



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA E MATEMÁTICA

EPIFÂNIO ANULINO FERREIRA

O TEOREMA DE GREEN COM APLICAÇÕES

CUITÉ

2016

EPIFÂNIO ANULINO FERREIRA

O TEOREMA DE GREEN COM APLICAÇÕES

Monografia apresentada à Banca Examinadora como exigência parcial à conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Campina Grande.

Orientador: Prof. Anselmo Ribeiro Lopes

CUITÉ

2016

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA NA FONTE
Responsabilidade Jesiel Ferreira Gomes – CRB 15 – 256

F383t Ferreira, Epifânio Anulino.

O teorema de Green com aplicações. / Epifânio Anulino
Ferreira. – Cuité: CES, 2016.

54 fl.

Monografia (Curso de Licenciatura em Matemática) –
Centro de Educação e Saúde / UFCG, 2016.

Orientador: Anselmo Ribeiro Lopes.

1. Teorema de Green. 2. Integrais duplas. 3. Integrais de
linha. 4. Cálculo de área. 5. Identidades de Green. I. Título.

Biblioteca do CES - UFCG

CDU 51

EPIFANIO ANULINO FERREIRA

O Teorema de Green com aplicações

Monografia apresentada à Banca Examinadora, como exigência parcial à conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática, da Universidade Federal de Campina Grande, sob orientação da Prof. Ms. Anselmo Ribeiro Lopes

Aprovada em: 14/10/2016

BANCA EXAMINADORA

Anselmo Ribeiro Lopes

Prof. Ms. Anselmo Ribeiro Lopes
Universidade Federal de Campina Grande (UFCG)

Jussie Ubaldo da Silva

Prof. Ms. Jussie Ubaldo da Silva
Universidade Federal de Campina Grande (UFCG)

Edna Cordeiro de Souza

Prof. Ms. Edna Cordeiro de Souza
Universidade Federal de Campina Grande (UFCG)

CUITÉ

2016

À minha família, em especial à minha mãe, por me apoiar e me incentivar a continuar nos estudos.

Aos meus filhos Maria Luíza, Ana Carla e Pedro Venâncio, pois são eles que me dão forças para enfrentar os desafios da vida.

Agradecimentos

Agradeço ao Prof. Ms. Anselmo Ribeiro Lopes, orientador deste trabalho.

Agradeço ao Prof. Ms. Jussî Ubaldo da Silva pelo seu parecer.

Agradeço à Profa. Dra. Jaqueline Aparecida F. L. Santos pelas palavras de incentivo e a atenção.

Agradeço à Profa. Ms. Edna Cordeiro de Souza por suas valorosas opiniões e ideias que trouxeram melhorias a este trabalho.

Porque o que Deus escreveu será realizado!

(E. A. F.)

Resumo

A presente monografia trata-se de um estudo sobre o Teorema de Green, o qual foi desenvolvido pelo cientista inglês George Green. É um teorema essencial na matemática que relaciona a integral de linha ao longo de uma curva fechada simples com a integral dupla sobre a região delimitada por essa curva. Este trabalho teve como propósito principal demonstrar e aplicar o teorema. Para tanto, foi realizada uma vasta pesquisa em livros didáticos e artigos. Inicialmente, desenvolveu-se um estudo introdutório a respeito das integrais de linha e das integrais duplas nos assuntos pertinentes ao tema. Em seguida, demonstramos o Teorema de Green para alguns tipos de regiões planas e finalizamos com algumas aplicações do teorema no cálculo de área de regiões planas e na demonstração das identidades de Green.

Palavras-chave: Teorema de Green. Integrais duplas. Integrais de linha. Cálculo de área. Identidades de Green.

Abstract

This research study approaches Green's Theorem, that it was developed by English scientist George Green. This theorem is essential to mathematics because it relates the line integral along a simple closed curve with double integral over the region delimited by this curve. This study aims to demonstrate and apply the theorem. Therefore, It was conducted an extensive research in textbooks and articles. Initially, it was developed an introductory study about the line integrals and double integrals. Then we demonstrate Green's theorem for some types of plane regions and concluded with some applications of the theorem in the area calculation of plane regions and in the demonstration of Green's identities.

Keywords: Green's theorem. Double integrals. Line integrals. Calculations of area. Green's identities.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Retângulos aproximadores	21
Figura 2 – Partição do intervalo $[a, b]$	22
Figura 3 – Trajetória de uma partícula em movimento	26
Figura 4 – Traço da curva formada pela ponta de um vetor	27
Figura 5 – Gráfico de um círculo	27
Figura 6 – Reta no plano	28
Figura 7 – Hélice circular	29
Figura 8 – Parábola no plano	29
Figura 9 – Vetor girando continuamente	30
Figura 10 – A circunferência é uma curva suave	30
Figura 11 – Curva não suave com uma cúspide	31
Figura 12 – Curva suave por partes	31
Figura 13 – Exemplos de curvas simples e não simples; fechadas e não fechadas	32
Figura 14 – Exemplos de regiões conexas por caminho	32
Figura 15 – Exemplo e contraexemplo de região simplesmente conexa	33
Figura 18 – Sub-retângulos aproximadores	35
Figura 20 – União de regiões	37
Figura 25 – Região R do Tipo I	44
Figura 26 – Seção transversal de um sólido	45
Figura 27 – Região R do Tipo II	45
Figura 31 – Relação entre as coordenadas polares e cartesianas	49
Figura 34 – Região semicircular limitada pelo eixo x e a curva $y = \sqrt{1 - x^2}$	51
Figura 35 – Exemplo de um campo vetorial de velocidade	53
Figura 37 – Exemplo de campo vetorial de força	54
Figura 38 – Representação gráfica do vetor $F(x, y)$	54
Figura 39 – Vetores tangentes	56
Figura 40 – Inversão de orientação	61
Figura 45 – Trajeto triangular formado pelas curvas C_1, C_2 e C_3	67
Figura 46 – Regiões orientadas positivamente	70
Figura 47 – Região R orientada positivamente	71
Figura 49 – Região limitada pelas curvas $y = x$ e $y = x^2 - 2x$	75
Figura 50 – Curva triangular	76
Figura 51 – Círculo de equação $x^2 + y^2 = 9$	77
Figura 59 – Região multiplamente conexa	87

Sumário

	INTRODUÇÃO	19
1	PRELIMINARES	21
1.1	Integral Definida	21
1.1.1	Área e Integral Definida	21
1.1.2	Os Teoremas Fundamentais do Cálculo	22
1.2	Função Vetorial e Parametrização de Curvas	25
1.2.1	Parametrização de Curvas Planas	25
1.2.1.1	Equações paramétricas	25
1.3	Integrais Duplas	33
1.3.1	Volume e Integral Dupla	34
1.3.2	Propriedades das Integrais Duplas	37
1.3.3	Integrais Iteradas e os Teoremas de Fubini	38
1.3.3.1	Cálculo das integrais duplas sobre retângulos	38
1.3.4	Integrais Duplas sobre Regiões Gerais	42
1.3.4.1	Cálculo das integrais duplas sobre regiões gerais	43
1.3.5	Integrais Duplas em Coordenadas Polares	49
1.4	Campos Vetoriais	52
1.4.1	Representação Gráfica de um Campo Vetorial	54
1.4.2	Rotacional e Divergente	56
1.5	Integrais de Linha no Plano	59
1.5.1	Notação Vetorial e Trabalho	63
1.5.2	Propriedades das Integrais de Linha	66
2	TEOREMA DE GREEN	71
2.1	O Teorema de Green para Regiões Simples	71
3	AMPLIAÇÕES DO TEOREMA DE GREEN	81
3.1	O Teorema de Green para Retângulos	81
3.2	O Teorema de Green para a União de Regiões Simples	84
3.3	O Teorema de Green para Regiões Multiplamente Conexas	87
3.4	Formas Vetoriais do Teorema de Green	91
4	APLICAÇÕES DO TEOREMA DE GREEN	95
4.1	Cálculo de Áreas Utilizando o Teorema de Green	95
4.2	As Identidades de Green no Plano	97

5	CONCLUSÃO	99
	REFERÊNCIAS	101
	APÊNDICES	103
	APÊNDICE A – GEORGE GREEN (1793-1841)	105

INTRODUÇÃO

Este trabalho trata-se de um estudo sobre o Teorema de Green que tem importância fundamental não só na matemática como também na física e engenharia. O Teorema de Green é o precursor do Teorema de Stokes¹ e do Teorema de Gauss². São inúmeras as aplicações que envolvem o teorema. Na matemática podemos citar como exemplo seu emprego para o cálculo de área, estudo de funções e equações diferenciais. Na física é utilizado para solucionar vários problemas que envolvem eletricidade, magnetismo e fluido. Na engenharia podemos citar o cálculo de área como um exemplo de sua aplicação. Esse teorema foi criado por George Green, nascido no dia 13 de julho de 1793 em Nottingham, Inglaterra. Para saber mais sobre a vida de George Green consulte o Apêndice A.

Para produzir este trabalho foi realizada uma intensa pesquisa, não só com relação às versões distintas que o Teorema de Green apresenta como também sobre tópicos necessários para a sua construção e demonstração. Os seguintes autores das obras consultadas foram referenciados no texto: (STEWART, 2013), (HASS; THOMAS; WEIR, 2012), (ANTON; BIVENS; DAVIS, 2007), (FLEMMING; GONÇALVES, 2006), (FLEMMING; GONÇALVES, 2007), (FOULIS; MUNEM, 2011), (GUIDORIZZI, 2013), (LEITHOLD, 1994), (MORGADO; PINTO, 2009), etc.

No *Capítulo 1*, estão expostos conceitos elementares indispensáveis para o entendimento do Teorema de Green e aplicações. Dentre eles, estão: o Teorema Fundamental do Cálculo, parametrização de curvas planas, integrais duplas e integrais de linha no plano, etc.

No *Capítulo 2*, fazemos a demonstração do Teorema de Green para regiões simples e apresentamos alguns exemplos de como utilizá-lo.

No *Capítulo 3*, ampliamos a demonstração do Teorema de Green para outros tipos de regiões e exemplificamos.

No *Capítulo 4*, fizemos aplicações do Teorema de Green para o cálculo de área de regiões planas e para demonstrar a primeira e a segunda identidade de Green no plano.

¹ George Gabriel Stokes (1819-1903), matemático e físico irlandês.

² Karl Friedrich Gauss (1777-1855), matemático e cientista alemão.

1 PRELIMINARES

Neste capítulo apresentamos os conceitos necessários para o entendimento do Teorema de Green, sua demonstração e aplicações.

1.1 Integral Definida

1.1.1 Área e Integral Definida

Faremos uma breve revisão dos fatos básicos relativos à integral definida de funções de uma variável real. Se $f(x)$ é contínua $\forall x \in [a, b]$, começamos subdividindo o intervalo em n subintervalos de comprimento igual $\Delta x = (b - a)/n$ e escolhemos pontos de amostragem x_i^* em cada um desses subintervalos. Assim, formamos a soma de Riemann

$$\sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x \quad (1.1)$$

e tomamos o limite dessa soma quando $n \rightarrow \infty$ para obter a integral definida de a até b da função f :

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x.$$

No caso especial em que $f(x) \geq 0$, a soma de Riemann pode ser interpretada como a soma das áreas dos retângulos aproximadores da Figura 1 e $\int_a^b f(x) dx$ representa a área sob a curva $y = f(x)$ de a até b .

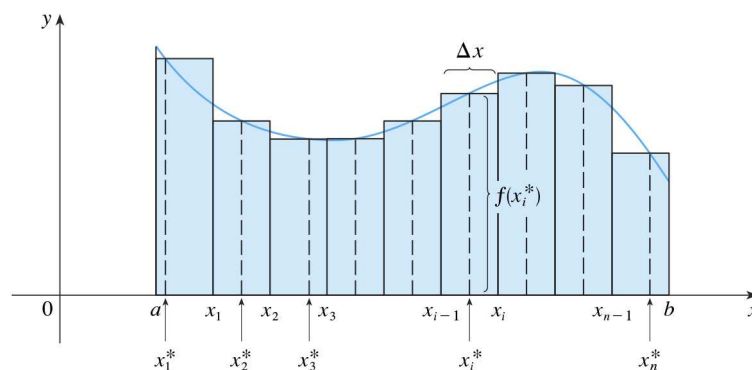


Figura 1 – Retângulos aproximadores

Fonte: Imagem extraída do livro de cálculo (STEWART, 2013)

1.1.2 Os Teoremas Fundamentais do Cálculo

Lema 1.1. Se $a < c < b$ e f é integrável em $[a, c]$ e em $[c, b]$, então f é integrável em $[a, b]$ e

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Demonstração. Consideremos uma partição no intervalo $[a, b]$ de tal forma que o ponto c ($a < c < b$) seja um ponto da partição, isto é, $c = x_i$, para algum i (ver Figura 2).

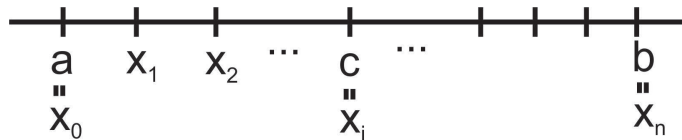


Figura 2 – Partição do intervalo $[a, b]$

Podemos dizer que o intervalo $[a, c]$ ficou dividido em r subintervalos e $[c, b]$ em $(n - r)$ subintervalos. Escrevemos as respectivas somas de Riemann

$$\sum_{i=1}^r f(c_i) \Delta x_i \quad \text{e} \quad \sum_{i=r+1}^n f(c_i) \Delta x_i.$$

Então,

$$\sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^r f(c_i) \Delta x_i + \sum_{i=r+1}^n f(c_i) \Delta x_i.$$

Usando a definição de integral definida, obtemos

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i \\ &= \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \left(\sum_{i=1}^r f(c_i) \Delta x_i + \sum_{i=r+1}^n f(c_i) \Delta x_i \right) \\ &= \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^r f(c_i) \Delta x_i + \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=r+1}^n f(c_i) \Delta x_i \\ &= \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \quad \square \end{aligned}$$

Lema 1.2. Se $f'(x)$ se anula em todos os pontos de um intervalo I , então f é constante em I .

Demonstração. Sejam $x, y \in I, x < y$. Como f é derivável em I , f é contínua em $[x, y]$ e derivável em (x, y) . Pelo Teorema do Valor Médio, existe $z \in (x, y)$, tal que

$$f'(z) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

Como $f'(z) = 0$, vem que $f(y) - f(x) = 0$ ou $f(y) = f(x)$. Sendo x e y dois pontos quaisquer de I , concluímos que f é constante em I . \square

Lema 1.3. Se $F(x)$ e $G(x)$ são funções primitivas de $f(x)$ no intervalo I , então existe uma constante c tal que $G(x) - F(x) = c, \forall x \in I$.

Demonstração. Seja $H(x) = G(x) - F(x)$. Como F e G são primitivas de $f(x)$ no intervalo I , temos $F'(x) = G'(x) = f(x), \forall x \in I$. Assim,

$H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0, \forall x \in I$. Como $H'(x) = 0$, pelo Lema 1.2, existe uma constante c , tal que $H(x) = c, \forall x \in I$. Logo, $\forall x \in I$, temos

$$G(x) - F(x) = c. \quad \square$$

Teorema 1.1 (Teorema Fundamental do Cálculo, Parte 1). Seja f uma função contínua¹ num intervalo fechado $I = [a, b]$, então a função $G : I \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$G(x) = \int_a^x f(t) dt,$$

tem derivada em todos os pontos $x \in [a, b]$ de modo que $G'(x) = f(x)$, isto é, G é uma primitiva de f .

Demonstração. Vamos determinar a derivada $G'(x)$, utilizando a definição de limite

$$G'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{G(x + \Delta x) - G(x)}{\Delta x}. \quad (1.2)$$

Temos que

$$G(x) = \int_a^x f(t) dt \quad \text{e} \quad G(x + \Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t) dt. \quad (1.3)$$

Subtraindo, membro a membro, as equações 1.3, obtemos

$$G(x + \Delta x) - G(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt. \quad (1.4)$$

Usando o Lema 1.1, podemos escrever

$$\int_a^{x+\Delta x} f(t) dt = \int_a^x f(t) dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt, \quad (1.5)$$

daí, usando (1.5) em (1.4), temos

$$\begin{aligned} G(x + \Delta x) - G(x) &= \int_a^x f(t) dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \\ &= \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt. \end{aligned} \quad (1.6)$$

¹ Implica dizer que f é integrável $\forall x \in [a, b]$.

Como f é contínua em $[x, x + \Delta x]$, pelo Teorema do Valor Médio para integrais, existe um ponto \bar{x} entre x e $x + \Delta x$ tal que

$$\begin{aligned} \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt &= (x + \Delta x - x)f(\bar{x}) \\ &= f(\bar{x})\Delta x. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Portanto, de (1.2), (1.6) e (1.7), obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{G(x + \Delta x) - G(x)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x})\Delta x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\bar{x}). \end{aligned} \quad (1.8)$$

Como \bar{x} está entre x e $x + \Delta x$, segue que $\bar{x} \rightarrow x$ quando $\Delta x \rightarrow 0$. Como f é contínua, acarreta que

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\bar{x}) = \lim_{\bar{x} \rightarrow x} f(\bar{x}) = f(x). \quad (1.9)$$

Logo, de (1.8) e (1.9), concluímos que

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{G(x + \Delta x) - G(x)}{\Delta x} &= f(x), \text{ ou seja,} \\ G'(x) &= f(x). \end{aligned} \quad \square$$

Teorema 1.2 (Teorema Fundamental do Cálculo, Parte 2). *Se f é contínua em $[a, b]$ e se F é qualquer primitiva de f em $[a, b]$, então*

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$$

Demonstração. Como f é contínua em $[a, b]$, pelo Teorema (1.1), segue que

$$G(x) = \int_a^x f(t) dt$$

é uma primitiva de f nesse intervalo.

Seja $F(x)$ uma primitiva qualquer de f no intervalo $[a, b]$. Pelo Lema 1.3 existe uma constante c tal que

$$F(x) = G(x) + c, \quad \forall x \in [a, b]. \quad (1.10)$$

Temos que $G(a) = \int_a^a f(t) dt = 0$ e $G(b) = \int_a^b f(t) dt$, daí, usando cada uma destas equações em 1.10, obtemos

$$\begin{aligned} F(a) &= G(a) + c = \int_a^a f(t) dt + c \\ &\text{e} \\ F(b) &= G(b) + c = \int_a^b f(t) dt + c. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Subtraindo, membro a membro, as equações (1.11), temos

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= (G(b) + c) - (G(a) + c) \\ &= \left(\int_a^b f(t) dt + c \right) - (0 + c) \\ &= \int_a^b f(t) dt + c - c \\ &= \int_a^b f(t) dt. \end{aligned}$$

Assim, concluímos que

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a). \quad \square$$

1.2 Função Vetorial e Parametrização de Curvas

Nesta seção daremos a definição de função vetorial e introduziremos uma forma de descrever uma curva no plano expressando ambas as coordenadas como funções de uma terceira variável t .

Definição 1.1. Uma *função vetorial* $\mathbf{r} : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma função cujo domínio é um conjunto de números reais e cuja imagem é um conjunto de vetores. Isso significa que, para todo número t no domínio de \mathbf{r} existe um único vetor de \mathbb{R}^2 denotado por $\mathbf{r}(t)$. Se $f(t)$ e $g(t)$ são as componentes do vetor $\mathbf{r}(t)$, então f e g são funções a valores reais chamadas **funções componentes** de \mathbf{r} e podemos escrever

$$\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t) \rangle = f(t) \mathbf{i} + g(t) \mathbf{j}.$$

Definição 1.2. Dizemos que a função vetorial $\mathbf{r}(t)$ é **diferenciável** em I se $\mathbf{r}'(t)$ existir, $\forall t \in I$.

Definição 1.3. Dizemos que a função vetorial $\mathbf{r}(t)$ é de **classe C^1** em I se $\mathbf{r}(t)$ é diferenciável em I e $\mathbf{r}'(t)$ é contínua em I .

1.2.1 Parametrização de Curvas Planas

1.2.1.1 Equações paramétricas

A Figura 3 mostra a trajetória de uma partícula em movimento no plano xy . Observe que a trajetória falha no teste da reta vertical, de forma que ela não pode ser descrita como o gráfico de uma função da variável x . No entanto, podemos às vezes descrever a trajetória por meio de um par de equações, $x = f(t)$ e $y = g(t)$, em que f e g são funções contínuas. Equações como essas descrevem curvas mais gerais do que aquelas como $y = f(x)$ e fornecem não somente o gráfico da trajetória delineada, mas também a localização da partícula $(x, y) = (f(t), g(t))$ em qualquer tempo t .

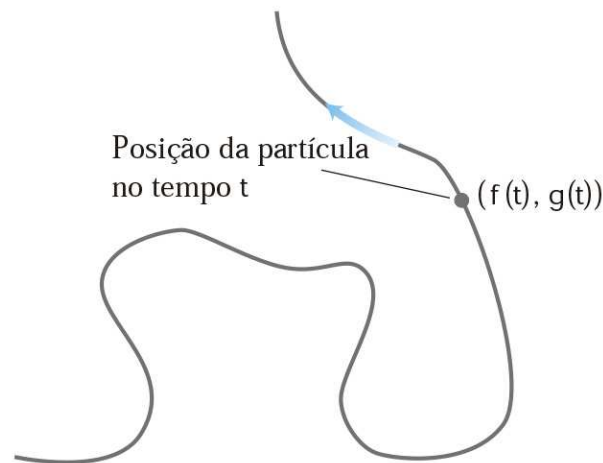


Figura 3 – Trajetória de uma partícula em movimento

Fonte: Imagem extraída do livro de cálculo (HASS; THOMAS; WEIR, 2012)

Definição 1.4. Se x e y são dados como funções

$$x = f(t), \quad y = g(t) \quad (1.12)$$

sobre um intervalo $I = (a \leq t \leq b)$, então o conjunto de pontos $(x, y) = (f(t), g(t))$ definido por essas equações forma uma **curva paramétrica**.

A variável t é chamada de **parâmetro**², daí o nome **curva paramétrica**. Se I é um intervalo fechado, $a \leq t \leq b$, o ponto $(f(a), g(a))$ é o **ponto inicial** da curva e $(f(b), g(b))$ é o **ponto terminal**. Quando fornecemos equações paramétricas e um intervalo para uma curva, dizemos que a **parametrizamos**. Uma determinada curva pode ser representada por diferentes equações paramétricas.

Observação 1.1. O parâmetro t não representa, necessariamente, o tempo. Assim, poderíamos usar outra letra em vez de t para o parâmetro. Porém, em muitas aplicações das curvas parametrizadas que envolvem movimentos, t denota realmente o tempo e, portanto, é bastante frequente o uso dessa letra como variável.

As curvas planas e as funções vetoriais contínuas estão intimamente relacionadas. Dadas as equações paramétricas de uma curva podemos representá-la na forma vetorial. O vetor

$$\mathbf{r}(t) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} \quad (1.13)$$

a partir da origem até a **posição** da partícula $P(f(t), g(t))$ no instante t é o **vetor posição** da partícula. As funções f e g são as **funções componentes** (ou **componentes**) do vetor posição. Pensamos na trajetória da partícula como sendo a curva traçada pela ponta do vetor $\mathbf{r}(t)$ em movimento quando t varia de a para b (Ver Figura 4).

² Variável em função da qual se expressam as coordenadas de uma curva.

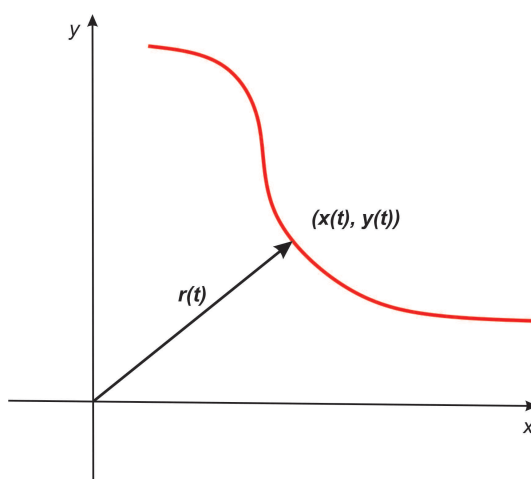


Figura 4 – Traço da curva formada pela ponta de um vetor

Exemplo 1.1. Que curva é representada pelas seguintes equações paramétricas?

$$x = \cos t \quad e \quad y = \sin t, \quad (0 \leq t \leq 2\pi). \quad (1.14)$$

Resolução

Marcando os pontos, parece que a curva é uma circunferência. Podemos confirmar esta impressão pela eliminação de t . Se elevarmos ao quadrado as Equações (1.14), temos

$$x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1.$$

Então, o ponto (x, y) se move na circunferência unitária $x^2 + y^2 = 1$. Observe que, neste exemplo, o parâmetro t pode ser interpretado como o ângulo (em radianos) mostrado na Figura 5. Quando t aumenta de 0 até 2π , o ponto $(x, y) = (\cos t, \sin t)$ se move uma vez, no sentido anti-horário, partindo do ponto $(1, 0)$ traçando a circunferência.

