UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE

CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE

UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA E MATEMÁTICA

CURSO DE GRADUAÇÃO EM LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Manoel Messias Frutuoso dos Santos

# O Teorema do Valor Médio e Suas Consequências

Cuité-PB

2016

Manoel Messias Frutuoso dos Santos

# O Teorema do Valor Médio e Suas Consequências

TCC apresentado ao curso Graduação em Licenciatura em Matemática do Centro de Educação e Saúde da Universidade Federal de Campina Grande em cumprimento às exigências do Componente Curricular Trabalho Acadêmico Orientado, para obtenção do grau de Graduado em Licenciatura em Matemática.

Orientadora: Edna Cordeiro de Souza

Cuité-PB

2016

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA NA FONTE
Responsabilidade Jesiel Ferreira Gomes – CRB 15 – 256

S237t Santos, Manoel Messias Frutuoso dos.

O teorema do valor médio e suas consequências. / Manoel Messias Frutuoso dos Santos. – Cuité: CES, 2016.

41 fl.

Monografia (Curso de Licenciatura em Matemática) – Centro de Educação e Saúde / UFCG, 2016.

Orientadora: Edna Cordeiro de Souza.

1. Lagrange. 2. Derivada. 3. Rolle. 4. Cauchy. I. Título.

Biblioteca do CES CDU 51

Manoel Messias Frutuoso dos Santos

**O Teorema do Valor Médio e Suas Consequências**

Monografia de Trabalho de Conclusão de Curso submetida à banca examinadora como parte dos requisitos necessários a obtenção do grau de Graduação em Licenciatura em Matemática.

A citação de qualquer trecho deste trabalho é permitida, desde que seja feita de conformidade com as normas de ética científica.

**Aprovado em:** _____ / _____ / _____

**BANCA EXAMINADORA**

---

Edna Cordeiro Souza (Orientadora) - UFCG

---

Aluizio Freire da Silva Junior - UFCG

---

Jussiê Ubaldo da Silva - UFCG

# Agradecimentos

Quero agradecer em primeiro lugar a Deus.

A minha família, por estarem sempre ao meu lado, em particular, ao meu irmão Fábio Frutuoso Santos, pelo grande incentivo aos estudos. E a minha namorada, Anglidimogean Barbosa Bidô, pela atenção e ajuda em decisões difíceis em minha vida.

A professora Edna, pela intensa ajuda e orientação neste trabalho. Aos professores Aluizio e Jussiê por participarem da banca, e a todos as outras pessoas que contribuíram para o desenvolvimento do trabalho.

Enfim, agradeço a todos meus amigos da Graduação, sou extremamente grato a todos. Participaram não só de momentos de descontração, como também estiveram presentes em momentos marcantes, necessários para minha formação.

# Resumo

Este trabalho faz um estudo sobre o Teorema do Valor Médio e algumas de suas consequências. Inicialmente foi feita uma contextualização histórica, trazendo a biografia de Joseph Louis Lagrange e a história da derivada. Conceitos fundamentais foram definidos a fim de facilitarem na demonstração do teorema. Por fim, apresentamos teoremas importantes no Cálculo Diferencial e Integral, como o Teorema de Rolle e de Cauchy, um caso particular e uma generalização, respectivamente, do teorema do Valor Médio.

**Palavras-chave:** Lagrange, derivada, Rolle, Cauchy.

# Abstract

This work is a study of the Mean Value Theorem and some of its consequences. Initially it was made a historical contextualization, bringing the biography of Joseph Louis Lagrange and the history of the derivative. Fundamental concepts were defined in order to facilitate the theorem demonstration. Finally, presented important theorems in Differential and Integral Calculus, as Rolle's theorem and Cauchy, a particular case and a generalization, respectively, of mean value theorem.

**Keywords:** Lagrange, derived, Rolle, Cauchy.

# Sumário

# Introdução

Este trabalho faz um estudo sobre um dos teoremas mais importantes do Cálculo Diferencial e Integral. Formulado por Joseph Louizz Lagrange (1736-1813), o Teorema do valor Médio (TVM) ou Teorema de Lagrange é utilizado na prova de muitos outros teoremas do Cálculo, além de ter vasto proveito em Análise Matemática, Geometria e Física. Vamos mostrar também um dos casos particulares mais famosos do TVM, conhecido como Teorema de Rolle, em homenagem a Michel Rolle (1652-1719) e apresentaremos ainda uma generalização do TVM conhecido como Teorema de Cauchy (1789-1857).

No primeiro capítulo abordaremos um pouco da história de Joseph Lagrange. Discutindo sobre suas conquistas na área da Matemática, prêmios ganhos e curiosidades sobre o matemático. Faremos ainda, um estudo sobre a história da derivada. Seguindo uma trajetória evolutiva do cálculo diferencial nos estudos feitos por alguns matemáticos filósofos do século XVII, como por exemplo, René Descartes, Evangelista Torricelli e Pierre de Fermat.

No segundo capítulo trataremos de definir conceitos fundamentais importantes do Cálculo Diferencial. Tais conceitos nos servirão de base para entender a demonstração do Teorema do Valor Médio. Estudaremos conceitos de derivadas, taxa de variação, interpretação geométrica e física da derivada, função contínua, máximos, mínimos e Teorema de Fermat. Concluiremos este capítulo com o teorema de Weierstrass, teorema muito relevante que usaremos na demonstração do teorema do valor médio.

Por fim, iremos abordar o teorema do valor médio (TVM), fazendo sua interpretação geométrica e mostrando algumas de suas principais consequências, como por exemplo, a recíproca do fato de que a derivada de uma função constante é igual a zero. Falaremos ainda sobre o teorema de Rolle, um caso particular do TVM, e ainda sobre o teorema de Cauchy, uma generalização do teorema do valor médio.

# Capítulo 1

# Contexto Histórico

## 1.1 Biografia - Joseph Louis Lagrange

Joseph Louis Lagrange é um dos maiores matemáticos de todas as épocas. Nascido em Turim (Itália), tem origem Francesa e viveu de 1736 a 1813. Durante este tempo, fez descobertas fantásticas em diversas áreas da matemática. Aos 17 anos tornou-se professor de matemática na Rela Academia Militar de Turim. Dentre os principais tratados destacamos o estudo sobre o Cálculo de Variações iniciado primeiramente por Leonhard Euler (1707-1783), que mas tarde viria a deixar de publicar suas próprias pesquisas na área para Lagrange dar continuidade aos mesmos. Lagrange também fez estudos sobre a propagação do som. Estudos estes, que consideravam apenas as partículas que estão sobre uma linha reta, diminuindo o enigma à mesma equação diferencial parcial representada pelo movimento das ondas vibrantes.

Com 26 anos de idade Lagrange alcançou o auge do sucesso na Europa, por seus incríveis desempenhos na matemática. Em 1764 ganhou o prêmio Teoria da Libração da Lua da Academia Francesa. Prêmio ganho pela explicação do por que a Lua sempre volta com a mesma face para a Terra. No ano de 1766, indicado por D' Alembert e pelo próprio Euler para ocupar seu lugar na Academia de Berlim, Lagrange chegou á Alemanha.

Em Berlim, Lagrange passou 20 anos de sua vida. Casou-se, mas sua mulher veio a falecer não muito tempo depois, tornando um casamento curto. Dedicou-se também este tempo na escrita de livros como: *Mécanique Analytique* (Mecânica Analítica) e *Réflexions sur la résolution algébrique des équations* (Reflexões sobre a Resolução de Equações Algébricas). Neste último foi feito um estudo sobre as equações algébricas, onde foi estabelecido Teorema de Lagrange, em que a ordem de um subgrupo de um grupo finito é um divisor da ordem do grupo. Sua demonstração só veio à público 30 anos mais tarde pelo Italiano Pietro Abbsti (1768-1842).

Passado esses 20 anos na Alemanha, Lagrange partiu para Paris (França), convidado por Luíz XVI. Por lá sofreu de melancolia *, doença que aturou por dois anos. Curiosamente, a agitação da Revolução Francesa o curou dessa ameaçadora doença. Nos anos seguintes, conseguiu voltar à rotina de sempre, ativo nas pesquisas e vitorioso nas oportunidades que conseguiam. Tornando-se professor nas Instituições de École Normale em 1795 e em École Polytechnique em 1797, ambas em Paris.

