} \rightarrow \vec{p} - \frac{e\vec{A}}{c}$, $E \rightarrow E - e\phi$, obtemos de (3.8) a equação seguinte para uma partícula de Dirac em campos electromagnéticos:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \vec{\alpha} \cdot \left(-i\hbar c \vec{\nabla} - e\vec{A} \right) \psi + \beta mc^2 \psi + e\phi \psi. \quad (3.47)$$

Sejam A e ϕ independentes do tempo, temos estados estacionários $\psi(x, t) = u(x)e^{-iEt/\hbar}$ determinados pela equação de autovalores:

$$Eu(x) = \alpha(-i\hbar\nabla - eA)u(x) + \beta mc^2 u(x) + e\phi u(x). \quad (3.48)$$

Assumimos os campos a serem fracos o suficiente para os quais o espectro de energia não difere muito do de partículas livre e, em particular, separamos energia positiva e negativa existentes.

Considerando um estado particular $u(x)$ para qual E é negativo, isto é, $E = -|E|$ como em (3.48). Se levamos em conta o complexo conjugado de (3.48), escolhemos as propriedades de α e β tal que $\alpha^* = \alpha$ e $\beta = -\beta^*$, temos

$$-|E|u^*(x) = \alpha(-i\hbar\nabla c - eA)u^*(x) + \beta mc^2 u^*(x) + e\phi u^*(x). \quad (3.49)$$

Note que A e ϕ , sendo campos reais, não há alteração no conjugado complexo. Multiplicando (3.49) por -1 , descobrimos que $u(x)$ satisfaz uma equação de mesma forma como a (3.48), exceto que e é substituído por $-e$ ao longo do cálculo, e o autovalor torna-se a quantidade positiva $|E|$. A associação entre estados de energia negativos de uma partícula de carga $+e$ e de uma partícula de estados de energia positivos $-e$ é feito evidente. (O fato de que a ausência do elétron de energia negativa que constitui um pósitron, é refletida na relação complexa conjugada entre as duas funções de onda).

3.6 Solução da equação de Dirac para o potencial coulombiano

Vamos resolver a equação de Dirac para um potencial misto, composto por potenciais escalar e vetorial. Ambos os casos diferem na maneira de acoplamento da equação de Dirac. No caso do acoplamento do potencial de Coulomb o mínimo é utilizado como usual, enquanto que o potencial escalar é adicionado ao termo de massa da equação de Dirac. Da mesma forma que o potencial de Coulomb é derivado da troca de fótons sem massa entre o núcleo e os léptons orbitando em torno dele, o potencial escalar da forma $V_2 = -\frac{A_2}{r}$ é criado pela troca de um escalar sem massa e mésons. A equação de Dirac associada ao nosso problema é a seguinte

$$[c\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta(m_0c^2 + V_2) - (E - V_1)]\psi = 0. \quad (3.50)$$

Com a suposição de potenciais esfericamente simétricos, podemos novamente resolver equações diferenciais radiais acopladas de forma habitual

$$\begin{aligned}\frac{dG}{dr} &= -\frac{k}{r}G + \frac{1}{\hbar c}[E + m_0c^2 + V_2 - V_1]F(r), \\ \frac{dF}{dr} &= +\frac{k}{r}F - \frac{1}{\hbar c}[E - m_0c^2 - V_2 - V_1]G(r).\end{aligned}\quad (3.51)$$

Definindo $V_1 = -\hbar c \frac{A_1}{r}$ e $V_2 = -\hbar c \frac{A_2}{r}$, podemos obter

$$\begin{aligned}\frac{dG}{dr} &= -\frac{k}{r}G + \left[\frac{E + m_0c^2}{\hbar c} + \frac{1}{r}(A_1 - A_2) \right] F(r), \\ \frac{dF}{dr} &= +\frac{k}{r}F + \left[\frac{E - m_0c^2}{\hbar c} + \frac{1}{r}(A_1 + A_2) \right] G(r).\end{aligned}\quad (3.52)$$

Nos cálculos subseqüentes seguimos um procedimento muito semelhante ao utilizado para encontrar a solução do potencial de Coulomb, primeiro, considerar a região $r \approx 0$, onde os termos constantes proporcional à massa e energia podem ser negligenciados:

$$\begin{aligned}\frac{dG}{dr} &= -\frac{k}{r}G + \frac{(A_1 - A_2)}{r}F(r), \\ \frac{dF}{dr} &= +\frac{k}{r}F - \frac{(A_1 + A_2)}{r}G(r)\end{aligned}\quad (3.53)$$

e usando $G = ar^\gamma$ e $F = br^\gamma$, então

$$\begin{aligned}a\gamma r^{\gamma-1} + \kappa ar^{\gamma-1} - (A_1 - A_2)br^{\gamma-1} &= 0, \\ b\gamma r^{\gamma-1} + \kappa br^{\gamma-1} + (A_1 + A_2)ar^{\gamma-1} &= 0\end{aligned}\quad (3.54)$$

ou

$$\begin{aligned}a(\gamma + \kappa) - b(A_1 - A_2) &= 0, \\ a(A_1 + A_2) + b(\gamma - \kappa) &= 0.\end{aligned}\quad (3.55)$$

Estas são duas equações lineares homogêneas para a e b e os coeficientes são $\gamma^2 = \kappa^2 - A_1^2 + A_2^2$ ou $\gamma = \pm \sqrt{\kappa^2 - A_1^2 + A_2^2}$.

Para permitir a normalização das funções de onda, mais uma vez escolher a de sinal positivo para γ e introduzir a substituição $\delta = 2\lambda r$ com $\lambda = \frac{(m_0^2c^4 - E^2)^{\frac{1}{2}}}{\hbar c}$.

As equações diferenciais, assim, tem a seguinte forma

$$\begin{aligned}\frac{dG}{d\delta} &= -\frac{\kappa}{\delta}G + \left[\frac{E + m_0c^2}{\hbar c 2\lambda} + \frac{(A_1 - A_2)}{\delta} \right] F, \\ \frac{dF}{d\delta} &= \left[\frac{E - m_0c^2}{\hbar c 2\lambda} + \frac{(A_1 - A_2)}{\delta} \right] G + \frac{\kappa}{\delta}F.\end{aligned}\quad (3.56)$$

que com a escolha de

$$\begin{aligned}G &= (m_0c^2 + E)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\delta}{2}} (\phi_1 + \phi_2), \\ F &= (m_0c^2 - E)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\delta}{2}} (\phi_1 - \phi_2).\end{aligned}\quad (3.57)$$

leva a

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}(\phi_1 + \phi_2) + \frac{d\phi_1}{d\delta} + \frac{d\phi_2}{d\delta} &= -\frac{\kappa}{\delta}(\phi_1 + \phi_2) \\ &+ \left[\frac{E + m_0c^2}{2\hbar c\lambda} + \frac{(A_1 - A_2)}{\delta} \right] \frac{m_0c^2 - E}{\hbar c\lambda} (\phi_1 - \phi_2), \\ -\frac{1}{2}(\phi_1 - \phi_2) + \frac{d\phi_1}{d\delta} - \frac{d\phi_2}{d\delta} &= -\left[\frac{E - m_0c^2}{2\hbar c\lambda} + \frac{(A_1 + A_2)}{\delta} \right] \frac{m_0c^2 + E}{\hbar c\lambda} (\phi_1 + \phi_2) \\ &+ \frac{\kappa}{\delta}(\phi_1 - \phi_2).\end{aligned}\quad (3.58)$$

