UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE

CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE

UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA E MATEMÁTICA

Curso de Graduação em Licenciatura em Matemática

Roberia Sousa Santos

Aplicação das Equações Diferenciais Ordinárias no Processo de Resfriamento de um Corpo

Cuité-PB

2016

Roberia Sousa Santos

Aplicação das Equações Diferenciais Ordinárias no Processo de Resfriamento de um Corpo

TCC apresentado ao curso Graduação em Licenciatura em Matemática do Centro de Educação e Saúde da Universidade Federal de Campina Grande em cumprimento às exigências do Componente Curricular Trabalho Acadêmico Orientado, para obtenção do grau de Graduado em Licenciatura em Matemática.

Orientadora: Edna Cordeiro de Souza

Cuité-PB

2016

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA NA FONTE
Responsabilidade Jesiel Ferreira Gomes – CRB 15 – 256

S237a Santos, Roberia Sousa.

Aplicação das equações diferenciais ordinárias no processo de resfriamento de um corpo. / Roberia Sousa Santos. – Cuité: CES, 2016.

37 fl.

Monografia (Curso de Licenciatura em Matemática) – Centro de Educação e Saúde / UFCG, 2016.

Orientadora: Edna Cordeiro de Souza.

1. Derivada. 2. Problema de valor inicial. 3. Lei do resfriamento de Newton. I. Título.

Biblioteca do CES CDU 51

Roberia Sousa Santos

Aplicação das Equações Diferenciais Ordinárias no Processo de Resfriamento de um Corpo

Monografia de Trabalho de Conclusão de Curso submetida à banca examinadora como parte dos requisitos necessários a obtenção do grau de Graduação em Licenciatura em Matemática.

A citação de qualquer trecho deste trabalho é permitida, desde que seja feita de conformidade com as normas de ética científica.

Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) aprovado em 10 de maio de 2016.

BANCA EXAMINADORA

Profa. Msc. Edna Cordeiro de Souza - UFCG
(Orientador)

Prof. Msc. Jussiê Ubaldo da Silva - UFCG

Prof. Msc. Maria de Jesus Rodrigues da Silva - UFCG

Aos meu familiares, especialmente a meus pais Cicero Damião e Francisca de Assis, que me ajudaram a realizar esse sonho.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a DEUS por ter me concedido o término deste curso. Aos meus pais: Cicero Damião e Francisca de Assis pela força e apoio e foram peças fundamentais na concretização deste sonho. Ao meu esposo Ayrton Fernandes, e meu filho Arthur dos Santos que foram minha fonte de inspiração, e sempre me ajudaram a superar as dificuldades. A todos os meus familiares que acreditaram em mim. A minha professora orientadora Edna Cordeiro, por seu compromisso e sua paciência. Aos professores que tive o privelégio de estudar e contribuiram para minha formação. Aos meus colegas e amigos de curso, por estarem sempre ao meu lado e ter me ajudado no que era possível. Enfim agradeço a todos, que de alguma maneira contribuiram para a minha formação acadêmica.

“Se consegui enxergar longe é porque procurei olhar acima dos ombros dos gigantes"

Isaac Newton

Resumo

Neste trabalho temos como objetivo apresentar uma aplicação das Equações Diferenciais Ordinárias à Lei do Resfriamento de Newton, o qual garante que a taxa de variação da temperatura de um corpo é proporcional à diferença de temperaturas entre o corpo e o ambiente. Para tanto, apresentaremos uma revisão de alguns conceitos do cálculo diferencial e integral necessários para a compreenssão dos resultados apresentados neste trabalho. Além disso, faremos uma introdução ao estudo das Equações Diferenciais Ordinárias, que são utilizadas na modelagem de muitos problemas reais, tornando-se assim uma ferramenta importante que tem grande aplicação em diversas áreas do conhecimento. Por fim, abordaremos a aplicabilidade das Equações Diferenciais Ordinárias no processo de resfriamento de um corpo, utilizando para isto a Lei do Resfriamento de Newton, cujo modelo matemático é uma Equação Diferencial Ordinária de 1ª ordem que após resolvida permite determinar a temperatura aproximada de um corpo em qualquer instante.

Palavras-chave: Derivada; Problema de Valor Inicial; Lei do Resfriamento de Newton.

Abstract

This work we have as objective to present an application of the Ordinary Differential Equations to the Law of the Newton cooling, which ensures that the rate of the temperature of the body variation is proportional to the temperatures difference between the body and environment. Hence, we present a review of some concepts of differential and integral calculus necessary for the understanding of the results presented in this work. Moreover, we will make an introduction to the study of Ordinary Differential Equations that are used in the mode ling of many real problems thus becoming an important instrument that has wide application in various fields of knowledge. Ultimately, we discuss the applicability of Ordinary Differential Equation in the cooling process of the body, using for this the Law of Newton Cooling, whose mathematical model is an equation differential ordinary of the first order that after solved allows determine the approximate temperature of a body at any time.

Keywords: Derivative; initial value problem; Law of Newton Cooling.

Sumário

Introdução

No presente trabalho faremos um estudo sobre as Equações Diferenciais Ordinárias, visto que trata-se de um tema muito importante com aplicação em quase todas as áreas de conhecimento, tais como a Física, Química, Biologia e Economia. Toda equação que envolve derivadas de funções recebe o nome de equações diferenciais. Portanto, o estudo dessas equações depende do estudo da derivada de uma função.

No capítulo 1 enfatizaremos algumas noções preliminares do cálculo diferencial e integral, os quais servirão de base para o estudo das Equações Diferenciais Ordinárias. Estudaremos os conceitos de derivada e primitivas de uma função. Concluíremos este capítulo tratando sobre mudança de variável em integrais indefinidas.

O capítulo 2 aborda alguns conceitos básicos das Equações Diferenciais Ordinárias, como a classificação, a solução, o problema de valor inicial e as equações separáveis. Esta teoria é base da aplicação que apresentaremos no próximo capítulo.

O capítulo 3 é dedicado inteiramente a aplicação das Equações Diferenciais Ordinárias de primeira ordem, no estudo da lei do resfriamento de Newton. Esta lei diz que um corpo exposto a uma determinada temperatura tende a atingir equilíbrio térmico com o ambiente, ou seja, que a taxa de variação da temperatura de um corpo em resfriamento é proporcional à diferença entre sua temperatura e a do meio ambiente que o cerca.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentamos alguns resultados relevantes do Cálculo Diferencial e Integral, os quais servirão de base para o desenvolvimento deste trabalho.