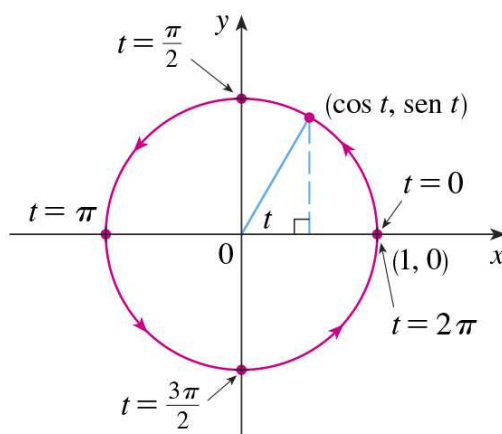


Figura 5 – Gráfico de um círculo

Fonte: Imagem extraída do livro de cálculo (STEWART, 2013)

Definição 1.5. Uma **curva plana** é uma curva que está contida em um plano no espaço. Uma curva que não é plana chama-se **curva reversa**.

Nos exemplos que seguem, **a)** e **c)** são exemplos de curvas planas, enquanto que **b)** representa uma curva reversa. Para nossos propósitos neste trabalho nos referiremos sempre às curvas planas.

Exemplo 1.2.

a) A equação vetorial $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j}$ representa uma reta (ver Figura 6), cujas equações paramétricas são

$$f(t) = t$$

e

$$g(t) = t.$$

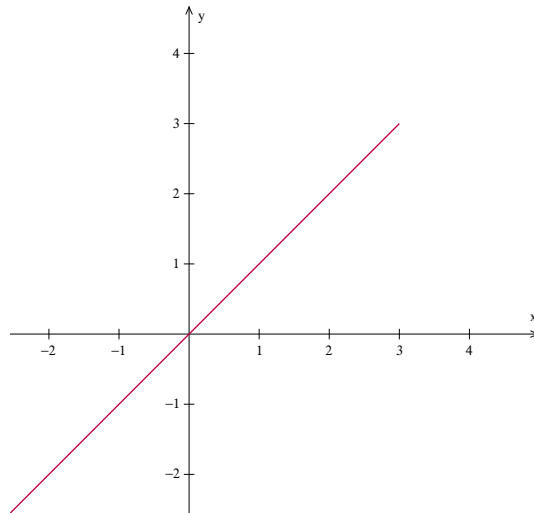


Figura 6 – Reta no plano

b) As equações paramétricas

$$f(t) = 2 \cos(t)$$

$$g(t) = 2 \sin(t)$$

$$h(t) = 3t$$

representam uma curva no espaço, chamada **hélice circular** (ver Figura 7), cuja equação vetorial é

$$\mathbf{r}(t) = 2 \cos(t) \mathbf{i} + 2 \sin(t) \mathbf{j} + 3t \mathbf{k}.$$

c) A equação vetorial $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$ representa uma parábola no plano (ver Figura 8).

Definição 1.6. Dizemos que $\mathbf{r}(t)$ é uma **curva paramétrica suave** (ou **curva suave**) de t em um intervalo I se $\mathbf{r}'(t)$ for contínua e $\mathbf{r}'(t) \neq 0$ para todo t em I .

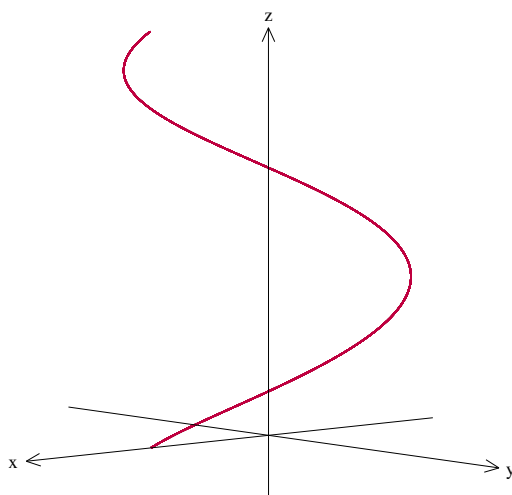


Figura 7 – Hélice circular

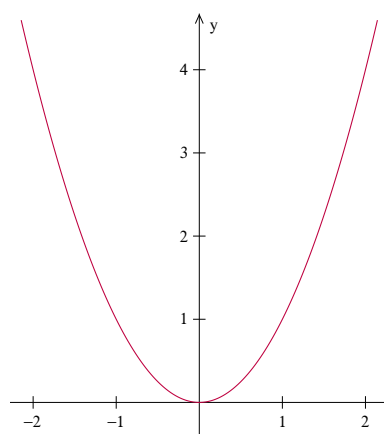


Figura 8 – Parábola no plano

Observação 1.2. Algebricamente, isso implica que os componentes de $\mathbf{r}(t)$ têm derivadas contínuas que não são todas nulas para o mesmo valor de t . Geometricamente, implica que o vetor tangente $\mathbf{r}'(t)$ varia continuamente ao longo da curva. Uma curva suave não tem quebras abruptas (ângremes) ou cúspides (pontas agudas). Observe a Figura 9.

Exemplo 1.3. A curva definida pela equação vetorial

$$\mathbf{r}(t) = 2 \cos t \mathbf{i} + 2 \sin t \mathbf{j} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

é uma circunferência com centro na origem e raio 2 (ver Figura 10).

Para esta curva, temos

$$\begin{cases} f(t) = 2 \cos t & f'(t) = -2 \sin t \\ g(t) = 2 \sin t & g'(t) = 2 \cos t \end{cases}$$

Como f' e g' são contínuas para todo t e $f'(t)$ e $g'(t)$ não são ambas nulas em qualquer ponto, a circunferência é uma curva suave.

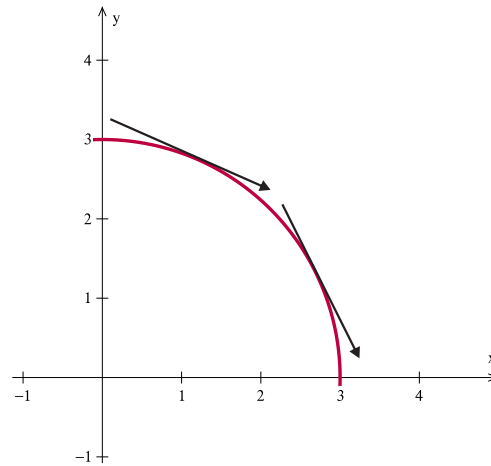


Figura 9 – Vetor girando continuamente

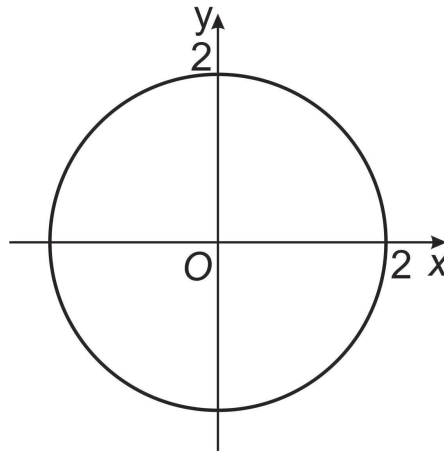


Figura 10 – A circunferência é uma curva suave

Exemplo 1.4. Verifique se a parábola semicúbica de equação $\mathbf{r}(t) = (1 + t^3) \mathbf{i} + t^2 \mathbf{j}$ é suave.

Resolução

Temos que

$$\mathbf{r}'(t) = 3t^2 \mathbf{i} + 2t \mathbf{j},$$

fazendo $t = 0$, obtemos: $\mathbf{r}'(0) = 3 \cdot 0^2 \mathbf{i} + 2 \cdot 0 \mathbf{j} = \mathbf{0}$. De acordo com a Definição 1.6, para que uma curva seja suave é necessário que $\mathbf{r}'(t)$ seja contínua e $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$ ($\forall t \in \mathbb{R}$). Neste caso, embora que os componentes de $\mathbf{r}'(t)$ sejam funções contínuas, $\mathbf{r}'(0) = \mathbf{0}$, o que implica que a curva descrita por essa função não é suave. O ponto que corresponde a $t = 0$ é $(1, 0)$, e podemos ver graficamente na Figura 11 que existe uma ponta aguda, chamada *cúspide*, nesse ponto. Qualquer curva que apresente uma mudança abrupta de direção não é suave.

Definição 1.7. Uma curva C que é composta de um número finito de curvas suaves C_1, C_2, \dots, C_n ligadas continuamente é chamada **curva suave por partes** (ver Figura 12).

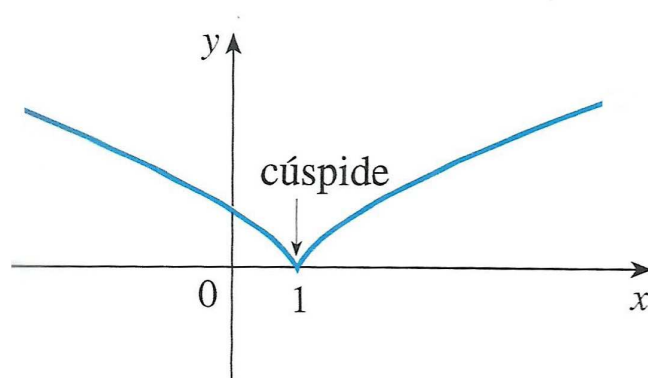


Figura 11 – Curva não suave com uma cúspide
 Fonte: Imagem extraída do livro de cálculo (STEWART, 2013)

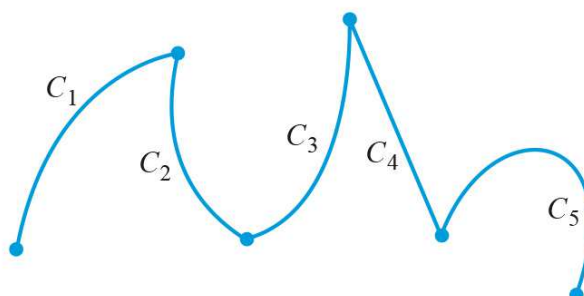


Figura 12 – Curva suave por partes
 Fonte: Imagem extraída do livro de cálculo (HASS; THOMAS; WEIR, 2012)

Definição 1.8. Dizemos que uma curva $C : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ é de classe C^1 se C tem derivada contínua em $[a, b]$.

Definição 1.9. Seja $C : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva. Dizemos que C é de classe C^1 por partes se C for contínua e se existir uma partição de $[a, b]$, $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$, e curvas de classe C^1 ,

$$C_i : [(t_{i-1}), t_i] \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n)$$

tais que

$$C(t) = C_i(t) \text{ em }]t_{i-1}, t_i[.$$

Definição 1.10.

- i) Dizemos que uma curva paramétrica é **simples** se ela não cruza a si mesma, isto é, $r(t_1) \neq r(t_2)$, $\forall t_1, t_2 \in (a, b)$ com $t_1 \neq t_2$ (ver Figura 13).
- ii) Uma curva paramétrica é **fechada** se o seu ponto inicial coincide com o terminal, ou seja, $r(a) = r(b)$, $\forall t \in [a, b]$ (ver Figura 13).

Observação 1.3. Uma curva paramétrica pode ser **fechada simples**, neste caso $r(a) = r(b)$, mas $r(t_1) \neq r(t_2)$ quando $a < t_1 < t_2 < b$ (ver Figura 13).

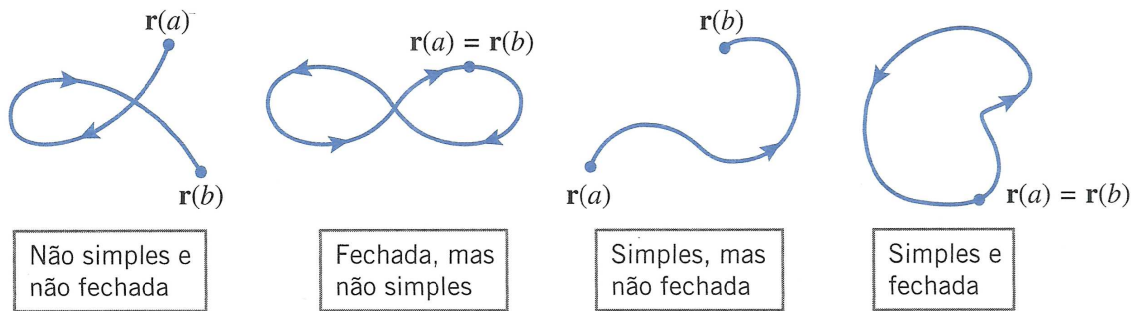


Figura 13 – Exemplos de curvas simples e não simples; fechadas e não fechadas
 Fonte: Imagem extraída do livro de cálculo (ANTON; BIVENS; DAVIS, 2007)

Exemplo 1.5. A circunferência e a elipse são exemplos de curvas fechadas simples e suaves.

Definição 1.11. Seja Ω um conjunto de pontos do \mathbb{R}^2 :

- i) Chamamos Ω de domínio ou região;
- ii) O domínio Ω será dito aberto se todo ponto em Ω é o centro de um disco aberto que está inteiramente contido em Ω .

Definição 1.12.

- i) Uma região $R \subset \mathbb{R}^2$ é **conexa por caminhos** se dois pontos A e B quaisquer em R podem ser ligados por um caminho (uma linha poligonal) que se encontra em R (ver Figura 14).
- ii) Seja a região $R \subset \mathbb{R}^2$, conexa por caminhos. Dizemos que R é **simplesmente conexa** se, toda curva fechada simples em R envolve apenas pontos que pertencem a R (ver Figura 15a).

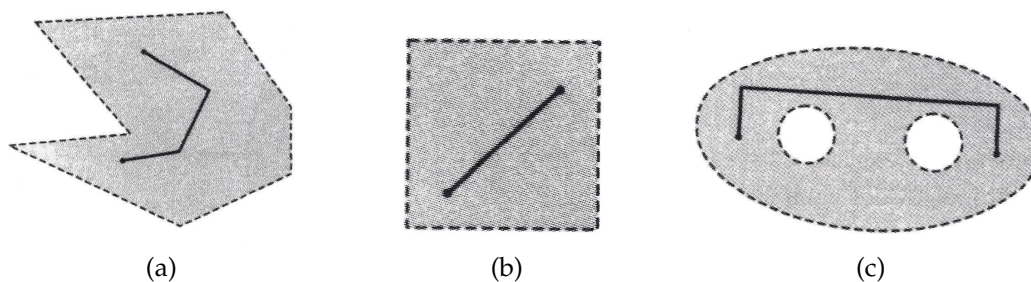


Figura 14 – Exemplos de regiões conexas por caminho

Fonte: Imagem extraída do livro de Cálculo (FLEMMING; GONÇALVES, 2007)

Observação 1.4. Conexidade não é a mesma coisa que conexidade simples, e uma propriedade não implica a outra. Pense em regiões conexas como se fossem “um único pedaço” e simplesmente conexas como aquelas que não apresentam “furos”. Uma região conexa com um ou mais furos denomina-se região **multiplamente conexa** (ver Figuras 15 e 16).

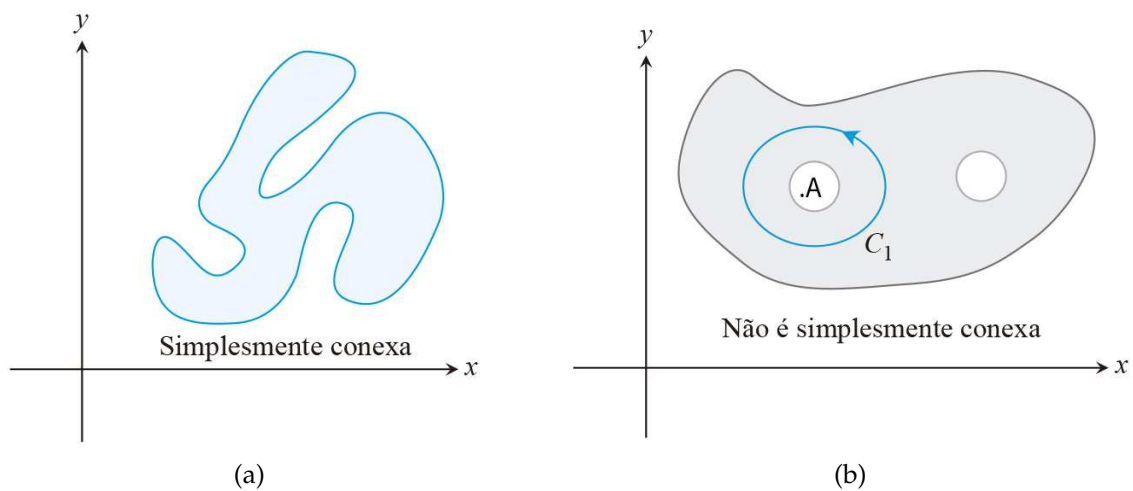


Figura 15 – Exemplo e contraexemplo de região simplesmente conexa
 Fonte: Imagem extraída do livro de cálculo (HASS; THOMAS; WEIR, 2012)

Na figura 15a, a região é simplesmente conexa. Em 15b, a curva fechada simples C_1 não pode ser contraída ao ponto A sem que tenha que sair da região R , o que impossibilita tal região de ser simplesmente conexa.

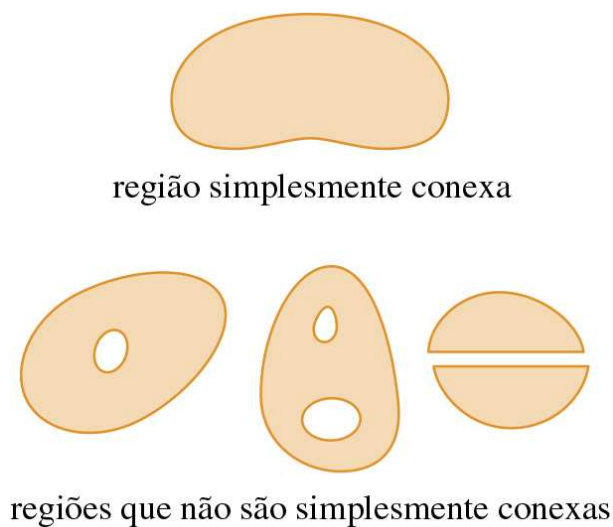


Figura 16 – Exemplo e contraexemplo de região simplesmente conexa
 Fonte: Imagem extraída do livro de cálculo (ANTON; BIVENS; DAVIS, 2007)

1.3 Integrais Duplas

O problema de calcular áreas de regiões planas em diversos formatos nos trouxe à definição de integral definida, integral de funções de uma variável. De modo análogo, as integrais das funções de duas variáveis originam-se do problema da determinação de volumes sob superfícies. Comprovaremos isto no que segue.

1.3.1 Volume e Integral Dupla

De modo quase idêntico ao que fizemos para a integral definida, vamos considerar uma função f de duas variáveis definida num retângulo fechado:

$$R = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

e vamos supor, inicialmente, que $f(x, y) \geq 0$. O gráfico de f é a superfície com equação $z = f(x, y)$. Seja S o sólido que está acima da região R e abaixo do gráfico de f (ver Figura 17), isto é,

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq f(x, y), (x, y) \in R\}.$$

Nosso intuito é encontrar o volume de S .

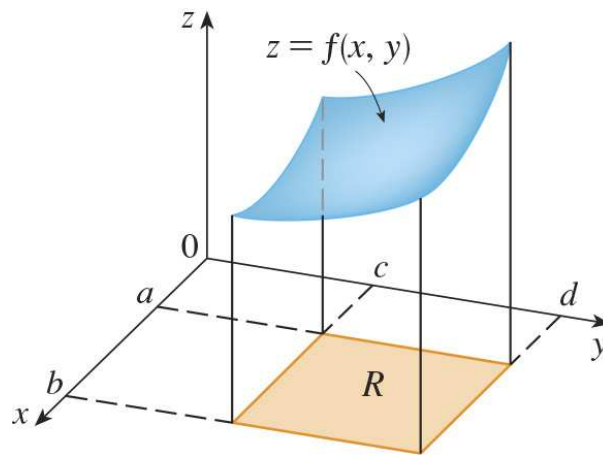


Figura 17

Fonte: Imagem extraída do livro de cálculo (STEWART, 2013)

O primeiro passo consiste em dividir o retângulo R em sub-retângulos. Faremos isso dividindo o intervalo $[a, b]$ em m subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ de mesmo comprimento $\Delta x = (b - a)/m$ e dividindo o intervalo $[c, d]$ em n subintervalos $[y_{j-1}, y_j]$ de mesmo comprimento $\Delta y = (d - c)/n$. Traçando retas paralelas aos eixos coordenados, passando pelas extremidades dos subintervalos, como na Figura 18, formamos os sub-retângulos

$$R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] = \{(x, y) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{j-1} \leq y \leq y_j\},$$

cada um dos quais com área $\Delta A = \Delta x \Delta y$.

Se escolhermos um ponto arbitrário, que chamaremos **ponto de amostragem**, (x_{ij}^*, y_{ij}^*) , em cada R_{ij} , poderemos aproximar a parte de S que está acima de cada R_{ij} por uma caixa retangular fina com base R_{ij} e altura $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)$, como mostrado na Figura 19a. (compare com a Figura 1). O volume dessa caixa é dado pela sua altura vezes a área do retângulo da base:

$$f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A.$$

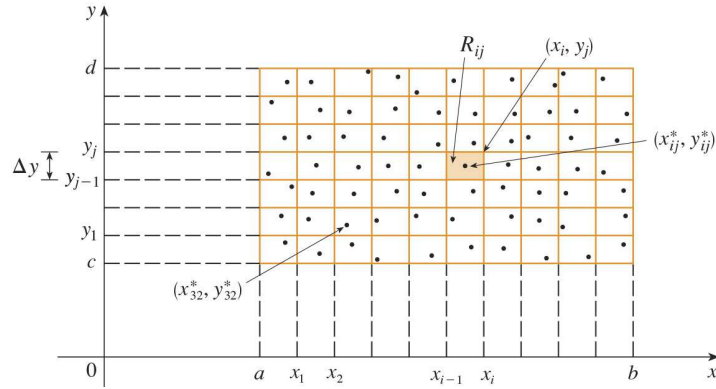


Figura 18 – Sub-retângulos aproximadores
 Fonte: Imagem extraída do livro de cálculo (STEWART, 2013)

Se seguirmos com esse procedimento para todos os retângulos e somarmos os volumes das caixas correspondentes, obteremos uma aproximação do volume total de S (ver Figura 19b):

$$V \approx \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A. \tag{1.15}$$

Essa soma dupla significa que, para cada sub-retângulo, calculamos o valor de f no ponto escolhido, multiplicamos esse valor pela área do sub-retângulo e então adicionamos os resultados.

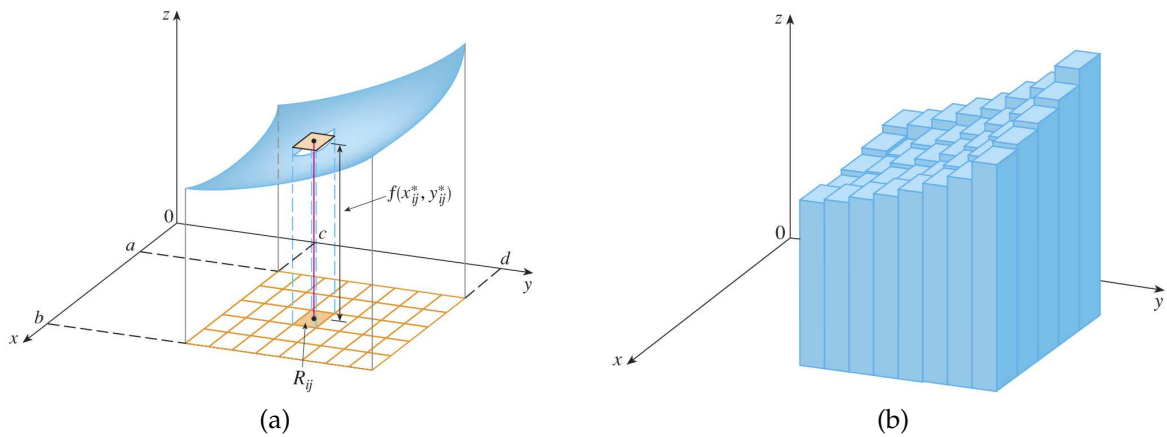


Figura 19
 Fonte: Imagem extraída do livro de cálculo (STEWART, 2013)

Nossa intuição diz que a aproximação dada em (1.15) melhora quando aumentamos os valores de m e n e, portanto, devemos esperar que

$$V = \lim_{m,n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A. \tag{1.16}$$

Usamos a expressão da Equação (1.16) para definir o **volume** do sólido S que corresponde à região que está abaixo do gráfico de f e acima do retângulo R .