Adicionando e subtraindo as equações

$$\begin{aligned}-\phi_1 + 2\frac{d\phi_1}{d\delta} &= -2\frac{\kappa}{\delta}\phi_2 + \phi_1 + \frac{(A_1 - A_2)}{\delta} \frac{m_0c^2 - E}{\hbar c\lambda} (\phi_1 - \phi_2) \\ &- \frac{(A_1 + A_2)}{\delta} \frac{m_0c^2 + E}{\hbar c\lambda} (\phi_1 + \phi_2)\end{aligned}\quad (3.59)$$

e

$$\begin{aligned}-\phi_2 + 2\frac{d\phi_2}{d\delta} &= -2\frac{\kappa}{\delta}\phi_1 - \phi_2 + \frac{(A_1 - A_2)}{\delta} \frac{m_0c^2 - E}{\hbar c\lambda} (\phi_1 - \phi_2) \\ &+ \frac{(A_1 + A_2)}{\delta} \frac{m_0c^2 + E}{\hbar c\lambda} (\phi_1 + \phi_2),\end{aligned}\quad (3.60)$$

respectivamente. Nós agora recolhemos termos e obtemos:

$$\frac{d\phi_1}{d\delta} = \left(1 - \frac{A_1 E}{\hbar c \lambda \rho} - \frac{A_2 m_0 c^2}{\hbar c \lambda \rho} \right) \phi_1 - \left(\frac{\kappa}{\delta} + \frac{A_1 m_0 c^2}{\hbar c \lambda \rho} + \frac{A_2 E}{\hbar c \lambda \rho} \right) \phi_2, \quad (3.61)$$

$$\frac{d\phi_2}{d\delta} = \left(-\frac{\kappa}{\delta} + \frac{A_1 m_0 c^2}{\hbar c \lambda \rho} + \frac{A_2 E}{\hbar c \lambda \rho} \right) \phi_1 + \left(\frac{A_1 E}{\hbar c \lambda \rho} + \frac{A_2 m_0 c^2}{\hbar c \lambda \rho} \right) \phi_2. \quad (3.62)$$

Para ϕ_1 e ϕ_2 usamos a série de potências

$$\phi_1 = \delta^\gamma \sum_{m=0}^{\infty} A_{1m} \delta^m, \quad \phi_2 = \delta^\gamma \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m \delta^m \quad (3.63)$$

e inserindo elas nas equações diferenciais

$$\begin{aligned} \sum (m + \gamma) A_{1m} \delta^{m+\gamma-1} &= A_{1m} \delta^{m+\gamma} - \frac{A_1 E}{\hbar c \lambda} \sum A_{1m} \delta^{m+\gamma-1} \\ &- \left(\kappa + \frac{A_1 m_0 c^2}{\hbar c \lambda} + \frac{A_2 E}{\hbar c \lambda} \right) \sum \beta_m \delta^{m+\gamma-1}; \\ \sum \beta_m (m + \gamma) \delta^{m+\gamma-1} &= \left(-\kappa + \frac{A_1 m_0 c^2}{\hbar c \lambda} + \frac{A_2 E}{\hbar c \lambda} \right) \sum A_{1m} \delta^{m+\gamma-1} \\ &+ \left(\frac{A_1 E}{\hbar c \lambda} + \frac{A_2 m_0 c^2}{\hbar c \lambda} \right). \end{aligned} \quad (3.64)$$

Fazemos uma comparação do coeficiente

$$\begin{aligned} A_{1\gamma} (m + \gamma) &= A_{1m-1} - \left(\frac{A_1 E}{\hbar c \lambda} + \frac{A_2 m_0 c^2}{\hbar c \lambda} \right) A_{1m} \\ &- \left(\kappa + \frac{A_1 m_0 c^2}{\hbar c \lambda} + \frac{A_2 E}{\hbar c \lambda} \right) \beta_m, \\ \beta_\gamma (m + \gamma) &= \left(-\kappa + \frac{A_1 m_0 c^2}{\hbar c \lambda} + \frac{A_2 E}{\hbar c \lambda} \right) A_{1m} + \left(\frac{A_1 E}{\hbar c \lambda} + \frac{A_2 m_0 c^2}{\hbar c \lambda} \right) \beta_m \end{aligned} \quad (3.65)$$

e para a segunda equação temos que

$$\frac{\beta_m}{A_{1m}} = \frac{-\kappa + \frac{A_1 m_0 c^2}{\hbar c \lambda} + \frac{A_2 E}{\hbar c \lambda}}{m + \gamma - \frac{A_1 E}{\hbar c \lambda} - \frac{A_2 m_0 c^2}{\hbar c \lambda}} = \frac{\kappa - \frac{A_1 m_0 c^2}{\hbar c \lambda} - \frac{A_2 E}{\hbar c \lambda}}{n' - m}, \quad (3.66)$$

onde

$$n' = \frac{A_1 E}{\hbar c \lambda} + \frac{A_2 m_0 c^2}{\hbar c \lambda} - \gamma. \quad (3.67)$$

Como no caso de um potencial de Coulomb puro, esta é a equação para determinar os autovalores de energia. Apenas para $n = 0, 1, 2, \dots$, resultando hiper-funções geométricas para as funções de onda degenerar para polinômios, e nós termos ondas estacionárias.

Definindo

$$n = n' + j + \frac{1}{2} = 1, 2, 3, \dots,$$

nós temos que

$$\frac{A_1 E + A_2 m_0 c^2}{(m_0^2 c^4 - E^2)^{\frac{1}{2}}} = n - j - \frac{1}{2} + \gamma, \quad (3.68)$$

que resulta em

$$\left[A_1^2 + \left(n - j - \frac{1}{2} + \gamma \right)^2 \right] E^2 + 2A_1 A_2 m_0 c^2 E = m_0^2 c^4 \left(n - j - \frac{1}{2} + \gamma \right)^2 - A_2^2 m_0^2 c^4$$

ou

$$E^2 + \frac{2A_1 A_2 m_0 c^2}{A_1^2 + \left(n - j - \frac{1}{2} + \gamma \right)^2} E + m_0^2 c^4 \frac{A_2^2 - \left(n - j - \frac{1}{2} + \gamma \right)^2}{A_2^2 + \left(n - j - \frac{1}{2} + \gamma \right)^2} = 0. \quad (3.69)$$

Finalmente obtemos os autovalores de energia, ou seja,

$$E = m_0 c^2 \frac{-A_1 A_2}{A_2^2 + \left(n - j - \frac{1}{2} + \gamma \right)^2} \pm m_0 c^2 \left[\left(\frac{-A_1 A_2}{A_2^2 + \left(n - j - \frac{1}{2} + \gamma \right)^2} \right)^2 - \frac{A_2^2 - \left(n - j - \frac{1}{2} + \gamma \right)^2}{A_1^2 - \left(n - j - \frac{1}{2} + \gamma \right)^2} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (3.70)$$

Vamos agora considerar alguns casos especiais:

1) $A_1 = 0$, $\gamma = \sqrt{\kappa^2 + A_2^2}$, encontramos

$$E = \pm m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{A_2^2}{\left(n - j - \frac{1}{2} + \gamma \right)^2}}.$$

e

2) $A_2 = 0$, $\gamma = \sqrt{\kappa^2 - A_1^2}$, encontramos

$$E = \pm m_0 c^2 \left[1 + \frac{A_1^2}{\left(n - j - \frac{1}{2} + \gamma \right)^2} \right]^{-\frac{1}{2}}.$$

Obviamente existem dois ramos de soluções na região: as soluções para as energias positivas e negativas apresentam um comportamento idêntico, o que reflete ao fato de que a

interação escalar não faz distinção entre cargas positivas e negativas. Estados com energias negativas correspondem a antipartículas. A partícula e um estado de antipartícula se aproximam uns dos outros com o aumento constante de acoplamento, sem tocar. Comportamento crítico, como no caso do potencial de Coulomb, não ocorre; o vácuo de Dirac permanece estável no caso de potenciais escalares.