1.1 Funções Deriváveis num Intervalo

Se a função $f : I \to \mathbb{R}$ possui derivada em todos os pontos do intervalo I, podemos considerar a função derivada $f' : I \to \mathbb{R}$, que associa a cada $x \in I$ a derivada $f'(x)$.

Enunciaremos a seguir um dos resultados mais importantes do cálculo diferencial, o Teorema do Valor Médio, que associa os valores de uma função definida num intervalo I com os de sua derivada.

Teorema 1.1. *(Teorema do Valor Médio, de Lagrange) Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua. Se f é derivável em (a,b), existe $c \in (a,b)$, tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Demonstração. *Ver [6].* ∎

Geometricamente, o teorema do valor médio garante a existência de um ponto de abscissa c tal que a reta tangente ao gráfico de f neste ponto é paralela a reta secante que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.

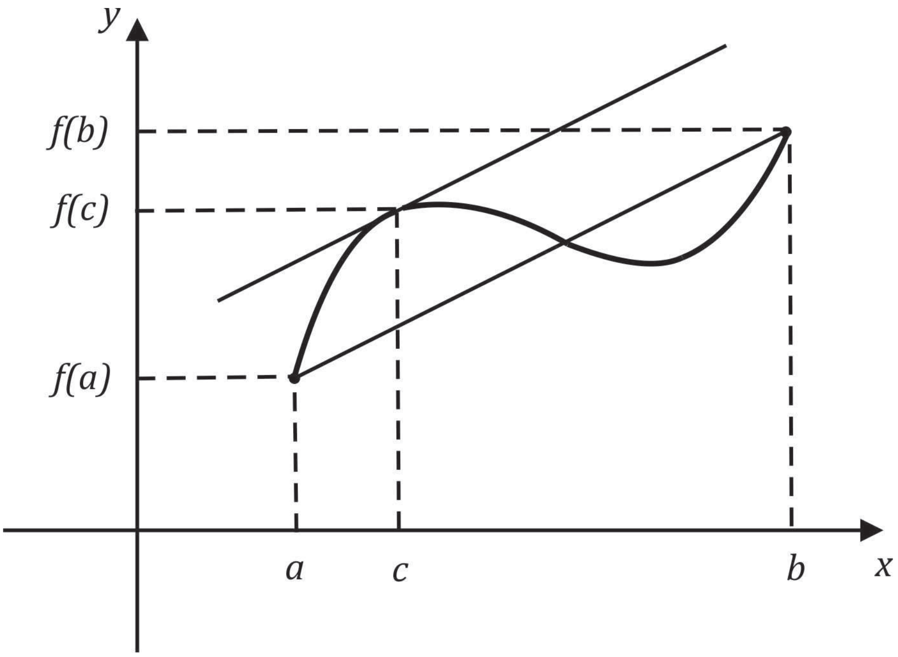

Figura 1.1: Interpretação geométrica do TVM.

Os próximos resultados são algumas consequências do Teorema do Valor Médio. A proposição seguinte garante que se uma função tem derivada nula em todos os pontos de um intervalo, então ela será constante neste intervalo.

Proposição 1.1. *Se uma função contínua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ possui derivada nula em todos os pontos $x \in (a, b)$ então f é constante.*

Demonstração. *Sejam $x_0, x_1 \in [a, b]$, com $x_0 < x_1$. Então f é contínua em $[x_0, x_1]$ e derivável em (x_0, x_1). Pelo Teorema do Valor Médio, existe $c \in (x_0, x_1)$ tal que*

$$f'(c) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Como $c \in (a, b)$, pela hipótese $f'(c) = 0$, logo $f(x_1) - f(x_0) = 0$, ou seja, $f(x_1) = f(x_0)$. Assim, a função tem o mesmo valor para quaisquer pontos $x_0, x_1 \in [a, b]$ e portanto f é constante. ■

Usando a proposição 1.1, mostraremos que se duas funções tiverem derivadas iguais num intervalo, então, neste intervalo elas diferem por uma constante.

Proposição 1.2. *Se $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ são contínuas, deriváveis em (a, b), e $f'(x) = g'(x)$ para todo $x \in (a, b)$ então existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $g(x) = f(x) + c$ para todo $x \in [a, b]$.*

Demonstração. Seja $h(x) = g(x) - f(x)$. Então h é contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b), pois f e g são contínuas em $[a, b]$ e deriváveis em (a, b). Além disso, $h'(x) = g'(x) - f'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$. Logo pela proposição 1.1, $h(x)$ é constante, isto é, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $h(x) = c$, para todo $x \in [a, b]$. Portanto, $g(x) = f(x) + c$ para todo $x \in [a, b]$. ∎

Interpretação Geométrica

Como as duas funções f e g diferem por uma constante, o gráfico de f pode ser obtido a partir do gráfico de g, ou vice-versa, por uma translação vertical. Além disso, como estas funções tem a mesma derivada em cada ponto $x \in (a, b)$ seus gráficos têm retas tangentes paralelas nos pontos correspondentes $(x, f(x))$ e $(x, g(x))$.

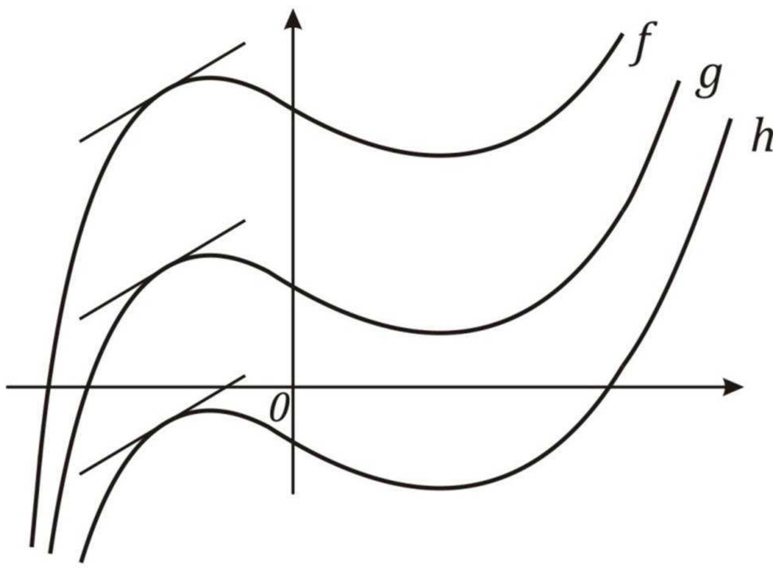

Figura 1.2: Funções com derivadas iguais.