Limites do tipo que aparecem na Equação (1.16) ocorrem muito frequentemente, não somente quando estamos determinando volumes, mas também em diversas outras situações mesmo f não sendo uma função positiva. Assim, faremos a seguinte definição:

Definição 1.13. A *integral dupla de f sobre o retângulo R* é

$$\iint_R f(x, y) dA = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A, \text{ se esse limite existir.} \quad (1.17)$$

O significado preciso do limite em (1.17) é que para todo $\varepsilon > 0$ existe um inteiro N tal que

$$\left| \iint_R f(x, y) dA - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A \right| < \varepsilon \quad (1.18)$$

para todos os inteiros m e n maiores que N e para qualquer escolha de (x_{ij}^*, y_{ij}^*) em R_{ij} .

Uma função f é dita **integrável** se o limite em (1.17) existir. Na realidade, a integral dupla de f existe contanto que f “não seja descontínua demais”. Em particular, se f for limitada³, e se f for contínua ali, exceto em um número finito de curvas suaves, então f é integrável em R . O ponto de amostragem (x_{ij}^*, y_{ij}^*) pode ser tomado como qualquer ponto no sub-retângulo R_{ij} , porém, se o escolhermos como o canto superior direito de R_{ij} [ou seja, (x_i, y_j) , veja a Figura 18], a expressão da soma dupla ficará mais simples:

$$\iint_R f(x, y) dA = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_i, y_j) \Delta A.$$

Comparando a Equação (1.16) e a Equação (1.17), vemos que o volume V do sólido, se $f(x, y) \geq 0$, situado acima do retângulo R e abaixo da superfície $z = f(x, y)$ pode ser escrito como a integral dupla

$$V = \iint_R f(x, y) dA.$$

A soma em (1.17),

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A$$

é chamada **soma dupla de Riemann** e é usada como uma aproximação do valor da integral dupla [observe a semelhança dessa soma com a de Riemann em (1.1) para funções de uma única variável]. Se f for uma função *positiva*, então a soma dupla de Riemann representa a soma dos volumes das colunas, como na Figura 19b, e é uma aproximação do volume abaixo do gráfico de f .

³ Existe uma constante M tal que $|f(x, y)| \leq M$ para todo (x, y) em R .

1.3.2 Propriedades das Integrais Duplas

Igual as integrais de uma variável, as integrais duplas de funções contínuas têm propriedades algébricas que são úteis em cálculos e aplicações.

Se $f(x, y)$ e $g(x, y)$ são contínuas na região limitada R , então as propriedades a seguir se aplicam:

1. *Múltiplo constante:*
$$\iint_R cf(x, y) dA = c \iint_R f(x, y) dA \quad (c \text{ é uma constante}).$$

2. *Soma e diferença:*

$$\iint_R (f(x, y) \pm g(x, y)) dA = \iint_R f(x, y) dA \pm \iint_R g(x, y) dA.$$

3. *Dominação:*

(a)
$$\iint_R f(x, y) dA \geq 0 \quad \text{se } f(x, y) \geq 0 \text{ em } R;$$

(b)
$$\iint_R f(x, y) dA \geq \iint_R g(x, y) dA \quad \text{se } f(x, y) \geq g(x, y) \text{ em } R.$$

4. *Aditividade:*
$$\iint_R f(x, y) dA = \iint_{R_1} f(x, y) dA + \iint_{R_2} f(x, y) dA$$
 se R for a união de duas regiões não sobrepostas R_1 e R_2 .

A Propriedade 4 supõe que a região de integração R possa ser decomposta em regiões não sobrepostas R_1 e R_2 com fronteiras consistindo em um número finito de segmentos de reta ou curvas suaves (ver Figura 20).

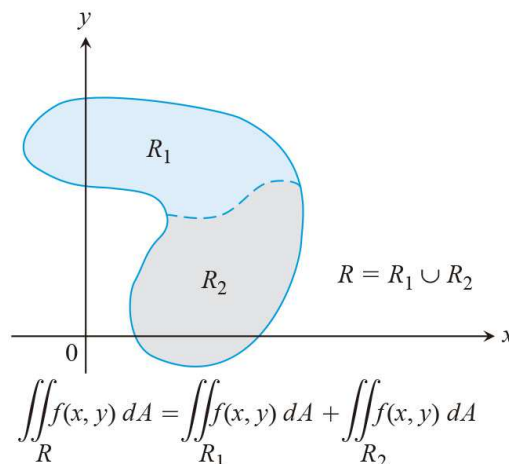


Figura 20 – União de regiões

Fonte: Imagem extraída do livro de cálculo (HASS; THOMAS; WEIR, 2012)

1.3.3 Integrais Iteradas e os Teoremas de Fubini

1.3.3.1 Cálculo das integrais duplas sobre retângulos

De modo geral é difícil calcular as integrais de funções de uma variável real usando sua definição, mas que o Teorema Fundamental do Cálculo fornece um método mais fácil para calculá-las. O cálculo de integrais duplas pela definição se torna ainda mais complicado, entretanto, veremos uma maneira simples de resolvê-las, fazendo uma iteração e calculando-as como duas integrais simples. Suponha que f seja uma função de duas variáveis que é integrável no retângulo $R = [a, b] \times [c, d]$. Usaremos a notação $\int_c^d f(x, y) dy$ significando que x é mantido fixo e $f(x, y)$ é integrada em relação a y de $y = c$ até $y = d$. Esse procedimento é chamado **integração parcial em relação a y** (semelhante a derivada parcial). Como $\int_c^d f(x, y) dy$ é um número que depende do valor de x , ele define uma função de x :

$$A(x) = \int_c^d f(x, y) dy.$$

Se agora integrarmos a função A com relação à variável x de $x = a$ até $x = b$, obteremos

$$\int_a^b A(x) dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx. \quad (1.19)$$

A integral do 2º membro da Equação (1.19) é chamada **integral iterada** (ou **repetida**). Em geral, os colchetes são omitidos. Assim,

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx \quad (1.20)$$

significa que primeiro integramos com relação a y de c a d e depois em relação a x de a até b .

Da mesma forma, a integral iterada

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy \quad (1.21)$$

significa que primeiro integramos com relação a x (fixando y) de $x = a$ até $x = b$ e em seguida integramos a função de y resultante com relação a y de $y = c$ a $y = d$. Atenemos para o fato de que resolvemos primeiro a integral interna e logo em seguida a externa.

Exemplo 1.6. Calcule o valor das seguintes integrais iteradas

a) $\int_0^3 \int_1^2 x^2 y dy dx$

b) $\int_1^2 \int_0^3 x^2 y dx dy$

Resolução

a) Olhando x como uma constante, obtemos

$$\int_1^2 x^2 y \, dy = \left[x^2 \frac{y^2}{2} \right]_{y=1}^{y=2} = x^2 \left(\frac{2^2}{2} \right) - x^2 \left(\frac{1^2}{2} \right) = \frac{3}{2} x^2.$$

Portanto, a função A da discussão precedente é dada por $A(x) = \frac{3}{2}x^2$ neste exemplo. Integramos agora essa função de x de 0 até 3:

$$\begin{aligned} \int_0^3 \int_1^2 x^2 y \, dy \, dx &= \int_0^3 \left[\int_1^2 x^2 y \, dy \right] dx \\ &= \int_0^3 \frac{3}{2} x^2 \, dx \\ &= \left. \frac{x^3}{2} \right|_0^3 = \frac{27}{2}. \end{aligned}$$

b) Aqui integraremos primeiro em relação a x :

$$\begin{aligned} \int_1^2 \int_0^3 x^2 y \, dx \, dy &= \int_1^2 \left[\int_0^3 x^2 y \, dx \right] dy \\ &= \int_1^2 \left[\frac{x^3}{3} y \right]_{x=0}^{x=3} dy \\ &= \int_1^2 9y \, dy = 9 \left. \frac{y^2}{2} \right|_1^2 = \frac{27}{2}. \end{aligned}$$

Observe que no Exemplo 1.6 obtemos a mesma resposta integrando com relação a y ou a x . De fato, mesmo alterando a ordem das integrais iteradas das Equações (1.20) e (1.21) tivemos resultados iguais, isso mostra que a ordem da integração não é importante. Isso pode ser comprovado pelo Teorema 1.3 que fornece um método prático para calcular uma integral dupla expressando-a como uma integral iterada.

Teorema 1.3 (Teorema de Fubini⁴ - primeira forma). *Se $f(x, y)$ for contínua na região retangular $R = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$, então*

$$\iint_R f(x, y) \, dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y) \, dy \, dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) \, dx \, dy.$$

Antes de demonstrarmos o Teorema 1.3, veremos uma visualização envolvendo-o para o caso em que $f(x, y) \geq 0$. Já vimos que se f é positiva, podemos interpretar a integral dupla $\iint_R f(x, y) \, dA$ como o volume V do sólido S que está acima de R e abaixo

⁴ Guido Fubini (1879 -1943), matemático italiano que demonstrou uma versão geral desse teorema em 1907.

da superfície $z = f(x, y)$. Além disso, temos outra fórmula para o cálculo de volume, já vista em Cálculo 1, que é

$$V = \int_a^b A(x) dx$$

onde $A(x)$ é a área da secção transversal de S em um plano x perpendicular ao eixo x . Você pode ver a partir da Figura 21 que $A(x)$ é a área abaixo da curva C cuja equação é $z = f(x, y)$, onde x é mantido constante e $c \leq y \leq d$.

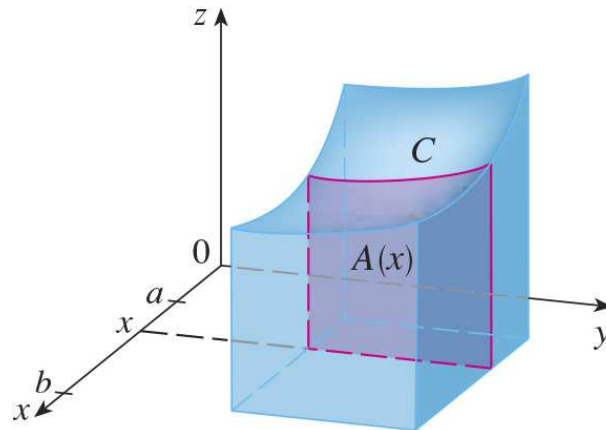


Figura 21

Fonte: Imagem extraída do livro de cálculo (STEWART, 2013)

Portanto,

$$A(x) = \int_c^d f(x, y) dy$$

e temos

$$\iint_R f(x, y) dA = V = \int_a^b A(x) dx = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx.$$

De modo semelhante, agora usando a secção transversal perpendicular ao eixo y como na Figura 22, se tem

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy.$$

Demonstração. Sejam

$$P_1 : a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_n = b$$

uma partição de $[a, b]$ e

$$P_2 : c = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_{j-1} < y_j < \cdots < y_m = d$$

uma partição de $[c, d]$. Sejam

$$M_{ij} = \sup \{f(x, y) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i \text{ e } y_{j-1} \leq y \leq y_j\}$$

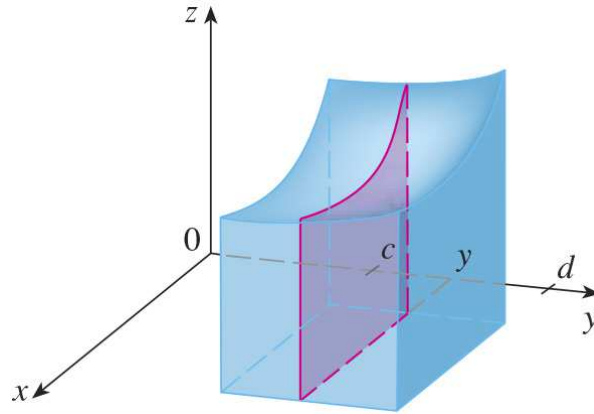


Figura 22
Imagem extraída do livro de cálculo (STEWART, 2013)

e

$$m_{ij} = \inf \{f(x, y) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i \text{ e } y_{j-1} \leq y \leq y_j\}.$$

Para todo (x, y) no retângulo A_{ij} , dado por $x_{i-1} \leq x \leq x_i$ e $y_{j-1} \leq y \leq y_j$,

$$m_{ij} \leq f(x, y) \leq M_{ij}.$$

Daí, para todo $y \in [y_{j-1}, y_j]$,

$$m_{ij} \Delta x_i \leq \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x, y) dx \leq M_{ij} \Delta x_i.$$

Segue que

$$\sum_{i=1}^n m_{ij} \Delta x_i \leq \int_a^b f(x, y) dx \leq \sum_{i=1}^n M_{ij} \Delta x_i$$

ou seja,

$$\sum_{i=1}^n m_{ij} \Delta x_i \leq \alpha(y) \leq \sum_{i=1}^n M_{ij} \Delta x_i$$

para todo $y \in [y_{j-1}, y_j]$, onde $\alpha(y) = \int_a^b f(x, y) dx$. Tomando-se \bar{y}_j em $[y_{j-1}, y_j]$, $j = 1, 2, \dots, m$, segue que

$$\left(\sum_{i=1}^n m_{ij} \Delta x_i \right) \Delta y_j \leq \alpha(\bar{y}_j) \Delta y_j \leq \left(\sum_{i=1}^n M_{ij} \Delta x_i \right) \Delta y_j.$$

Daí,

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m m_{ij} \Delta x_i \Delta y_j \leq \sum_{j=1}^m \alpha(\bar{y}_j) \Delta y_j \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m M_{ij} \Delta x_i \Delta y_j.$$

Para $\Delta \rightarrow 0$, as somas superior e inferior tendem para $\iint_R f(x, y) dx dy$; logo, $\alpha(y)$ é

integrável em $[c, d]$ e

$$\int_c^d \alpha(y) dy = \iint_R f(x, y) dx dy$$

ou seja,

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy. \quad \square$$

1.3.4 Integrais Duplas sobre Regiões Gerais

Nas integrais duplas podemos integrar a função f não somente sobre retângulos, como também sobre uma região R de forma mais geral, como a mostrada na Figura 23a. Vamos supor que R seja uma região limitada, o que significa que R pode estar contida em uma região retangular Ω como na Figura 23b. Definimos, então, uma nova função F , com domínio Ω , por

$$F(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{se } (x, y) \text{ está em } R \\ 0 & \text{se } (x, y) \text{ está em } \Omega \text{ mas não em } R. \end{cases} \quad (1.22)$$

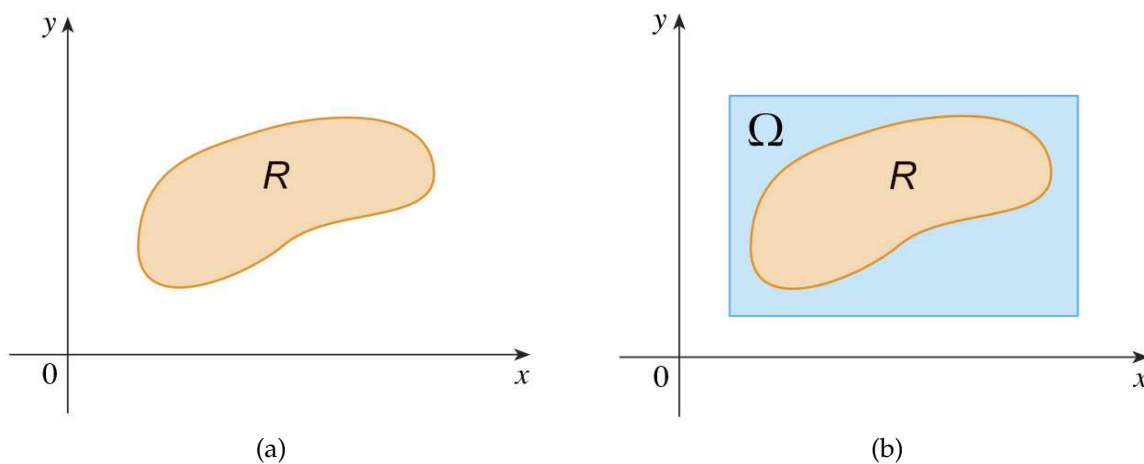


Figura 23

Fonte: Imagem extraída do livro de cálculo (STEWART, 2013)

Definição 1.14. Se F for integrável em Ω , então definimos a *integral dupla de f em R* por

$$\iint_R f(x, y) dA = \iint_{\Omega} F(x, y) dA, \quad \text{onde } F \text{ é dada pela Equação (1.22)}. \quad (1.23)$$

A Definição 1.14 faz sentido porque Ω é um retângulo e, portanto, $\iint_{\Omega} F(x, y) dA$ já foi definida anteriormente. O procedimento usado é razoável, pois os valores de $F(x, y)$ são 0 quando (x, y) está fora de R e dessa forma não contribuem para o valor da integral. Isso significa que não importa qual o retângulo Ω tomado, desde que contenha R . No caso em que $f(x, y) \geq 0$, podemos ainda interpretar $\iint_R f(x, y) dA$ como o volume do sólido que está acima de R e abaixo da superfície $z = f(x, y)$ (o gráfico de f). Você pode

verificar que isso é razoável comparando os gráficos de f e F nas Figuras 24a e 24b e lembrando que $\iint_{\Omega} F(x, y) dA$ é o volume abaixo do gráfico de F .

A Figura 24b mostra também que F provavelmente tem descontinuidades nos pontos de limite de R . Apesar disso, se f for contínua em R e se a curva limite de R for “comportada”, então pode ser mostrado que $\iint_{\Omega} F(x, y) dA$ existe e, portanto, $\iint_R f(x, y) dA$ existe. Em particular, esse é o caso para os dois tipos de regiões descritos a seguir.

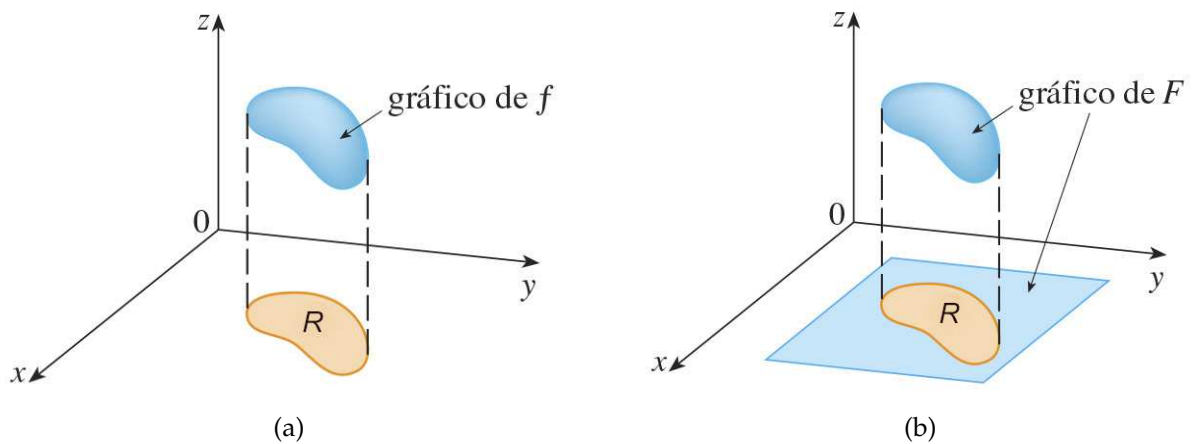


Figura 24

Fonte: Imagem extraída do livro de cálculo (STEWART, 2013)

1.3.4.1 Cálculo das integrais duplas sobre regiões gerais

Definição 1.15. Uma região $R \subseteq \mathbb{R}^2$ é dita uma região simples se toda reta paralela a um dos eixos coordenados corta a fronteira de R em um segmento ou, no máximo, em dois pontos.

Quando temos uma região de integração de um dos seguintes tipos:

$$\text{Tipo I: } \begin{cases} f_1(x) \leq y \leq f_2(x) \\ a \leq x \leq b \end{cases}, \text{ com } f_1(x) \text{ e } f_2(x) \text{ contínuas em } [a, b]$$

e

$$\text{Tipo II: } \begin{cases} g_1(y) \leq x \leq g_2(y) \\ c \leq y \leq d \end{cases}, \text{ com } g_1(y) \text{ e } g_2(y) \text{ contínuas em } [c, d],$$

podemos calcular as integrais duplas de uma forma bastante simples, por meio de duas integrações sucessivas.

1º Caso: a região R é do Tipo I

Uma região R é dita do Tipo I se é limitada inferiormente e superiormente pelas curvas contínuas $y = f_1(x)$ e $y = f_2(x)$, respectivamente, e limitada à esquerda e à direita pelas retas verticais $x = a$ e $x = b$, respectivamente (ver Figura 25).

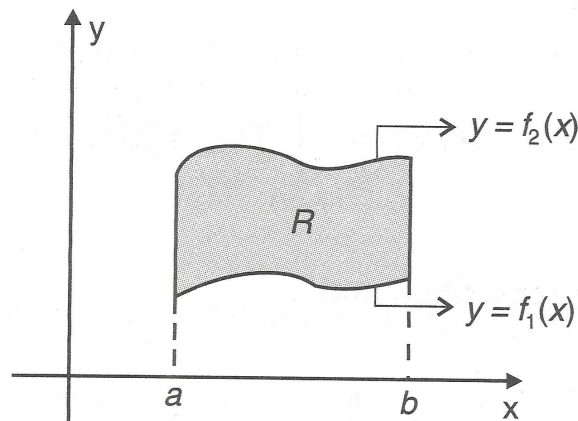


Figura 25 – Região R do Tipo I

Fonte: Imagem extraída do livro de cálculo (FLEMMING; GONÇALVES, 2007)

Nesse caso, a integral dupla

$$\iint_R f(x, y) dx dy$$

é calculada mediante a seguinte integral, como já vimos, denominada **integral iterada**:

$$\int_a^b \left[\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x, y) dy \right] dx. \quad (1.24)$$

Vamos justificar a expressão (1.24) considerando a interpretação geométrica da integral dupla. Supondo que a função $f(x, y) \geq 0$ é contínua sobre R , para cada valor fixo de x a integral interna

$$\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x, y) dy$$

é uma integral definida, com relação a y , da função $f(x, y)$. Essa integral pode ser interpretada como a área de uma seção transversal, perpendicular ao eixo dos x , do sólido cujo volume está sendo calculado (ver Figura 26).

Indicando por $A(x)$ essa área, temos

$$A(x) = \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x, y) dy.$$

Assim, a integral iterada (1.24) pode ser reescrita como

$$\int_a^b A(x) dx. \quad (1.25)$$

Finalmente, se escrevermos a integral (1.25) como o limite de uma soma de Riemann, isto é,

$$\int_a^b A(x) dx = \lim_{\max \Delta x_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n A(x_k) \Delta x_k,$$

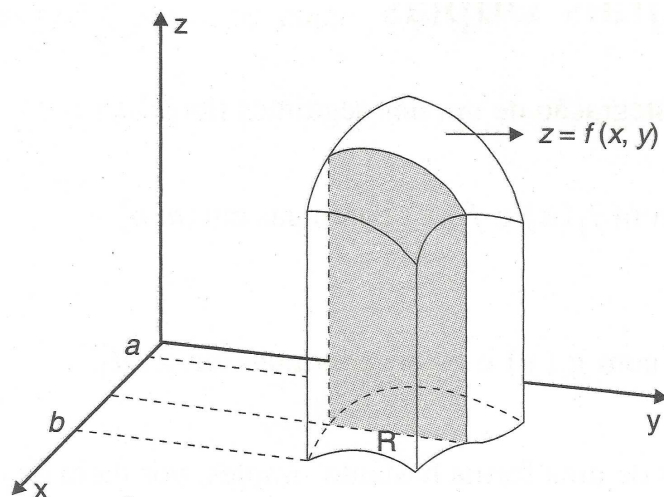


Figura 26 – Seção transversal de um sólido

Fonte: Imagem extraída do livro de cálculo (FLEMMING; GONÇALVES, 2007)

então, geometricamente, podemos ver que a integral (1.24) ou (1.25) representa o volume que está sendo calculado por

$$\iint_R f(x, y) \, dx \, dy.$$

2º Caso: a região R é do Tipo II

Uma região R é dita do *Tipo II* se é limitada à esquerda e à direita pelas curvas contínuas $x = g_1(y)$ e $x = g_2(y)$, respectivamente, e limitada inferiormente e superiormente pelas retas horizontais $y = c$ e $y = d$, respectivamente (ver Figura 27).

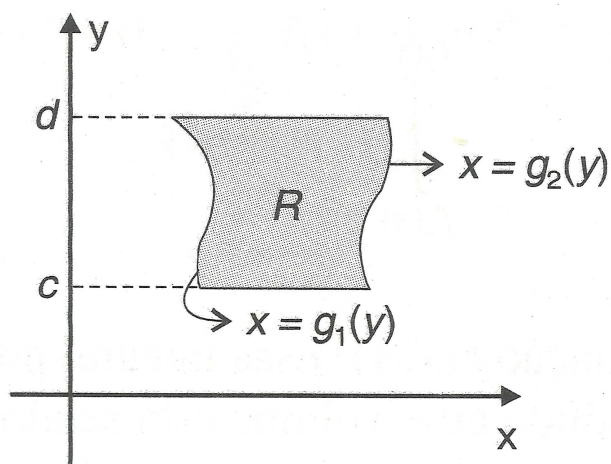


Figura 27 – Região R do Tipo II

Fonte: Imagem extraída do livro de cálculo (FLEMMING; GONÇALVES, 2007)

Neste caso, de modo análogo ao 1º caso, temos

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_c^d \left[\int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x, y) dx \right] dy. \quad (1.26)$$

Observação 1.5. Se tivermos $f(x, y) = 1$, então $\iint_R 1 dA = \text{Área de } R$.