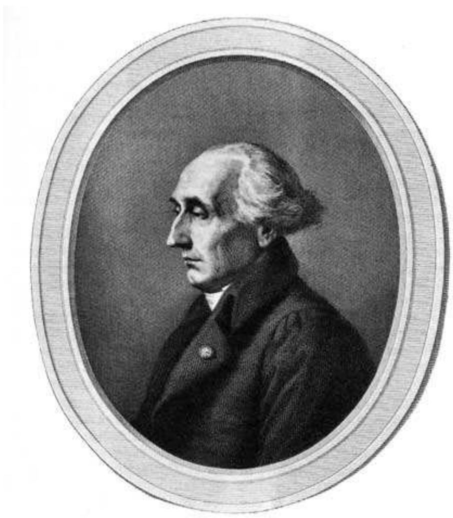


Figura 1.1: Joseph louis Lagrange (1736-1813).
(Fonte: Google Imagens)

Lagrange morreu aos 77 anos em Paris. Seus estudos em equações diferenciais, teoria dos números, séries Infinitas, probabilidade e dentre tantos outros estudos, deixou-nos com grandes resultados na Matemática. Contam que certa vez ele afirmou: “o matemático só

*Distúrbio mental caracterizado por depressão em grau variável, sensação de incapacidade, perda de interesse pela vida.

poderá dizer que dominou um assunto quando puder explica-lo ao primeiro homem que encontrar na rua".

## 1.2 História da Derivada

Para abordarmos nosso estudo sobre a história da derivada, vamos seguir a trajetória evolutiva do cálculo diferencial nos estudos feitos por alguns matemáticos filósofos do século XVII.

O matemático Francês René Descartes (1596 - 1650) deixou um resultado de extrema importância para o conceito de derivadas. Em seu trabalho publicado em 1637, fez um estudo sobre classificação de curvas e aborda um método interessante de construir tangentes às curvas.

De modo geral, este método pronuncia que (Figura 1.2): Seja $f(x, y) = 0$ (essa função pode ser construída a partir de $y = f(x)$ e daí $f(x, y) = f(x) - y = 0$) a equação da curva dada e $(x_1, y_1)$ as coordenadas do ponto $P$ da curva pelo qual se deseja traçar a tangente. Seja $Q$ um ponto do eixo $x$ de coordenadas $(x_2, 0)$. Então a equação da circunferência de centro $Q$ pelo ponto $P$ é

$$(x - x_2)^2 + y^2 = (x_1 - x_2)^2 + y_1^2.$$

O objetivo do método de Descartes é encontrar essa circunferência de modo que ela seja tangente à curva no ponto $P$, observe a figura 1.2. O raio da circunferência seria normal à reta tangente em $P$ e, assim, seria possível traçar essa tangente.

Outro grande físico e matemático que contribuiu bastante para o estudo das derivadas foi Evangelista Torricelli (1608-1647). Ele utilizou o método de composição de movimentos, para calcular a tangente à ciclóide num ponto genérico da curva. O método consiste em uma curva como sendo gerada por um ponto cujo movimento se compõe de dois movimentos conhecidos. Então a resultante dos vetores velocidade dos dois movimentos conhecidos fornece a reta tangente à curva (figura 1.3).

Pierre de Fermat (1601-1665) também deixou suas contribuições no cálculo diferencial.

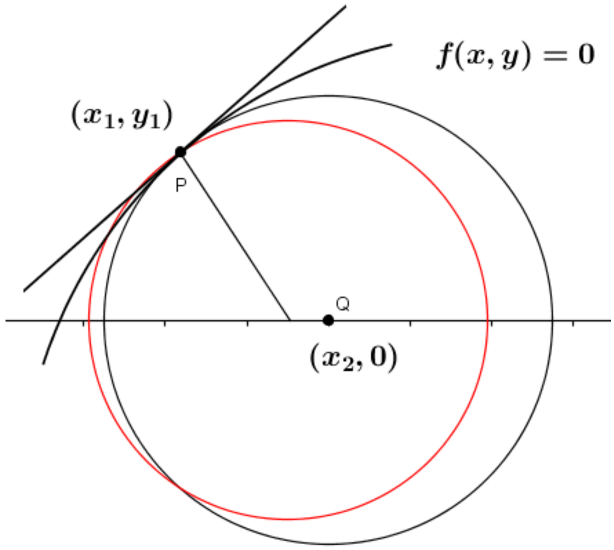



Figura 1.2: Método de René Descartes.

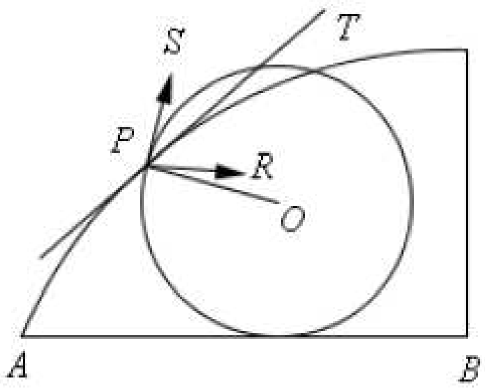



Figura 1.3: Método de René Descartes.

(Fonte: Google Imagens)

Em seu método para achar máximos e mínimos, ele comparou o valor de $y = f(x)$ num ponto com o valor $f(x+E)$ num ponto vizinho. Para encontrar os pontos de máximos e mínimos, Fermat igualou os valores $f(x)$ e $f(x+E)$, percebendo que, embora não sejam precisamente iguais, são quase os mesmos valores. Em seguida Fermat dividia tudo por $E$ depois fazia $E = 0$. Assim, Os resultados obtidos eram as abscissas dos pontos de máximo e mínimo da função $f(x)$.

O método usado por Fermat para encontrar pontos de máximos e mínimos é equivalente a hoje a diferenciação, dada pela fórmula abaixo:

$$\lim_{E\to 0} \frac{f(x+E)-f(x)}{E}.$$

Nessa época ainda não existia o conceito de limite, porém o método de Fermart se assemelha bastante ao usado hoje nos livros de cálculo. Algumas diferenças são notadas, como por exemplo, o uso do símbolo $h$ ao invés do $E$, e não se faz $E$ tender a zero, mas sim igual a zero no método de Fermat.

Outro trabalho apresentado por Fermat foi o método para encontrar tangentes a uma curva. O método, segundo Fermat, é semelhante ao apresentado anteriormente, para encontrar máximos e mínimos. A técnica consiste em encontrar no ponto $(a, f(a))$ a tangente à curva $y = f(x)$. Sendo $e$ muito pequeno, o ponto $(a+e, f(a+e))$, pode ser considerando ainda sobre a curva dada (Observe a Imagem 1.4 ).

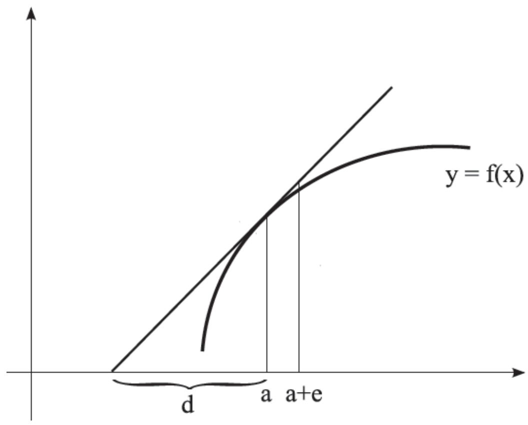



Figura 1.4: Método de Pierre de Fermat.

Deste modo, considerando $T$ o ponto de interseção da curva com o eixo $x$ e a distancia entre os ponto $T$ e $(a, 0)$ de $d$, usando semelhança de triângulos, podemos chegar a seguinte condição:

$$\frac{f(a)}{d} = \frac{f(a+e)}{d+e}.$$

Fazendo pequenos ajustes a fórmula acima, em seguida, dividindo por $e$ o resultado encontrado, e por fim fazendo $e = 0$. Após todos estes procedimentos, o novo algoritmo encontrado permite calcular o valor de $d$. A equação $m = \frac{f(a)}{d}$ apresentada no método de Fermat é equivalente ao que hoje conhecemos como $f'(a)$.

# Capítulo 2

# Conceitos Fundamentais

Neste capítulo estudaremos conceitos importantes do Cálculo Diferencial e Integral. Definição de derivada, Interpretação Geométrica e Física da derivada, Máximos, Mínimos e Teorema de Fermat são alguns dos conceitos que aprenderemos a seguir. Tais considerações serão de extremo valor para os próximos capítulos.