Observação 1.1. *Sejam f e g duas funções definidas num intervalo I, se f e g satisfizerem as hipóteses da proposição 1.2 e se $f(x_0) = g(x_0)$ para algum $x_0 \in I$, então $f(x) = g(x)$ para todo $x \in I$. De fato pela proposição 1.2, existe uma constante c tal que*

$$g(x) = f(x) + c$$

para todo $x \in I$. Em particular, $g(x_0) = f(x_0) + c$, para algum $x_o \in I$, logo $c = 0$. Portanto, $g(x) = f(x)$ para todo $x \in I$.

Sabemos que se $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$, então $f'(x) = e^x$, isto é, a derivada de f é ela própria. O próximo exemplo nos mostra que as funções da forma $f(x) = ce^x$, onde c é uma constante, são funções que satisfazem essa propriedade.

Exemplo 1.1. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável e tal que, para todo $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(x)$. Iremos mostrar que existe uma constante c tal que, para todo $x \in \mathbb{R}$, tem-se $f(x) = ce^x$.*

Solução: *Considere o quociente $\dfrac{f(x)}{e^x}$. Derivando, temos*

$$\left(\frac{f(x)}{e^x}\right)' = \frac{f'(x)e^x - f(x)e^x}{e^{2x}}.$$

Por hipótese $f'(x) = f(x)$. Daí, segue que

$$\left(\frac{f(x)}{e^x}\right)' = \frac{f(x)e^x - f(x)e^x}{e^{2x}} = 0$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Pela proposição 1.1, existe uma constante c tal que, para todo $x \in \mathbb{R}$, tem-se

$$\frac{f(x)}{e^x} = c$$

ou seja,

$$f(x) = ce^x.$$

Exemplo 1.2. *Vamos determinar uma função $y = f(x)$, definida num intervalo aberto I, com $1 \in I$, tal que $f(1) = 1$ e, para todo $x \in I$,*

$$\frac{dy}{dx} = xy.$$

Solução: *Precisamos ter, para todo $x \in I$,*

$$f'(x) = xf(x).$$

Como f deve ser derivável em I, então f também deve ser contínua em I. Portanto, a condição $f(1) = 1$ garante-nos que, para x próximo de 1, temos $f(x) > 0$. Então, vamos procurar uma função definida num intervalo aberto I, e que, neste intervalo, a condição $f(x) > 0$, seja satisfeita. Temos que

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = x, \quad \forall x \in I.$$

Como $[\ln f(x)]' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$ *e* $\left(\dfrac{x^2}{2}\right)' = x$, *obtemos que* $[\ln f(x)]' = \left(\dfrac{x^2}{2}\right)'$ *para todo* $x \in I$. *Como as derivadas das funções* $\ln f(x)$ *e* $\dfrac{x^2}{2}$ *são iguais no intervalo aberto I, da proposição 1.2 segue que existe uma constante c tal que, para todo* $x \in I$

$$\ln f(x) = \frac{x^2}{2} + c.$$

Da condição $f(1) = 1$, *obtemos*

$$\ln 1 = \frac{1}{2} + c$$

como $\ln 1 = 0$, *segue que* $c = -\frac{1}{2}$. *Daí, temos*

$$\ln f(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}$$

$$e^{\ln f(x)} = e^{\left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\right)}$$

$$f(x) = \frac{e^{\frac{x^2}{2}}}{e^{\frac{1}{2}}}.$$

Portanto

$$y = \frac{1}{\sqrt{e}} e^{\frac{x^2}{2}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

satisfaz as condições dadas.

Note que a função obtida no exemplo anterior, é uma função que satisfaz as condições dadas. Será que existe alguma outra função satisfazendo estas condições? Veremos no próximo capítulo que não. A função satisfazendo as condições dadas é única.

1.2 Primitiva de uma Função

Seja f uma função definida num intervalo I. Uma primitiva de f em I é uma função F definida em I, tal que

$$F'(x) = f(x)$$

para todo $x \in I$.

Exemplo 1.3. $F(x) = \dfrac{1}{3}x^3$ *é uma primitiva de* $f(x) = x^2$ *em* $\mathbb{R}$. *De fato, derivando* F, *temos*

$$F'(x) = \left[\frac{1}{3}x^3\right]' = x^2.$$

Perceba que para toda constante c, $G(x) = \frac{1}{3}x^3 + c$ *também é uma primitiva, em* $\mathbb{R}$, *de* $f(x) = x^2$. *Note que se* F *é uma primitiva da função* f *num intervalo* I, *então a função* $G(x) = F(x) + c$ *também é primitiva de* f *em* I, *para toda constante* c. *De fato, temos* $G'(x) = (F(x) + c)' = F'(x) = f(x)$. *Por outro lado , pela proposição 1.2, se duas funções têm derivadas iguais num intervalo, elas diferem, neste intervalo, por uma constante. Assim, todas as primitivas de* f *em* I *são funções da forma* $F(x) + c$, *onde* c *é uma constante.*

1.3 Integral Indefinida

Definição 1.1. *Seja* $F(x)$ *uma primitiva de* $f(x)$ *no intervalo* I. *A expressão* $F(x) + c$, *com* $c \in \mathbb{R}$ *é chamada a integral indefinida da função* f *e é denotada por*

$$\int f(x)dx = F(x) + c.$$

Da definição 1.1, decorre que

$$\int f(x)dx = F(x) + c \Leftrightarrow F'(x) = f(x).$$

Em particular,

$$\int f'(x)dx = f(x) + c.$$

Exemplo 1.4. *Vamos calcular* $\int x^2 dx$.

Solução:
$\left(\frac{1}{3}x^3\right)' = x^2$, *portanto,* $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c$.

Exemplo 1.5. *Vamos calcular* $\int x^\alpha dx$, *onde* $\alpha \neq -1$ *é um número real fixo.*

Solução:
$\left[\frac{1}{\alpha + 1}x^{\alpha+1}\right]' = x^\alpha$, *portanto* $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha + 1} + c$.

Exemplo 1.6. *Vamos calcular* $\displaystyle\int \frac{1}{x}dx, x > 0$.

Solução: *Temos que,*

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln x + c, x > 0$$

pois, $(\ln x + c)' = \frac{1}{x}$.