Os dois exemplos que seguem ilustram o cálculo das integrais duplas através de integrais iteradas.

Exemplo 1.7. Vamos usar a integral dupla para calcular a área da região R compreendida pela parábola $y = \frac{1}{2}x^2$ e a reta $y = 2x$ de dois modos diferentes.

Resolução

A região R pode ser considerada igualmente como do *Tipo I* (ver Figura 28a) ou do *Tipo II* (ver Figura 28b). Considerando R como do *Tipo I*, obtemos

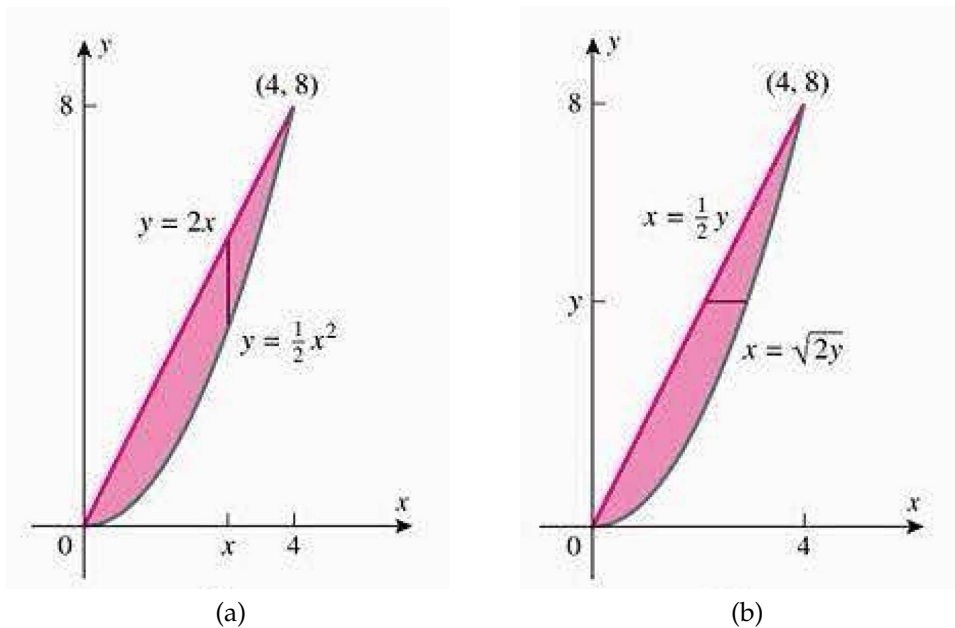


Figura 28

Fonte: Imagem extraída do livro de cálculo (ANTON; BIVENS; DAVIS, 2007)

$$\begin{aligned} \text{Área de } R &= \iint_R dA = \int_0^4 \int_{x^2/2}^{2x} dy dx = \int_0^4 [y]_{y=x^2/2}^{y=2x} dx \\ &= \int_0^4 \left(2x - \frac{1}{2}x^2 \right) dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{6} \right]_0^4 = \frac{16}{3}. \end{aligned}$$

Considerando R como do *Tipo II*, obtemos

$$\begin{aligned} \text{Área de } R &= \iint_R dA = \int_0^8 \int_{y/2}^{\sqrt{2y}} dx dy = \int_0^8 [x]_{x=y/2}^{x=\sqrt{2y}} dy \\ &= \int_0^8 \left(\sqrt{2y} - \frac{1}{2}y \right) dy = \left[\frac{2\sqrt{2}}{3} y^{3/2} - \frac{y^2}{4} \right]_0^8 = \frac{16}{3}. \end{aligned}$$

Exemplo 1.8. Como não há antiderivada elementar de e^{x^2} , a integral

$$\int_0^2 \int_{y/2}^1 e^{x^2} dx dy$$

não pode ser calculada integrando primeiro em relação a x . Calcule essa integral expressando-a como uma integral iterada equivalente com ordem de integração invertida.

Resolução

Na integração interna, y é fixado e x varia entre as retas $x = y/2$ e $x = 1$ (Figura 29). Na integração externa, y varia de 0 a 2, de modo que a integral iterada dada é igual à integral dupla na região triangular R da Figura 29.

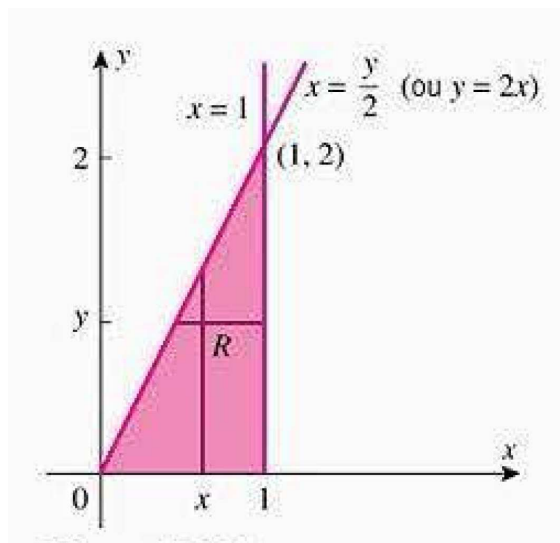


Figura 29

Fonte: Imagem extraída do livro de cálculo (ANTON; BIVENS; DAVIS, 2007)

Para inverter a ordem de integração, consideramos R como uma região do *Tipo I*, o que nos permite escrever a integral dada como

$$\begin{aligned} \int_0^2 \int_{y/2}^1 e^{x^2} dx dy &= \iint_R e^{x^2} dA = \int_0^1 \int_0^{2x} e^{x^2} dy dx = \int_0^1 [e^{x^2} y]_{y=0}^{y=2x} dx \\ &= \int_0^1 2xe^{x^2} dx = e^{x^2} \Big|_0^1 = e - 1. \end{aligned}$$

Definição 1.16. Dizemos que uma região fechada e limitada R do plano xy é simples se R pode ser descrita como uma região de Tipo I e de Tipo II, simultaneamente.

Quando a região R não é exatamente do Tipo I ou II, em alguns casos podemos particioná-la convenientemente em sub-regiões não sobrepostas (onde podem existir no máximo pontos de fronteira em comum), cada uma do Tipo I ou do Tipo II e calcular a integral dupla usando a propriedade 4 (Aditividade). Assim, a integral dupla de uma função sobre uma região grande pode então ser calculada pela integração da função sobre cada sub-região adicionando-se os valores resultantes.

Teorema 1.4 (Teorema de Fubini - forma generalizada). Seja $f(x, y)$ contínua em uma região R :

I. Se R for definida por $a \leq x \leq b$, $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$, com g_1 e g_2 contínuas em $[a, b]$, então

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx; \quad (1.27)$$

II. Se R for definida por $c \leq y \leq d$, $h_1(y) \leq x \leq h_2(y)$, com h_1 e h_2 contínuas em $[c, d]$, então

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx dy. \quad (1.28)$$

Demonstração. Demonstraremos apenas (1.27), pois a prova de (1.28) é análoga. Seja $\Omega = [a, b] \times [c, d]$ um retângulo que contém R . Por definição,

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \iint_{\Omega} F(x, y) dx dy,$$

onde F coincide com f em R e é nula em $\Omega - R$.

Para cada x fixo em $[a, b]$, a função $F(x, y)$ é limitada em $[c, d]$ e contínua, exceto, possivelmente, em dois pontos. Portanto, $\int_c^d F(x, y) dy$ existe e

$$\int_c^d F(x, y) dy = \int_c^{g_1(x)} F(x, y) dy + \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} F(x, y) dy + \int_{g_2(x)}^d F(x, y) dy.$$

Como $F(x, y) = 0$ para $c < y < g_1(x)$ e $g_2(x) < y < d$, então

$$\int_c^d F(x, y) dy = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} F(x, y) dy = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy.$$

Do Teorema 1.3, temos

$$\iint_{\Omega} F(x, y) dx dy = \int_a^b \int_c^d F(x, y) dy dx = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx. \quad \square$$

1.3.5 Integrais Duplas em Coordenadas Polares

Suponha que queiramos calcular a integral dupla $\iint_R f(x, y) dA$, onde R é uma das regiões mostradas na Figura 30. Em qualquer dos casos, a descrição de R é complicada em coordenadas retangulares, mas a descrição de R fica mais fácil utilizando-se coordenadas polares.

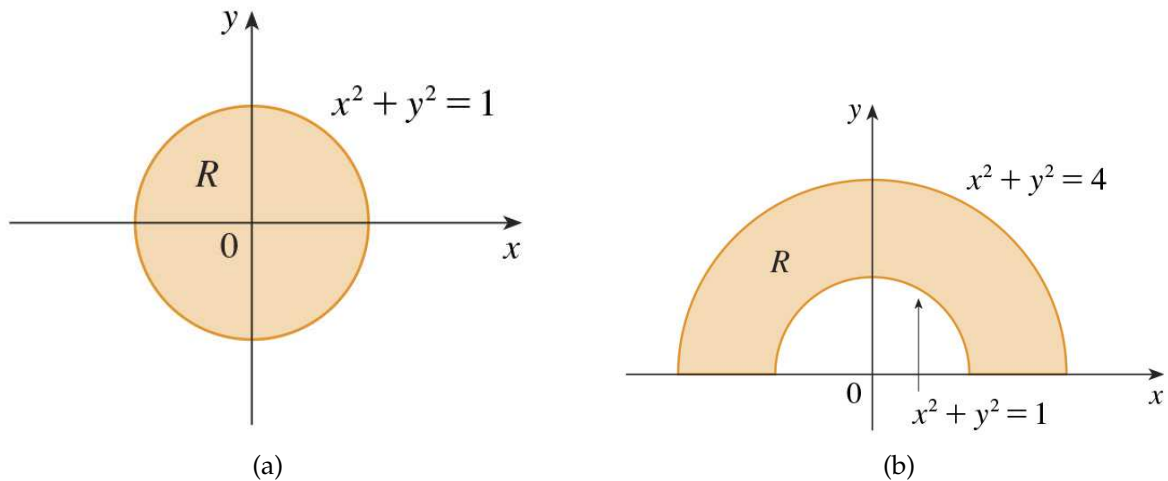


Figura 30

Fonte: Imagem extraída do livro de cálculo (STEWART, 2013)

Lembre-se, a partir da Figura 31, de que as coordenadas polares (r, θ) de um ponto estão relacionadas com as coordenadas retangulares (x, y) pelas equações

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad x = r \cos \theta \quad \text{e} \quad y = r \sin \theta.$$

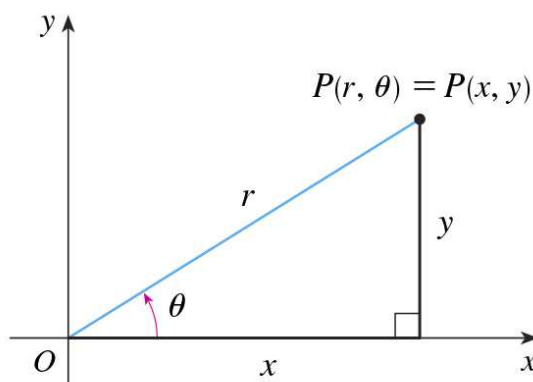


Figura 31 – Relação entre as coordenadas polares e cartesianas

Fonte: Imagem extraída do livro de cálculo (STEWART, 2013)

As regiões da Figura 30 são casos especiais de um **retângulo polar**

$$R = \{(r, \theta) \mid a \leq r \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta\}$$

que é apresentado na Figura 32.

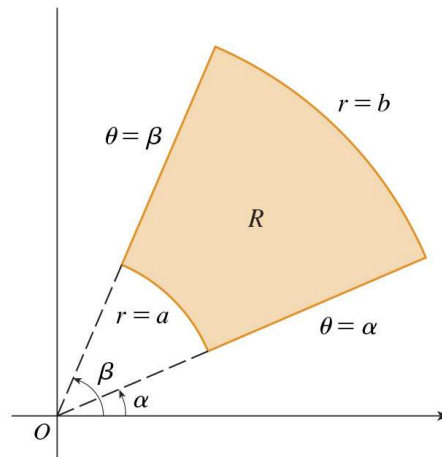


Figura 32

Fonte: Imagem extraída do livro de cálculo (STEWART, 2013)

Definição 1.17 (Mudança para Coordenadas Polares em uma Integral Dupla). Se f é contínua no retângulo polar R dado por $0 \leq a \leq r \leq b$, $\alpha \leq \theta \leq \beta$, onde $0 \leq \beta - \alpha \leq 2\pi$, então

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_{\alpha}^{\beta} \int_a^b f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta. \quad (1.29)$$

A Fórmula (1.29) diz que convertemos coordenadas retangulares para coordenadas polares em uma integral dupla escrevendo $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$, usando os intervalos de integração adequados para r e θ e substituindo dA por $r dr d\theta$. Um método clássico para não esquecer o fator adicional r no lado direito da Fórmula (1.29) está na Figura 33, onde podemos pensar nos retângulos polares “infinitesimais” como retângulos convencionais com dimensões $r d\theta$ e dr e, portanto, com “área” $dA = r dr d\theta$.

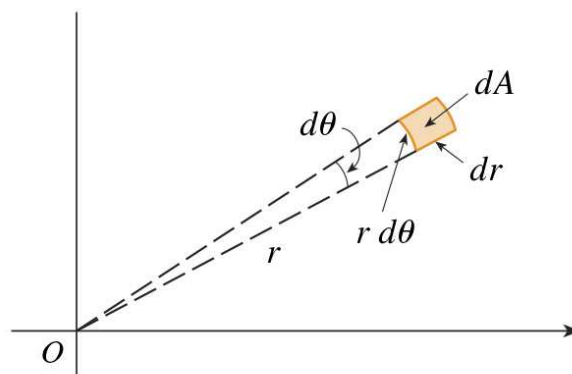


Figura 33

Fonte: Imagem extraída do livro de cálculo (STEWART, 2013)

Exemplo 1.9. Calcule $\iint_R (3x + 4y^2) dA$, onde R é a região no semiplano superior limitada pelas circunferências $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$.

Resolução

A região R pode ser descrita como

$$R = \{(x, y) \mid y \geq 0, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$$

que é a metade do anel mostrado na Figura 30b, e em coordenadas polares é dado por $1 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq \pi$. Portanto, pela Fórmula (1.29),

$$\begin{aligned} \iint_R (3x + 4y^2) dA &= \int_0^\pi \int_1^2 (3r \cos \theta + 4r^2 \sin^2 \theta) r dr d\theta \\ &= \int_0^\pi \int_1^2 (3r^2 \cos \theta + 4r^3 \sin^2 \theta) dr d\theta \\ &= \int_0^\pi [r^3 \cos \theta + r^4 \sin^2 \theta]_{r=1}^{r=2} d\theta = \int_0^\pi (7 \cos \theta + 15 \sin^2 \theta) d\theta \\ &= \int_0^\pi \left[7 \cos \theta + \frac{15}{2}(1 - \cos 2\theta) \right] d\theta \\ &= 7 \sin \theta + \frac{15\theta}{2} - \frac{15}{4} \sin 2\theta \Big|_0^\pi = \frac{15\pi}{2}. \end{aligned}$$

Exemplo 1.10. Calcule

$$\iint_R e^{x^2+y^2} dy dx,$$

onde R é a região semicircular limitada pelo eixo x e a curva $y = \sqrt{1-x^2}$ (ver Figura 34).

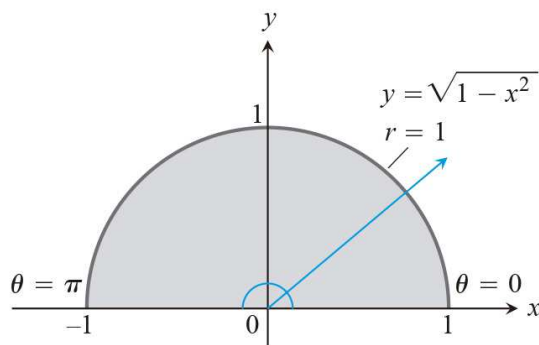


Figura 34 – Região semicircular limitada pelo eixo x e a curva $y = \sqrt{1-x^2}$
 Fonte: Imagem extraída do livro de cálculo (HASS; THOMAS; WEIR, 2012)

Resolução

Em coordenadas cartesianas, a integral em questão é uma integral não elementar e não existe maneira direta de integrar $e^{x^2+y^2}$ com relação a x ou y , mas resolvemos ela facilmente utilizando coordenadas polares. Substituindo $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ e

trocando $dy dx$ por $r dr d\theta$ podemos calcular a integral como

$$\begin{aligned} \iint_R e^{x^2+y^2} dy dx &= \int_0^\pi \int_0^1 e^{r^2} r dr d\theta = \int_0^\pi \left[\frac{1}{2} e^{r^2} \right]_0^1 d\theta \\ &= \int_0^\pi \frac{1}{2} (e - 1) d\theta = \frac{\pi}{2} (e - 1). \end{aligned}$$

O r em $r dr d\theta$ era justamente o que precisávamos para integrar e^{r^2} . Sem isso, não poderíamos encontrar uma antiderivada para a integral interna.

Exemplo 1.11. *Avalie a integral*

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^2 + y^2) dy dx.$$

Resolução

A integração com relação a y nos dá

$$\int_0^1 \left(x^2 \sqrt{1-x^2} + \frac{(1-x^2)^{3/2}}{3} \right) dx,$$

uma integral difícil de calcular sem tabelas.

As coisas ficam mais fáceis se trocarmos a integral original por coordenadas polares. A região de integração em coordenadas cartesianas é dada pelas desigualdades $0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$ e $0 \leq x \leq 1$, o que corresponde ao interior do quarto de circunferência unitário $x^2 + y^2 = 1$ no primeiro quadrante (ver Figura 34, primeiro quadrante). Substituindo as coordenadas polares $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$ e $0 \leq r \leq 1$ e trocando $dy dx$ por $r dr d\theta$ na integral dupla, temos

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^2 + y^2) dy dx &= \int_0^{\pi/2} \int_0^1 (r^2) r dr d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \left[\frac{r^4}{4} \right]_{r=0}^{r=1} d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{4} d\theta = \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

Por que a transformação em coordenadas polares é tão eficaz aqui? Um dos motivos é que $x^2 + y^2$ é simplificada para r^2 . Outro motivo é que os limites de integração se tornam constantes.

1.4 Campos Vetoriais

Consideremos um fluido, tal como a água que escoar em um cano ou o sangue que flui por uma artéria. O fluido é composto de um grande número de partículas, e

em qualquer instante, uma partícula tem velocidade \mathbf{v} . Podemos imaginar um vetor velocidade sendo ligado a cada ponto do fluido representando a velocidade de uma partícula naquele ponto. O escoamento de um fluido é um exemplo de **campo vetorial**.

Definição 1.18. *Seja Ω um conjunto em \mathbb{R}^2 (uma região plana). Um campo vetorial em \mathbb{R}^2 é uma função F que associa a cada ponto (x, y) em Ω um vetor bidimensional $F(x, y)$.*

Observação 1.6. *Se, em vez de um vetor, um escalar estiver associado a cada ponto no plano, teremos um **campo escalar**; então, um campo escalar é uma função com valores reais.*

Exemplo 1.12.

- a) A Figura 35 mostra um campo vetorial de velocidade obtido a partir do escoamento de ar em volta de um aerofólio em um túnel de vento.

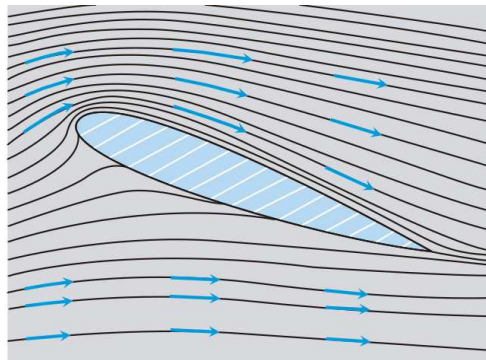


Figura 35 – Exemplo de um campo vetorial de velocidade
Fonte: Imagem extraída do livro de cálculo (HASS; THOMAS; WEIR, 2012)

- b) A Figura 36 mostra um campo vetorial de vetores velocidade ao longo do curso da água em movimento através de um canal que vai se estreitando.

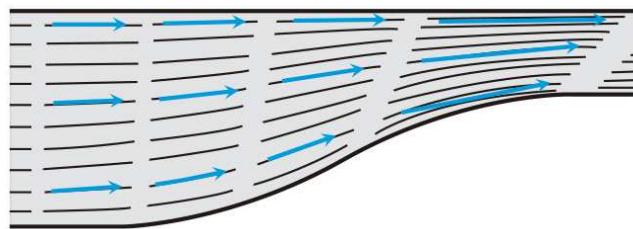


Figura 36
Fonte: Imagem extraída do livro de cálculo (HASS; THOMAS; WEIR, 2012)

Observação 1.7. *Se a velocidade de uma partícula depende somente de sua posição, ou seja, a velocidade independe do tempo, o fluxo do fluido é dito **estacionário**.*

Os campos vetoriais estão ainda associados a forças; como a atração gravitacional (ver Figura 37), a campos magnéticos, campos elétricos, etc.

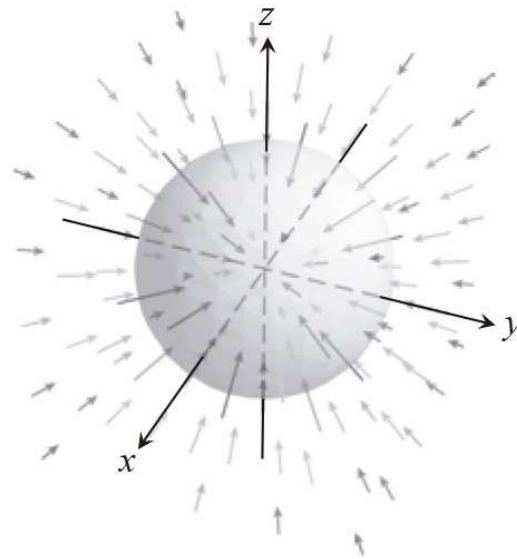


Figura 37 – Exemplo de campo vetorial de força

Fonte: Imagem extraída do livro de cálculo (HASS; THOMAS; WEIR, 2012)

1.4.1 Representação Gráfica de um Campo Vetorial

Para representar graficamente um campo vetorial, tomamos alguns pontos $(x, y) \in R$ e em cada ponto desenhamos uma seta com origem em (x, y) representando o vetor $\mathbf{F}(x, y)$ (ver Figura 38). É evidente que é impossível representar todos os pontos (x, y) do campo vetorial, entretanto podemos esboçar graficamente um campo vetorial desenhando alguns vetores significativos em R .

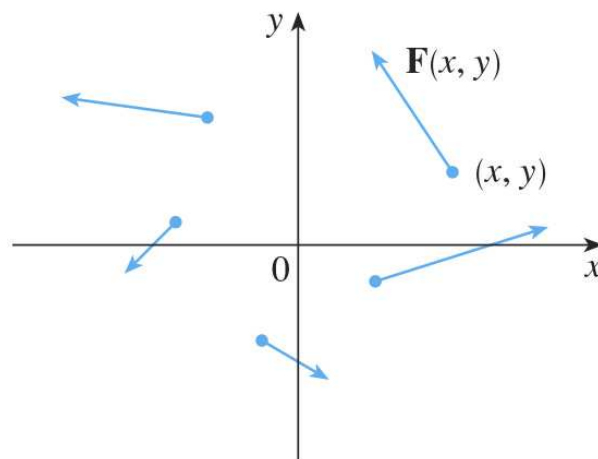


Figura 38 – Representação gráfica do vetor $\mathbf{F}(x, y)$

Fonte: Imagem extraída do livro de cálculo (STEWART, 2013)

Sendo $\mathbf{F}(x, y)$ um vetor bidimensional, podemos escrevê-lo em termos de suas **funções componentes** P e Q da seguinte forma:

$$\mathbf{F}(x, y) = P(x, y) \mathbf{i} + Q(x, y) \mathbf{j} = \langle P(x, y), Q(x, y) \rangle$$

ou, de forma compacta, $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$.

O campo é contínuo se as funções componentes P e Q forem contínuas; diferenciável se cada uma das funções componentes for diferenciável.

Observação 1.8. P e Q são funções escalares de duas variáveis e são chamadas, às vezes, campos escalares, para diferenciá-los dos campos vetoriais.

Exemplo 1.13.

a) Mostre numa figura as representações, tendo ponto inicial em (x, y) , dos vetores do campo vetorial

$$F(x, y) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$$

onde x é ± 1 ou ± 2 e y é ± 1 ou ± 2 ;

b) Prove que cada representação é tangente a uma circunferência com centro na origem e tem comprimento igual ao raio da circunferência.