## 2.1 Derivada

**Definição 1** *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função definida num intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ e $x_0 \in I$. O limite*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

*quando existe e é finito, denomina-se* ***derivada*** *de $f$ em $x_0$ e indica-se por $f'(x_0)$. Se $f$ admite derivada em $x_0$, então diremos que $f$ é derivável ou diferenciável em $x_0$. Diremos que $f$ é uma função derivável ou diferenciável se $f$ for derivável em cada ponto de seu domínio.*

**Exemplo 2.1** *Seja $f(x) = k$ uma função constante. Mostraremos que $f'(x) = 0$ para todo $x$.*

***Solução:*** *De fato, pela definição de derivada sabemos que*

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

*Como $f(x) = k$ para todo $x$, resulta $f(x+h) = k$ para todo $x$ e todo $h$, assim*

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{k-k}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0.$$

**Observação 1** *Segue das propriedades dos limites que*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

*Assim,*

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

*ou*

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

**Notações de Derivadas**

Uma das notações de derivadas mais antiga, porém ainda utilizada em livros técnicos, foi a notação $\dot{s}$, usada por Isaac Newton *. Outro grande estudioso, Gottfried Leibniz †, usou o limite de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, para o valor numérico da derivada.

Com o passar dos anos foram surgindo outras maneiras de representar a derivada de uma função $y = f(x)$. Dentre as notações mais comuns estão:

$$f'(x), D(f)(x), D_x f(x), \frac{dy}{dx}, \frac{df}{dx}, y'.$$

### 2.1.1 Derivadas Laterais

**Definição 2** *(Derivadas Laterais): Seja $f$ uma função definida no intervalo (a,b) e $x_0 \in (a,b)$.*

1. *A **derivada à direita** de $f$ em $x_0$ , denotada por $f'_+(x_0)$, é definida por $f'_+(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, caso este limite exista.*

*Período em que viveu: 4 de janeiro de 1643 até 31 de março de 1727. País de origem: Inglaterra.

†Período em que viveu: 1º de julho de 1646 até 14 de novembro de 1716. País de origem: Alemanha.

2. *A **derivada à esquerda** de $f$ em $x_0$, denotada por $f'_-(x_0)$, é definida por* $f'_-(x_0) = \lim_{h \to 0^-} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$*, caso este limite exista.*

**Teorema 1** *Uma função $f$ é derivável em um ponto $x_0$ se, e somente se, as derivadas laterais existem e são iguais.*

**Observação 2** *Segue do Teorema 1 que se $f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0)$ então $f'(x_0)$ não existirá.*

**Teorema 2** *Se uma função $f$ for derivável em $x_0$, então $f$ será contínua em $x_0$.*

**Demonstração.** Temos como hipótese inicial que $f$ é derivável em $x_0$, assim $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe e é igual a $f'(x_0)$. Logo, precisamos provar que $f$ é contínua em $x_0$, isto é, $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Temos que,

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0).$$

com $x \neq x_0$. Logo

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0)] = \lim_{x \to x_0} \left[ \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right] \cdot \lim_{x \to x_0} (x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0$$

ou seja,

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0$$

e, portanto

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)\cdot$$

■

**Exemplo 2.2** *Seja* $f(x) = \begin{cases} x^2 & se \quad x \leq 1 \\ 1 & se \quad x > 1 \end{cases}$.

*a) $f$ é contínua em 1?*

*b) $f$ é diferenciável em 1?*

***Solução:***

*a)* $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = 1 = f(1)$, *logo, f é contínua em 1.*

*b) Veremos agora se f é derivável em 1. Temos*

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} & se \quad x < 1 \\ 0 & se \quad x > 1 \end{cases}.$$

*Assim,*

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 0$$

*e*

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} (x + 1) = 2.$$

*Logo,* $f'_+(1) \neq f'_-(1)$ *e portanto* $f'(1)$ *não existe, ou seja, f não é derivável em 1.*

**Observação 3** *O exemplo 2.2 mostra que a recíproca do Teorema 2 não é verdadeira.*

### 2.1.2 Interpretação Geométrica da Derivada

Considere $y = f(x)$ uma curva definida no intervalo $(a, b)$, Figura 2.1. Sejam $P(x_0, y_0)$ e $Q(x_1, y_1)$ dois pontos distintos da curva que representa o gráfico de $y = f(x)$. Seja $s$ a

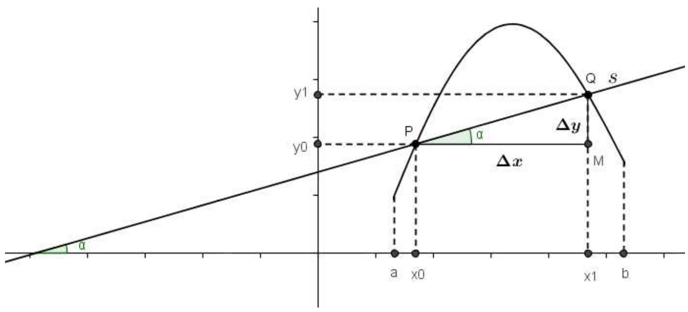



Figura 2.1: Interpretação Geométrica da Derivada.

reta secante que passa pelos pontos $P$ e $Q$. Considerando o triângulo retângulo $PMQ$, temos que a inclinação da reta $s$ (ou coeficiente angular de s) denotado por $m_s$ é

$$m_s = tg\alpha = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{\triangle\, y}{\triangle\, x}$$

Suponhamos agora que, mantendo $P$ fixo, $Q$ se mova sobre a curva em direção a $P$. Diante disto, a inclinação da reta secante $s$ variará.

À medida que $Q$ vai se aproximando cada vez mais de $P$, a inclinação da secante varia cada vez menos, tendendo para um valor limite constante. Esse valor limite, é chamado coeficiente angular $m_t$ da reta tangente à curva no ponto $P$, ou também coeficiente angular da curva em $P$.

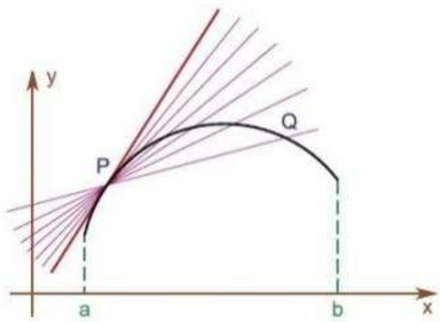



Figura 2.2: Variação da inclinação da Reta Secante.
(Fonte: Google Imagens)

Deste modo, o coeficiente angular $m_s$ tem um limite $m_t$ quanto $Q$ tende para $P$, que é o coeficiente angular da reta tangente.

Indicando-se a abscissa do ponto $Q$ por $x_1 = x_0 + h$ $(h = x_1 - x_0)$, então se $Q \to P$ temos que $h \to 0$, o que é equivalente a $x_1 \to x_0$. Assim

$$m_t = \lim_{x_1 \to x_0} m_{PQ} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Se este limite existe, é o coeficiente angular da reta tangente. Logo, $m_t = f'(x_0)$, ou seja, a derivada de uma função em um ponto fornece o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico desta função, neste ponto.

### 2.1.3 A Derivada como Taxa de Variação

A derivada pode ser interpretada como a taxa de variação instantânea de uma função. Seja $y = f(x)$ uma função definida no intervalo aberto $I$ e $x_0, x_1 \in I$. Se $x$ variar de

$x_0$ até $x_1$, representamos essa variação por $\Delta x = x_1 - x_0$ e a variação de $y$ é dada por $\Delta y = f(x_1) - f(x_0)$. O quociente

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

é dito Taxa de Variação Média de $y$ em relação a $x$.

A taxa de variação de $y$ em relação a $x$ num instante $x = x_0$ é chamada Taxa de Variação Instantânea e dada por

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f'(x_0)$$

se o limite existir. Portanto, a taxa de variação instantânea de uma função em um ponto é dada pela sua derivada neste ponto.

A interpretação da derivada como uma taxa de variação tem aplicações práticas nas mais diversas ciências. Por exemplo, sabemos da física que a velocidade é a variação do espaço percorrido num determinado intervalo de tempo.

Suponhamos que uma partícula se desloca sobre o eixo $x$ com função de posição $x = s(t)$. Isto significa dizer que a função $s$ fornece a cada instante a posição da partícula na reta.

A velocidade média da partícula entre os instantes $t$ e $t + \Delta t$ é definida pelo quociente

$$v_m = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t},$$

onde $\Delta x = s(t + \Delta t) - s(t)$ é o deslocamento da partícula entre os instantes $t$ e $t + \Delta t$.