Sendo α um número real fixo. Dos exemplos (1.5) e (1.6) resulta que

$$\int x^{\alpha}dx = \begin{cases} \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, & \alpha \neq -1 \\ \ln x + c, & \alpha = -1 \quad (x > 0) \end{cases} \tag{1.1}$$

No teorema a seguir apresentamos as regras algébricas para a integral indefinida.

Teorema 1.2. *(Linearidade da Integral) Sejam F, G primitivas de f e g, respectivamente, num intervalo e α, $\beta \in \mathbb{R}$. Então, $\alpha F + \beta G$ é uma primitiva de $\alpha f + \beta g$, e*

$$\int [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx.$$

Demonstração. *Se F e G são primitivas de f e g, respectivamente, segue das regras de derivação que $\alpha F(x) + \beta G(x)$ é primitiva de $\alpha f(x) + \beta g(x)$, portanto*

$$\int [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = (\alpha F(x) + \beta G(x)) + c = \alpha(F(x) + c_1) + \beta(G(x) + c_2)$$

$$= \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx.$$

■

1.3.1 Mudança de Variável em Integrais Indefinidas

Sejam F uma primitiva de f num intervalo I e g uma função derivável tal que Fog esteja definida. Pela regra da cadeia, temos:

$$[F(g(x))]' = F'(g(x)).g'(x) = f(g(x)).g'(x).$$

Portanto, $F(g(x))$ é uma primitiva de $f(g(x)).g'(x)$, daí

$$\int f(g(x)).g'(x)dx = F(g(x)) + c,$$

Fazendo $u = g(x)$, tem-se $du = g'(x)dx$ substituindo na última igualdade, obtemos

$$\int f(g(x)).g'(x)dx = \int f(u)du = F(u) + c.$$

Exemplo 1.7. *Vamos calcular* $\displaystyle\int \frac{2x}{1+x^2}dx$

Solução: *Fazendo uma mudança de variável, temos que $u = 1 + x^2$. Então $du = 2xdx$. Daí*

$$\int \frac{2x}{1+x^2}dx = \int \frac{du}{u} = ln \mid u \mid + c = ln(1 + x^2) + c$$

Capítulo 2

Introdução as Equações Diferenciais Ordinárias

2.1 Equação Diferencial

Muitos problemas interessantes da física, química, biologia, economia, engenharia, entre outras áreas do conhecimento, consistem em determinar uma função que obedece uma equação que contém uma ou mais derivadas da função desconhecida. Estas equações são chamadas equações diferenciais, tais equações tornam-se uma ferramenta poderosa pelas inúmeras formas de aplicações.

Definição 2.1. *Uma equação diferencial é uma equação em que as incógnitas são funções e a equação envolve as derivadas destas funções.*

Exemplo 2.1. *As seguintes equações são exemplos de equações diferenciais*

a) $y''' + 3y' + y = \operatorname{sen} x$

b) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + ty(\dfrac{dy}{dt})^2 = 0$

c) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

2.1.1 Classificação

As equações diferenciais são classificadas quanto ao tipo, ordem e linearidade.

(i) Quanto ao tipo, uma equação diferencial pode ser ordinária ou parcial. Ela será ordinária quando a função incógnita depender de apenas uma variável independente, neste caso, na equação diferencial só aparecem derivadas ordinárias.

As equações abaixo são alguns exemplos de Equações Diferenciais Ordinárias (E.D.O.)

$$xy' + \operatorname{sen}(xy) = e^x, \quad \frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} = 0.$$

A equação diferencial será parcial quando a incógnita depender de diversas variáveis independentes, neste caso, as derivadas são derivadas parciais (E.D.P.), por exemplo

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = u, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

(ii) Quanto à ordem uma equação diferencial pode ser de 1ª, de 2ª, ..., de n-ésima ordem dependendo da derivada de maior ordem que aparece na equação. Uma equação diferencial de ordem n pode ser escrita na forma

$$F(t, y, y', y'', ..., y^n) = 0.$$

Exemplo 2.2. *As equações*

$$4x\frac{dy}{dx} + y = x, \quad y' + 2xy = 3x^2$$

são EDO's de 1ª ordem.

Exemplo 2.3. *As seguintes equações são EDO's de* 2^a *ordem:*

$$y'' + 3yy' = e^x, \quad \frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 6y = 0.$$

(iii) Quanto a linearidade uma equação diferencial pode ser linear ou não linear. Ela será linear quando a função incógnita e suas derivadas aparecerem em uma soma em que cada parcela é um produto de alguma derivada com uma função que não depende da incógnita. Uma equação diferencial ordinária linear de ordem n pode ser escrita na forma

$$a_n(t)\frac{d^ny}{dt^n} + a_{n-1}(t)\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + ... + a_1(t)\frac{dy}{dt} + a_0\frac{dy}{dt} = g(t). \tag{2.1}$$

Exemplo 2.4. *São equações diferenciais lineares*

$$y'' - 2y' + y = 0, \quad x^3\frac{d^3y}{dx^3} - x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 3x\frac{dy}{dx} + 5y = e^x.$$

As equações diferenciais ordinárias que não podem ser colocadas na forma (2.1) são ditas não lineares.

Exemplo 2.5. *São equações diferenciais não lineares*

$$yy'' - 2y' = x, \quad y''' + 2e^ty'' + yy' = t^4.$$

2.2 EDO de Primeira Ordem

Uma equação diferencial ordinária de primeira ordem é uma equação da forma

$$F(x, y, y') = 0.$$

Estudaremos equações diferenciais ordinárias de primeira ordem que podem ser escritas da seguinte forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \tag{2.2}$$

2.2.1 Solução de uma EDO

Definição 2.2. *Uma solução particular de uma equação diferencial ordinária de ordem n em um intervalo I é uma função $y(t)$ definida no intervalo I tal que suas derivadas de ordem até n estão definidas no intervalo I e satisfazem a equação neste intervalo.*

Definição 2.3. *A solução geral de uma equação diferencial ordinária de ordem n em um intervalo I é uma família de soluções $y(t)$ no intervalo I dependendo de n constantes arbitrárias, tal que qualquer solução particular pode ser obtida da solução geral atribuindo-se valores as constantes.*

No exemplo 1.1 do capítulo anterior vimos que as soluções da equação diferencial ordinária de primeira ordem $\dfrac{dy}{dx} = y$ são funções da forma $y = ce^x$, onde c é uma constante. Atribuindo valores a c, obtemos as soluções particulares.