Resolução

a) A Tabela 1 indica os vetores $\mathbf{F}(x, y)$ associados com os pontos (x, y) . As representações destes vetores aparecem na Figura 39.

Tabela 1

(x, y)	$\mathbf{F}(x, y)$
(1, 1)	$-\mathbf{i} + \mathbf{j}$
(1, -1)	$\mathbf{i} + \mathbf{j}$
(-1, 1)	$-\mathbf{i} - \mathbf{j}$
(-1, -1)	$\mathbf{i} - \mathbf{j}$
(1, 2)	$-2\mathbf{i} + \mathbf{j}$
(1, -2)	$2\mathbf{i} + \mathbf{j}$
(-1, 2)	$-2\mathbf{i} - \mathbf{j}$
(-1, -2)	$2\mathbf{i} - \mathbf{j}$
(2, 1)	$-\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$
(2, -1)	$\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$
(-2, 1)	$-\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$
(-2, -1)	$\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$
(2, 2)	$-2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$
(2, -2)	$2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$
(-2, 2)	$-2\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$
(-2, -2)	$2\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$

Fonte: Livro de cálculo (LEITHOLD, 1994)

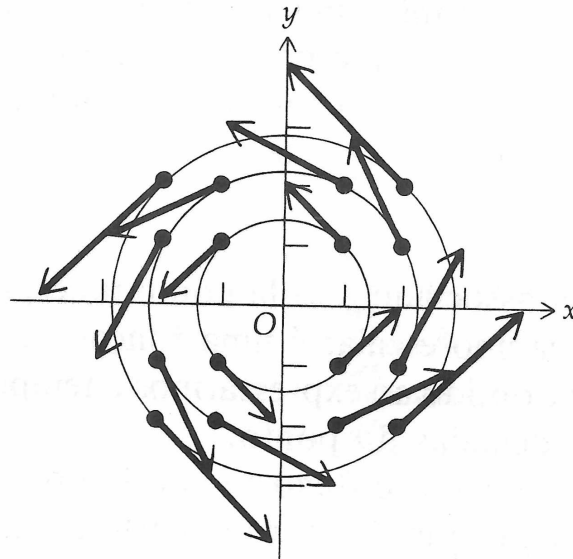


Figura 39 – Vetores tangentes

Fonte: Imagem extraída do livro de cálculo (LEITHOLD, 1994)

b) Seja

$$\mathbf{R}(x, y) = x \mathbf{i} + y \mathbf{j}$$

o vetor de posição cujo ponto final está em (x, y) . Então,

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(x, y) \cdot \mathbf{F}(x, y) &= (x \mathbf{i} + y \mathbf{j}) \cdot (-y \mathbf{i} + x \mathbf{j}) \\ &= -xy + xy \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, \mathbf{R} e \mathbf{F} são ortogonais. Assim, a representação de \mathbf{F} cujo ponto inicial está em (x, y) é tangente à circunferência com centro na origem e raio $\|\mathbf{R}(x, y)\|$. Como

$$\begin{aligned} \|\mathbf{F}(x, y)\| &= \sqrt{(-y)^2 + x^2} \\ &= \|\mathbf{R}(x, y)\| \end{aligned}$$

o comprimento de cada representação é igual ao raio da circunferência.

O campo vetorial do Exemplo 1.13 é semelhante ao campo de velocidade determinado por uma roda girando em torno da origem.

1.4.2 Rotacional e Divergente

Definiremos duas operações sobre campos vetoriais que são essenciais nas aplicações de cálculo vetorial em mecânica dos fluidos e em eletricidade e magnetismo - a *divergência* e o *rotacional*. Esses nomes originaram-se no estudo do fluxo fluido. Divergência refere-se à maneira como o fluido flui para ou afasta-se de um ponto e

rotacional refere-se às propriedades de rotação do fluido num ponto. Cada operação lembra uma derivação, mas uma produz um campo vetorial enquanto a outra gera um campo escalar.

Rotacional

Definição 1.19. Se $F = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ é um campo vetorial em \mathbb{R}^3 e as derivadas parciais de P , Q e R existem, então o **rotacional de F** é o campo vetorial em \mathbb{R}^3 definido por

$$\text{rot } F = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k}. \quad (1.30)$$

Para ajudar a recordar a Equação (1.30), vamos reescrevê-la usando notação de operadores. Introduzamos o operador diferencial vetorial ∇ (“del”) como

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}.$$

Quando ele opera sobre uma função escalar, produz o gradiente de f :

$$\nabla f = \mathbf{i} \frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial f}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k}.$$

Se pensarmos em ∇ como um vetor de componentes $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$ e $\partial/\partial z$, podemos também considerar o produto vetorial formal de ∇ pelo campo vetorial F como segue

$$\begin{aligned} \nabla \times F &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k} \\ &= \text{rot } F. \end{aligned}$$

Assim, o modo mais fácil de lembrar a Equação (1.30) é pela expressão simbólica

$$\text{rot } F = \nabla \times F. \quad (1.31)$$

Se $F(x, y, z) = xz\mathbf{i} + xyz\mathbf{j} - y^2\mathbf{k}$, determine $\text{rot } F$.

Resolução

Usando a Equação (1.31), temos

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz & xyz & -y^2 \end{vmatrix} \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial y}(-y^2) - \frac{\partial}{\partial z}(xyz) \right] \mathbf{i} - \left[\frac{\partial}{\partial x}(-y^2) - \frac{\partial}{\partial z}(xz) \right] \mathbf{j} \\ &\quad + \left[\frac{\partial}{\partial x}(xyz) - \frac{\partial}{\partial y}(xz) \right] \mathbf{k} \\ &= (-2y - xy) \mathbf{i} - (0 - x) \mathbf{j} + (yz - 0) \mathbf{k} \\ &= -y(2 + x) \mathbf{i} + x \mathbf{j} + yz \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Observação 1.9. Observe que o $\operatorname{rot} \mathbf{F}$ é um campo vetorial.

Divergente

Definição 1.20. Se $\mathbf{F} = P \mathbf{i} + Q \mathbf{j} + R \mathbf{k}$ é um campo vetorial em \mathbb{R}^3 e $\partial P/\partial x$, $\partial Q/\partial y$ e $\partial R/\partial z$ existem, então o **divergente de \mathbf{F}** é a função de três variáveis definida por

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}. \quad (1.32)$$

Com relação ao operador gradiente $\nabla = (\partial/\partial x) \mathbf{i} + (\partial/\partial y) \mathbf{j} + (\partial/\partial z) \mathbf{k}$, o divergente de \mathbf{F} pode ser escrito simbolicamente como o produto escalar de ∇ e \mathbf{F} :

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F}. \quad (1.33)$$

Observação 1.10. O $\operatorname{div} \mathbf{F}$ é um campo escalar.

Se $\mathbf{F}(x, y, z) = xz \mathbf{i} + xyz \mathbf{j} - y^2 \mathbf{k}$, determine $\operatorname{div} \mathbf{F}$.

Resolução

Pela definição de divergente (ver Equações (1.32) e (1.33)), temos

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(xz) + \frac{\partial}{\partial y}(xyz) + \frac{\partial}{\partial z}(-y^2) = z + xz.$$

Outro operador diferencial aparece quando calculamos o divergente do gradiente de um campo vetorial ∇f . Se f é uma função de três variáveis, temos

$$\operatorname{div}(\nabla f) = \nabla \cdot (\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

e essa expressão aparece tão frequentemente que vamos abreviá-la como $\nabla^2 f$. Esse operador

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$$

é chamado **operador de Laplace**⁵ por sua relação com a **equação de Laplace**

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0.$$

Podemos também aplicar o laplaciano ∇^2 a um campo vetorial

$$\mathbf{F} = P \mathbf{i} + Q \mathbf{j} + R \mathbf{k}$$

em termos de suas componentes:

$$\nabla^2 \mathbf{F} = \nabla^2 P \mathbf{i} + \nabla^2 Q \mathbf{j} + \nabla^2 R \mathbf{k}.$$

Observação 1.11. É comum usarmos a notação $\Delta = \nabla^2$.

1.5 Integrais de Linha no Plano

Nesta seção estudaremos um pouco sobre as integrais de linha⁶ no plano.

Definição 1.21. Seja C uma curva no plano xy com as equações paramétricas

$$C : \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}, \quad a \leq t \leq b,$$

onde f e g têm primeira derivada contínua. Suponha que P e Q são funções contínuas de duas variáveis, cujos domínios contêm a curva C . Então a integral de linha $\int_C [P(x, y) dx + Q(x, y) dy]$ é definida por

$$\int_C [P(x, y) dx + Q(x, y) dy] = \int_a^b [P(f(t), g(t))f'(t) dt + Q(f(t), g(t))g'(t) dt]. \quad (1.34)$$

Logo, para calcular a integral de linha $\int_C [P(x, y) dx + Q(x, y) dy]$, nós simplesmente fazemos as substituições $x = f(t)$, $dx = f'(t) dt$, $y = g(t)$, $dy = g'(t) dt$ e então integramos de $t = a$ até $t = b$.

Exemplo 1.14. Calcule a integral de linha $\int_C [(x^2 + 3y) dx + (y^2 + 2x) dy]$ se

$$C : \begin{cases} x = t \\ y = t^2 + 1, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1.$$

⁵ Pierre Simon de Laplace (1749-1827), matemático e físico francês.

⁶ Também conhecidas como integrais curvilíneas. Elas tiveram origem no começo do século XIX para resolver problemas que envolviam escoamento de fluidos, forças, eletricidade e magnetismo.

Resolução

Fazendo as substituições $x = t$, $dx = dt$, $y = t^2 + 1$ e $dy = 2t dt$, temos

$$\begin{aligned} \int_C [(x^2 + 3y)dx + (y^2 + 2x)dy] &= \int_0^1 [(t^2 + 3(t^2 + 1))]dt + [(t^2 + 1)^2 + 2t]2t dt \\ &= \int_0^1 [(4t^2 + 3) + (t^4 + 2t^2 + 2t + 1)(2t)] dt \\ &= \int_0^1 (2t^5 + 4t^3 + 8t^2 + 2t + 3) dt \\ &= \left(\frac{t^6}{3} + t^4 + \frac{8}{3}t^3 + t^2 + 3t \right) \Big|_0^1 = 8. \end{aligned}$$

Exemplo 1.15. Calcule a integral de linha dada:

a) $\int_C [(x + y)dx + (y - x)dy]$ se C é o segmento de reta de $(1, 1)$ a $(4, 2)$;

b) $\int_C (x + 2y)dy$ se C é o arco de parábola $x = y^2$ de $(1, -1)$ a $(9, -3)$.

Resolução de a)

Usando a Equação (1.35) encontramos as seguintes equações paramétricas

$$C : \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 1 + t, \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 1)$$

para o segmento de reta de $(1, 1)$ a $(4, 2)$. Fazendo as substituições $x = 1 + 3t$, $dx = 3 dt$, $y = 1 + t$ e $dy = dt$, temos

$$\begin{aligned} \int_C [(x + y)dx + (y - x)dy] &= \int_0^1 [(1 + 3t) + (1 + t)]3 dt + [(1 + t) - (1 + 3t)] dt \\ &= \int_0^1 (10t + 6) dt = (5t^2 + 6t) \Big|_0^1 = 11. \end{aligned}$$

Resolução de b)

Aqui, a integral de linha tem a forma $\int_C [P(x, y)dx + Q(x, y)dy]$ com $P(x, y) = 0$ e $Q(x, y) = x + 2y$. O arco de parábola é descrito parametricamente por

$$C : \begin{cases} x = t^2 \\ y = -t, \end{cases} \quad (1 \leq t \leq 3)$$

de tal forma que, como t varia de 1 a 3, (x, y) varia de $(1, -1)$ a $(9, -3)$. Fazendo as substituições $x = t^2$, $y = -t$ e $dy = -dt$, temos

$$\int_C (x + 2y) dy = \int_1^3 (t^2 - 2t)(-dt) = \int_1^3 (2t - t^2) dt = \left(t^2 - \frac{t^3}{3} \right) \Big|_1^3 = -\frac{2}{3}.$$

A integral de linha $\int_C [P dx + Q dy]$ independe da escolha do parâmetro t , contanto que a direção ao longo da curva geométrica C , correspondente a valores incrementados do parâmetro, seja mantida constante. Em geral, dada a parametrização $x = x(t)$ e $y = y(t)$, $a \leq t \leq b$, determina-se uma orientação da curva C , com a orientação positiva correspondendo aos valores crescentes do parâmetro t (veja a Figura 40, onde o ponto inicial A corresponde ao valor do parâmetro $t = a$ e o ponto terminal B corresponde a $t = b$). A curva com orientação contrária (do ponto inicial B para o ponto terminal A) é denotada por $-C$ (ver Figura 40). Observemos que para valores decrescentes de t altera-se o sinal.

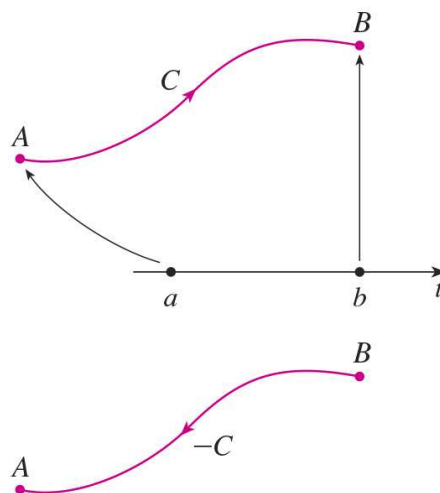


Figura 40 – Inversão de orientação

Fonte: Imagem extraída do livro de cálculo (STEWART, 2013)

Quando vamos resolver uma integral de linha, às vezes, o mais difícil é pensar na representação paramétrica da curva cuja descrição geométrica foi dada. Em especial, frequentemente precisamos parametrizar um segmento de reta e, portanto, é útil lembrar que a representação vetorial do segmento de reta que inicia em \mathbf{r}_0 e termina em \mathbf{r}_1 é dada por

$$\mathbf{r}(t) = (1 - t)\mathbf{r}_0 + t\mathbf{r}_1 \quad (0 \leq t \leq 1). \quad (1.35)$$

Exemplo 1.16. Calcule $\int_C [y^2 dx + x dy]$, onde

a) C_1 é o segmento de reta de $(-5, -3)$ a $(0, 2)$ e

b) C_2 é o arco da parábola $x = 4 - y^2$ de $(-5, -3)$ a $(0, 2)$ (ver Figura 41).

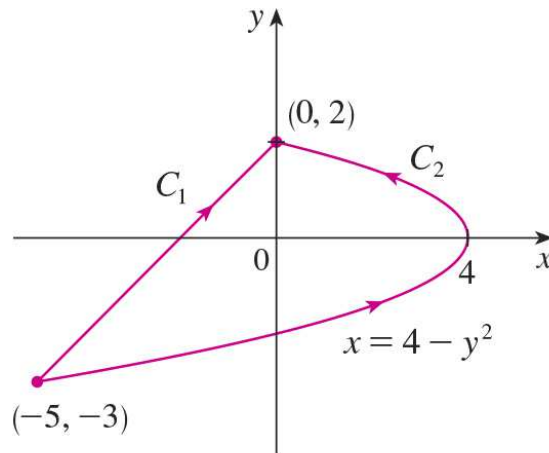


Figura 41

Fonte: Imagem extraída do livro de cálculo (STEWART, 2013)

Resolução

a) Pela Equação (1.35) a representação parametrizada para o segmento de reta é

$$y = 5t - 5 \quad \text{e} \quad x = 5t - 3 \quad (0 \leq t \leq 1).$$

De fato,

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= (1-t)\mathbf{r}_0 + t\mathbf{r}_1 = (1-t)(-5, -3) + t(0, 2) \\ &= (-5 + 5t, -3 + 3t) + (0, 2t) \\ &= (5t - 5, 5t - 3). \end{aligned}$$

Assim, $dx = 5 dt$, $dy = 5 dt$ e a Equação (1.34) nos dá

$$\begin{aligned} \int_{C_1} [y^2 dx + x dy] &= \int_0^1 [(5t - 3)^2(5 dt) + (5t - 5)(5 dt)] \\ &= 5 \int_0^1 (25t^2 - 25t + 4) dt \\ &= 5 \left[\frac{25t^3}{3} - \frac{25t^2}{2} + 4t \right]_0^1 = -\frac{5}{6}. \end{aligned}$$

b) Como a parábola é dada em função de y , usamos y como parâmetro e escrevemos C_2 como

$$x = 4 - y^2 \quad \text{e} \quad y = y \quad (-3 \leq y \leq 2).$$

Então, $dx = -2y dy$ e pela Equação (1.34), temos

$$\begin{aligned} \int_C [y^2 dx + x dy] &= \int_{-3}^2 (y^2(-2y) dy + (4 - y^2) dy) \\ &= \int_{-3}^2 (-2y^3 - y^2 + 4) dy \\ &= \left[-\frac{y^4}{2} - \frac{y^3}{3} + 4y \right]_{-3}^2 = 40 + \frac{5}{6}. \end{aligned}$$

Observe que as respostas para os itens **a)** e **b)** do Exemplo 1.16 são diferentes, mesmo as duas curvas tendo as mesmas extremidades. Em geral, o valor de uma integral de linha depende não apenas das extremidades da curva, mas também da trajetória. Há algumas integrais que dão o mesmo valor independentemente da trajetória da curva, são as integrais *independentes do caminho*.

Observe também que as respostas do Exemplo 1.16 dependem da orientação ou sentido em que a curva é percorrida. Se $-C_1$ representa o segmento de reta que vai de $(0, 2)$ a $(-5, -3)$, podemos constatar, usando a parametrização

$$x = -5t \quad \text{e} \quad y = 2 - 5t \quad (0 \leq t \leq 1),$$

que

$$\int_{-C_1} [y^2 dx + x dy] = \frac{5}{6}.$$

1.5.1 Notação Vetorial e Trabalho

Considere a integral de linha $\int_C [P(x, y) dx + Q(x, y) dy]$, onde a curva C é dada pelas equações paramétricas

$$C : \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t), \end{cases} \quad (a \leq t \leq b).$$

Se definimos o vetor

$$\mathbf{r} = x\vec{\mathbf{i}} + y\vec{\mathbf{j}} = f(t)\vec{\mathbf{i}} + g(t)\vec{\mathbf{j}}, \quad a \leq t \leq b,$$

como sendo o vetor posição variável de um ponto (x, y) em C , então

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{\mathbf{i}} + \frac{dy}{dt}\vec{\mathbf{j}},$$

ou na forma diferencial

$$d\mathbf{r} = dx\vec{\mathbf{i}} + dy\vec{\mathbf{j}}.$$

Agora, tomando-se

$$\mathbf{F} = P(x, y)\vec{\mathbf{i}} + Q(x, y)\vec{\mathbf{j}},$$

temos

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = P(x, y) dx + Q(x, y) dy,$$

logo

$$\int_C [P(x, y) dx + Q(x, y) dy] = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Definição 1.22. *Seja \mathbf{F} um campo vetorial contínuo definido sobre uma curva suave C dada pela função vetorial $\mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$. Então, a integral de linha de \mathbf{F} ao longo de C é*

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt.$$

Ao utilizar a Definição 1.22, tenha em mente que $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$ é apenas uma abreviação de $\mathbf{F}(x(t), y(t))$, então podemos avaliar $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$ simplesmente colocando $x = x(t)$ e $y = y(t)$ na expressão para $\mathbf{F}(x, y)$. Observe também que podemos formalmente escrever $d\mathbf{r} = \mathbf{r}'(t) dt$.

O vetor notação $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ para a integral de linha não somente tem a vantagem da rigidez, mas também sugere uma importante integração física da integral de linha. Suponha que \mathbf{F} representa uma força variável agindo numa partícula P que se move ao longo da curva C . Se \mathbf{r} é o vetor posição variável de P , então podemos interpretar $d\mathbf{r}$ como representando um deslocamento infinitesimal da partícula. Logo, $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ representa o trabalho realizado na partícula pela força \mathbf{F} durante seu deslocamento (ver Figura 42). Somando-se, isto é, integrando-se todos esses trabalhos infinitesimais, obtemos $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. Logo, a integral de linha $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ representa o trabalho útil realizado pela força \mathbf{F} no movimento de uma partícula ao longo da curva C , desde seu ponto inicial até seu ponto terminal.

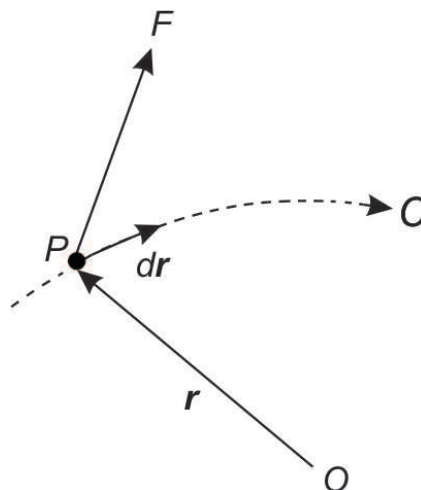


Figura 42

Exemplo 1.17. A força variável $F = (3x - 4y)\vec{i} + (4x + 2y)\vec{j}$ move uma partícula ao longo da curva

$$C: \begin{cases} x = 4t + 1 \\ y = 3t^2, \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2), \quad \text{de } (1, 0) \text{ a } (9, 12).$$

Calcule o trabalho realizado se as distâncias são medidas em cm e a força é medida em dinas.

Resolução

O trabalho é dado pela integral de linha $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ onde $\mathbf{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$, então $d\mathbf{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j}$.

Logo,

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C [(3x - 4y) dx + (4x + 2y) dy].$$

Fazendo-se as substituições $x = 4t + 1$, $dx = 4 dt$, $y = 3t^2$ e $dy = 6t dt$, temos

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^2 \left([3(4t + 1) - 4(3t^2)](4 dt) + [4(4t + 1) + 2(3t^2)](6t dt) \right) \\ &= \int_0^2 (36t^3 + 48t^2 + 72t + 12) dt \\ &= (9t^4 + 16t^3 + 36t^2 + 12t) \Big|_0^2 \\ &= 440 \text{ ergs.} \end{aligned}$$

Exemplo 1.18. Determine o trabalho feito pelo campo de força $F(x, y) = x^2\vec{i} - xy\vec{j}$ ao se mover uma partícula ao longo de um quarto de circunferência $\mathbf{r}(t) = \cos t\vec{i} + \sin t\vec{j}$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ (ver Figura 43).

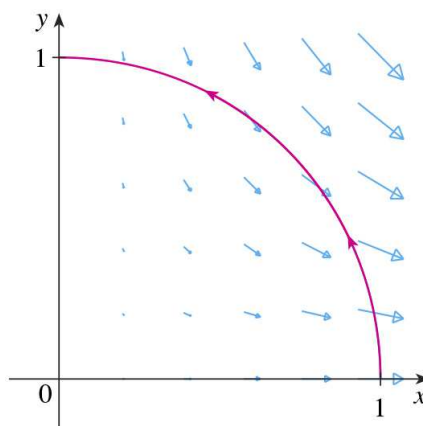


Figura 43

Fonte: Imagem extraída do livro de cálculo (STEWART, 2013)

Resolução

Uma vez que $x = \cos t$ e $y = \sin t$, temos

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = \cos^2 t\vec{i} - \cos t \sin t\vec{j}$$

e
$$\mathbf{r}'(t) = -\operatorname{sen} t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j}.$$

Portanto, o trabalho realizado é

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{\pi/2} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \int_0^{\pi/2} (-2 \cos^2 t \operatorname{sen} t) dt \\ &= 2 \frac{\cos^3 t}{3} \Big|_0^{\pi/2} = -\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

1.5.2 Propriedades das Integrais de Linha

Nas propriedades que seguem estamos supondo que C é uma curva suave ou suave por partes e que $f(x, y)$ e $g(x, y)$ são funções contínuas em cada ponto de C .

1. *Linearidade:*
$$\int_C (a\mathbf{F} + b\mathbf{G}) \cdot d\mathbf{r} = a \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + b \int_C \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r},$$
 onde a e b são constantes reais.

2. *Aditividade:* Se C admite uma decomposição num número finito de curvas C_1, \dots, C_n , isto é, $C = C_1 \cup \dots \cup C_n$, então

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \dots + \int_{C_n} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Exemplo 1.19. Considere C a fronteira do quadrado no plano xy de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ e $(0, 1)$, orientada no sentido anti-horário (ver Figura 44). Calcule a integral de linha $\int_C [x^2 dx + xy dy]$.