Para determinar a velocidade da partícula no instante $t$ devemos fazer $\Delta t$ cada vez menor ($\Delta t \to 0$). Assim, a velocidade neste instante é dada por

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} = s'(t).$$

Lembrando que a aceleração é a variação da velocidade num certo intervalo de tempo. Por raciocínio análogo ao anterior, segue que a aceleração média no intervalo de tempo de $t$ até $(t + \Delta t)$ é dada pelo quociente

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}.$$

Para obter a aceleração da partícula num instante $t$ tomemos sua aceleração média em intervalos de tempos $\Delta t$ cada vez menor. Assim, obtemos

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = v'(t).$$

Isto é,

$$a(t) = v'(t) = s''(t).$$

**Proposição 1** *(Regra da Cadeia) Se $y = g(u)$, $u = f(x)$ e as derivadas $\frac{dy}{du}$ e $\frac{du}{dx}$ existem, então a função composta $y = g[f(x)]$ tem derivada que é dada por*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \quad ou \quad y'(x) = g'(u) \cdot f'(x).$$

**Exemplo 2.3** *Um ponto se move ao longo do gráfico de $y = x^2 + 1$ de tal modo que sua abscissa $x$ varia com uma velocidade constante de $3cm/s$. Vamos encontrar a velocidade da ordenada $y$ quando $x = 4$.*

***Solução:*** *Façamos, por um momento, $x = g(t)$, e seja $t_0$ o instante em que $x = 4$, isto é, $g(t_0) = 4$. O que se quer então é a velocidade da abscissa $y$ no instante $t_0$, ou seja, $\frac{dy}{dt}$ quando $t = t_0$.*

*Como $y = x^2 + 1$, pela regra da cadeia, temos*

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = 2x\frac{dx}{dt}.$$

*Como*

$$\frac{dx}{dt} = 3,$$

*obtemos*

$$\frac{dy}{dt} = 6x.$$

*Daí como $x = 4$ para $t = t_0$, resulta*

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=t_0} = 24cm/s.$$

*Deste modo, para $x = 4$, a velocidade da ordenada $y$ será $24(cm/s)$.*

## 2.2 Máximos e Mínimos

O maior e o menor valor que uma função assume em seu domínio, são respectivamente, os valores máximo e mínimo absolutos de uma função. No entanto, são também importantes os valores máximo e mínimo em uma vizinhança de um ponto.

**Definição 3** *Uma função $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tem* máximo absoluto *em $c$ se $f(x) \leq f(c)$ para todo $x \in D$. Neste caso, o valor $f(c)$ é chamado* ***valor máximo*** *de $f$ em $D$.*

**Definição 4** *Uma função $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tem* mínimo absoluto *em $c$ se $f(x) \geq f(c)$ para todo $x \in D$. Neste caso, o valor $f(c)$ é chamado* ***valor mínimo*** *de $f$ em $D$.*

Observe a Figura 2.3 e perceba os valores extremos da função.

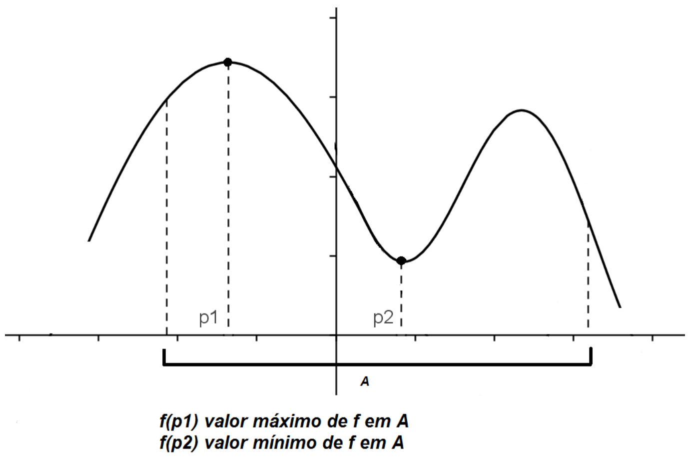



Figura 2.3: Valores extremos de $f$.

**Observação 4** *Os valores de máximo e mínimo absolutos de uma função são chamados* ***valores extremos da função****.*

**Definição 5** *Uma função $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tem* ***máximo local*** *(ou máximo relativo) em um ponto $c$ de seu domínio, se existe um intervalo aberto $I$, tal que $c \in I$ e $f(x) \leq f(c)$ para todo $x \in I \cap D$. Neste caso, dizemos que $f(c)$ é valor máximo local de $f$.*

**Definição 6** *Uma função $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tem* ***mínimo local*** *(ou mínimo relativo) em um ponto $c$ de seu domínio, se existe um intervalo aberto $I$, tal que $c \in I$ e $f(x) \geq f(c)$ para todo $x \in I \cap D$. Neste caso, dizemos que $f(c)$ é valor mínimo local de $f$.*

**Observação 5** *Pontos de máximo e mínimo locais são chamados* ***extremos locais*** *(ou extremos relativos).*

Note na figura abaixo os extremos relativos de $f$.

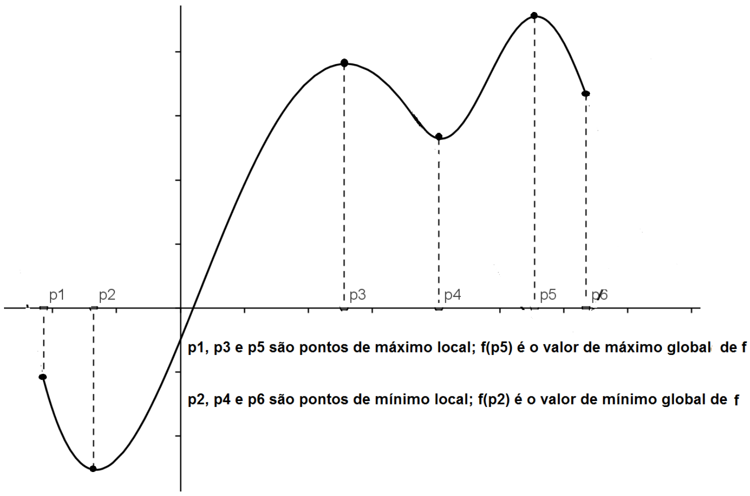



Figura 2.4: Extremos relativos de $f$.

## 2.3 Teorema de Fermat

Utilizaremos o próximo resultado na demonstração do Teorema de Fermat, o qual nos permite encontrar possíveis pontos de máximo e mínimo locais de uma função.

**Proposição 2** *(Conservação do sinal do limite) Sejam $f, g : I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$. Tais que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ e $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = M$. Se $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in I - \{x_0\}$, então $L \leq M$.*

**Demonstração.** Supondo que $L > M$, pela propriedade do limite da diferença, temos:

$$\lim_{x \to x_0} (g(x) - f(x)) = M - L.$$

Logo, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|(g(x) - f(x)) - (M - L)| < \varepsilon$ sempre que $x \in I$, $0 < |x - x_0| < \delta$. Como por hipótese $L - M > 0$, tomemos $\varepsilon = L - M$ em particular e teremos um número $\delta > 0$, tal que

$$|(g(x) - f(x)) - (M - L)| < L - M$$

sempre que $x \in I$ e $0 < |x - x_0| < \delta$. Usando o fato de que: $a \leq |a|$ para qualquer a, temos

$$(g(x) - f(x)) - (M - L) < L - M$$

o que pode ser simplificado para $g(x) < f(x)$. Mas isto contradiz $f(x) \leq g(x)$. Logo, a desigualdade $L > M$ só pode ser falsa. Portanto, $L \leq M$. ∎

**Teorema 3** *(Fermat) Seja $f$ uma função definida em $(a, b)$. Se $f$ tem máximo ou mínimo local em $c \in (a, b)$ e $f$ é derivável em $c$ então $f'(c) = 0$.*

**Demonstração.** Suponha que $f$ tenha um máximo local em $c$. Por hipótese, $f$ é derivável em $c$, então

$$\lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c)$$

Como $c$ é um ponto de máximo local, pela definição 5, existe um intervalo aberto $I$ tal que $c \in I$ e $f(x) \leq f(c)$ para todo $x \in I \cap (a, b)$. Portanto, $f(x) - f(c) \leq 0$, para todo $x \in I \cap (a, b)$.