CAPÍTULO 4

Resolvendo o problema do potencial coulombiano generalizado

Nós consideramos um problema envolvendo o potencial vetorial $V_c = -\frac{A_1}{r}$ e um potencial escalar de Lorentz $V_s = -\frac{A_2}{r}$ na mecânica quântica relativística. O potencial escalar é adicionado ao termo de massa na equação de Dirac e pode ser interpretado como uma massa efetiva dependente da coordenada de posição. O potencial escalar é assumido como sendo criado pela troca de mésons escalares sem massa, que tem a forma $V_s = -\frac{A_2}{r}$. Soluções exatas para os Estados vinculados a este potencial misto podem ser obtidas pelo método de separação de variáveis [45, 50] e também pelo uso da álgebra dinâmica $SO(2, 1)$ [51]. Em um artigo recente a solução do problema da dispersão foi obtida para este potencial através de um método analítico e também por um método algébrico [46], e foi mostrado que alguns outros casos em que a equação de Dirac com potenciais clássicos de natureza vetorial e escalar com a assimetria esférica pode ser resolvido exatamente [52].

O problema de Dirac-Coulomb generalizado é descrito pela equação de Dirac independente do tempo, que pode ser escrita na forma

$$H\Psi = E\Psi, \quad (4.1)$$

onde o hamiltoniano é dado por

$$H = \rho_1 \otimes \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} + \rho_3 \otimes \mathbf{1} \left(M - \frac{A_2}{r} \right) - \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \left(\frac{A_1}{r} \right), \quad (4.2)$$

e nós usamos uma notação de produto direto na qual ρ_i e σ_i , ($i = 1, 2, 3$) obedecem a relação de comutação $[\rho_i, \sigma_j]_- = 0$.

O Hamiltoniano (4.2) comuta com o momento angular total

$$\mathbf{J} = \mathbf{1} \otimes \mathbf{1L} + \frac{1}{2} \mathbf{1} \otimes \boldsymbol{\sigma}, \quad (4.3)$$

também comuta com o operador de Dirac

$$K = \rho_3(1 + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L}), \quad (4.4)$$

e com o operador de inversão

$$P = \rho_3 \otimes \mathbf{I}, \quad (4.5)$$

onde \mathbf{I} inverte as coordenadas espaciais e o momento linear.

Segundo a fórmula de Sommerfeld do espectro de átomo de hidrogênio é dada da seguinte forma:

$$\frac{E}{M} = \left[1 + \frac{(Z\alpha)^2}{(n - |\kappa| + \sqrt{\kappa^2 - (Z\alpha)^2})^2} \right]^2 \quad (4.6)$$

onde κ é o autovalor de K , $|\kappa| = (j(j+1) + 1/4)^{1/2} = j + 1/2$. Desde que κ pode ter dois sinais do espectro de energia, esse é duplamente degenerado. Em nossa abordagem, seguimos a simples lógica:

- 1) Se há alguma simetria que relaciona dois sinais de κ , o operador de simetria correspondente deve anticomutar com K .
- 2) Ao mesmo tempo, naturalmente, este operador tem que comutar com o hamiltoniano de Dirac.

Para separar as variáveis, introduzimos dois espinores em termos dos harmônicos esféricos de spin de duas componentes que são autofunções dos operadores J^2 , J_z , L^2 e S^2 , a saber,

$$\phi_{j,m}^{(+)} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\ell + \frac{1}{2} + m}{2\ell + 1} \right)^{\frac{1}{2}} Y_{\ell, m - \frac{1}{2}} \\ \left(\frac{\ell + \frac{1}{2} - m}{2\ell + 1} \right)^{\frac{1}{2}} Y_{\ell, m + \frac{1}{2}} \end{pmatrix}, \quad (4.7)$$

para $j = \ell + \frac{1}{2}$ e

$$\phi_{j,m}^{(-)} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\ell + \frac{1}{2} - m}{2\ell + 1} \right)^{\frac{1}{2}} Y_{\ell, m - \frac{1}{2}} \\ - \left(\frac{\ell + \frac{1}{2} + m}{2\ell + 1} \right)^{\frac{1}{2}} Y_{\ell, m + \frac{1}{2}} \end{pmatrix}, \quad (4.8)$$

para $j = \ell - \frac{1}{2}$.

Nas bases acima verificamos que

$$J^2 \phi_{jm}^{(\pm)} = j(j+1) \phi_{jm}^{(\pm)}, \quad (4.9)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{n} \phi_{jm}^{(\pm)} = \phi_{jm}^{(\mp)}, \quad (4.10)$$

onde $\vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}$, e

$$(\mathbf{1} + \vec{\sigma} \cdot \vec{L})\phi_{jm}^{(\pm)} = \kappa\phi_{jm}^{(\pm)}, \quad (4.11)$$

onde $\kappa = \pm(j + \frac{1}{2})$ para $j = \ell \pm \frac{1}{2}$.

Em seguida, usamos a seguinte notação

$$\Psi = \begin{pmatrix} \frac{iG_{lj}}{r}\phi_{jm}^{\ell} \\ \frac{F_{lj}}{r}\vec{\sigma} \cdot \vec{n}\phi_{jm}^{\ell} \end{pmatrix}, \quad (4.12)$$

onde

$$\phi_{jm}^{\ell} = \phi_{jm}^{(\pm)}, \quad (4.13)$$

para $j = \ell \pm \frac{1}{2}$. O operador $\vec{\sigma} \cdot \vec{n}$ quando expressos nesta representação, como foi feito na equação (4.10), tem a propriedade de inverter o sinal de κ . Depois, usamos a relação de anticomutação

$$[\mathbf{1} + \vec{\sigma} \cdot \vec{L}, \vec{\sigma} \cdot \vec{n}]_{+} = 0 \quad (4.14)$$

tendo a seguinte equação de autovalor para o operador de Dirac

$$K\Psi = \kappa\Psi. \quad (4.15)$$

Além disso, utilizando as relações

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \frac{f(r)}{r} \phi_{jm}^{\ell} = -\frac{i}{r} \left(\frac{df}{dr} - \frac{\kappa f}{r} \right) \vec{\sigma} \cdot \vec{n} \phi_{jm}^{\ell}, \quad (4.16)$$

e

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \vec{\sigma} \cdot \vec{n} \frac{f(r)}{r} \phi_{jm}^{\ell} = -\frac{i}{r} \left(\frac{df}{dr} + \frac{\kappa f}{r} \right) \phi_{jm}^{\ell}, \quad (4.17)$$

e definindo

$$\begin{aligned} \Phi &= \begin{pmatrix} G_{lj} \\ F_{lj} \end{pmatrix}, \\ \Lambda &= -\kappa\rho_3 + A_2\rho_1 - iA_1\rho_2, \\ \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\rho} &= M\rho_1 + iE\rho_2, \end{aligned} \quad (4.18)$$

obtemos a equação radial que pode ser escrita na forma

$$\left[\frac{d}{dr} + \frac{\Lambda}{r} - \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\rho} \right] \Phi = 0. \quad (4.19)$$

4.1 Componente da autofunção do estado fundamental através da SUSI

Agora, seja S o operador que diagonaliza a matriz Λ que aparece no termo de interação da equação radial, isto é,

$$S^{-1}\Lambda S = \lambda\rho_3, \quad (4.20)$$

onde

$$\lambda^2 = \kappa^2 - A_1^2 + A_2^2 \quad (4.21)$$

e a matriz de diagonalização torna-se

$$S = \begin{pmatrix} c & d\frac{A_1-A_2}{\lambda+|\kappa|} \\ c\frac{A_1+A_2}{\lambda+|\kappa|} & d \end{pmatrix}. \quad (4.22)$$