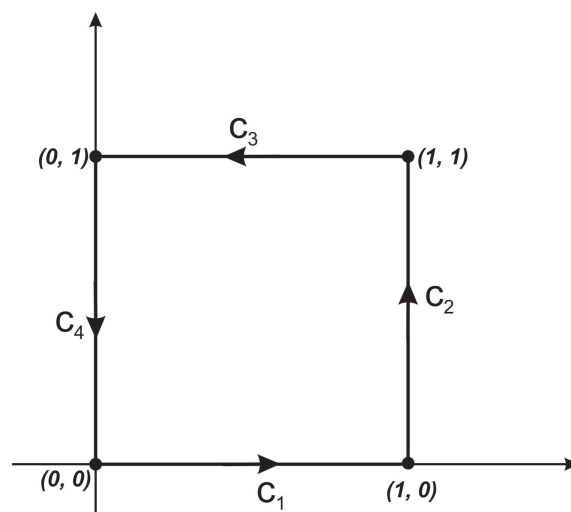


Figura 44

Resolução

Vamos integrar C_1 , C_2 , C_3 e C_4 separadamente e em seguida somar os resultados fazendo uso da propriedade 2. Antes, devemos determinar equações paramétricas para

cada uma das quatro integrais seguindo o trajeto de integração no sentido mostrado pela Figura 44. Usando-se a Equação (1.35), temos

$$C_1 : \sigma_1(t) = (t, 0), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

$$C_2 : \sigma_2(t) = (1, t), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

$$C_3 : \sigma_3(t) = (-t, 1), \quad -1 \leq t \leq 0.$$

$$C_4 : \sigma_4(t) = (0, -t), \quad -1 \leq t \leq 0.$$

Assim,

$$\int_{C_1} [x^2 dx + xy dy] = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}.$$

$$\int_{C_2} [x^2 dx + xy dy] = \int_0^1 t dt = \frac{1}{2}.$$

$$\int_{C_3} [x^2 dx + xy dy] = \int_{-1}^0 -t^2 dt = -\frac{1}{3}.$$

$$\int_{C_4} [x^2 dx + xy dy] = \int_{-1}^0 0 dt = 0.$$

Logo,

$$\int_C [x^2 dx + xy dy] = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 0 = \frac{1}{2}.$$

Exemplo 1.20. Calcule

$$\int_C [x^2 y dx + x dy]$$

no sentido anti-horário ao longo do trajeto triangular mostrado na Figura 45.

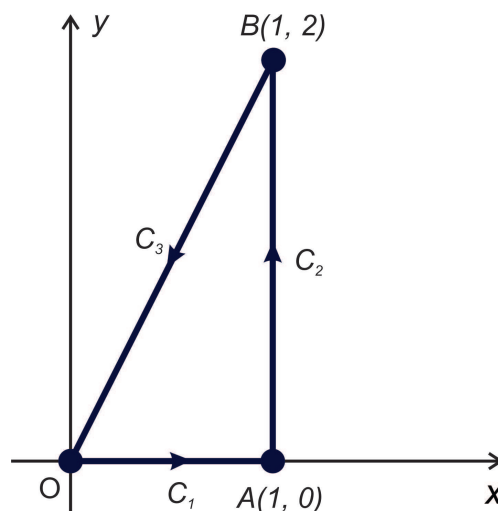


Figura 45 – Trajeto triangular formado pelas curvas C_1 , C_2 e C_3

Resolução

Vamos integrar C_1 , C_2 e C_3 separadamente e em seguida somar os resultados fazendo uso da propriedade 2 tal qual fizemos no Exemplo 1.19. Da Equação (1.35), temos

$$C_1(\text{de O para A}) : \mathbf{r}(t) = (1-t)\langle 0, 0 \rangle + t\langle 1, 0 \rangle = \langle t, 0 \rangle$$

$$C_2(\text{de A para B}) : \mathbf{r}(t) = (1-t)\langle 1, 0 \rangle + t\langle 1, 2 \rangle = \langle 1, 2t \rangle$$

$$C_3(\text{de B para O}) : \mathbf{r}(t) = (1-t)\langle 1, 2 \rangle + t\langle 0, 0 \rangle = \langle 1-t, 2-2t \rangle$$

onde t varia de 0 até 1. Dessas equações resulta

$$\int_{C_1} [x^2 y dx + x dy] = \int_{C_1} x^2 y dx = \int_0^1 (t^2)(0) \frac{d}{dt}[t] dt = 0$$

$$\int_{C_2} [x^2 y dx + x dy] = \int_{C_2} x dy = \int_0^1 (1) \frac{d}{dt}[2t] dt = 2$$

$$\begin{aligned} \int_{C_3} [x^2 y dx + x dy] &= \int_0^1 (1-t)^2 (2-2t) \frac{d}{dt}[1-t] dt + \int_0^1 (1-t) \frac{d}{dt}[2-2t] dt \\ &= \int_0^1 (1-t)^2 2(1-t)(-1) dt + \int_0^1 (1-t)(-2) dt \\ &= 2 \int_0^1 (t-1)^3 dt + 2 \int_0^1 (t-1) dt = -\frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\int_C [x^2 y dx + x dy] = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3} = 0 + 2 + \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Teorema 1.5. *Sejam $\sigma(t)$ ($a \leq t \leq b$) e $\beta(t)$ ($c \leq t \leq d$) parametrizações C^1 por partes e equivalentes. Se h preserva a orientação, então*

$$\int_{C_\beta} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_\sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Se h inverte a orientação, então

$$\int_{C_\beta} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_{C_\sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

(C_β e C_σ denotam a curva C parametrizada por $\beta(t)$ e $\sigma(t)$, respectivamente).

Demonstração. É suficiente provar o teorema para $\sigma(t)$ e $\beta(t)$ de classe C^1 . Suponhamos que as parametrizações $\sigma(t)$ e $\beta(t)$ estão relacionadas pela equação $\beta(t) = \sigma(h(t))$, $t \in [c, d]$.

Então,

$$\int_{C_\beta} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_c^d \mathbf{F}(\beta(t)) \cdot \beta'(t) dt = \int_c^d \mathbf{F}(\sigma(h(t))) \cdot \sigma'(h(t))h'(t) dt.$$

Fazendo a substituição $u = h(t)$, $du = h'(t) dt$, obtemos

$$\int_{C_\beta} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{h(c)}^{h(d)} \mathbf{F}(\sigma(u)) \cdot \sigma'(u) du =$$

$$= \begin{cases} \int_a^b \mathbf{F}(\sigma(u)) \cdot \sigma'(u) du = \int_{C_\sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}, & \text{se } h \text{ preserva a orientação.} \\ \int_b^a \mathbf{F}(\sigma(u)) \cdot \sigma'(u) du = - \int_{C_\sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}, & \text{se } h \text{ inverte a orientação.} \end{cases}$$

Como caso particular deste teorema temos que

$$\int_{-C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad \text{ou} \quad \int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_b^a \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (a \leq t \leq b)$$

onde $-C$ é a curva C com orientação oposta, isto é, $h(t) = -t$. □

Exemplo 1.21. Calcule a integral de linha $\int_C k(x+y) dx$, onde k é uma constante qualquer e C é o segmento de reta ligando os pontos $P_1(0,0)$ e $P_2(1,1)$ com orientação:

a) indo de $(0,0)$ para $(1,1)$, e

b) voltando de $(1,1)$ para $(0,0)$.

Resolução

a) As equações paramétricas para o segmento de reta que vai de $P_1(0,0)$ a $P_2(1,1)$, usando-se a Equação (1.35), são

$$x = t \text{ e } y = t,$$

no intervalo $(0 \leq t \leq 1)$, pois x varia entre 0 e 1, e sabendo que $dx = dt$, obtemos

$$\int_C k(x+y) dx = \int_0^1 k(t+t) dt = k \int_0^1 2t dt = k \left[t^2 \right]_0^1 = k.$$

b) As equações paramétricas para o segmento de reta que vai de $P_2(1,1)$ a $P_1(0,0)$, são dadas por

$$x = 1 - t \text{ e } y = 1 - t, \quad 0 \leq t \leq 1$$

e sabendo que $dx = -dt$, obtemos

$$\begin{aligned}
 \int_C k(x+y) dx &= \int_0^1 k[(1-t) + (1-t)](-dt) \\
 &= -2k \int_0^1 (1-t) dt \\
 &= -2k \left(t - \frac{t^2}{2} \right) \Big|_0^1 \\
 &= -2k \left(1 - \frac{1}{2} \right) \\
 &= -2k \left(\frac{1}{2} \right) \\
 &= -k.
 \end{aligned}$$

Observe, no Exemplo 1.21, que ao reverter o intervalo para os valores crescentes de t houve mudança de sinal.

Definição 1.23. Dizemos que uma curva $C = \partial R$, limitante de uma região R do plano xy , está **orientada positivamente** se a região R fica à esquerda à medida que percorremos a curva C (ver Figura 46).

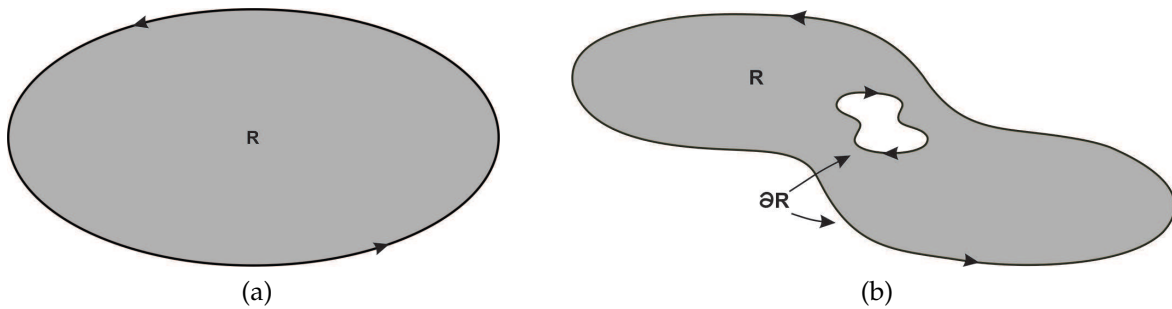


Figura 46 – Regiões orientadas positivamente

2 TEOREMA DE GREEN

Neste capítulo e no próximo estudaremos o Teorema de Green, um teorema fascinante e importante que relaciona uma integral de linha ao longo de uma curva fechada com uma integral dupla sobre a região plana limitada pela curva. De outro modo, o teorema afirma que, dada uma região plana R e uma curva C na fronteira de R , existe uma igualdade entre a integral de linha calculada sobre a curva e a integral dupla calculada sobre a região R .

2.1 O Teorema de Green para Regiões Simples

Teorema 2.1 (Teorema de Green). *Seja C uma curva fechada simples, contínua por partes, orientada no sentido positivo (Ver figura 47) e seja R a região plana delimitada por C .*

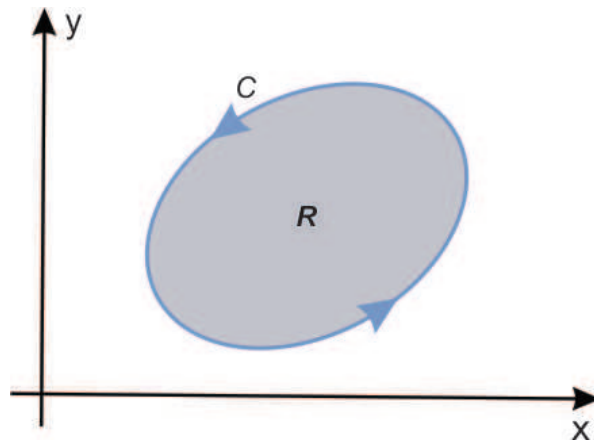


Figura 47 – Região R orientada positivamente

Se $P(x, y)$ e $Q(x, y)$ são de classe C^1 sobre um domínio aberto Ω contendo R , então

$$\oint_C [P(x, y) dx + Q(x, y) dy] = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \right) dx dy. \quad (2.1)$$

A Equação (2.1) pode ser escrita na forma compacta como segue:

$$\oint_C [P dx + Q dy] = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA.$$

Observação 2.1. *As notações*

$$\oint_C [P dx + Q dy] \quad e \quad \oint_C [P dx + Q dy]$$

são usadas para indicar que a integral de linha é calculada sobre uma curva fechada C . Às vezes usa-se uma seta ao círculo para indicar se a integração é no sentido horário ou anti-horário.

Outra notação utilizada para rotular a curva na fronteira de R é ∂R , assim a equação do Teorema de Green pode ser vista com a seguinte forma:

$$\oint_{\partial R} [P dx + Q dy] = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA.$$

Demonstração. Seja R a região do plano xy que pode ser definida por

$$R = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\} \quad (2.2)$$

e

$$R = \{(x, y) \mid c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\} \quad (2.3)$$

onde g_1, g_2, h_1 e h_2 são suaves.

Representamos essas regiões graficamente na Figura 48. Observe, na Figura 48a, que a curva C foi decomposta em duas novas curvas, C_1 e C_2 , sendo possível, pois pode-se escrever $C = C_1 \cup C_2$, pela propriedade 2 (integrais de linha). Note também, na figura 48b, que as funções g_1 e g_2 têm x como variável, enquanto que em 48c as funções h_1 e h_2 aparecem com a variável y .

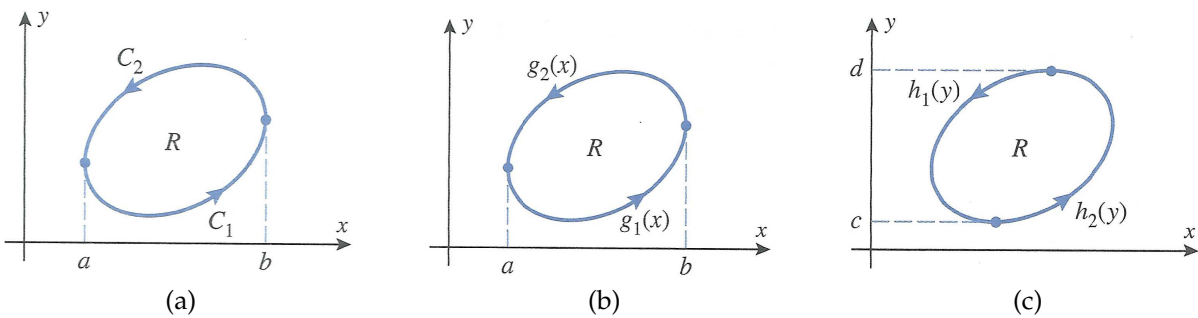


Figura 48

Fonte: Imagem extraída do livro de cálculo (ANTON; BIVENS; DAVIS, 2007)

Como

$$\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_R \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy + \iint_R -\frac{\partial P}{\partial y} dx dy,$$

podemos calcular cada integral do segundo membro desta equação separadamente.

Desse modo, para provar (2.1) é suficiente mostrar a veracidade das seguintes identidades:

$$\oint_C P(x, y) dx = - \iint_R \frac{\partial P}{\partial y} dx dy \quad (2.4)$$

e

$$\oint_C Q(x, y) dy = \iint_R \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy. \quad (2.5)$$

Mostrando (2.4)

Já vimos na Figura 48b, que a curva C foi dividida em duas curvas C_1 e C_2 com as respectivas equações $y = g_1(x)$ e $y = g_2(x)$.

Observe que $C = C_1 \cup (-C_2)$, usando o Teorema 1.5 e as propriedades 1 e 2 das integrais de linha, temos

$$\begin{aligned} \oint_C P(x, y) dx &= \int_{C_1} P(x, y) dx + \int_{-C_2} P(x, y) dx \\ &= \int_{C_1} P(x, y) dx - \int_{C_2} P(x, y) dx \\ &= \int_a^b P(x, g_1(x)) dx - \int_a^b P(x, g_2(x)) dx \\ &= \int_a^b [P(x, g_1(x)) - P(x, g_2(x))] dx. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Por outro lado, como $\frac{\partial P}{\partial y}$ é contínua e fazendo uso dos Teoremas 1.2 e 1.4, então

$$\begin{aligned} - \iint_R \frac{\partial P}{\partial y} dx dy &= - \int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy \right] dx \\ &= - \int_a^b \left[P(x, y) \Big|_{g_1(x)}^{g_2(x)} \right] dx \\ &= - \int_a^b [P(x, g_2(x)) - P(x, g_1(x))] dx \\ &= \int_a^b [P(x, g_1(x)) - P(x, g_2(x))] dx. \end{aligned} \quad (2.7)$$

A partir das expressões (2.6) e (2.7), obtemos

$$\oint_C P(x, y) dx = - \iint_R \frac{\partial P}{\partial y} dx dy. \quad (2.8)$$

Mostrando (2.5)

Para mostrar (2.5) tratamos R como a região definida por (2.3), descrita na Figura 48c.

Do Teorema 1.5 e das propriedades 1 e 2 das integrais de linha, temos

$$\begin{aligned}
 \oint_C Q(x, y) dy &= \int_{C_1'} Q(x, y) dy + \int_{C_2'} Q(x, y) dy \\
 &= - \int_c^d Q(h_1(y), y) dy + \int_c^d Q(h_2(y), y) dy \\
 &= \int_c^d Q(h_2(y), y) dy - \int_c^d Q(h_1(y), y) dy \\
 &= \int_c^d [Q(h_2(y), y) - Q(h_1(y), y)] dy. \tag{2.9}
 \end{aligned}$$

Desenvolvendo o segundo membro de (2.5) e usando os Teoremas 1.2 e 1.4, obtemos

$$\begin{aligned}
 \iint_R \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy &= \int_c^d \left[\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx \right] dy \\
 &= \int_c^d \left[Q(x, y) \Big|_{h_1(y)}^{h_2(y)} \right] dy \\
 &= \int_c^d [Q(h_2(y), y) - Q(h_1(y), y)] dy. \tag{2.10}
 \end{aligned}$$

Das expressões (2.9) e (2.10), chegamos a

$$\oint_C Q(x, y) dy = \iint_R \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy. \tag{2.11}$$

Adicionando, membro a membro, os termos de (2.8) e (2.11) concluímos que

$$\oint_C [P(x, y) dx + Q(x, y) dy] = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy. \quad \square$$

Exemplo 2.1. Com auxílio do Teorema de Green, calcular a integral de linha

$$\oint_{\partial R} [3xy dx + 2x^2 dy],$$

onde R é a região delimitada pela reta $y = x$ e a parábola $y = x^2 - 2x$.

Resolução

A região R é do Tipo I e está ilustrada na Figura 49; ela é descrita pelas desigualdades $R : 0 \leq x \leq 3, \quad x^2 - 2x \leq y \leq x$.

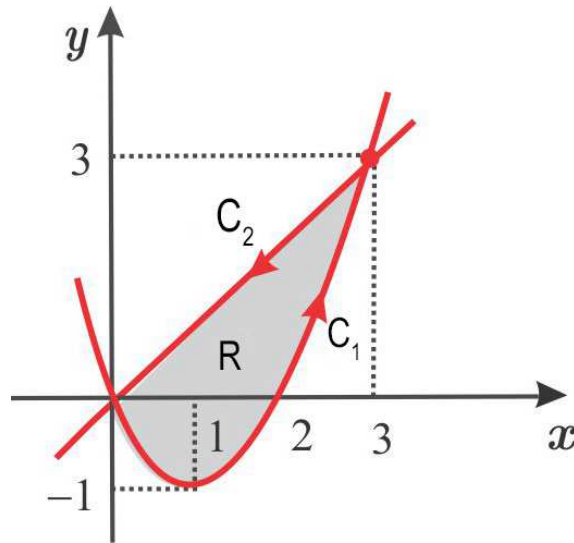


Figura 49 – Região limitada pelas curvas $y = x$ e $y = x^2 - 2x$
 Fonte: Imagem extraída da apostila de cálculo (MATOS; SILVA, 2014)

Temos que $P = 3xy$ e $Q = 2x^2$, de modo que $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 4x - 3x$, e usando o Teorema de Green, obtemos

$$\begin{aligned}
 \oint_{\partial R} [3xy \, dx + 2x^2] \, dy &= \iint_R (4x - 3x) \, dx \, dy \\
 &= \iint_R x \, dx \, dy \\
 &= \int_0^3 \left[\int_{x^2-2x}^x x \, dy \right] dx \\
 &= \int_0^3 [xy]_{x^2-2x}^x \, dx \\
 &= \int_0^3 x^2(3-x) \, dx \\
 &= x^3 - \frac{x^4}{4} \Big|_0^3 = \frac{27}{4}.
 \end{aligned}$$

Exemplo 2.2. Calcule $\oint_C [x^4 \, dx + xy \, dy]$, onde C é a curva triangular constituída pelos segmentos de reta de $(0,0)$ a $(1,0)$, de $(1,0)$ a $(0,1)$ e de $(0,1)$ a $(0,0)$.

Resolução

Embora que esta integral possa ser calculada pelos métodos usuais das integrais de linha, isto envolveria o cálculo de três integrais separadas sobre os três lados do triângulo. Em vez disso, vamos utilizar o Teorema de Green.

Observe que a região R cercada por C é simples e que C tem orientação positiva (ver Figura 50).

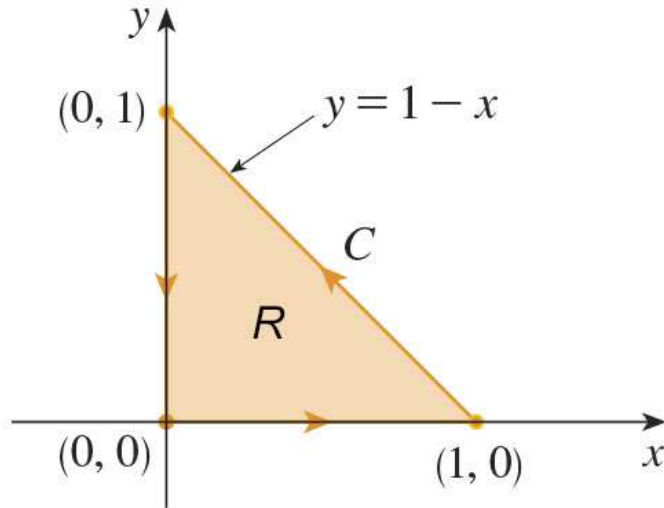


Figura 50 – Curva triangular

Fonte: Imagem extraída do livro de cálculo (STEWART, 2013)

Considerando $P(x, y) = x^4$ e $Q(x, y) = xy$, temos

$$\begin{aligned} \oint_C [x^4 dx + xy dy] &= \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} (y - 0) dy dx \\ &= \int_0^1 \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_{y=0}^{y=1-x} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (1-x)^2 dx \\ &= -\frac{1}{6} (1-x)^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Exemplo 2.3. Calcule $\oint_C [(3y - e^{\sin x}) dx + (7x + \sqrt{y^4 + 1}) dy]$, onde C é a circunferência $x^2 + y^2 = 9$.

Resolução

A região R delimitada por C é o círculo $x^2 + y^2 = 9$ (ver Figura 51), então vamos

mudar para coordenadas polares depois de aplicar o Teorema de Green:

$$\begin{aligned}
 \oint_C [(3y - e^{\operatorname{sen}x}) dx + (7x + \sqrt{y^4 + 1}) dy] &= \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x}(7x + \sqrt{y^4 + 1}) - \frac{\partial}{\partial y}(3y - e^{\operatorname{sen}x}) \right] dA \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^3 (7 - 3) r dr d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^3 4r dr d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} 2r^2 \Big|_0^3 d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} 18 d\theta \\
 &= 18 \theta \Big|_0^{2\pi} = 36\pi.
 \end{aligned}$$

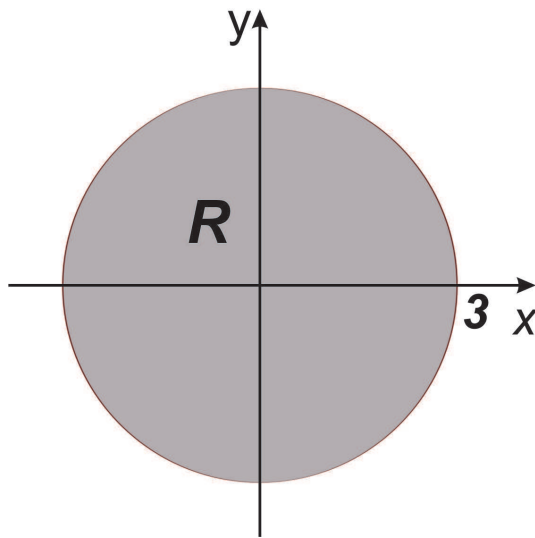


Figura 51 – Círculo de equação $x^2 + y^2 = 9$

Os Exemplos 2.1, 2.2 e 2.3 poderiam ser resolvidos aplicando somente os métodos das integrais de linha, mas isso nos renderia bastante trabalho. Para que você se convença, tente resolver o Exemplo 2.3 sem utilizar o Teorema de Green. Mas, às vezes, é mais simples calcular a integral de linha, e, nesses casos, usaremos o Teorema de Green na ordem inversa. Por exemplo, se sabemos que $P(x, y) = Q(x, y) = 0$ sobre uma curva C , então o Teorema de Green nos dá

$$\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \int_C [P dx + Q dy] = 0$$

não importando quais os valores das funções P e Q em R .