Se $x < c$, então $x - c < 0$, e portanto, $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0$ para todo $x \in I \cap (a, b)$. Pela Proposição 2, ficamos com

$$\lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0. \tag{2.1}$$

Por outro lado, se $x > c$ então $x - c > 0$ e, portanto $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0$ para todo $x \in I \cap (a, b)$, novamente pela Proposição 2,

$$\lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0. \tag{2.2}$$

Comparando as desigualdades (2.1) (2.2) e levando em conta que são o mesmo número, resulta

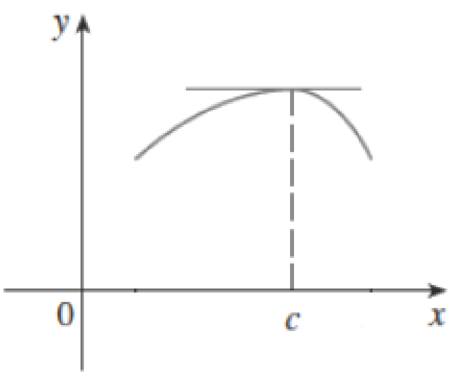
$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = 0$$

isto é, $f'(c) = 0$. ∎

**Observação 6** *A prova do caso em que $f$ tem mínimo local em $c$, é totalmente análoga.*

## Interpretação Geométrica

O Teorema de Fermat garante que se $f$ tem um extremo local num ponto $c$ do seu domínio e $f$ é derivável neste ponto, a reta tangente ao gráfico de $f$ no ponto $c$ é paralela ao eixo dos $x$.



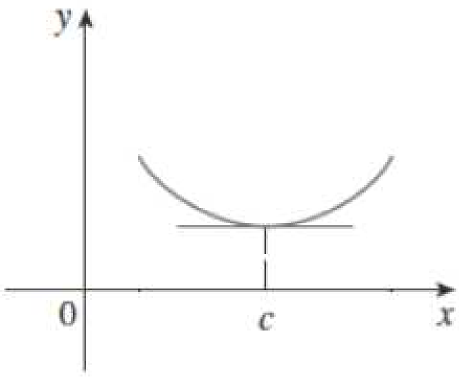




Figura 2.5: Reta tangente ao gráfico de $f$ no ponto $c$ é paralela ao eixo $x$.

Observemos que a recíproca do Teorema de Fermat não é verdadeira, isto é, existem funções $f$ deriváveis num ponto $c$ do seu domínio, $f'(c) = 0$ e $c$ não é um extremo local de $f$. É o caso, por exemplo, da função $f(x) = (x-1)^3$. Sua derivada é $f'(x) = 3(x-1)^2$ e $f'(1) = 0$, mas 1 não é extremo local de $f$. Observe a figura (2.6) abaixo.

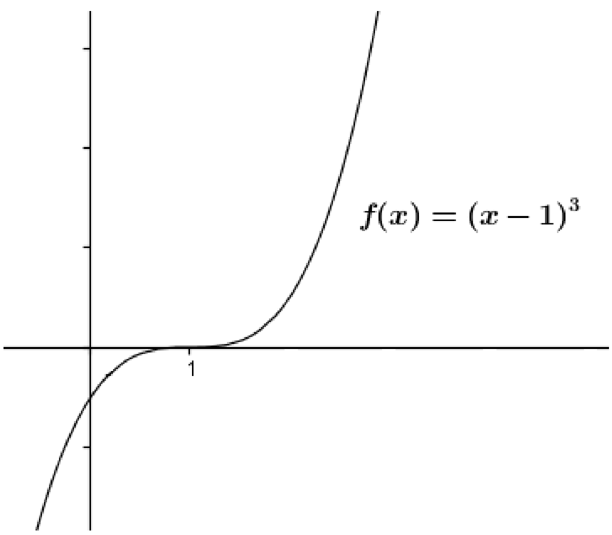



Figura 2.6: A recíproca do Teorema de Fermat é falsa.

Note ainda que o Teorema de Fermat não exclui a possibilidade de $c$ ser um extremo local sem que se tenha $f'(c) = 0$. Isto pode ocorrer se $f$ não é derivável em $c$. Por exemplo, note na figura 2.7 que, 0 é ponto de mínimo da função $f(x) = |x|$ e que não existe $f'(0)$.

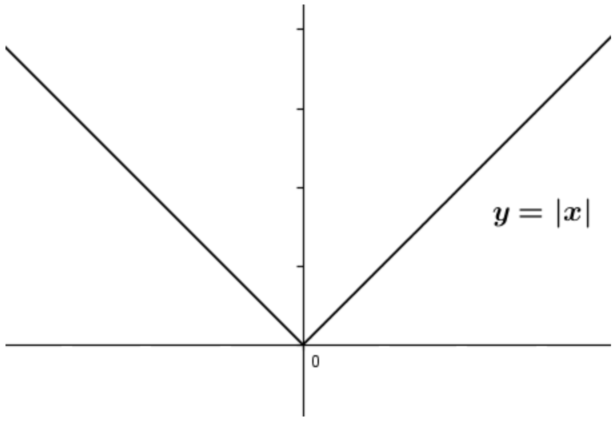



Figura 2.7: Função Modular.

**Definição 7** *(Ponto Crítico) Um* ***ponto crítico*** *da função $f$ é um ponto $c$ do domínio de $f$ em que $f'(c) = 0$.*

Assim, a busca pelos máximos e mínimos locais de $f$ deve se dar pela busca dos pontos críticos de $f$.

**Teorema 4** *(Weierstrass) Se uma função $f$ for contínua em $[a, b]$, então existirão $x_1, x_2$ em $[a, b]$ tais que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ para todo $x$ em $[a, b]$.*

**Observação 7** *Note que os pontos $x_1$ e $x_2$ são, respectivamente, os pontos de máximo e mínimo globais de $f$.*

Não demonstraremos o teorema de Weirstrass neste trabalho. Porém, a título de curiosidade do leitor, a demonstração pode ser encontrada no livro do Elon em [8].

# Capítulo 3

# Teorema do Valor Médio

Neste capítulo apresentaremos o principal resultado deste trabalho, o Teorema do Valor Médio, também conhecido como Teorema de Lagrange, a partir do qual obtemos vários resultados que nos permite analisar aspectos do comportamento de uma função através do estudo de sua derivada. Apresentaremos ainda o Teorema de Rolle, um caso particular do Teorema do Valor Médio, e sua generalização conhecido como Teorema de Cauchy.

## 3.1 Teorema de Lagrange

Inicialmente, suponha que a velocidade média em uma viagem de carro de uma cidade a outra é de $80km/h$, então o Teorema do Valor Médio garante que em algum momento da viagem o velocímetro do carro deve ter marcado $80km/h$. Esta situação pode ser descrita da seguinte forma. Seja $f(t)$ a posição do carro, em cada instante de tempo $t$. Se a viagem começa em $t = a$ (horas) e termina em $t = b$ (horas), a velocidade média é dada por

$$v_m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

A afirmação que, em algum momento da viagem a velocidade instantânea deve ser igual a velocidade média, significa que para algum instante de tempo $c$ entre $a$ e $b$ tem-se

$$v_m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = v(c) = f'(c).$$

O teorema do valor médio estabelece as condições mínimas que uma função $f$ deve satisfazer para que a igualdade acima seja verdadeira.

Como motivação para nosso estudo, consideremos a seguinte aplicação do Teorema do Valor Médio.

**Exemplo 3.1** *Dois carros em uma corrida largam na mesma posição ao mesmo tempo e terminam empatados. O Teorema do Valor Médio permite concluir que em algum instante eles tiveram exatamente a mesma velocidade.*

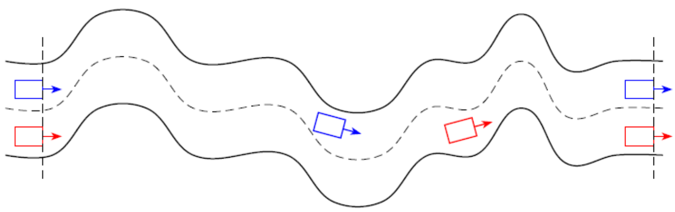


Figura 3.1: Aplicação do TVM.

(Fonte: Google Imagens)

Voltaremos a este exemplo após formalizarmos o Teorema do Valor Médio.

**Teorema 5** *(Teorema do Valor Médio de Lagrange) Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $f$ é derivável em $(a, b)$, então, existe $c \in (a, b)$ tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \tag{3.1}$$

*ou*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Geometricamente, o teorema do valor médio estabelece que se a função $y = f(x)$ é contínua em $[a, b]$ e derivável em $(a, b)$, então existe pelo menos um ponto $c$ entre $a$ e $b$ onde a tangente à curva é paralela à reta secante que une os pontos $P(a, f(a))$ e $Q(b, f(b))$.