Definindo

$$\Phi = S\hat{\Phi}, \quad (4.23)$$

nós encontramos a seguinte equação radial diagonalizada

$$\left[\frac{d}{dr} + \frac{\lambda}{r}\rho_3 - \vec{k} \cdot \vec{\rho} \right] \tilde{\Phi} = 0, \quad (4.24)$$

onde

$$\begin{aligned} 2\frac{c}{d}\lambda(|\kappa| + \lambda)\hat{k}_- &= (|\kappa| + \lambda)^2(M + E) - (A_1 - A_2)^2(M - E) \\ 2\frac{d}{c}\lambda(|\kappa| + \lambda)\hat{k}_+ &= (|\kappa| + \lambda)^2(M - E) - (A_1 + A_2)^2(M + E) \\ \hat{k}_3 &= \frac{EA_1 + MA_2}{\lambda}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Então, nós encontramos

$$\begin{aligned} -\hat{k}_- \hat{k}_+ &= \frac{a^2}{\lambda^2} \\ \hat{k}^2 &= k^2 = M^2 - E^2 \end{aligned} \quad (4.26)$$

onde

$$a^2 = (EA_1 + MA_2)^2 - k^2\lambda^2. \quad (4.27)$$

Notamos que a equação (4.24) pode ser reescrita como

$$A^+\hat{G} = \hat{k}_-\hat{F}, \quad A^-\hat{F} = -\hat{k}_+\hat{G} \quad (4.28)$$

onde

$$A^\pm = \pm \frac{d}{dr} + \frac{\lambda}{r} - \frac{EA_1 + MA_2}{\lambda}. \quad (4.29)$$

Estas relações são similares às relações entrelaçadas das autofunções de um hamiltoniano supersimétrico

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= [\mathbf{Q}, \mathbf{Q}^\dagger]_+ = \mathbf{Q}\mathbf{Q}^\dagger + \mathbf{Q}^\dagger\mathbf{Q} \\ &= \begin{pmatrix} A^+A^- & 0 \\ 0 & A^-A^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{H}_- & 0 \\ 0 & \mathcal{H}_+ \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.30)$$

onde as supercargas são dadas por

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A^- & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q}^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & A^+ \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad [\mathbf{Q}, \mathcal{H}]_- = 0 = [\mathbf{Q}^\dagger, \mathcal{H}]_- \quad (4.31)$$

De acordo com o capítulo 2, vimos que os hamiltonianos parceiros supersimétricos \mathcal{H}_\pm satisfazem as seguintes equações de autovalores:

$$\mathcal{H}_\pm \psi_\pm^{(n)} = E_\pm^{(n)} \psi_\pm^{(n)}, \quad (4.32)$$

as quais em termos das componentes \hat{G} e \hat{F} , a partir de (4.26) e (4.28), tornam-se

$$A^-A^+\hat{G} = \frac{a^2}{\lambda^2}\hat{G}, \quad A^+A^-\hat{F} = \frac{a^2}{\lambda^2}\hat{F}. \quad (4.33)$$

Note que cada autovalor de A^+A^- é também um autovalor de A^-A^+ exceto quando $A^-\hat{F}_0 = 0$. Esta condição de aniquilação nos dá "o estado fundamental" da componente \hat{F} da função de onda radial, ou seja, resolvendo a equação diferencial de primeira ordem

$$A^-\hat{F}_0 = 0 \Rightarrow \frac{d\hat{F}_0}{dr} = \left(\frac{\lambda}{r} - \frac{EA_1 + MA_2}{\lambda} \right) \hat{F}_0 \quad (4.34)$$

obtemos

$$\hat{F}_0 = r^\lambda e^{-\frac{(E_0 A_1 + M A_2)r}{\lambda}} \quad (4.35)$$

e da equação (4.33) junto com a condição de aniquilação podemos obter o autovalor de energia do estado fundamental em

$$\frac{E_0}{M} = \pm \left(1 - \frac{A_1^2 + A_2^2}{\lambda^2 + A_1^2} + \frac{A_1^2 A_2^2}{(\lambda^2 + A_1^2)^2} \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{A_1 A_2}{\lambda^2 + A_1^2}. \quad (4.36)$$

Com isso, podemos determinar a partir dos conceitos de invariância de forma o comportamento dos componentes superiores e explicitar sua característica para o primeiro estado excitado, sendo associado ao estudo da supersimetria.

4.2 Aplicação da condição de invariância de forma e SUSI

Considere os seguintes Hamiltonianos parceiros supersimétricos, dados por

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_- &= A^+ A^- = -\frac{d^2}{dr^2} + \frac{\lambda(\lambda-1)}{r^2} - \frac{2(EA_1 + MA_2)}{r} + \frac{(EA_1 + MA_2)^2}{\lambda^2} \\ &\equiv -\frac{d^2}{dr^2} + V_-(r, \lambda) \end{aligned} \quad (4.37)$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_+ &= A^- A^+ = -\frac{d^2}{dr^2} + \frac{\lambda(\lambda+1)}{r^2} - \frac{2(EA_1 + MA_2)}{r} + \frac{(EA_1 + MA_2)^2}{\lambda^2} \\ &\equiv -\frac{d^2}{dr^2} + V_+(r, \lambda). \end{aligned} \quad (4.38)$$

Esses potenciais parceiros SUSY são invariantes de forma, desde que

$$V_+(r, \lambda) = V_-(r, \lambda + 1) + R(\lambda + 1), \quad (4.39)$$

onde

$$R(\lambda + 1) = \frac{(EA_1 + MA_2)^2}{\lambda^2} - \frac{(EA_1 + MA_2)^2}{(\lambda + 1)^2}. \quad (4.40)$$

Portanto

$$A^-(\lambda)A^+(\lambda) = A^+(\lambda + 1)A^-(\lambda + 1) + R(\lambda + 1). \quad (4.41)$$

Seguindo a abordagem de Fukui e Aizawa [49] e também de Balantekin [3], definimos os seguintes operadores escada

$$B^-(\lambda) = T^\dagger(\lambda)A^-(\lambda), \quad B^+(\lambda) = (B^-)^\dagger(\lambda), \quad (4.42)$$

onde $T(\lambda)$ é o operador translação definido por

$$T(\lambda) = e^{\frac{\partial}{\partial \lambda}}, \quad (4.43)$$

com $T^\dagger(\lambda) = e^{-\frac{\partial}{\partial \lambda}}$, e dado

$$[B^-(\lambda), B^+(\lambda)] = R(\lambda). \quad (4.44)$$

é fácil verificar que a relação de comutação $[\mathcal{H}_-, (B^+)^n(\lambda)]$ resulta em

$$[A^+(\lambda)A^-(\lambda), (B^+)^n(\lambda)] = \sum_{i=1}^n R(\lambda+i)(B^+)^n(\lambda) \quad (4.45)$$

e como já foi visto $\mathcal{H}_- = A^+(\lambda)A^-(\lambda)$. Portanto os autovalores de energia do Hamiltoniano \mathcal{H}_- são dados por

$$\begin{aligned} E_-^{(n)} &= \sum_{i=1}^n R(\lambda+i), \\ &= \frac{-E^2\gamma^2(E)}{(\lambda+n)^2} + \frac{E^2\gamma^2(E)}{\lambda^2}, \quad \gamma_n(E) = A_1 + \frac{MA_2}{E_n}. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Assim, a partir das equações (4.26), (6.14), e (4.46), os autovalores de energia associados ao nível superior \hat{F}^n são dados por

$$E^{(n)} = \sqrt{\frac{M^2}{1 + \frac{\gamma_n^2}{(\sqrt{k^2 - \gamma_n^2} + n)^2}}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.47)$$

Resolvendo a equação anterior encontramos

$$\frac{E_{\hat{n}}}{M} = -\frac{A_1A_2}{(\hat{n}^2 + A_1^2)} \pm \left[\frac{A_1^2A_2^2}{(\hat{n}^2 + A_1^2)^2} + \frac{\hat{n}^2 - A_2^2}{\hat{n}^2 + A_1^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.48)$$

onde $\hat{n} = n_r + \lambda$ e $n_r = 0, 1, 2, \dots$. As correspondentes autofunções associadas ao componente superior são dadas por

$$\hat{F}_n(r) = (B^+)^n \hat{F}_0(r) \quad (4.49)$$

onde \hat{F}_0 é dado na equação (4.35).