Exemplo 2.4. Calcule $\int_C [e^x \sin(y) dx + (e^x \cos(y) + x) dy]$, onde C é a semicircunferência de raio 1 centrada na origem, no primeiro e segundo quadrantes (ver Figura 52).

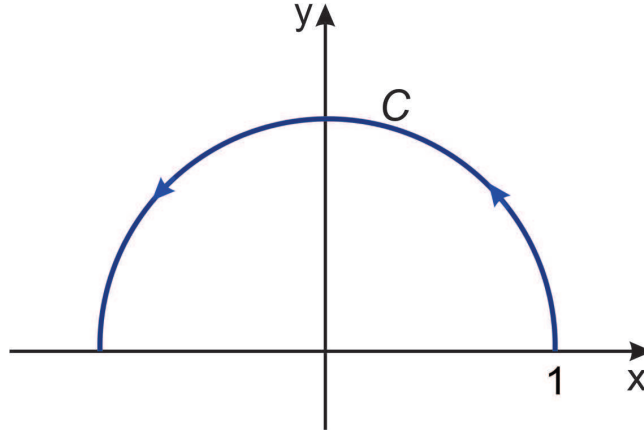


Figura 52

Resolução

Observe na Figura 52 que não podemos aplicar o Teorema de Green diretamente, já que a curva C não é fechada. Para aplicarmos o Teorema de Green, consideraremos a curva fechada $\partial R = C \cup C_1$, diferenciável por partes e orientada no sentido anti-horário. Aplicando o Teorema de Green sobre a curva ∂R . Temos que $P(x, y) = e^x \sin(y)$ e $Q(x, y) = e^x \cos(y) + x$, daí,

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial x} = e^x \cos(y) + 1 \\ \frac{\partial P}{\partial y} = e^x \cos(y) \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = e^x \cos(y) + 1 - e^x \cos(y).$$

Logo, usando coordenadas polares, temos

$$\begin{aligned} \int_{\partial R} [e^x \sin(y) dx + (e^x \cos(y) + x) dy] &= \iint_R 1 dA \\ &= \int_0^\pi \int_0^1 r dr d\theta \\ &= \int_0^\pi \left. \frac{r^2}{2} \right|_0^1 d\theta \\ &= \int_0^\pi \frac{1}{2} d\theta \\ &= \left. \frac{1}{2} \theta \right|_0^\pi = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Temos ainda que

$$\int_{\partial R} F = \int_C F + \int_{C_1} F \Rightarrow \int_C F = \int_{\partial R} F - \int_{C_1} F.$$

Resta-nos apenas calcular $\int_{C_1} F$, onde C_1 é o segmento de reta de $(-1, 0)$ a $(1, 0)$. Uma parametrização para o segmento de reta C_1 , usando-se a Equação (1.35), é

$$\begin{aligned}r(t) &= (1-t)(-1, 0) + t(1, 0) \\ &= (t-1, 0) + (t, 0) \\ &= (2t-1, 0).\end{aligned}$$

Daí, temos

$$\begin{cases} x(t) = 2t - 1 & dx = 2 dt \\ y(t) = 0 \quad t \in [0, 1] & dy = 0 dt, \end{cases}$$

o que implica

$$\begin{aligned}\int_{C_1} F(r(t)) dt &= \int_0^1 [e^{(2t-1)} \operatorname{sen}(0) \cdot 2 + (e^{(2t-1)} \cos(0) + 2t - 1) \cdot 0] dt \\ &= \int_0^1 0 dt = 0.\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\int_C F &= \int_{\partial R} F - \int_{C_1} F \\ &= \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

3 AMPLIAÇÕES DO TEOREMA DE GREEN

3.1 O Teorema de Green para Retângulos

Teorema 3.1. *Seja R a região retangular $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ e seja C a fronteira de R orientada positivamente (ver Figura 53). Suponhamos que $P(x, y)$ e $Q(x, y)$ sejam de classe C^1 num domínio aberto Ω contendo R . Então,*

$$\oint_C [P dx + Q dy] = \iint_R \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right] dA.$$

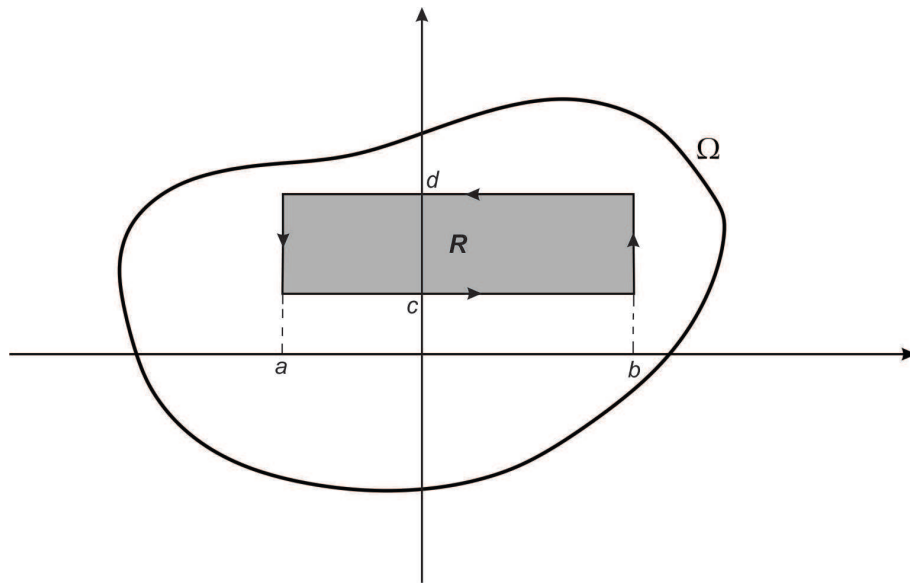


Figura 53

Demonstração. Vamos provar que

$$\oint_C P(x, y) dx = - \iint_R \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) dA \quad (3.1)$$

e

$$\oint_C Q(x, y) dy = \iint_R \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) dA. \quad (3.2)$$

Provando (3.1)

Do Teorema 1.5 e das propriedades 1 e 2 das integrais de linha, temos que

$$\begin{aligned}\oint_C P(x, y) dx &= \int_a^b P(t, c) dt - \int_a^b P(t, d) dt \\ &= \int_a^b [P(t, c) - P(t, d)] dt.\end{aligned}\quad (3.3)$$

Por outro lado, como $\frac{\partial P}{\partial y}$ é contínua, fazendo uso dos Teoremas 1.2 e 1.3, então

$$\begin{aligned}- \iint_R \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) dA &= - \int_a^b \left[\int_c^d \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) dy \right] dx \\ &= - \int_a^b [P(x, y)]_c^d dx \\ &= - \int_a^b [P(x, d) - P(x, c)] dx \\ &= \int_a^b [P(x, c) - P(x, d)] dx \\ &= \int_a^b [P(t, c) - P(t, d)] dt.\end{aligned}\quad (3.4)$$

De (3.3) e (3.4) resulta que

$$\oint_C P(x, y) dx = - \iint_R \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) dA.\quad (3.5)$$

Provando (3.2)

Do Teorema 1.5 e das propriedades 1 e 2 das integrais de linha, temos que

$$\begin{aligned}\oint_C Q(x, y) dy &= \int_c^d Q(b, t) dt - \int_c^d Q(a, t) dt \\ &= \int_c^d [Q(b, t) - Q(a, t)] dt.\end{aligned}\quad (3.6)$$

Por outro lado, pelos Teoremas 1.2 e 1.3, obtemos

$$\begin{aligned}\iint_R \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) dA &= \int_c^d \left[\int_a^b \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) dx \right] dy \\ &= \int_c^d [Q(x, y)]_a^b dy \\ &= \int_c^d [Q(b, y) - Q(a, y)] dy \\ &= \int_c^d [Q(b, t) - Q(a, t)] dt.\end{aligned}\quad (3.7)$$

De (3.6) e (3.7) resulta

$$\oint_C Q(x, y) dy = \iint_R \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) dA. \quad (3.8)$$

Somando-se, membro a membro, as Equações (3.5) e (3.8) concluímos a prova. \square

Exemplo 3.1. Suponha $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j}$ de classe C^1 no domínio aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Seja $C = \partial R$ a fronteira de R orientada no sentido positivo, onde R é o conjunto mostrado na Figura 54. Prove que

$$\oint_C [P dx + Q dy] = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA.$$

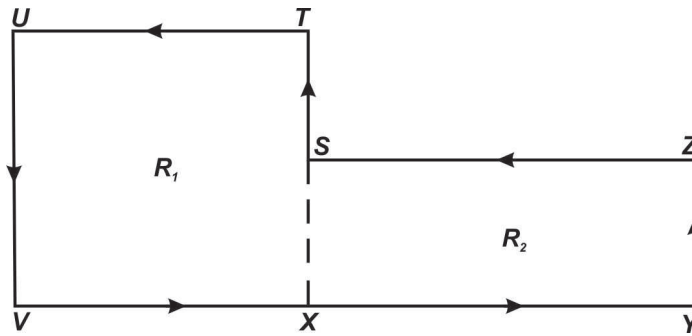


Figura 54

Resolução

Inicialmente, vamos dividir R em dois retângulos: R_1 de vértices T, U, V e X ; R_2 de vértices X, Y, Z e S . Pelo Teorema de Green,

$$\oint_{\overline{STUVX}} [P dx + Q dy] + \oint_{\overline{XS}} [P dx + Q dy] = \iint_{R_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA \quad (3.9)$$

e

$$\oint_{\overline{XYZS}} [P dx + Q dy] + \oint_{\overline{SX}} [P dx + Q dy] = \iint_{R_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA. \quad (3.10)$$

Observando que

$$\oint_{\overline{XS}} [P dx + Q dy] + \oint_{\overline{SX}} [P dx + Q dy] = 0,$$

devido ao Teorema 1.5, daí resulta que

$$\oint_{\overline{STUVX}} [P dx + Q dy] + \oint_{\overline{XYZS}} [P dx + Q dy] = \oint_C [P dx + Q dy].$$

Pela propriedade 4 das integrais duplas, temos

$$\iint_{R_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA + \iint_{R_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA,$$

então

$$\oint_C [P dx + Q dy] = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA.$$

3.2 O Teorema de Green para a União de Regiões Simples

Demonstramos o Teorema de Green somente para o caso particular onde R é uma região simples ou uma região retangular, no entanto podemos ampliá-lo para o caso em que R é a união finita de regiões simples. Para comprovar isso, vamos considerar R como a região mostrada na Figura 55, então podemos escrever $R = R_1 \cup R_2$, onde R_1 e R_2 são ambas regiões simples.

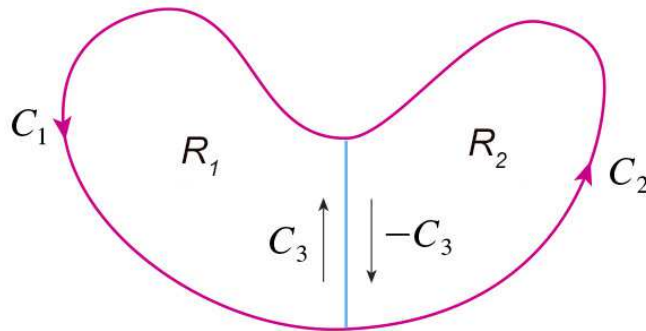


Figura 55

Fonte: Imagem extraída do livro de cálculo (STEWART, 2013)

A fronteira de R_1 é $C_1 \cup C_3$ e a fronteira de R_2 é $C_2 \cup (-C_3)$; portanto, aplicando o Teorema de Green em R_1 e R_2 separadamente, obtemos

$$\oint_{C_1} [P dx + Q dy] + \oint_{C_3} [P dx + Q dy] = \iint_{R_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA \quad (3.11)$$

e

$$\oint_{C_2} [P dx + Q dy] + \oint_{-C_3} [P dx + Q dy] = \iint_{R_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA. \quad (3.12)$$

Somando-se, membro a membro, as equações (3.11) e (3.12), considerando que as integrais de linha sobre C_3 e $-C_3$ se anulam devido ao Teorema 1.5, obtemos

$$\oint_C [P dx + Q dy] = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

que é o Teorema de Green para $R = R_1 \cup R_2$ uma vez que sua fronteira é $C = C_1 \cup C_2$.

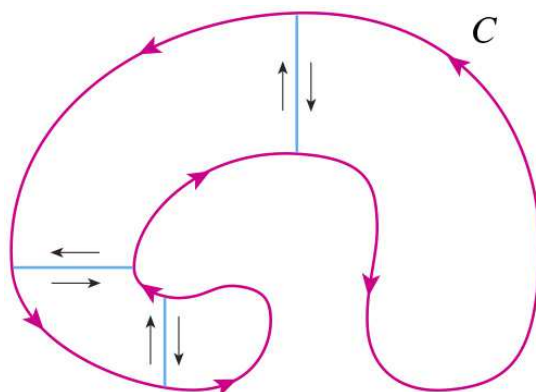


Figura 56

Fonte: Imagem extraída do livro de cálculo (STEWART, 2013)

Esse procedimento nos permite aplicar o Teorema de Green para qualquer união finita de regiões simples que não se sobreponham (ver Figura 56).

Exemplo 3.2. Calcule $\oint_C [y^2 dx + 3xy dy]$, onde C é o limite da região semianular R contida no semiplano superior entre as semicircunferências $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$.

Resolução

Observe que, mesmo R não sendo uma região simples, o eixo y divide R em duas regiões simples (ver Figura 57).

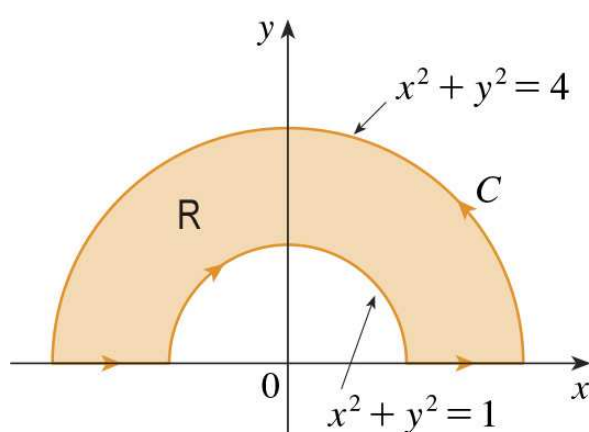


Figura 57

Fonte: Imagem extraída do livro de cálculo (STEWART, 2013)

Em coordenadas polares, podemos escrever

$$R = \{(r, \theta) \mid 1 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq \pi\}.$$

Portanto, o Teorema de Green nos dá

$$\begin{aligned}
 \oint_C [y^2 dx + 3xy dy] &= \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x}(3xy) - \frac{\partial}{\partial y}(y^2) \right] dA \\
 &= \iint_R y dA = \int_0^\pi \int_1^2 (r \operatorname{sen}\theta) r dr d\theta \\
 &= \int_0^\pi \operatorname{sen}\theta d\theta \int_1^2 r^2 dr \\
 &= [-\cos\theta]_0^\pi \left[\frac{r^3}{3} \right]_1^2 \\
 &= -2 \left(\frac{1}{3} - \frac{8}{3} \right) = \frac{14}{3}.
 \end{aligned}$$

Exemplo 3.3. Calcule $\oint_C \left[\left(\frac{x^2 - y^2}{2} \right) dx + \left(\frac{x^2}{2} + y^4 \right) dy \right]$, onde C é a fronteira da região R definida por $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$, orientada no sentido anti-horário.

Resolução

A curva C está indicada na Figura 58. Sendo $F(x, y) = \left(\frac{x^2 - y^2}{2}, \frac{x^2}{2} + y^4 \right)$ um campo vetorial de classe C^1 em \mathbb{R}^2 , podemos aplicar o Teorema de Green e obter

$$\begin{aligned}
 \oint_C \left[\left(\frac{x^2 - y^2}{2} \right) dx + \left(\frac{x^2}{2} + y^4 \right) dy \right] &= \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x^2}{2} + y^4 \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x^2 - y^2}{2} \right) \right] dx dy \\
 &= \iint_R (x + y) dx dy.
 \end{aligned}$$

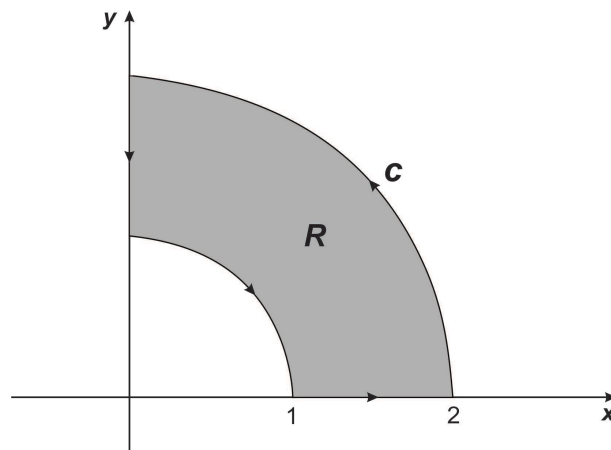


Figura 58

Usando mudança polar, temos

$$\begin{aligned} \iint_R (x + y) dx dy &= \int_0^{\pi/2} \int_1^2 r^2 (\cos \theta + \operatorname{sen} \theta) dr d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} (\cos \theta + \operatorname{sen} \theta) \left[\frac{r^3}{3} \right]_1^2 d\theta \\ &= \frac{7}{3} [\operatorname{sen} \theta - \cos \theta]_0^{\pi/2} = \frac{14}{3}. \end{aligned}$$

3.3 O Teorema de Green para Regiões Multiplamente Conexas

O Teorema de Green também é válido para regiões que não são simplesmente conexas, ou seja, aquelas regiões que contém um ou mais furos. Para que o teorema possa ser aplicado devemos orientar as curvas, tanto a curva que circunda a região R externamente quanto as curvas internas que envolvem as bordas dos furos, de modo que a região R esteja sempre à esquerda à medida que as percorremos. Observe que a fronteira externa da região é orientada no sentido anti-horário e que as curvas da fronteira que envolvem furos têm orientação no sentido horário (ver Figura 59).

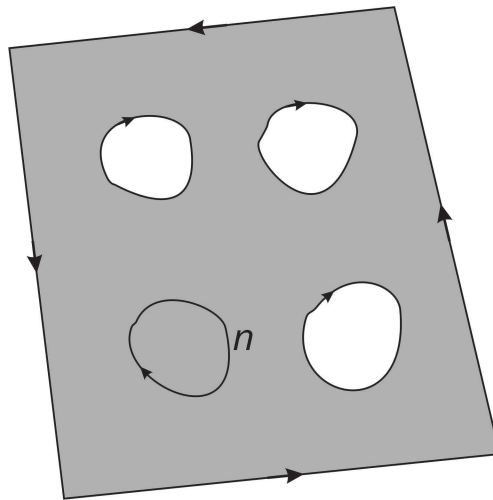


Figura 59 – Região multiplamente conexa

Uma vez que as curvas estão orientadas corretamente e supondo que $P(x, y)$ e $Q(x, y)$ tenham derivadas parciais de primeira ordem contínuas em algum domínio aberto Ω contendo R , é verdadeira a seguinte relação

$$\begin{aligned} \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA &= \oint_C [P(x, y) dx + Q(x, y) dy] + \oint_{C_1} [P(x, y) dx + Q(x, y) dy] + \\ &+ \oint_{C_2} [P(x, y) dx + Q(x, y) dy] + \cdots + \oint_{C_n} [P(x, y) dx + Q(x, y) dy], \end{aligned}$$

onde C é a curva que rodeia a região R no sentido *anti-horário* e $C_1, C_2 \dots C_n$ são as curvas da margem dos furos orientadas no *sentido horário*.

Demonstração. Para melhor entendimento, vamos considerar uma região multiplamente conexa R com apenas dois buracos e supor que $P(x, y)$ e $Q(x, y)$ são de classe C^1 num domínio aberto Ω contendo R . Introduzimos dois “cortes” em R como mostrado na Figura 60. Os “cortes” podem ser quaisquer curvas suaves por partes. Considerando que P e Q satisfaçam as hipóteses do Teorema de Green em R , temos

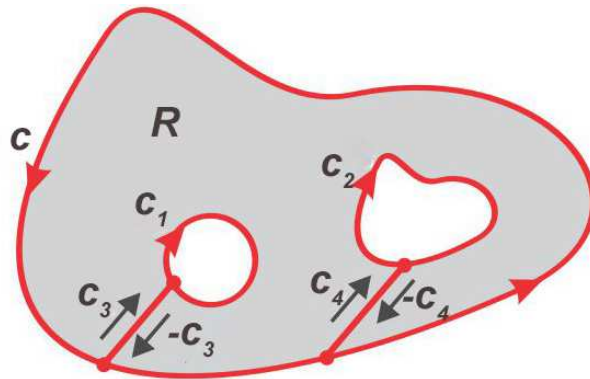


Figura 60

Fonte: Imagem extraída da apostila de cálculo (MATOS; SILVA, 2014)

$$\begin{aligned} \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA &= \oint_C [P dx + Q dy] + \oint_{C_1} [P dx + Q dy] + \\ &+ \int_{C_3} [P dx + Q dy] + \int_{-C_3} [P dx + Q dy] + \\ &+ \oint_{C_2} [P dx + Q dy] + \int_{C_4} [P dx + Q dy] + \int_{-C_4} [P dx + Q dy]. \end{aligned}$$

Pelo Teorema 1.5, temos que $\int_{-C_3} [P dx + Q dy] = - \int_{C_3} [P dx + Q dy]$ e $\int_{-C_4} [P dx + Q dy] = - \int_{C_4} [P dx + Q dy]$. Assim, ficamos apenas com

$$\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \oint_C [P dx + Q dy] + \oint_{C_1} [P dx + Q dy] + \oint_{C_2} [P dx + Q dy]$$

que é o que esperávamos. □

Exemplo 3.4. Se $F(x, y) = \frac{-y \mathbf{i} + x \mathbf{j}}{x^2 + y^2}$, mostre que $\oint_C F \cdot dr = 2\pi$ para todo caminho fechado simples que circunde a origem.

Resolução

Observe que a região cercada pela curva C não é simplesmente conexa, pois contém um furo, o que torna difícil calcular a integral dada diretamente. Então, vamos considerar um círculo C' com orientação anti-horária com origem no centro e raio a , onde a é escolhido para ser pequeno o suficiente para que C' esteja contido em C (ver Figura 61).

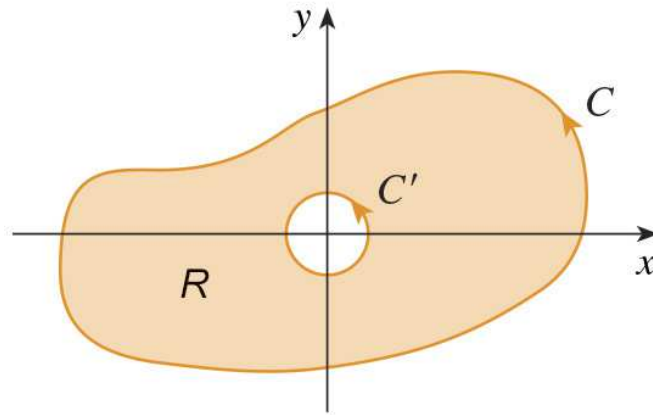


Figura 61

Fonte: Imagem extraída do livro de cálculo (STEWART, 2013)

Seja R a região limitada por C e C' . Como a orientação positiva de C' é $(-C')$, usando o Teorema 1.5 e aplicando a versão geral do Teorema de Green, obtemos

$$\begin{aligned} \oint_C [P dx + Q dy] - \oint_{C'} [P dx + Q dy] &= \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA \\ &= \iint_R \left[\frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \right] dA = 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$\oint_C [P dx + Q dy] = \oint_{C'} [P dx + Q dy]$$

isto é,

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{C'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Agora podemos calcular facilmente essa última integral usando a parametrização do

círculo dada por $\mathbf{r}(t) = a \cos t \mathbf{i} + a \sin t \mathbf{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Logo,

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \oint_{C'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{(-a \sin t)(-a \sin t) + (a \cos t)(a \cos t)}{a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t} dt \\ &= \int_0^{2\pi} dt = 2\pi. \end{aligned}$$

Exemplo 3.5. Seja R a região limitada pela curva $x^2 + y^2 = 9$ externa ao retângulo de vértices $(1, -1)$, $(2, -1)$, $(2, 1)$ e $(1, 1)$, orientada positivamente (ver Figura 62). Calcule $\oint_{\partial R} [(2x - y^3) dx - xy dy]$.