Observação 2.1. *Vimos que uma primitiva de uma função f em um intervalo I é uma função F definida em I tal que*

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in I. \tag{2.3}$$

Assim, o cálculo de primitivas consiste em determinar as soluções da equação diferencial (2.3)

Exemplo 2.6. *Considere a equação*

$$ay'' + by' + cy = 0,$$

com $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$. Tais que $b^2 - 4ac = 0$.

Vamos mostrar que $y(t) = e^{-\frac{b}{2a}t}$ *é solução desta equação para* $t \in \mathbb{R}$.

$$y'(t) = -\frac{b}{2a}e^{-\frac{b}{2a}t}, \quad y''(t) = \frac{b^2}{4a^2}e^{-\frac{b}{2a}t}.$$

Substituindo-se $y(t)$, $y'(t)$ *e* $y''(t)$ *no primeiro membro da equação dada obtemos*

$$\begin{aligned} ay'' + by' + cy &= a\frac{b^2}{4a^2}e^{-\frac{b}{2a}t} + b\left(-\frac{b}{2a}e^{-\frac{b}{2a}t}\right) + ce^{-\frac{b}{2a}t} \\ &= \left(\frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c\right)e^{-\frac{b}{2a}t} \\ &= \frac{-b^2 + 4ac}{4a}e^{-\frac{b}{2a}t} = 0, \end{aligned}$$

pois por hipótese $b^2 - 4ac = 0$. *Assim,* $y(t) = e^{-\frac{b}{2a}t}$ *é uma solução particular da equação.*

Exemplo 2.7. *A solução geral da equação diferencial ordinária de 1ª ordem*

$$\frac{dy}{dx} = 2x + 1$$

é o conjunto de todas as primitivas da função $f(x) = 2x + 1$, *isto é,*

$$y(x) = \int (2x + 1)dx + c = x^2 + x + c$$

onde $-\infty < x < +\infty$, *pois este é o maior intervalo em que a solução e sua derivada estão definidas.*

Observação 2.2. *Geometricamente, a solução geral de uma equação diferencial representa uma família de curvas que recebem o nome de curvas integrais. Essa solução denomina-se primitiva ou integral da equação diferencial.*

Veja a seguir o gráfico com as soluções da equação do exemplo (2.7)

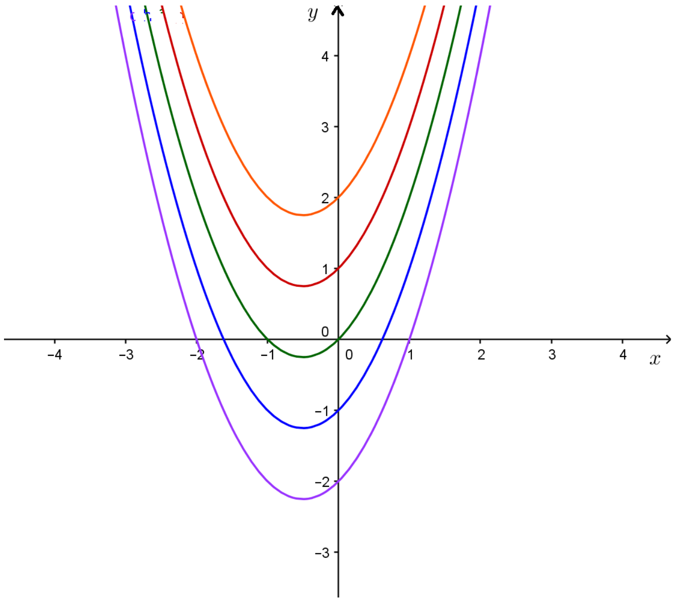

Figura 2.1: Soluções da equação do exemplo 2.7.

Cada curva integral representa, geometricamente, a solução correspondente da equação diferencial. Especificar uma equação particular equivale a escolher uma curva integral particular.

No exemplo (2.7) obtemos infinitas soluções , isto é, infinitas curvas. No entanto, existe apenas uma curva que passa pelo ponto $(0, 0)$, ou seja, existe apenas uma solução tal que $y(0) = 0$. Essa condição é chamada de condição inicial.

2.2.2 Problema de Valor Inicial

Um problema de valor inicial de uma equação diferencial ordinária de 1ª ordem, é dado por

$$(PVI)\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{2.4}$$

Uma solução do problema de valor inicial (2.4) em um intervalo I contendo x_0 é uma função $y(x)$ que está definida neste intervalo, tal que sua derivada também está definida neste intervalo e satisfaz (2.4).

Teorema 2.1 (Existência e Unicidade)**.** *Considere o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{2.5}$$

Se $f(x,y)$ *e* $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *são contínuas no retângulo*

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; \alpha < x < \beta, \delta < y < \gamma\}$$

contendo (x_0, y_0)*, então o problema (2.5) tem uma única solução em um intervalo contendo* x_0*.*

Demonstração. *Ver [8]* ∎

Exemplo 2.8. *Vamos encontrar a solução geral do problema de valor inicial (PVI) dado*

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = e^{2t} \\ y(1/2) = e/2 \end{cases}$$

Solução: *A solução geral da equação*

$$\frac{dy}{dt} = e^{2t}$$

é o conjunto de todas as primitivas de $f(t) = e^{2t}$ *ou seja*

$$y(t) = \int e^{2t} dt + c = \frac{e^{2t}}{2} + c,$$

para todo $t \in (-\infty, \infty)$ *e* c *uma constante real.*

Substituindo $t = 1/2$ *e* $y = \frac{e}{2}$ *na solução geral encontrada, temos* $c = 0$*. Assim a solução particular do PVI é*

$$y(t) = \frac{e^{2t}}{2}$$

e está definida no intervalo $(-\infty, \infty)$*.*

2.3 EDO's Lineares de 1ª Ordem

As equações diferenciais ordinárias lineares de 1ª ordem são equações que podem ser escritas como

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = q(t). \tag{2.6}$$

Vamos analisar os seguintes casos:

Caso em que $p(t) = 0$

Se a função $p(t) = 0$ a equação 2.6 torna-se

$$\frac{dy}{dt} = q(t). \tag{2.7}$$

Integrando ambos os lados da equação (2.7), obtemos a solução geral que é dada por

$$y(t) = \int q(t)dt + c. \tag{2.8}$$

Exemplo 2.9. *A solução geral da equação diferencial ordinária*

$$\frac{dy}{dt} = \operatorname{sen}(2t)$$

é o conjunto de todas as primitivas de $f(t) = \operatorname{sen}(2t)$*, ou seja,*

$$y(t) = \int \operatorname{sen}(2t)dt + c = -\frac{\cos(2t)}{2} + c.$$

Caso Geral

Considere a equação da forma

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = q(t). \tag{2.9}$$

Vamos definir uma função auxiliar, $u(t)$, de modo que ao multiplicarmos a equação (2.9) por esta função, a equação obtida é uma equação linear com $p(t) = 0$, ou seja, uma equação do tipo (2.7), que vimos no caso anterior. Uma função com esta propriedade é chamada fator integrante da equação linear.