A partir da equação anterior podemos determinar o componente da autofunção F para o primeiro estado excitado. Utilizando

$$B^+(\lambda) = T(\lambda)A^+(\lambda) \quad (4.50)$$

e de acordo com as equações (4.29), (4.42) e (4.43), encontramos

$$B^+(\lambda) = \left(\frac{d}{dr} + \frac{\lambda}{r} - \frac{EA_1 + MA_2}{\lambda} \right) e^{\frac{\alpha}{\beta\lambda}}. \quad (4.51)$$

Dáí, para o primeiro estado excitado ficamos com

$$F_1(r) = B^+ \hat{F}_0(r) = \left(\frac{d}{dr} + \frac{\lambda}{r} - \frac{EA_1 + MA_2}{\lambda} \right) e^{\frac{\alpha}{\beta\lambda}} r^\lambda e^{-\frac{(E_0 A_1 + M A_2)r}{\lambda}}, \quad (4.52)$$

portanto,

$$F_1(r) = N_1 \left(\frac{1}{r} - \frac{EA_1 + MA_2}{\lambda(\lambda + 1)} \right) r^{\lambda+1} e^{-\frac{(EA_1 + MA_2)r}{\lambda+1}}, \quad (4.53)$$

onde N_1 é a constante de normalização para o componente da autofunção F do primeiro estado excitado.

CAPÍTULO 5

Simetrias dos operadores de Laplace-Runge-Lenz e Johnson-Lippmann

Há muito tempo se conhece que a conservação do vetor de Runge-Lenz é responsável pela simetria chamada dinâmica do problema de Kepler não-relativístico - tanto na mecânica clássica quanto na mecânica quântica. Em mecânica clássica, dos limites do vetor de Runge-Lenz para o movimento planetário temos órbitas elípticas fixas no espaço. Na mecânica quântica, o operador vetorial correspondente é responsável pela degenerescência acidental nos níveis de energia do átomo de hidrogênio.

A álgebra de supersimetria (SUSI) em mecânica quântica (MQ) é o procedimento para construir um Hamiltoniano SUSI, de acordo com os potenciais vetor e escalar de Lorentz, para a equação de Dirac. Por outro lado, tem sido conhecida a existência de um operador, que é uma constante de movimento para o problema de Coulomb na mecânica quântica não relativística, chamado operador Laplace-Runge-Lenz [7, 52], que está relacionado com SUSI QM [8]. O operador análogo no caso relativístico, como uma constante de movimento no problema Dirac-Coulomb é o operador de Johnson-Lippmann [9, 10], que tem sido investigado via álgebra SUSI [11, 12].

5.1 Operador Laplace-Runge-Lenz

Curiosamente, nem C. Runge nem W. Lenz estão entre os primeiros a utilizar o vetor \vec{A} . Como veremos, nem mesmo P.S. de Laplace, que discutiu em detalhe as propriedades desse vetor já em 1799, em seu "Traité de mécanique celeste" [53], foi o primeiro a descobrir que tal vetor é, de fato, uma constante de movimento no problema de Kepler, sendo dado por

$$\vec{A} = \vec{p} \times \vec{L} - mk \frac{\vec{r}}{r}, \quad (5.1)$$

onde \vec{p} é o vetor momento linear, \vec{L} é o vetor momento angular, \vec{r} é o vetor posição e k é uma constante positiva.

Quando, em 1924, Lenz utilizou o vetor \vec{A} para calcular níveis de energia no problema de Kepler perturbado dentro do contexto da mecânica quântica velha, ele se referiu a esse vetor como pouco conhecido e se referiu a um livro escrito por Runge sobre análise vetorial publicado em 1919 [54]. Em seu livro, Runge mostra explicitamente que se a força central que age numa partícula variar com o inverso do quadrado da distância da partícula ao centro de força o vetor \vec{A} será uma constante de movimento.

Com esse objetivo, calcularemos explicitamente a sua derivada temporal e mostraremos que ela é nula se supusermos que a partícula esteja sob a ação única e exclusivamente da força gravitacional, ou seja, se utilizarmos a equação de movimento

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -\frac{k}{r^2}\hat{r}, \quad (5.2)$$

onde, no problema de Kepler, k é uma constante positiva ($k = GMm$). Temos, então,

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt} \times \vec{L} + \vec{p} \times \frac{d\vec{L}}{dt} - mk \frac{d\vec{p}}{dt} = 0, \quad (5.3)$$

onde usamos o fato de que o momento angular é uma constante de movimento.

Uma relação bem simples entre \vec{A} e \vec{L} decorre do fato de que o vetor \vec{A} pertence ao plano da órbita, como pode ser verificado mostrando que é nulo seu produto escalar com \vec{L} , ou seja,

$$\vec{A} \cdot \vec{L} = \left[\vec{p} \times \vec{L} - mk \frac{\vec{r}}{r} \right] \cdot \vec{L} = (\vec{p} \times \vec{L}) \cdot \vec{L} - mk \frac{\vec{r}}{r} \cdot (\vec{r} \times \vec{p}) = 0, \quad (5.4)$$

isto é, \vec{A} é perpendicular ao momento angular \vec{L} .

Percebe-se que \vec{A} está no plano da órbita, sendo uma constante de movimento, e parece apontar na direção do eixo de simetria da nossa elipse (Figura 5.1).

A fim de encontrar a relação entre \vec{L} , \vec{A} e \vec{r} precisamos olhar para a direção de \vec{A} nos pontos em detalhe. Podemos tomar o produto escalar com o raio do vetor

$$\vec{A} \cdot \vec{r} = \text{Arcos}\theta = \vec{r}(\vec{p} \times \vec{L}) - mkr, \quad (5.5)$$

onde obtemos o seguinte resultado

$$\begin{aligned} \text{Arcos}\theta &= L^2 - mkr \\ \frac{1}{r} &= \frac{mk}{L^2} \left(1 + \frac{A}{mk} \cos\theta \right). \end{aligned} \quad (5.6)$$

Curiosamente, encontramos as órbitas do problema de Kepler em termos do vetor de LRL, além disso, a direção de \vec{A} se deve a paridade da função cosseno [54].

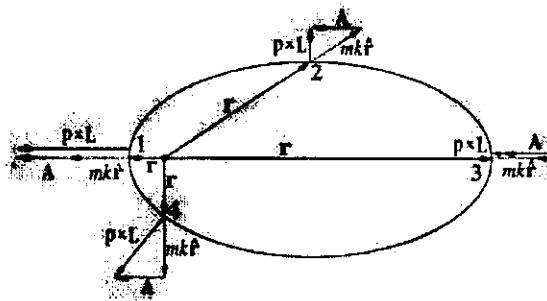


Figura 5.1 Representação do vetor de Laplace-Runge-Lenz.

Podemos observar no caso clássico que a direção constante de \vec{A} , é a do eixo de simetria da órbita conforme indicado na Figura 5.1.