A figura 3.2 sugere que o Teorema do Valor Médio será válido em um ponto $c$, no qual a distância entre o gráfico de $f$ e a reta secante for máxima. Assim, consideremos a função $g$ que determina a distância entre $f$ e a função cujo gráfico é a secante que une os

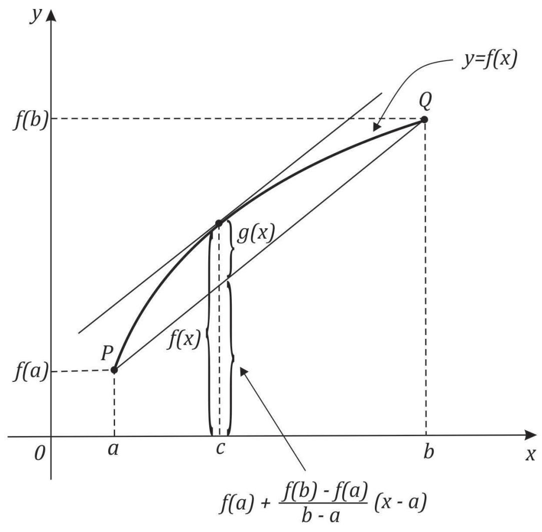



Figura 3.2: Teorema do Valor Médio.

ponto $P(a, f(a))$ e $Q(b, f(b))$.

**Demonstração.** Como a equação da reta secante que passa por $P$ e $Q$ é dada por

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

ou de forma equivalente

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

A função $g$ definida em $[a, b]$ que determina a distância entre o gráfico de $f$ e a reta secante é dada por

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Como $f$ é contínua em $[a, b]$ e derivável em $(a, b)$, então $g$ também é. Além disso,

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Para terminar a demonstração basta mostrar que existe $c \in (a, b)$ tal que $g'(c) = 0$.

Observamos inicialmente que $g(a) = g(b) = 0$. Se $g$ for constante, então não há mais nada a ser demonstrado. Suponhamos que $g$ não seja constante.

Pelo Teorema 4 (Weierstrass), $g$ tem extremos globais em $[a, b]$. Como $g$ não é constante, um destes extremos, denotado $c$, é tal que $g(c) \neq g(a) = g(b)$ e portanto $c \in (a, b)$. Do Teorema 3 (Fermat) segue que $g'(c) = 0$. ∎

**Observação 8** *A igualdade 3.1, no Teorema do valor Médio, não vale sempre, pois se considerarmos um caminho $f : I \to \mathbb{R}^2$, pode acontecer de não termos a igualdade, e sim, uma desigualdade. Para mais detalhes o leitor pode ver o livro do Elon [9, página 36].*

**Observação 9** *Se uma das hipóteses do teorema do valor médio não for satisfeita, então não se pode garantir que a conclusão do Teorema seja válida, como veremos no exemplo a seguir.*

**Exemplo 3.2** *Seja a função $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$.*

*Observe que a função é contínua no intervalo $[-1, 1]$, pois toda função algébrica é contínua em seu domínio. A reta que passa pelos pontos $(-1, f(-1))$ e $(1, f(1))$ é paralela ao eixo das abscissas, porém o gráfico de $f$ não possuí reta tangente paralela ao eixo $0x$. Note também que, $f$ não é diferenciável no intervalo $(-1, 1)$, pois observando a figura 3.3 abaixo, notamos um ponto de bico na origem, que pertence ao intervalo.*

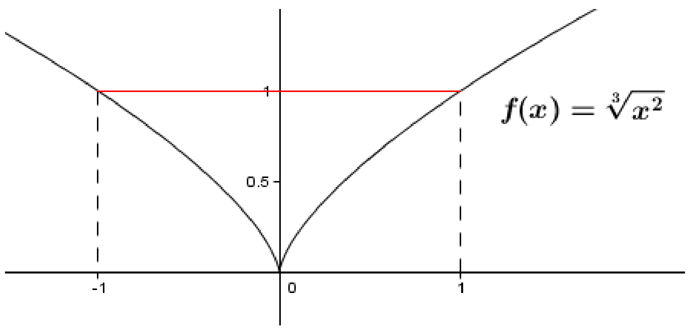



Figura 3.3: $f$, não é derivável em $(-1, 1)$.

O próximo exemplo mostra que a condição de continuidade nos extremos do intervalo $[a, b]$ também deve ser satisfeita.

**Exemplo 3.3** *Seja a função $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \dfrac{1}{x}$, se $x \neq 0$ e $f(0) = 0$. A função é derivável (portanto, contínua) em $(0, 1)$, mas não contínua em $x = 0$.*

*Tomando $A(0,0)$ e $B(1,1)$ pontos do gráfico de $f$, não há $c \in (0,1)$ tal que $f'(c)$ seja igual a inclinação da reta $AB$. Veja a figura 3.4*

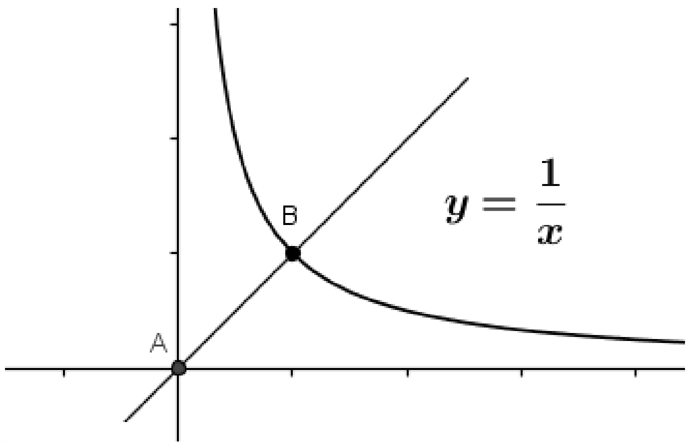



Figura 3.4: $f$ não é contínua em 0.

Vamos agora voltar ao exemplo 3.1 do início do capítulo. Sejam $s_0(t)$ e $s_1(t)$ as funções que descrevem as posições dos dois carros. Suponha que a corrida iniciou em $t = 0$ e terminou em $t = T$. Assumindo as condições do Teorema do Valor Médio (continuidade em $[0, T]$ e diferenciabilidade em $(0, T)$) para ambas as funções, a função $s(t) = s_0(t) - s_1(t)$ atende às mesmas condições e $s(0) = s_0(0) - s_1(0) = 0$ (os carros largam juntos) e $s(T) = s_0(T) - s_1(T) = 0$ (os carros terminam empatados). Pelo Teorema do Valor Médio, existe $t^* \in (0, T)$ tal que

$$s'(t^*) = \frac{s(T) - s(0)}{T - 0} = \frac{0}{T} = 0.$$

Como $s'(t) = s_0'(t) - s_1'(t)$, então $s'(t^*) = 0$ implica $s_0'(t^*) = s_1'(t^*)$, o que significa que os dois carros, no instante $t = t^*$, têm a mesma velocidade.

## 3.2 Teorema de Rolle.

O próximo resultado é um caso particular do teorema do Valor Médio que ficou conhecido como Teorema de Rolle, em homenagem a Michel Rolle (1652-1719), que o demonstrou em 1690.

**Teorema 6** *(Rolle) Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua, com $f(a) = f(b)$. Se $f$ é derivável em $(a, b)$, então existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.*

**Demonstração.** Como $f$ é contínua em [a,b] e derivável em (a,b), pelo Teorema do Valor Médio existe $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Sendo $f(a) = f(b)$; segue que $f'(c) = 0$. ■

**Observação 10** *Os teoremas do Valor Médio e de Rolle são resultados que garantem a existência do ponto $c$ sob certas condições, mas não garantem a unicidade deste $c$. Como pode ser observado na figura 3.5.*

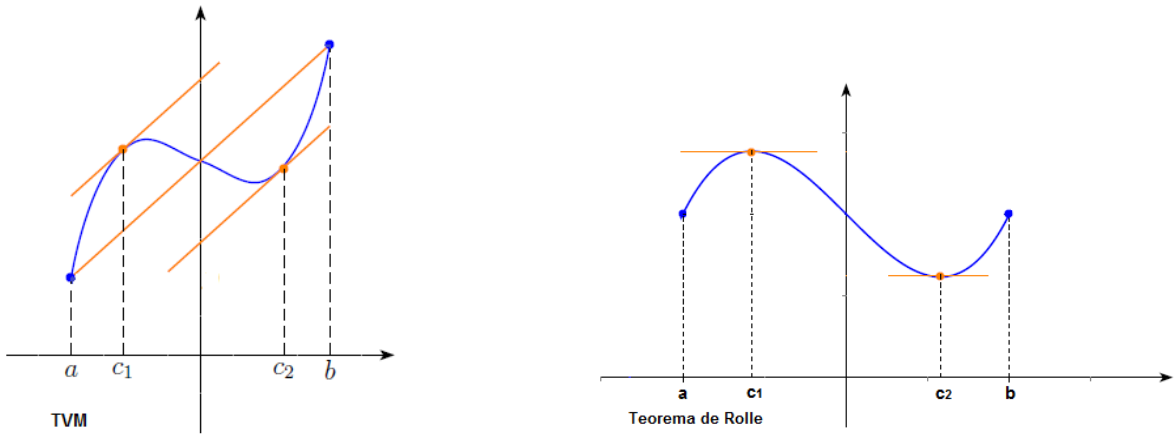



Figura 3.5: Perceba que os Teoremas do Valor Médio e Rolle não garantem a unicidade do ponto $c$.