Seja

$$u(t) = e^{\int p(t)dt},$$

mostraremos que $u(t)$ é um fator integrante da equação (2.9).

De fato, note primeiro que

$$\frac{du}{dt} = e^{\int p(t)dt}\frac{d}{dt}\left(\int p(t)dt\right) = e^{\int p(t)dt}p(t) = u(t)p(t). \tag{2.10}$$

Assim multiplicando (2.9) por $u(t)$, obtemos

$$u(t)\frac{dy}{dt} + u(t)p(t)y = u(t)q(t), \tag{2.11}$$

como por (2.10), $u(t)p(t) = \dfrac{du}{dt}$, então substituindo em (2.11), temos

$$u(t)\frac{dy}{dt} + \frac{du}{dt}y = u(t)q(t). \tag{2.12}$$

Observe que o lado esquerdo da equação (2.12) é a derivada de um produto, assim pode ser reescrita na forma

$$\frac{d}{dt}[u(t)y(t)] = u(t)q(t). \tag{2.13}$$

A equação (2.13) é uma equação do tipo (2.7), vista no caso anterior, isto é,

$$\frac{dY}{dt} = f(t)$$

em que $Y(t) = u(t)y(t)$ e $f(t) = u(t)q(t)$. Logo, a solução geral de (2.13) é dada por

$$u(t)y(t) = \int u(t)q(t)dt + c. \tag{2.14}$$

Como $u(t) \neq 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$, dividindo a equação (2.14) por $u(t)$ obtemos que a solução geral de (2.9) é dada por

$$y(t) = \frac{1}{u(t)} \int u(t)q(t)dt + c.$$

Observação 2.3. *Na próxima seção, veremos como obter o fator integrante* $u(t) = e^{\int p(t)dt}$ *da equação* (2.9).

Exemplo 2.10. *Resolva a equação*

$$\frac{dy}{dx} - 3y = 0. \tag{2.15}$$

Solução: *O fator integrante da equação, é*

$$u(x) = e^{\int(-3)dx} = e^{-3x}.$$

Multiplicando-se a equação (2.15) *por* $u(t)$*, obtemos*

$$e^{-3x}\frac{dy}{dx} - 3e^{-3x}y = 0,$$

note que o lado esquerdo é a derivada do produto $e^{-3x}y$*. Logo, podemos escrever*

$$\frac{d}{dx}[e^{-3x}y] = 0$$

integrando-se obtemos,

$$e^{-3x}y = c$$

assim

$$y = ce^{3x}$$

é a solução geral da equação diferencial ordinária (2.15)

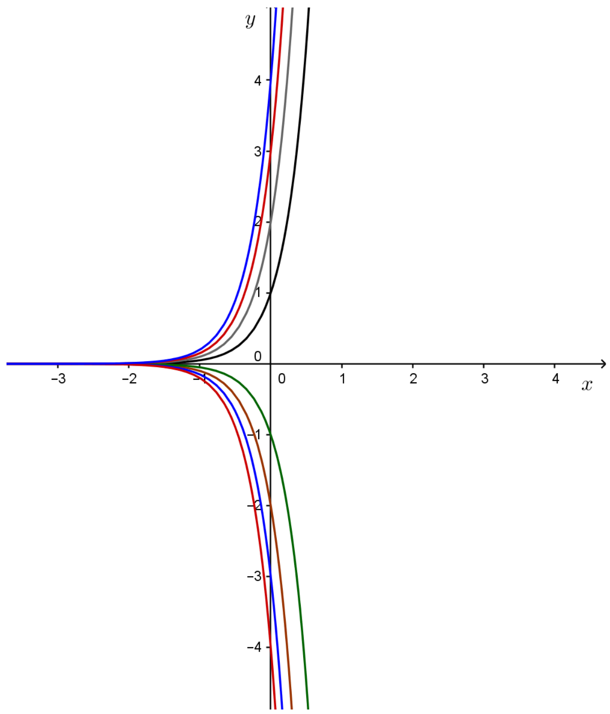

Figura 2.2: Soluções da equação do exemplo 2.10.

2.3.1 Fator Integrante

Mostraremos como chegar ao fator integrante $u(t) = e^{\int p(t)dt}$. Comparando-se as equações (2.12) e (2.13) percebemos que o fator integrante $u(t)$ deve ser uma função que satisfaz a equação diferencial

$$\frac{du}{dt} = p(t)u(t).$$

Que é uma equação linear, com $q(t) = 0$. Supondo $u(t) \neq 0$, iremos multiplicar esta equação por $\dfrac{1}{u(t)}$ obtendo a equação

$$\frac{1}{u(t)}\frac{du}{dt} = p(t).$$

Que pode ser escrita como

$$\frac{d}{du}(\ln \mid u(t) \mid)\frac{du}{dt} = p(t),$$

pois $\dfrac{1}{u(t)} = \dfrac{d}{du}(\ln \mid u(t) \mid)$. Daí pela regra da cadeia, obtemos

$$\frac{d}{dt}(\ln \mid u(t) \mid) = p(t)$$

que é uma equação do tipo (2.7) que resolvemos simplesmente integrando-se ambos os membros da igualdade.

Daí, obtemos

$$\ln \mid u(t) \mid = \int p(t)dt + c_1.$$

Aplicando exponencial em ambos os membros e eliminando o módulo, temos

$$u(t) = \pm e^{c_1} e^{\int p(t)dt} = Ce^{\int p(t)dt}.$$

Como estamos interessados em apenas um fator integrante tomamos $C = 1$ e obtemos

$$u(t) = e^{\int p(t)dt}.$$

2.4 EDO's de Variáveis Separáveis

Definição 2.4. *Uma equação diferencial ordinária da forma*

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \tag{2.16}$$

onde g é definida num conjunto no qual $g(y) \neq 0$, é chamada de separável ou de variáveis separáveis.

Exemplo 2.11. *A equação*

$$\frac{dy}{dx} = xy^2$$

é uma equação de variáveis separáveis, visto que podemos definir $f(x) = x$ e $g(y) = y^2$.