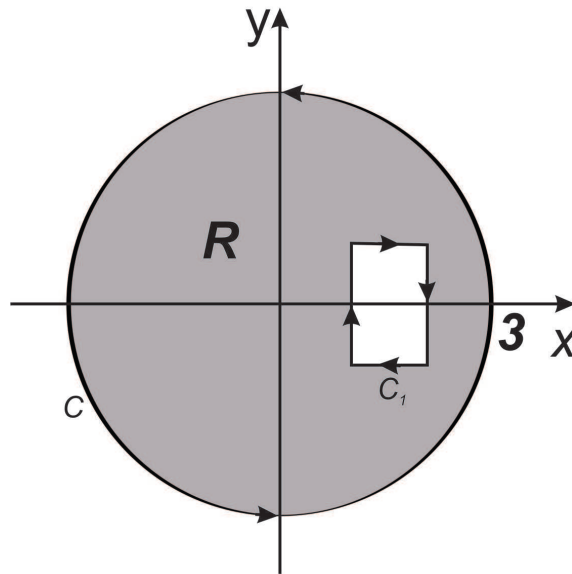


Figura 62

Resolução

$\partial R = C \cup (-C_1)$; então

$$\oint_{\partial R} [(2x - y^3) dx - xy dy] = \oint_C [(2x - y^3) dx - xy dy] - \oint_{C_1} [(2x - y^3) dx - xy dy].$$

a) Seja R_1 a região limitada pela curva $x^2 + y^2 = 9$; $\partial R_1 = C$. Seja $P(x, y) = 2x - y^3$ e $Q(x, y) = -xy$. Aplicando o Teorema de Green a R_1 , utilizando a parametrização usual

do círculo e fazendo uso de coordenadas polares, temos

$$\begin{aligned}
 \oint_C [(2x - y^3) dx - xy dy] &= \iint_{R_1} (3y^2 - y) dx dy \\
 &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^3 (3r^2 \sin^2(\theta) - r \sin(\theta)) r dr \right) d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^3 (3r^3 \sin^2(\theta) - r^2 \sin(\theta)) dr \right) d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{3r^4}{4} \sin^2(\theta) - \frac{r^3}{3} \sin(\theta) \Big|_0^3 \right) d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{243}{4} \sin^2(\theta) - 9 \sin(\theta) \right) d\theta \\
 &= \left[\frac{243}{4} \left(\frac{1}{2}(\theta) - \frac{1}{4} \sin 2(\theta) \right) + 9 \cos(\theta) \right]_0^{2\pi} \\
 &= \frac{243\pi}{4}.
 \end{aligned}$$

b) Seja R_2 a região limitada pelo retângulo; $\partial R_2 = C_1$. Seja $P(x, y) = 2x - y^3$ e $Q(x, y) = -xy$. Aplicando o Teorema de Green a R_2 , temos

$$\begin{aligned}
 \oint_{C_1} [(2x - y^3) dx - xy dy] &= \iint_{R_2} (3y^2 - y) dx dy \\
 &= \int_{-1}^1 \left(\int_1^2 (3y^2 - y) dx \right) dy = 2.
 \end{aligned}$$

Vimos que $\partial R = C \cup (-C_1)$ e de **a)** e **b)**, obtemos

$$\begin{aligned}
 \oint_{\partial R} [(2x - y^3) dx - xy dy] &= \oint_C [(2x - y^3) dx - xy dy] - \oint_{C_1} [(2x - y^3) dx - xy dy]. \\
 &= \frac{243\pi}{4} - 2.
 \end{aligned}$$

3.4 Formas Vetoriais do Teorema de Green

Os operadores divergente e rotacional nos permitem escrever o Teorema de Green em outras versões úteis. Consideramos uma região plana R , sua curva fronteira C e funções P e Q que satisfaçam as hipóteses do Teorema de Green. Em seguida, consideramos o campo vetorial $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$. A sua integral de linha é

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C P dx + Q dy$$

e, considerando \mathbf{F} como um campo vetorial em \mathbb{R}^3 com terceira componente 0, temos

$$\text{rot } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P(x, y) & Q(x, y) & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k}.$$

Portanto,

$$(\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$$

e podemos reescrever a equação do Teorema de Green na seguinte forma vetorial

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_R (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} dA. \quad (3.13)$$

A Equação (3.13) expressa a integral de linha da componente *tangencial* de \mathbf{F} ao longo de C como uma integral dupla da componente vertical rotacional \mathbf{F} sobre a região R delimitada por C . Deduziremos, agora, uma fórmula semelhante, envolvendo a componente *normal* de \mathbf{F} .

Se C é dada pela equação vetorial

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} \quad (a \leq t \leq b)$$

então o vetor tangente unitário é

$$\mathbf{T}(t) = \frac{x'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} \mathbf{i} + \frac{y'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} \mathbf{j}.$$

Podemos verificar que o vetor normal unitário externo a C (ver Figura 63) é dado por

$$\mathbf{n}(t) = \frac{y'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} \mathbf{i} - \frac{x'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} \mathbf{j}.$$

Então, temos

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds &= \int_a^b (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})(t) |\mathbf{r}'(t)| dt \\ &= \int_a^b \left[\frac{P(x(t), y(t))y'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} - \frac{Q(x(t), y(t))x'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} \right] |\mathbf{r}'(t)| dt \\ &= \int_a^b [P(x(t), y(t))y'(t) dt - Q(x(t), y(t))x'(t) dt] \\ &= \oint_C [P dy - Q dx] = \iint_R \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dA \end{aligned}$$

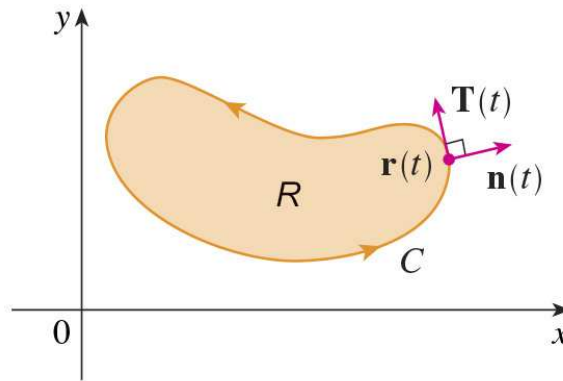


Figura 63

Fonte: Imagem extraída do livro de cálculo (STEWART, 2013)

pelo Teorema de Green. Entretanto o integrando na integral dupla é o divergente de \mathbf{F} . Logo, temos uma segunda forma vetorial do Teorema de Green

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds = \iint_R \operatorname{div} \mathbf{F}(x, y) \, dA. \quad (3.14)$$

A Equação (3.14) diz que a integral de linha da componente normal de \mathbf{F} ao longo de C é igual à integral dupla do divergente de \mathbf{F} na região R delimitada por C .

Exemplo 3.6. Verifique ambas as formas do Teorema de Green para o campo vetorial

$$\mathbf{F}(x, y) = (x - y) \mathbf{i} + x \mathbf{j}$$

e a região R limitada pela circunferência unitária

$$C: \mathbf{r}(t) = (\cos t) \mathbf{i} + (\sin t) \mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Resolução

Calculando $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$ e diferenciando os componentes, temos

$$P = \cos t - \sin t, \quad dx = d(\cos t) = -\sin t \, dt,$$

$$Q = \cos t, \quad dy = d(\sin t) = \cos t \, dt,$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -1, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = 0.$$

Usando a forma em (3.13), obtemos

$$\begin{aligned} \oint_C [P \, dx + Q \, dy] &= \int_{t=0}^{t=2\pi} [(\cos t - \sin t)(-\sin t \, dt) + (\cos t)(\cos t \, dt)] \\ &= \int_0^{2\pi} (-\sin t \cos t + 1) \, dt = 2\pi \\ \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA &= \iint_R (1 - (-1)) \, dA = 2 \iint_R dA = 2\pi. \end{aligned}$$

Pela forma (3.14), temos

$$\begin{aligned}\oint_C [P dy - Q dx] &= \int_{t=0}^{t=2\pi} [(\cos t - \operatorname{sen} t)(\cos t dt) - (\cos t)(-\operatorname{sen} t dt)] \\ &= \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = \pi \\ \iint_R \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dA &= \iint_R (1 + 0) dA \\ &= \iint_R dA = \pi = \text{área dentro da circunferência unitária.}\end{aligned}$$

4 APLICAÇÕES DO TEOREMA DE GREEN

Uma aplicação importante do Teorema de Green é a referente ao cálculo de área de regiões planas R satisfazendo suas hipóteses. Deduziremos, a partir desse teorema, algumas fórmulas que podem ser utilizadas para tal finalidade. Além disso, usaremos a segunda forma vetorial do Teorema de Green para provarmos a primeira e a segunda identidade de Green.

4.1 Cálculo de Áreas Utilizando o Teorema de Green

Se em $\iint_R f(x, y) dx dy$ tivermos $f(x, y) = 1$ para todo x e y , então

$$A(R) = \iint_R dx dy \quad \text{ou} \quad A(R) = \iint_R dy dx$$

representa a área A da região R . Daí, podemos obter algumas fórmulas para o cálculo de áreas usando o Teorema de Green.

Tomando $P(x, y) = 0$ e $Q(x, y) = x$ na equação do Teorema de Green, obtemos

$$A(R) = \iint_R dx dy = \oint_C x dy. \quad (4.1)$$

Por outro lado, tomando $P(x, y) = -y$ e $Q(x, y) = 0$, obtemos

$$A(R) = \iint_R dx dy = \oint_C (-y) dx. \quad (4.2)$$

Somando-se, membro a membro, as fórmulas (4.1) e (4.2) teremos uma terceira fórmula:

$$\begin{aligned} \iint_R dx dy + \iint_R dx dy &= \oint_C x dy + \oint_C (-y) dx \\ 2 \iint_R dx dy &= \oint_C x dy + \oint_C (-y) dx \\ \iint_R dx dy &= \frac{1}{2} \oint_C x dy + \oint_C (-y) dx \\ &= \frac{1}{2} \oint_C [x dy - y dx]. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Exemplo 4.1. Calcule a área envolvida pela elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Resolução

A elipse, orientada no sentido anti-horário, pode ser representada pelas equações paramétricas

$$x = a \cos t \text{ e } y = b \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Denotando essa curva por C e usando a Equação (4.3), a área A da região envolvida pela elipse é

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \oint_C [x \, dy - y \, dx] \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [(a \cos t)(b \cos t) - (b \sin t)(-a \sin t)] \, dt \\ &= \frac{1}{2} ab \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) \, dt \\ &= \frac{1}{2} ab \int_0^{2\pi} dt \\ A &= \pi ab. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Usamos o fato de que $dy = b \cos t \, dt$ e $dx = -a \sin t \, dt$.

Exemplo 4.2. Use o Teorema de Green para calcular a integral de linha

$$\oint_C [(x^4 - 3y) \, dx + (2y^3 + 4x) \, dy]$$

onde C é a elipse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

Resolução

Do Teorema de Green,

$$\begin{aligned} \oint_C [(x^4 - 3y) \, dx + (2y^3 + 4x) \, dy] &= \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x} (2y^3 + 4x) - \frac{\partial}{\partial y} (x^4 - 3y) \right] dx \, dy \\ &= \iint_R (4 + 3) \, dx \, dy \\ &= 7 \iint_R dx \, dy. \end{aligned}$$

A integral dupla $\iint_R dx dy$ é a medida da área da região delimitada pela elipse. Aplicando a Fórmula (4.4), com $a = 3$ e $b = 2$, a medida da área da região interna da elipse é 6π . Logo,

$$\oint_C [(x^4 - 3y) dx + (2y^3 + 4x) dy] = 42\pi.$$

4.2 As Identidades de Green no Plano

Antes de enunciarmos e provarmos as identidades de Green, consideremos:

Lema 4.1. *Se f é um campo escalar e F é um campo vetorial, então*

$$\operatorname{div}(f\mathbf{F}) = f \operatorname{div} \mathbf{F} + \mathbf{F} \cdot \nabla f.$$

Demonstração. De fato, suponhamos que $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ é um campo escalar e $\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z) \mathbf{i} + Q(x, y, z) \mathbf{j} + R(x, y, z) \mathbf{k}$ um campo vetorial. Então,

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(f\mathbf{F}) &= \frac{\partial(fP)}{\partial x} + \frac{\partial(fQ)}{\partial y} + \frac{\partial(fR)}{\partial z} \\ &= \left(f \frac{\partial P}{\partial x} + P \frac{\partial f}{\partial x} \right) + \left(f \frac{\partial Q}{\partial y} + Q \frac{\partial f}{\partial y} \right) + \left(f \frac{\partial R}{\partial z} + R \frac{\partial f}{\partial z} \right) \\ &= f \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) + \langle P, Q, R \rangle \cdot \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right\rangle \\ &= f \operatorname{div} \mathbf{F} + \mathbf{F} \cdot \nabla f. \end{aligned} \quad \square$$

Como consequência do Lema 4.1, se fizermos $\mathbf{F} = \nabla g$, obtemos a seguinte fórmula:

$$\operatorname{div}(f\nabla g) = f \operatorname{div}(\nabla g) + \nabla g \cdot \nabla f. \quad (4.5)$$

Teorema 4.1 (Primeira Identidade de Green). *Sob as hipóteses do Teorema de Green e a existência e continuidade das derivadas parciais de f e g , temos que*

$$\iint_R f \Delta g \, dA = \oint_C f(\nabla g) \cdot \mathbf{n} \, ds - \iint_R \nabla f \cdot \nabla g \, dA,$$

onde a quantidade $\nabla g \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}}$ é a derivada direcional de g na direção do vetor \mathbf{n} e é chamada de *derivada normal* de g .

Demonstração. Pela segunda forma vetorial do Teorema de Green (Equação (3.14)) e Equação (4.5), temos que

$$\begin{aligned} \oint_C f(\nabla g) \cdot \mathbf{n} \, ds &= \iint_R \operatorname{div}(f\nabla g) \, dA \\ &= \iint_R [f \operatorname{div}(\nabla g) + \nabla g \cdot \nabla f] \, dA. \end{aligned}$$

Mas, $\text{div}(\nabla g) = \Delta g$ e conseqüentemente

$$\iint_R f \Delta g \, dA = \oint_C f(\nabla g) \cdot \mathbf{n} \, ds - \iint_R \nabla g \cdot \nabla f \, dA. \quad \square$$

Teorema 4.2 (Segunda Identidade de Green). *Nas condições do Teorema 4.1 vale a seguinte identidade*

$$\iint_R (f \Delta g - g \Delta f) \, dA = \oint_C (f \nabla g - g \nabla f) \cdot \mathbf{n} \, ds.$$

Demonstração. Pelo Teorema 4.1,

$$\iint_R f \Delta g \, dA = \oint_C f(\nabla g) \cdot \mathbf{n} \, ds - \iint_R \nabla f \cdot \nabla g \, dA$$

e

$$\iint_R g \Delta f \, dA = \oint_C g(\nabla f) \cdot \mathbf{n} \, ds - \iint_R \nabla g \cdot \nabla f \, dA.$$

Conseqüentemente

$$\begin{aligned} \iint_R (f \Delta g - g \Delta f) \, dA &= \oint_C [f(\nabla g) \cdot \mathbf{n} - g(\nabla f) \cdot \mathbf{n}] \, ds + \iint_R (\nabla f \cdot \nabla g - \nabla g \cdot \nabla f) \, dA \\ &= \oint_C (f \nabla g - g \nabla f) \cdot \mathbf{n} \, ds. \quad \square \end{aligned}$$

Notando que em ambos os casos $C = \partial R$, podemos reescrever essas identidades como segue:

- **Primeira Identidade de Green**

$$\iint_R f \Delta g \, dA = \oint_{\partial R} f \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} \, ds - \iint_R \nabla f \cdot \nabla g \, dA.$$

- **Segunda Identidade de Green**

$$\iint_R (f \Delta g - g \Delta f) \, dA = \oint_{\partial R} \left(f \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} - g \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} \right) \, ds.$$

Essas identidades são muito importantes, pois são utilizadas no estudo de Equações Diferenciais envolvendo o operador laplaciano Δ , como por exemplo no estudo da Teoria Clássica do Potencial.

5 CONCLUSÃO

Como pudemos constatar ao longo deste trabalho, o Teorema de Green desempenha um papel crucial não somente na matemática como também na física e engenharia. A importância desse teorema se deve não só na simplicidade com que podemos resolver uma integral de linha utilizando-o, como também no vasto campo de aplicação que podemos empregá-lo, como por exemplo, podemos aplicá-lo no cálculo de área de regiões contornadas por uma curva suave ou suave por partes que seja fechada simples e utilizá-lo para provar outros resultados matemáticos ou físicos.

Sem dúvida o Teorema de Green é uma ferramenta poderosa na resolução de diversos tipos de problemas que envolvem matemática, física e engenharia. Sendo assim, estudá-lo e compreendê-lo se torna indispensável para os estudantes dessas áreas de ensino.

Com este trabalho tivemos a oportunidade de reaver assuntos já esquecidos dos nossos estudos em sala de aula. A princípio, produzi-lo parecia um desafio insuperável, mas com o desenvolvimento das pesquisas ficamos cada vez mais instigados a continuar. Adentrar no mundo das integrais de linha e das integrais duplas em busca de seus segredos foi gratificante, pois sabia que sem elas não seria possível chegar ao personagem principal de nosso trabalho, o encantador Teorema de Green.

Enfim, todo o esforço dado valeu a pena, pois incorporamos novos conhecimentos que, certamente, nos serão úteis na vida pessoal e profissional. Nos sentimos aliviados e felizes com o sentimento do dever cumprido.

Referências

- ANTON, H.; BIVENS, I. C.; DAVIS, S. L. **Cálculo**. 8. ed. Porto Alegre: Bookman, 2007. v. 2.
- FLEMMING, D.; GONÇALVES, M. **Cálculo A: funções, limite, derivação, integração**. 6. ed. São Paulo: Prentice Hall Brasil, 2006.
- FLEMMING, D.; GONÇALVES, M. **Cálculo B: Funções de Várias Variáveis, Integrais Múltiplas, Integrais Curvilíneas e de Superfície**. 2. ed. São Paulo: Prentice Hall Brasil, 2007.
- FOULIS, D. J.; MUNEM, M. A. **Cálculo**. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 2011. v. 2.
- GUIDORIZZI, H. L. **Um Curso de Cálculo**. 3. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2013. v. 3.
- HASS, J.; THOMAS, G. B.; WEIR, M. D. **Cálculo**. 12. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2012. v. 2.
- LEITHOLD, L. **O Cálculo com Geometria Analítica**. 3. ed. São Paulo: HARBRA Ltda, 1994. v. 2.
- MATOS, M. P.; SILVA, A. A. **Cálculo de Várias Variáveis (Notas de Aula - UFPB)**. Paraíba: UFPB, 2014. Disponível em: <<http://www.mat.ufpb.br/hinojosa/disciplinas/2012-2/Calculo%20III/Calculo-III%20Andrade-Marivaldo.pdf>>. Acesso em: 2 de jun. 2016.
- MEDEIROS, H. B.; MENEZES, M. L. S.; PINTO, D. O. George Green, o homem e o teorema. **Matemática Universitária**, Rio de Janeiro, n. 50/51, p. 56–64, junho/dezembro 2011. Disponível em: <http://rmu.sbm.org.br/Conteudo/n50_n51/n50_n51_Artigo02.pdf>. Acesso em: 20 de set. 2016.
- MORGADO, M. C. F.; PINTO, D. **Cálculo Diferencial e Integral de Funções de Várias Variáveis**. 3. ed. Rio de Janeiro: Editora UFRJ, 2009.
- STEWART, J. **Cálculo**. 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013. v. 2.

Apêndices

APÊNDICE A – George Green (1793-1841)

George Green nasceu no dia 13 de julho de 1793 em Nottingham, Inglaterra. Foi o filho único de um padeiro, também chamado George. No final do séc. XVIII, a indústria do algodão declinava e muitos trabalhadores perderam seus empregos. Em 1800, Nottingham estava repleta de pessoas desempregadas e necessitadas, pois a colheita fora escassa, o milho estava caro e, além disso, a Inglaterra estava em guerra com a França. Consequentemente, o preço do pão (alimento básico) aumentara e muitos acusavam os padeiros por contribuírem para tal estado estocando matéria prima. A inquietação culminou na revolta que ficou conhecida, localmente, como “Bread Riot”. As padarias, dentre elas a de George, sofriam ataques e destruição. Época essa em que George (pai) enviou seu filho à Goodacre Academy, escola mais cara e renomada de Nottingham. Em pouco tempo os conhecimentos do aluno em matemática superavam os do mestre. Mas, após dois anos ele deixou a escola para ajudar seu pai na padaria que começava a progredir.

Em 1807, George (pai) comprou uma propriedade rural em Sneinton, aldeia próxima de Nottingham, onde construiu um moinho de milho. Tudo indica que a maior parte dos cuidados com o moinho foi deixada a cargo de George (filho) e a um administrador chamado William Smith, cuja filha viria a ser a mãe dos sete filhos de George Green, embora jamais tivesse assumido esta união em alguma convivência social. O trabalho no moinho ocupou boa parte de seu tempo e era considerado por Green como penoso, segundo seu primo e também cunhado. Após o falecimento de seu pai em 1829, George Green deixou o moinho aos cuidados de seu administrador que, para nós brasileiros seria seu sogro.

Em 1823, após vários anos de sua saída da Goodacre Academy George Green associa-se à Nottingham Subscription Library, na Bromley House. Tudo indica que seu interesse se voltou para o acervo bibliográfico. As obras pertinentes à matemática eram poucas, porém cruciais.

Em 1828, cinco anos após sua filiação à biblioteca, Green publicava seu primeiro e mais importante trabalho, *An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism* (Um Ensaio sobre a Aplicação da Análise Matemática às Teorias de Eletricidade e Magnetismo). A publicação foi financiada por ele próprio com a participação de vinte e uma pessoas sendo que cada uma pagou por sua cópia. O trabalho continha resultados muito importantes, entre os quais figurava

aquele que hoje conhecemos como Teorema de Green. O trabalho foi escrito com a notação de Leibniz, notação esta pouco utilizada na Inglaterra. Até aquele momento, matemáticos ingleses usavam a notação de Newton e tinham dificuldade para entender os escritos dos matemáticos da Europa Continental, especialmente dos franceses, que usavam os símbolos de Leibniz em seus trabalhos.

A repercussão do trabalho foi mínima, talvez porque tenha sido divulgado a pessoas alheias ao tema, ou seja, falta de bagagem intelectual daquelas para apreciá-lo. Entretanto, sir Edward Bromhead, um homem influente de Lincoln, mostrou-se interessado e escreveu a Green oferecendo-se para divulgar seu trabalho. Sir Edward havia estudado em Cambridge, onde teve oportunidade de conviver com vários matemáticos franceses, o que pode ter sido decisivo para encontrar importância naquele escrito. Na ocasião, Green não esboçou reação alguma quanto à oferta de sir Edward. Mais tarde, ele confessaria que foi persuadido por alguém a ignorá-la. Não se sabe exatamente quem foi, mas indícios apontam para Robert Goodacre, seu primeiro mestre.

Quando dois anos se passaram após a publicação do trabalho, de algum modo, o contato entre Green e sir Edward se estabeleceu, e este ainda estava disposto a honrar sua oferta. Nos três anos que se seguiram Green produziu mais três papers: *Mathematical Investigations Concerning the Laws of the Equilibrium Fluids Analogous to the Electric Fluid*; *On the Determination of the Exterior and Interior Attractions of Ellipsoids of Variable Densities* e *Researches on the Vibrations of Pendulums in Fluid Media*. Os dois primeiros foram enviados por sir Edward para publicação no *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*; o terceiro, sir Edward enviou para a *Royal Society of Edinburgh* e foi publicado em 1836. Então, foi assim, por meio desse cavalheiro, que os resultados de Green alcançaram os meios usuais de divulgação da comunidade científica e, também, foi através dele que vários contatos importantes ocorreram.

Em abril de 1833, Green envia uma carta a sir Edward pedindo sua ajuda para ingressar no ensino oficial de Cambridge. De fato, em outubro desse mesmo ano, George Green iniciou sua graduação no Caius College em Cambridge. Época essa em que Green tinha quarenta anos de idade e quatro filhos com Jane Tollins (a filha do gerente do moinho), mas nada indica que ele tivesse vivido, de fato, com Jane e seus filhos como uma família. É provável que seu silêncio a respeito desse relacionamento, tenha sido por causa de sua pretensão em obter uma posição como college fellowship, e isso exigiria que ele fosse solteiro.

Em outubro de 1839, George Green alcança a tão almejada posição como fellow. Durante seus estudos em Cambridge, ele produz seis trabalhos; dois em hidrodinâmica, dois sobre reflexão e refração de som e dois sobre reflexão e refração de luz. Apenas seis meses depois de ter conseguido a posição de fellowship de Cambridge, Green volta a Nottingham já mostrando uma saúde bastante frágil, é tanto que veio a falecer de gripe

em junho de 1841.

O reconhecimento da importância de seus escritos só aconteceria alguns anos depois pela ação de um escocês chamado William Thomson, mais conhecido como Lord Kelvin. Este, tendo percebido a importância do trabalho de Green levou uma cópia para um editor de um periódico muito lido na Europa Continental. Este lhe prometeu publicar o trabalho e o fez em três partes, entre 1850 e 1854, em inglês e, mais tarde em alemão; mas, foi só em 1871 que esse trabalho de George Green foi publicado na Inglaterra. Para saber mais leia (MEDEIROS; MENEZES; PINTO, 2011).