## 3.3 Consequências do Teorema do Valor Médio

Mais que um simples resultado que garante a existência de um certo ponto $c$, o TVM é a base de vários resultados importantes que nos permitem obter informações sobre o comportamento de uma função, são essas consequências que lhe dão um lugar importante no cálculo tanto para fins teóricos quanto aplicados. Apresentaremos a seguir alguns mais dessas consequências.

A proposição 3 garante a recíproca do fato de que a derivada de uma função constante é igual a zero, isto é, se uma função tem derivada nula em todos os pontos de um intervalo, então esta função é constante neste intervalo.

**Proposição 3** *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ função contínua em $[a, b]$ e derivável em $(a, b)$. Se $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$, então $f$ é constante em $[a, b]$.*

**Demonstração.** Sejam $x_0$, $x_1 \in [a, b]$, com $x_0 < x_1$. Então $f$ é contínua em $[x_0, x_1]$ e derivável em $(x_0, x_1)$. Pelo Teorema do Valor Médio, existe $c \in (x_0, x_1)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Mas $f'(c) = 0$, pois $c \in (a, b)$, logo $f(x_1) - f(x_0) = 0 \Rightarrow f(x_1) = f(x_0)$, ou seja, a função tem o mesmo valor para quaisquer pontos $x_0, x_1 \in [a, b]$. Portanto, $f$ é constante em $[a, b]$.

■

**Observação 11** *A função* $f(x) = \frac{x}{|x|}$*, definida para todo* $x \in \mathbb{R} - \{0\}$*, não é constante, embora cumpra* $f'(x) = 0$ *para todo* $x \in \mathbb{R} - \{0\}$*. O motivo é que o domínio de* $f$ *não é um intervalo.*

A próxima consequência do Teorema do Valor Médio, garante que se duas funções tiverem derivadas iguais em todo o ponto do interior de seu domínio, então elas diferem por uma constante.

**Proposição 4** *Sejam* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *duas funções contínuas, deriváveis em* $(a, b)$*. Se* $f'(x) = g'(x)$ *para todo* $x \in (a, b)$ *então existe* $k \in \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) = g(x) + k$ *para todo* $x \in [a, b]$*.*

**Demonstração.** Seja $h(x) = f(x) - g(x)$. Então $h$ é contínua em $[a, b]$ e derivável em (a,b), pois $f$ e $g$ são. E

$$h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0,$$

para todo $x \in (a, b)$. Pela Proposição 3, $h$ deve ser constante em $[a, b]$, isto é, existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $h(x) = k$, o que implica $f(x) = g(x) + k$, para todo $x \in [a, b]$. ∎

Mostraremos a seguir a interpretação geométrica da Proposição 4.

# Interpretação Geométrica

Observando a figura 3.6, note que as funções $f$ e $g$ diferem por uma constante. Assim, o gráfico de $f$ pode ser obtida a partir do gráfico de $g$, ou vice e versa, por uma translação vertical. Além disso, como estas funções têm derivada igual em cada ponto $x \in (a, b)$, seus gráficos têm retas tangentes paralelas nos correspondentes pontos $(x, f(x))$ e $(x, g(x))$.

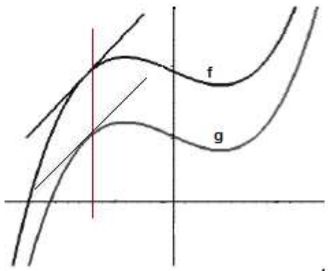



Figura 3.6: Funções com derivadas iguais.

(Fonte: Google Imagens)

**Observação 12** *Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funções que satisfazem as hipóteses da preposição 4. Se $f(x_0) = g(x_0)$ para algum $x_0 \in [a, b]$, então $f(x) = g(x)$ para todo $x \in [a, b]$. De fato pela proposição 4, existe $k \in \mathbb{R}$ tal que*

$$f(x) = g(x) + k, \forall x \in [a, b].$$

Em particular, $f(x_0) = g(x_0) + k$, para algum $x_0 \in [a, b]$. Logo, $k = 0$ e portanto, $f(x) = g(x)$ para todo $x \in [a, b]$.

**Exemplo 3.4** *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função tal que $f'(x) = k$, com $k \in \mathbb{R}$. Prove que $f$ é uma reta.*

***Solução:*** *Seja $g(x) = kx + b$, então $g'(x) = k$. Logo, $f$ e $g$ satisfazem as hipóteses da proposição 4 e portanto, estas funções diferem por uma constante, isto é, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = g(x) + c, \forall x \in [a, b]$. Assim,*

$$f(x) = kx + b + c = kx + d, \forall x \in [a, b].$$

*onde $d = b + c$. Portanto, $f$ é uma reta.*

A seguir, utilizaremos a proposição 4 para mostrar um importante resultado da física.

**Exemplo 3.5** *Mostre que a posição e velocidade de um objeto em movimento uniformemente acelerado são dadas pelas equações:*

$$v = v_0 + at$$

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2,$$

*em que $a$ é a aceleração, $v$ a velocidade, $s$ a posição, $v_0$ e $s_0$, são respectivamente, a velocidade e posição em $t = 0$.*

Um movimento uniformemente acelerado é aquele em que a aceleração $a$ é constante. Assim, $v'(t) = a$. Mas a função $f(x) = at$ tem a mesma derivada que $v$, logo difere de $v$ por uma constante, $v(t) = at + k$. Como $v_0 = v(0) = a \cdot 0 + k = k$, resulta

$$v = v(t) = at + v_0.$$

Agora, note que $s'(t) = v(t) = at + v_0$. Mas, comparando com a função $g(t) = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$, vemos que $g'(t) = v_0 + at = s'(t)$, ou seja, têm a mesma derivada. Portanto $s(t) = g(t) + k$, para alguma constante $k$. Assim, para $t = 0$, obtemos $s_0 = s(0) = v_0 \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot a \cdot 0^2 + k$, ou seja, $s_0 = k$ e, portanto,

$$s = s(t) = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 + s_0.$$

## 3.4 Teorema de Cauchy

O Teorema a seguir é um caso mais geral do Teorema do Valor Médio, conhecido como Teorema de Cauchy.

**Teorema 7** *(Cauchy) Se $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ são funções contínuas, deriváveis em $(a, b)$ e $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a, b)$, então $g(a) \neq g(b)$ e existe $c \in (a, b)$ tal que*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

**Demonstração.** Observamos inicialmente que $g(a) \neq g(b)$, pois senão, pelo Teorema de Rolle, $g'$ se anularia em algum ponto de $(a, b)$. Considere a função $h$, definida sobre $[a, b]$, dada por

$$h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)).$$

Note que $h$ é contínua em $[a, b]$, derivável em $(a, b)$ e $h(a) = h(b)$. Logo, pelo Teorema de Rolle, existe $c \in (a, b)$ tal que $h'(c) = 0$, ou seja

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}g'(c) = 0.$$

Daí segue que,

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

■

**Observação 13** *Se, no Teorema de Cauchy, tomarmos* $g(x) = x$ *obtemos*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

*que é a conclusão do Teorema do Valor Médio.*

Note que utilizamos na demostração do Teorema de Cauchy o teorema de Rolle, que por sua vez é um caso particular do Teorema do Valor Médio. Assim, as seguintes implicações são equivalentes:
Teorema do Valor Médio $\Rightarrow$ Teorema de Rolle $\Rightarrow$ Teorema de Cauchy $\Rightarrow$ Teorema do Valor Médio.