Exemplo 2.12. *A equação*

$$\frac{dy}{dx} = x + y$$

não é uma equação de variáveis separáveis, pois considerando $f(x) = x$ e $g(y) = y$, temos

$$\frac{dy}{dx} \neq f(x)g(y).$$

2.4.1 Método para Resolver Equações Separáveis

A equação (2.16) pode ser escrita como

$$y' = f(x)g(y).$$

Separando as variáveis x e y, obtemos a equação equivalente

$$\frac{y'}{g(y)} = f(x). \tag{2.17}$$

Integrando, em relação a x, ambos os membros da equação (2.17), temos

$$\int \frac{y'}{g(y)}dx = \int f(x)dx.$$

Fazendo uma mudança de variáveis na integral da esquerda, pondo $y'dx = dy$, obtemos

$$\int \frac{1}{g(y)}dy = \int f(x)dx.$$

Também podemos obter a solução implicitamente da seguinte maneira. Pela equação (2.16), temos

$$\frac{1}{g(y)}\frac{dy}{dx} = f(x). \tag{2.18}$$

Considerando

$$h(y) = \int \frac{1}{g(y)}dy$$

então

$$\frac{dh}{dy} = \frac{1}{g(y)}. \tag{2.19}$$

Substituindo (2.19) em (2.18), obtemos

$$\frac{dh}{dy}\frac{dy}{dx} = f(x). \tag{2.20}$$

Por outro lado, pela regra da cadeia, temos

$$\frac{d}{dx}h(y(x)) = \frac{dh}{dy}\frac{dy}{dx} \tag{2.21}$$

de (2.20) e (2.21), segue que

$$\frac{d}{dx}h(y(x)) = f(x). \tag{2.22}$$

A equação (2.22), é do tipo (2.7), assim integrando-se ambos os membros em relação a x, obtemos que a solução da equação (2.16) é dada implicitamente por

$$h(y(x)) = \int f(x)dx + c.$$

Capítulo 3

Aplicação

Neste capítulo, veremos uma importante aplicação das equações diferenciais ordinárias na Lei do Resfriamento de Newton.

3.1 Lei do Resfriamento de Newton

Em 1701, quando tinha quase 60 anos, Newton publicou anonimamente um artigo intitulado "Scala Graduum Caloris"[Newton 1701], em que descreve um método para medir temperaturas de até 1000°C, algo impossível aos termômetros da época. O método estava baseado no que hoje é conhecido como a lei do resfriamento de Newton: a taxa de diminuição da temperatura de um corpo é proporcional à diferença de temperaturas entre o corpo e o ambiente. Uma ótima descrição desse trabalho foi feita por A. French [em French 1993a].

Se T é a temperatura de um corpo no instante t, T_m é a temperatura ambiente e $\dfrac{dT}{dt}$ a taxa com que a temperatura do corpo varia, a lei do resfriamento de Newton pode ser escrita matematicamente da seguinte maneira

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_m)$$

onde k é uma constante de proporcionalidade que depende de diversos fatores, tais como:

Superfície Exposta: Deve-se verificar que quanto maior for a superfície de contato entre o corpo e o ambiente maior será a rapidez de resfriamento.

Calor Específico do Corpo: Quanto maior a quantidade de calor de um corpo, maior será a quantidade de energia para variar sua temperatura. Logo se dois corpos recebem a mesma quantidade de energia num mesmo intervalo de tempo, o que apresentar maior quantidade de calor menor será a rapidez de resfriamento.

Características do Meio: São muito importantes nesse processo, pois se o objeto estiver em contato com ar o processo de resfriamento será mais lento do que se estivesse imerso em água, pois a condutividade térmica da água é maior que a do ar.

O sinal negativo da constante quer dizer que o corpo é mais quente do que o ambiente em que está inserido, ou seja, $\dfrac{dT}{dt}$ é menor que zero quando $(T - T_m)$ for maior que zero. A teoria sobre resfriamento pode ser observada em algumas situações do nosso cotidiano. A seguir, destacamos algumas dessas situações.

I. Quando desejamos tomar um líquido muito quente, usualmente tentamos resfriá-lo passando diversas vezes de um recipiente para outro.

II. Geralmente para resfriar rapidamente algum alimento colocamos o recipiente parcialmente imerso em água.

III. Um cachorro em dia muito frio fica encolhido, enroscado em si mesmo, pra se aquecer. Isto ocorre porque quando se diminui a superfície do corpo em contato com o meio externo, diminui-se também a rapidez com que ocorre a troca de calor.

Exemplo 3.1. *Um bolo quente que acabou de sair do forno é largado sobre uma mesa e esfria a uma taxa proporcional à diferença de temperatura entre o bolo e o ar em volta. Ao passo que o bolo esfria, a taxa a qual ele esfria vai diminuindo, por que diminui a diferença de temperatura entre o bolo e o ar em volta.*

Fonte: Google Imagens

Observe que a lei do resfriamento de Newton é uma equação diferencial ordinária de primeira ordem linear e separável, assim vamos utilizar o método das variáveis separáveis para encontrar a solução desta equação.

Temos
$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_m).$$
Separando as variáveis, obtemos
$$\frac{dT}{(T - T_m)} = -kdt,$$
integrando ambos os membros da última equação, segue que
$$\int \frac{dT}{(T - T_m)} = \int -kdt$$
assim,
$$\ln \mid T - T_m \mid = -kt + c_1$$
aplicando a exponencial a ambos os membros e sabendo que $T - T_m > 0$ temos
$$T - T_m = e^{-kt}e^{c_1}$$
portanto,
$$T(t) = T_m + Ce^{-kt} \tag{3.1}$$
onde $c = e^{c_1}$ é uma constante, é a solução geral da lei do resfriamento de Newton.

Aplicação na investigação de um homicídio

Fonte: Google Imagens

Exemplo 3.2. *O corpo de uma vítima de assassinato é achado a uma temperatura de 35° C, ao meio-dia, numa sala com temperatura constante de 20º C; duas horas depois a temperatura do corpo é de 33º C.*

(a) Ache a temperatura T do corpo como função de t, o tempo em horas desde que foi encontrado.

(b) Na hora do assassinato, o corpo da vítima tinha a temperatura normal, 37º C. Quando ocorreu o crime?

Solução:

(a) Temos que resolver o seguinte problema de valor inicial.