Para o problema de Kepler, vimos que existe além de \vec{L} outra grandeza vetorial conservada, \vec{A} , o vetor de LRL que foi definido. As relações colchete de Poisson dos componentes de \vec{A} com eles mesmos ou com os componentes de \vec{L} podem ser obtidas de uma maneira direta. Como \vec{A} claramente qualifica-se como um vetor do sistema, temos imediatamente as relações suporte

$$[A_i, L_j] = \epsilon_{ijk} A_k. \quad (5.7)$$

Os colchetes de Poisson dos componentes de \vec{A} entre si não podem ser obtidos tão simplesmente, mas, depois de uma boa manipulação se verifica que

$$[A_1, A_2] = - \left(p^2 - \frac{2mk}{r} \right) L_3. \quad (5.8)$$

A quantidade do lado direito entre parênteses será reconhecido como $2mH$, que tem o valor $2mE$ conservada. Se nós, portanto, introduzirmos um novo vetor \vec{D} constante definida como

$$\vec{D} = \frac{\vec{A}}{\sqrt{-2mE}} \equiv \frac{\vec{A}}{\sqrt{2m|E|}}, \quad (5.9)$$

em seguida, os componentes de \vec{D} satisfazem a relação colchete de Poisson

$$[D_1, D_2] = L_3. \quad (5.10)$$

Ciclicamente permutando os índices, o conjunto completo dos colchetes Poisson segue imediatamente. Assim, os componentes de \vec{L} e \vec{D} juntos formam uma álgebra de Lie para o problema de Kepler, com constantes estruturas obtidas a partir das identidades

$$[L_i, L_j] = \epsilon_{ijk} L_k, \quad (5.11)$$

$$[D_i, L_j] = \epsilon_{ijk} D_k, \quad (5.12)$$

e

$$[D_i, D_j] = \epsilon_{ijk} L_k. \quad (5.13)$$

Se fosse feito um exame das matrizes fundamentais para a rotação, mostraríamos que o grupo de simetria para o problema de Kepler Ligado deve ser identificado com o grupo de rotação de quatro dimensões reais adequadas, o chamado grupo especial ortogonal de dimensão 4, que normalmente é designado como $SO(4)$ ou $R(4)$.

Daí, o alto nível de simetria deve derivar do vetor LRL tal como aconteceu anteriormente. Como tal, começamos por tentar procurar um análogo quântico para:

$$\vec{A} = \vec{p} \times \vec{L} - mk \frac{\vec{r}}{r} \quad (5.14)$$

ou, neste caso, vamos usar uma ligeira modificação

$$\vec{N} = \frac{\vec{p} \times \vec{L}}{m} - \frac{e^2}{r} \vec{r} \quad (5.15)$$

o que sugere uma forma quântica particular, tendo o cuidado de garantir a hermiticidade

$$\hat{N} = \frac{1}{2m} [\hat{P} \times \hat{L} - \hat{L} \times \hat{P}] - \frac{e^2}{r} \hat{r} \quad (5.16)$$

usando chapéus para designar os operadores quânticos.

O operador \hat{N} comuta com o hamiltoniano. Assim, temos $[\hat{N}, \hat{H}] = 0$. Isto implica que ele deve agir como o gerador de alguma simetria.

Para Goldstein [55]

$$\{L_i, L_j\} = \epsilon_{ijk} L_k. \quad (5.17)$$

Mas esta estrutura está apenas para geradores de rotação em três dimensões espaciais. Ou seja, o grupo de transformações geradas por L_i pode ser identificado como $SO(3)$.

A fim de descobrir a estrutura $SO(4)$ que estas implicam, considere olhando para as duas combinações lineares

$$\vec{M} = \frac{1}{2}(\vec{L} + \vec{D}) \quad \vec{N} = \frac{1}{2}(\vec{L} - \vec{D}). \quad (5.18)$$

Agora, temos as seguintes estruturas

$$\begin{aligned} \{M_i, M_j\} &= \epsilon_{ijk} M_k \\ \{N_i, N_j\} &= \epsilon_{ijk} N_k \\ \{N_i, M_j\} &= 0. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Mas, deve ficar claro que a estrutura criada por \vec{L} e \vec{D} é a de $SO(3) \times SO(3)$ ou em outras palavras $SO(4)$. Investigamos a estrutura definida pelo momento angular e o vetor LRL e vemos agora que devemos esperar uma grande quantidade de simetria no problema de Kepler, ou seja, $SO(4)$.

5.2 Operador de Johnson-Lippmann

O análogo do vetor LRL na equação de Dirac é o operador Johnson-Lippmann (JL),

$$\vec{A} = \frac{\vec{\sigma}\vec{r}}{r} - i \left(\frac{\hbar c}{e^2} \right) (mc^2)^{-1} \mathbf{J} \rho_1 (H - mc^2 \rho_3), \quad (5.20)$$

desde que \vec{A} e \vec{J} anticomutem.

O operador JL foi generalizado para dimensões arbitrárias em trabalhos recentes e mostrou-se que este operador pode ser usado para construir uma supercarga relativística. Nós pensamos que, do ponto de vista pedagógico, é importante para mostrar explicitamente a maneira generalizada do operador JL para o potencial coulombiano.

No problema de Kepler relativístico, o vetor de Runge-Lenz deixa de ser uma constante de movimento. Como consequência, as órbitas clássicas se abrem e passam por uma precessão

conhecido como o avanço do periélio e na mecânica quântica, a degenerescência é substancialmente reduzida.

A remoção da simetria dinâmica é, porém, não completa. A equação relativística de Dirac prevê, de fato, que a maioria dos níveis de energia do átomo de hidrogênio têm uma maior degenerescência do que a simetria $SU(2)$ que o problema requer. Esta maior degenerescência, que está ausente para outros campos centrais, implica que a energia é independente do sinal do número quântico κ associado com o operador de Dirac. A degeneração pode ser explicada por meio de uma nova constante de movimento descoberto por Johnson e Lippmann, em 1950 [9].

Após o advento da mecânica quântica supersimétrica, tornou-se evidente que os níveis consolidados de estado de energia do átomo de hidrogênio relativístico formam padrões supersimétricos, indicando que a simetria do problema é $SU(2) \times S(2)$. No presente trabalho, introduzimos a supersimetria no mesmo nível que a simetria $SU(2)$, ou seja, como uma simetria do espaço gerado por soluções da equação de Dirac. Daí, como no caso do vetor LRL o vetor de JL estabelece o aparecimento de uma simetria análoga a $SO(4)$.

CAPÍTULO 6

Constante de Movimento Adicional

Nós obtemos uma resolução completa do espectro, para o operador de Dirac generalizado há uma constante adicional de movimento, análogo ao operador de Laplace-Runge-Lenz (LRL) no caso não relativístico,

$$MA = \vec{\sigma} \cdot \vec{n}(A_1M + A_2H) - iK\rho_1(H - \rho_3M), \quad (6.1)$$

isso fazendo $A_2 = 0$. Observamos o operador de Johnson-Lippman [9] multiplicado por uma constante.

O operador A é hermitiano. Ele comuta com H e \vec{J} , mas anticomuta com K e P . Assim, podemos escrever

$$A|E, j, m, \kappa \rangle = -a|E, j, m, -\kappa \rangle. \quad (6.2)$$

Pela escolha apropriada de fases relativa do vetor definimos $|E, j, m, \kappa \rangle$ e $|E, j, m, -\kappa \rangle$ podemos assegurar que a é real e positivo (ou zero). Sendo A hermitiano nós temos

$$A|E, j, m, -\kappa \rangle = -a|E, j, m, \kappa \rangle. \quad (6.3)$$

que mostra o conjunto de operadores $\{H, J^2, J_3, A\}$ possuindo autovetores

$$|E, j, m, \kappa \rangle \pm |E, j, m, -\kappa \rangle.$$

É importante perceber que o operador A revela uma simetria dinâmica porque existe a conexão com o vetor de LRL e a degenerescência accidental. Esse operador mostra uma simetria oculta (accidental) que só é revelada quando se escreve o hamiltoniano em coordenadas parabólicas (caso não relativístico). No caso relativístico o análogo é o operador de Johnson-Lippman.