## Interpretação Geométrica

Esboçando no plano a curva $\gamma(t) = (g(t), f(t))$, $t \in [a, b]$, e a reta $s$ definida pelos pontos $(g(a), f(a))$ e $(g(b), f(b))$ vemos que existe uma reta $T$ tangente à curva $\gamma$, em algum ponto $\gamma(c) = (g(c), f(c))$, e paralela a reta $S$. Isto é, se $m_T$ e $m_S$ são coeficientes angulares de $T$ e $S$, temos

$$m_T = m_S = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Observe que geometricamente o vetor tangente a curva $\gamma$ no ponto $c$ é o vetor

$$\begin{aligned} \gamma'(c) &= \lim_{t \to c} \frac{\gamma(t) - \gamma(c)}{t - c} = \lim_{t \to c} \left( \frac{g(t) - g(c)}{t - c}, \frac{f(t) - f(c)}{t - c} \right) \\ &= \left( \lim_{t \to c} \frac{g(t) - g(c)}{t - c}, \lim_{t \to c} \frac{f(t) - f(c)}{t - c} \right) \\ &= (g'(c), f'(c)). \end{aligned}$$

Além disso, o coeficiente angular $m_T$ da reta $T$, paralela ao vetor $\gamma'(c)$, é a tangente do ângulo $\theta$ que o vetor forma com o eixo $0x$. Logo,

$$m_T = \tan\theta = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Como consequência do Teorema de Cauchy, apresentaremos a seguir uma das regras de L'Hospital, a qual é útil para calcular limites indeterminados, da forma, $\frac{0}{0}$, usando

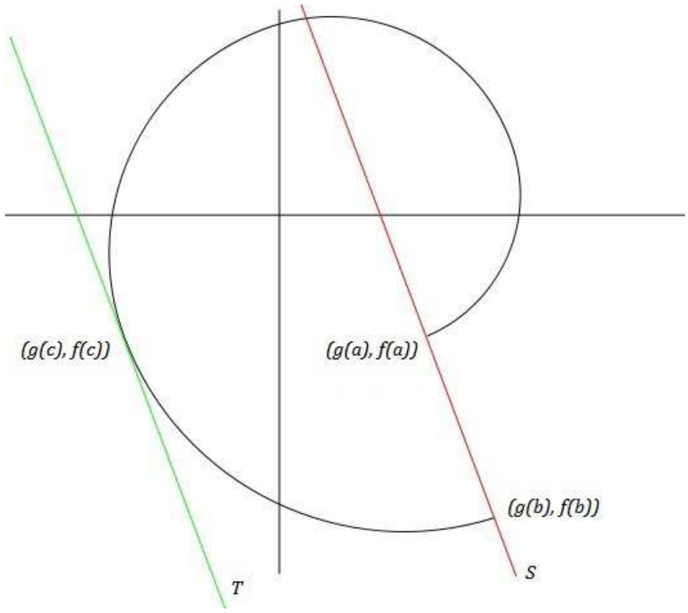



Figura 3.7: Interpretação geométrica do Teorema de Cauchy.
(Fonte: Google Imagens)

derivadas. A regra de L'Hospital é assim chamada em homenagem ao nobre francês, o marquês de L'Hospital (1661 -1704), mas foi descorberta pelo matemático Suíço Jonh Bernoulli (1667 - 1748).

**Proposição 5** *(Regra de L'Hospital) Dadas as funções $f$ e $g$, deriváveis no intervalo $(a, b)$, se $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = 0$, $g'$não se anular em $(a, b)$ e ainda existir $\lim_{x\to a^+} f'(x)/g'(x)$, então vai existir $\lim_{x\to a^+} f(x)/g(x)$ e*

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

**Demonstração.** Temos que $\lim_{x\to a^+} f(x) = 0$, assim, podemos fazer $f(a) = 0$. De maneira análoga teremos também $g(a) = 0$. Logo, $f$ e $g$ são funções contínuas no intervalo [a,b).

Seja agora $x \in (a, b)$. Pelo Teorema de Cauchy aplicado às funções $f$ e $g$ sobre o intervalo $[a, x]$, encontraremos $y \in (a, x)$ tal que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(y)}{g'(y)}.$$

Aplicando o limite em ambos os membros ficamos

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\lim_{x\to a^+}\frac{f'(y)}{g'(y)}.$$

ou

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a^+}\frac{f'(y)}{g'(y)}.$$

Perceba que $y\to a^+$ quando $x\to a^+$, assim temos

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

■

**Observação 14** *A prova do caso em que $x\to b^-$, é bastante semelhante ao caso anterior.*

**Observação 15** *Seja $p\in(a,b)$, para o caso especial no qual $f(p)=g(p)=0$ e $g'(p)\neq 0$, como $f$ e $g$ são contínuas em $p$, pois são deriváveis em $(a,b)$. Obtemos*

$$\lim_{x\to p}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(p)}{g'(p)}.$$

*De fato,*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to p}\frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to p}\frac{f(x)-f(p)}{g(x)-g(p)}=\lim_{x\to p}\frac{\frac{f(x)-f(p)}{x-p}}{\frac{g(x)-g(p)}{x-p}}\\ &= \frac{\lim\limits_{x\to p}\dfrac{f(x)-f(p)}{x-p}}{\lim\limits_{x\to p}\dfrac{g(x)-g(p)}{x-p}}=\frac{f'(p)}{g'(p)}.\end{aligned}$$

# Conclusão

Ao fim deste trabalho, notamos a importância do Teorema do Valor Médio nas mais diversas áreas da matemática. Sendo utilizado na demonstração de muitos outros teoremas e aplicações no Cálculo Diferencial. Na física também podemos notar tal importância do TVM. Analisando por exemplo, as funções que descrevem as posições de dois carros que saem e chegam ao mesmo tempo em uma corrida. A partir do Teorema, concluímos que os carros tiveram a mesma velocidade em algum momento da corrida.

Deste modo, conclui-se a notável importância do Teorema do Valor Médio nas diferentes aplicações da Matemática e Física, permitindo fazer uma relação do aspecto global do comportamento da função com um aspecto específico.

# Referências Bibliográficas


[1] ALVES, L. L. S. *DERIVADAS COMO NO TEMPO DE NEWTON E LEIBNIZ* Universidade Católica de Brasília. Disponível em: `https://www.ucb.br/sites/100/103/TCC/22008/LuanaLopesdosSantosAlves.pdf`

Acessado em 25 de Fevereiro de 2016, ás 10:45.

[2] CAJORI, F. *Uma História da Matemática.* Editora Ciência Moderna Ltda. 2007.

[3] Cattai, A. P. *ANÁLISE REAL.* Universidade do Estado da Bahia. Disponível em: `http://cattai.mat.br/site/files/AnaliseReal/AnaliseRealcattaiuneb.pdf`

Acessado em 25 de Fevereiro de 2016, ás 16:24.

[4] DOMINGUES, H. H. *Lagrange: A Grande Pirâmide Da Matemática.* Disponível em: `http://obaricentrodamente.blogspot.com.br/2013/06/ lagrange-grande-piramide-da-matematica.html`

Acessado em 17 de Fevereiro de 2016, ás 22:35.

[5] EVES, H. *Introdução à História da Matemática.* 3ª ed. Campinas. Editora da Unicamp. 2002.

[6] GONÇALVES, M. B. e FLEMMING, D. M., *Cálculo A.* São Paulo. Makron Books, 2000.

[7] GUIDORIZZI, G. L., *Um curso de cálculo, vol 1.* 5. ed. Rio de Janeiro: S.A, 2001.

[8] LIMA, E. L. *Análise Real, vol 1. Funções de uma variável* / Elon Lages Lima. 9. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2007.

[9] LIMA, E.L. *Curso de Análise, vol.2*, Funções de n Variáveis/ Elon Lages Lima. 3. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2007.

[10] Mol, R. S. *Introdução à história da matemática* / Rogério S. Mol. Belo Horizonte : CAED-UFMG, 2013.

[11] MUNEM, M e FOULIS, D. J. *Cálculo* / Tradução André Lima Cordeiro [et al]. Rio de Janeiro: LTC, 1982. Tradução de: Calculus : with analytic geomatry.

[12] OLIVEIRA, O. R. B. *Regras de L'Hospital e TVM Generalizado (Cauchy).* Disponível em: `https://www.ime.usp.br/ oliveira/ELE-LHospital.pdf`

Acessado em 30 de Março de 2016, ás 14:03.

[13] THOMAS, G. B., . *Cálculo, vol. 1.* 10. ed. São Paulo, Addison-Wesley/Pearson, 2002.