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{dt} = -k(T-20) \\ T(0) = 35 \quad T(2) = 33 \end{cases} \tag{3.2}$$

Por (3.1), *a solução geral da equação*

$$\frac{dT}{dt} = -k(T-20)$$

é dada por

$$T(t) = 20 + Ce^{-kt}$$

para determinar C usamos o fato que $T(0) = 35$

$$T(0) = 20 + Ce^{0}$$

$$35 = 20 + C.$$

Então $C = 15$ e temos

$$T(t) = 20 + 15e^{-kt}.$$

Para achar k, usamos o fato que $T(2) = 33$.

$$T(2) = 20 + 15e^{-k(2)}$$

$$33 = 20 + 15e^{-2k}$$

isolamos a exponencial e resolvemos para k,

$$13 = 15e^{-2k}$$

$$\frac{13}{15} = e^{-2k}$$
$$\ln\left(\frac{13}{15}\right) \approx -0,143 = -2k$$
$$k \approx \frac{0,143}{2} = 0,072.$$

Portanto a temperatura T do corpo como função do tempo t é dada por

$$T(t) = 20 + 15e^{-0,072t}.$$

(b) *Queremos saber quando a temperatura foi de 37° C. Fazendo $T(t) = 37$ e resolvendo a equação para t, temos*

$$37 = 20 + 15e^{-0,072t}$$
$$\frac{17}{15} = e^{-0,072t}$$

aplicando o logaritmo em ambos os lados, temos

$$\ln\left(\frac{17}{15}\right) \approx 0,125 = -0,072t$$

assim

$$t \approx -\frac{0,125}{0,072} = -1,74 \quad horas.$$

Respondendo a pergunta: Quando ocorreu o crime?

Como acharam o corpo ao meio-dia, e o instante de sua morte foi 1,74 horas antes, isto é, aproximadamente 1 hora e 45 minutos antes, então a vítima morreu aproximadamente às 10h15mim.

Exemplo 3.3. *O café está a 90° C logo depois de coado e, um minuto depois, passa para 85° C, em uma cozinha a 25° C. Vamos determinar a temperatura do café em funcão do tempo e o tempo que levará para o café chegar a 60° C.*

Fonte: Google Imagens

Solução: *Temos que resolver o seguinte problema de valor inicial.*

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{dt} = -k(T-25) \\ T(0) = 90 \quad T(1) = 85 \end{cases} \tag{3.3}$$

Por (3.1), *a solução geral da equação*

$$\frac{dT}{dt} = -k(T-25)$$

é dada por

$$T(t) = 25 + Ce^{-kt}$$

para determinar C *usamos o fato que* $T(0) = 90$

$$T(0) = 25 + Ce^{0}$$

$$90 = 25 + C.$$

Então $C = 65$ *e temos*

$$T(t) = 25 + 65e^{-kt}.$$

Para achar k, *usamos o fato que* $T(1) = 85$.

$$T(1) = 25 + 65e^{-k.1}$$

$$85 = 25 + 65e^{-k}$$

isolamos a exponencial e resolvemos para k,

$$60 = 65e^{-k}$$

$$\frac{60}{65} = e^{-k}$$

$$-\ln\left(\frac{60}{65}\right) \approx 0,08 = k.$$

Portanto a temperatura T do corpo como função do tempo t é dada por

$$T(t) = 25 + 65e^{-0,08t}.$$

Queremos saber quando a temperatura vai atigir 60°C. Fazendo $T(t) = 60$ e resolvendo a equação para t, temos

$$60 = 25 + 65e^{-0,08t}$$

$$\frac{35}{65} = e^{-0,08t}$$

aplicando o logaritmo em ambos os lados, temos

$$-\ln\left(\frac{35}{65}\right) \approx 0,619 = 0,08t$$

assim

$$t \approx \frac{0,619}{0,08} = 7,73 \approx 8 \quad \textit{minutos}.$$

Portanto o café levará aproximadamente 8 minutos para chegar a 60°C.

Conclusão

Neste trabalho tivemos a oportunidade de conhecer melhor as equações diferenciais ordinárias e perceber como estas equações são utilizadas para resolver diversos problemas tanto na matemática quanto de outras áreas do conhecimento. Também pudemos estudar um relevante resultado da Física, a lei do resfriamento de Newton que pode ser representada matematicamente através de uma equação diferencial ordinária de 1ª ordem, a qual depois de resolvida permite determinar a temperatura aproximada de um corpo em qualquer instante. Deste modo, com este trabalho pudemos destacar a importância do estudo das equações diferenciais ordinárias e da lei do resfriamento de Newton, pois, ambas tem grande aplicabilidades práticas.

Referências Bibliográficas

[1] BOYER, Cal B. *História da matemática.* Tradução de Elza F. Gomide. 2ª ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1996.

[2] BOYCE, William E.; DIPRIMA, Richard C. *Equações Diferenciais elementares e Problemas de Valores de Contorno.* 8ª ed.Rio de Janeiro: LTC, 2010.

[3] GUIDORIZZI, H. L. *Um curso de cálculo volume 1.* 5ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001.

[4] HIMONAS, Alex; Alan, Howard. *Cálculo Conceitos e Aplicações.* Rio de Janeiro: LTC, 2005.

[5] HUGHES-HALLETT, D. et al. *Cálculo e aplicações.* Tradução de Elza F. Gomide. 2ª ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1999.

[6] LIMA, Elon L. *Ánalise real volume 1.* 8ª ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2009

[7] LIMA, Elon L. *Curso de Análise real volume 1.* 10ª ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2009

[8] SANTOS, Reginaldo J. *Existência e Unicidade de Soluções de Equações Diferenciais Ordinárias.* Belo Horizonte: Imprensa da UFMG, 2010. Disponível em: http://www.mat.ufmg.br/ regi/eqdif/existunic.pdf. (Acessado em 25/05/2016).

[9] SANTOS, Reginaldo J. *Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias.* Belo Horizonte: Imprensa da UFMG, 2011. Disponível em: http://www.mat.ufmg.br/ regi/eqdif/iedo.pdf. (Acessado em 21/04/2016).

[10] SIAS, Denise B. *Resfriamento de um Corpo.* Rio Grande do Sul: Centro Federal de Educação Tecnológica de Pelotas. Disponível em:

http://www2.pelotas.ifsul.edu.br/denise/caloretemperatura/resfriamento.pdf. (Acessado em 21/05/2016).

[11] ZILL, Denis G. *Equações Diferenciais volume 1.* 3ª ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 2001.