Para A^2 como $A^\dagger A$ nós temos que

$$M^2 A^2 = (A_1M + A_2H)^2 + K^2(H^2 - M^2), \quad (6.4)$$

que nos fornece a relação entre o autovalor do operador JL e o autovalor de energia da equação de Dirac, a saber,

$$(Ma)^2 = (A_1M + A_2E)^2 - k^2\kappa^2, \quad (6.5)$$

onde

$$k^2 = M^2 - E^2. \quad (6.6)$$

Dessa forma, nós procuramos soluções em que $k \geq 0$. Além disso, também podemos reescrever (6.5) na seguinte forma:

$$(Ma)^2 = (A_1E + A_2M)^2 - k^2\lambda^2, \quad (6.7)$$

onde

$$\lambda^2 = \kappa^2 - A_1^2 + A_2^2. \quad (6.8)$$

A seguir, assumimos que λ é real e positivo.

Portanto, os autovalores de energia E estão relacionados com a por

$$\frac{E}{M} = 1 - \left\{ \left(1 + \frac{A_1A_2}{\lambda^2 + A_1^2} \right) - \left[\left(1 + \frac{A_1A_2}{\lambda^2 + A_1^2} \right)^2 - \frac{(A_1 + A_2)^2 - a^2}{\lambda^2 + A_1^2} \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \quad (6.9)$$

onde a nossa escolha do sinal na solução da equação para E implica que $0 \leq E \leq M$. Além disso, a menor energia corresponde ao autovalor $a = 0$, cujas expressões para a componente radial superior e o autovalor de energia do estado fundamental são encontrados pelas equações (4.34) e (4.35).

Consideremos agora as funções de onda com K autovalores $\mp\kappa$, que pode ser escrito em uma notação simplificada como

$$\Psi(\kappa) = \begin{pmatrix} \frac{iG_+}{r} \phi \\ \frac{F_+}{r} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \phi \end{pmatrix}, \quad (6.10)$$

e

$$\Psi(-\kappa) = \begin{pmatrix} \frac{iG_-}{r} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \phi \\ \frac{F_-}{r} \phi \end{pmatrix}, \quad (6.11)$$

onde

$$\left[\frac{d}{dr} + \frac{\Lambda_{\pm}}{r} - \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\rho} \right] \Phi_{\pm} = 0. \quad (6.12)$$

e

$$\Lambda_{\pm} = \pm \kappa \rho_3 + A_2 \rho_1 - i A_1 \rho_2. \quad (6.13)$$

Dáí a equação (6.2) é dada por

$$\left(\frac{A_1 M + A_2 E}{\kappa} - \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\rho} \right) \Phi_+ = -\frac{M a}{\kappa} \Phi_-. \quad (6.14)$$

As relações dadas pela equação (6.5) significam que para $a \neq 0$ precisamos determinar Φ apenas para um sinal de κ . Para o caso de $a = 0$ correspondente ao autovalor de energia E_0 temos consequencias extremamente diferentes. Neste caso, damos um índice 0 para G e F e obter

$$\kappa(E_0 + M)F_0 = (A_1 M + A_2 E_0)G_0 \quad (6.15)$$

$$\kappa(E_0 - M)G_0 = -(A_1 M + A_2 E_0)F_0 \quad (6.16)$$

onde omitimos os índices ℓ and j . As duas últimas equações são consistentes se

$$\kappa^2(E_0^2 - M^2) + (A_1 M + A_2 E_0)^2 = 0. \quad (6.17)$$

Assim, a energia E_0 pode ser escrita como

$$\frac{E_0}{M} = \pm \left[\left(1 - \frac{A_1^2 + A_2^2}{\lambda^2 + A_1^2} \right) + \left(\frac{A_1 A_2}{\lambda^2 + A_1^2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} - \frac{A_1 A_2}{\lambda^2 + A_1^2}. \quad (6.18)$$

é fácil verificar que

$$E_0^2 - M^2 = - \left(\frac{A_1 M + A_2 E_0}{\kappa} \right)^2 = - \left(\frac{A_1 E_0 + A_2 M}{\lambda} \right)^2. \quad (6.19)$$

Voltando as equações acopladas para G_0 e F_0 obtemos

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dr} - \frac{A_1 M + A_2 E_0}{\kappa} + \frac{\lambda_1}{r} \right) G_0 &= 0 \\ \left(\frac{d}{dr} - \frac{A_1 M + A_2 E_0}{\kappa} + \frac{\lambda_2}{r} \right) F_0 &= 0 \end{aligned} \quad (6.20)$$

onde

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \kappa - \frac{(A_1 - A_2)(A_1 M + A_2 E_0)}{(M + E_0)\kappa} \\ \lambda_2 &= -\kappa + \frac{(A_1 + A_2)(A_1 M + A_2 E_0)}{(M - E_0)\kappa}.\end{aligned}\quad (6.21)$$

Usando a equação (6.19) é fácil verificar que

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \epsilon(\kappa)\lambda. \quad (6.22)$$

Daí a recuperação dos índices ℓ e j , obtemos

$$G_{0\ell j} = c r^{-\epsilon(\kappa)\lambda} e^{\frac{A_1 M + A_2 E_0}{\kappa} r} \quad (6.23)$$

onde c é constante e

$$F_{0\ell j} = \epsilon(\kappa) \frac{-\lambda + \kappa}{A_1 - A_2} G_0 = \epsilon(\kappa) \frac{A_1 + A_2}{\lambda + \kappa} G_0. \quad (6.24)$$

As soluções acima dão funções de onda normalizáveis somente para valores negativos de κ .

CAPÍTULO 7

Conclusão

Nosso trabalho, buscou desenvolver a aplicação de uma constante adicional de movimento para a obtenção dos autoestados e autofunções de energia do estado fundamental, com base inicial na equação de Dirac independente do tempo, utilizada na Mecânica Quântica (MQ) Relativística. Neste contexto, estabelecemos a conexão entre a Supersimetria (SUSI) MQ e os operadores escada generalizados através da invariância de forma, para assim, determinarmos o espectro de energia para um hamiltoniano de Dirac generalizado por um termo com o potencial vetorial Coulombiano $V_c = -\frac{A_1}{r}$ e outro termo com o potencial escalar de Lorentz $V_s = -\frac{A_2}{r}$, acoplado a massa. Além disso, mostramos que o hamiltoniano generalizado comuta com o momento angular total e com o operador de Dirac K , mas, o operador de simetria correspondente deve anticomutar com o operador de Dirac K .

Com isso, resolvemos o problema do potencial coulombiano generalizado adotado, obtendo o espectro de energia e as autofunções através da SUSI, sob a condição de invariância de forma. Em seguida, para um maior entendimento da simetria dinâmica do problema e a degenerescência acidental, discutimos por comparação as analogias entre o vetor de Laplace-Runge-Lenz (LRL) e o vetor de Johnson-Lippmann (JL), em que mostramos o aparecimento de uma simetria $SO(4)$ para o primeiro e uma análoga para o último, no caso relativístico.

Concluindo, encontramos uma resolução do espectro para o operador de Dirac generalizado e mostramos que há uma constante adicional de movimento para o caso relativístico, análogo ao operador de Laplace-Runge-Lenz no caso não relativístico. Também mostramos que os autovalores de energia estão associados ao autovalor a do operador de JL, onde a menor energia corresponde a situação em que $a = 0$. Estamos estudando o caso em que $a \neq 0$, procurando um sistema físico compatível a situação e mapeando os autovalores de energia correspondente, cujos resultados serão divulgados em trabalhos futuros.

Referências Bibliográficas

- [1] GU, Z. Q. M. e. S. H. D. X. Y. *Int. J. Modern Phys.*, E11, p. 335, 2002.
- [2] DONG, G. H. S. e. D. P. S. H. *J. Math. Phys.*, v. 44, p. 4467, 2003.
- [3] BALANTEKIN, A. B. *Phys. Rev.*, A57, p. 4188, 1998.
- [4] WITTEN, E. *Nucl. Phys.*, B185, p. 153, 1981.
- [5] FILHO, E. D.; RIBEIRO, M. A. C. *Phys. Scripta*, v. 64, p. 348, 2001.
- [6] RODRIGUES, R. de L. *Phys. Lett.*, A326, p. 42, 2004.
- [7] O'CONNEL, R. C.; JAGANATHAN, K. *Am. J. Phys.*, v. 71, p. 243, 2003.
- [8] TJON, R. D. T. e J. A. *Phys. Rev.*, A48, p. 1089, 1993.
- [9] LIPPMANN, M. H. J. e B. A. *Phys. Rev.*, A78, p. 329, 1950.
- [10] SAKURAI, J. J. *Advanced Quantum Mechanics*. [S.l.: s.n.], 1967.
- [11] JORGENSEN, J. P. D. e T. *Int. J. of Q. Chem.*, v. 53, p. 161, 1995.
- [12] AOKI, H. K. e H. *J. Math. Phys.*, v. 47, p. 032302, 2006.
- [13] KHELASHVILI, T. T. K. e A. A. Supersymmetry in dirac equation for generalized coulomb potential. In: *arXiv:hep-th/0701259*. [S.l.: s.n.], 2007.
- [14] COOPER, A. K. e U. S. F. *Supersymmetry in quantum mechanics*. [S.l.: s.n.], 2001.
- [15] HELAYÊL-NETO, J. A. Simetria e interações fundamentais. *Física na Escola*, v. 6, p. 45-47, 2005.
- [16] JR M. GRISARU, M. R. e W. S. S. J. G. Superspace or one thousand and one lessons in supersymmetry. In: *Benjamin/Cummings, Reading, Mass.* [S.l.: s.n.], 1983.
- [17] FREUND, P. G. O. Introduction to supersymmetry. In: *Cambridge Monographs on Mathematical Physics*. [S.l.: s.n.], 1986.

-
- [18] WEST, P. Introduction to supersymmetry and supergravity. In: *World scientific*. [S.l.: s.n.], 1986.
- [19] SRIVASTAVA, P. P. Supersymmetry, superfield and supergravitation. In: *Adam-Hilger*. [S.l.: s.n.], 1986.
- [20] FERNANDEZ, J. N. e. M. A. d. O. D. J. *Ann. Phys. N.Y.*, v. 252, p. 386, 1996.
- [21] NEGRO, L. M. N. e. O. R.-O. J. *J. Phys. A: Math. Gen.*, v. 33, p. 7207, 2000.
- [22] RODRIGUES, R. de L. *The Quantum Mechanics SUSY Algebra: an Introductory Review*. Dissertação (Mestrado) — CBPF-MO-03-01, 2001.
- [23] DIRAC, P. A. M. Lectures on quantum mechanics. *Can. J. Math.*, v. 2, p. 129, 1950.
- [24] GENDENSHTEIN, L. *JETP Lett.*, v. 38, p. 356, 1983.
- [25] VAIDYA, R. de Lima Rodrigues e A. N. *Rev. Bras. de Ens. de Fis.*, v. 19, p. 374, 1997.
- [26] LIMA, V. G. Tese (Doutorado) — CBPF, 2001.
- [27] TEITELBOIM, C. A. P. G. ao e C. *J. Math. Phys.*, v. 21, p. 1863, 1980.
- [28] AZCÁRRAGA, J. L. e. P. V. J. A. de. *Covariant quantization of $D=1$ $N=1$ supersymmetric oscillator, Field and Geometry*. Dissertação (Mestrado) — XXIIInd winter school and workshop of theoretical physics, 1986.
- [29] HOLTEN, P. S. e J. W. van. *Nucl. Phys.*, B196, p. 509, 1982.
- [30] RODRIGUES, W. P. d. A. e. I. F. N. R. de L. Supersymmetric classical mechanics: free case. In: *Notas de Física CBPF-039-01*. [S.l.: s.n.], 2001.
- [31] BROWN, M. B. e L. S. *Phys. Rev. Lett.*, v. 52, p. 1933, 1984.
- [32] RAAB, O. L. de Lange e R. E. *Operator methods in quantum mechanics*. [S.l.]: Oxford University Press, New York, 1991.
- [33] FILHO, E. D. *Supersimetria aplicada à Mecânica Quântica*. [S.l.: s.n.], 2009.
- [34] FERNANDEZ, D. J. *Lett. Math. Phys.*, v. 8, p. 337, 1984.
- [35] SUKUMAR, C. *J. Phys. A: Math. Gen.*, v. 18, p. L57, 1985.
- [36] LAHIRI, P. K. R. e. B. B. A. *J. Phys. A: Math. Gen.*, v. 20, p. 3825, 1987.
- [37] LIMA, V. S. S. e. R. d. L. R. V. G. *Phys. Lett.*, A298, p. 91–97, 2002.
- [38] VACHASPATI, T. *Phys. Rev.*, D69, p. 043510, 2004.

- [39] DIAS, E. L. G. e. R. d. L. R. G. S. Stability equation and two-component eigenmode for domain walls in a scalar potential model. *International Journal of Modern Physics*, v. 22A, p. 731, 2007.
- [40] RODRIGUES A. F. DE LIMA, E. R. B. d. M. e. V. B. B. R. de L. *J. Phys. A: Math. Theor.*, v. 41, p. 025401, 2008.
- [41] GANGOPADHYAYA, J. V. M. e. U. P. S. A. *Phys. Lett.*, A283, p. 279, 2001.
- [42] TKACHUK, C. Q. e V. M. *J. Phys. A: Math. Gen.*, v. 37, p. 4267, 2004.
- [43] BAGCHI A. BANERJEE, C. Q. e. V. M. T. B. *J. Phys. A: Math. Gen.*, v. 38, p. 2945, 2005.
- [44] RODRIGUES, A. N. V. e R. de L. *Phys. Rev. Lett.*, v. 89, p. 068901–1, 2002.
- [45] GREINER, W. *Relativistic Quantum Mechanics*. [S.l.: s.n.], 1990.
- [46] SOUZA, A. N. V. e L. E. S. *J. Phys. A: Math. Gen.*, v. 35, p. 6489, 2002.
- [47] GENDENSHTEIN, L. E. *Zh. Eksp. Fis. Piz. Red.*, v. 38, p. 299, 1983.
- [48] COOPER, A. K. e. U. S. F. *Phys. Rep.*, v. 251, p. 267, 1995.
- [49] FUKUI, T.; AIZAWA, N. *Phys. Lett.*, A180, p. 308, 1993.
- [50] ALHAIDARI, A. D. *Phys. Lett.*, A322, p. 72, 2004.
- [51] PANCHANAN B. ROY, e. R. R. S. *J. Phys. A: Math. Gen.*, v. 28, p. 6467, 1995.
- [52] SHIFIT, L. I. *Quantum Mechanics*. [S.l.: s.n.], 1968.
- [53] LAPLACE, P. S. *Traité de mécanique celeste*. [S.l.]: Paris, Duprat, 1799.
- [54] FARINA, C. O vetor de laplace-runge-lenz no problema de kepler. *Caderno de Física da UEFS*, v. 04, p. 115–159, 2006.
- [55] GOLDSTEIN, H. *Classical Mechanics*. [S.l.: s.n.], 2001.