

Universidade Federal de Campina Grande  
Centro de Engenharia Elétrica e Informática  
Coordenação de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

# Sistemas de Transmissão com Codificação Wavelet com Aumento da Eficiência Espectral

Eline Alves Santos

Tese submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Campina Grande - Campus I como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Doutor em Engenharia Elétrica.

Área de Concentração: Processamento de Informação  
Linha de Pesquisa: Eletrônica e Telecomunicações

Francisco Marcos de Assis (Orientador)

Campina Grande, Paraíba, Brasil

©Eline Alves Santos, Outubro de 2014

Universidade Federal de Campina Grande  
Centro de Engenharia Elétrica e Informática  
Coordenação de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

Sistemas de Transmissão com Codificação Wavelet  
com Aumento da Eficiência Espectral

Eline Alves Santos

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL DA UFCG

S237s Santos, Eline Alves.  
Sistemas de transmissão com codificação wavelet com aumento da eficiência espectral / Eline Alves Santos. – Campina Grande, 2014. 58 f. : il. color.

Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) - Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Engenharia Elétrica e Informática, 2014.

"Orientação: Prof. Dr. Francisco Marcos de Assis".

Referências.

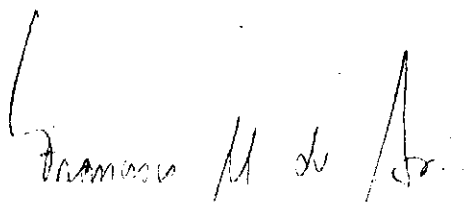
1. Codificação Wavelet. 2. Eficiência Espectral 3. Sistemas de Transmissão. I. Assis, Francisco Marcos de. II. Título.

CDU 621.39(043)

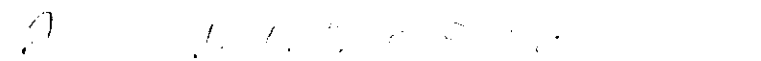
**"SISTEMAS DE TRANSMISSÃO COM CODIFICAÇÃO WAVELET COM AUMENTO DA EFICIÊNCIA ESPECTRAL "**

**ELINE ALVES SANTOS**

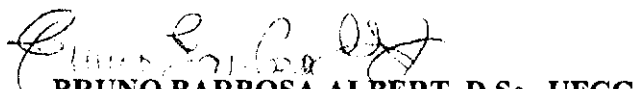
**TESE APROVADA EM 17/10/2014**



**FRANCISCO MARCOS DE ASSIS, Dr., UFCG**  
Orientador(a)



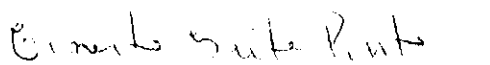
**RAIMUNDO CARLOS SILVÉRIO FREIRE, Dr., UFCG**  
Examinador(a)



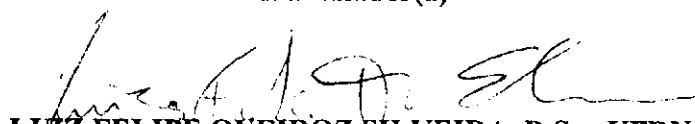
**BRUNO BARBOSA ALBERT, D.Sc., UFCG**  
Examinador(a)



**EDMAR CANDEIA GURJAO, D.Sc., UFCG**  
Examinador(a)



**ERNESTO LEITE PINTO, Dr, IME**  
Examinador(a)



**LUIZ FELIPE QUEIROZ SILVEIRA, D.Sc., UFRN**  
Examinador(a)

**CECÍLIO JOSÉ LINS PIMENTEL, Ph.D, UFPE**  
Examinador(a)

**CAMPINA GRANDE - PB**

## Resumo

Desde sua apresentação, a codificação wavelet tem sido explorada como técnica eficaz para transmissão digital em canais sujeitos ao ruído branco e desvanecimento, com destaque pela sua simplicidade na decodificação e adaptação “natural” das taxas de transmissão; uma característica conveniente em sistemas adaptativos de comunicações. O que dificulta a utilização desta técnica de modo mais generalizado? Dois destes fatores se destacam: a necessidade de projetar constelações “especiais” e a eficiência espectral limitada. Estes dois problemas são atacados e resolvidos nesta tese; sendo estas as suas principais contribuições. O primeiro problema é resolvido com a introdução de sistemáticas mais simples para construção de constelações especiais e o segundo pela formação de blocos de símbolos wavelet, o que permite a construção de sistemas com eficiência espectral arbitrária. As probabilidades a priori dos blocos de símbolos são importantes no processo de decodificação; elas são calculadas por intermédio de uma função geratriz de probabilidades especialmente modificada para tal fim. Finalmente, os resultados obtidos são comparados com vantagem sobre sistemas baseados em codificação espaço-temporal de eficiência espectral similar.

## **Abstract**

Since its advent, wavelet coding has been recognized as a promising technique for wireless transmission systems over white noisy and fading channels, especially due to its low decoding complexity and “natural” transmission rate adaptation. Notice that the last feature is very convenient with adaptive digital transmission systems. But, what are the main obstacles impairing a more general utilization of wavelet coding? Two aspects are in order: the requirement to project “special” constellations and its limited spectral efficiency. These two problems are attacked and solved in this thesis; being these solutions its main contributions. The first problem is solved with the introduction of simpler methods to building special constellations and, the second problem is solved by creating blocks of wavelet symbols prior their transmission over the channel. Since the a priori block probabilities are crucial to decoding, they are computed by means of an specially adapted probability generating function. Finally, the results obtained are advantageable compared with space-time encoded systems of similar spectral efficiency.

## **Dedicatória**

A Deus.

Aos meus pais, Obed Santos e Edneuzza Alves dos Santos.

Aos meus irmãos, Edlane e Obed.

Aos meus avós (em memória):

Maria Helena Santos e Franculino Santos,

e,

Maria Eunice Alves Santos e Manoel José dos Santos.

E por último a mim.

## **Agradecimentos**

Gostaria de agradecer primeiramente aos professores Francisco Marcos de Assis e Edmar Candeia Gurjão. Ao apoio recebido pela CAPES, COPELE e IFS. Aos meus colegas do IQUANTA, LAPS e aos amigos que acompanharam a minha jornada na UFCG. Em especial a duas grandes amigas Georgina e Elloá.

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Codificação com Matrizes Wavelet</b>	<b>6</b>
2.1	Modelo do Sistema . . . . .	7
2.2	Matrizes de Coeficientes Wavelet . . . . .	8
2.3	Codificação com Matrizes Wavelet . . . . .	10
2.4	Decodificação Wavelet . . . . .	14
2.5	Estrutura Algébrica da Codificação Wavelet . . . . .	14
2.6	Considerações Finais . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Projeto de Constelações para Sistemas com Codificação Wavelet</b>	<b>19</b>
3.1	Formulação do Problema . . . . .	20
3.2	Resultados Numéricos . . . . .	27
3.3	Considerações Finais . . . . .	30
<b>4</b>	<b>Codificação Wavelet com Eficiência Espectral</b>	<b>33</b>
4.1	Distribuição de probabilidades de blocos de símbolos wavelet . . . . .	35
4.2	Agrupamento de símbolos wavelet para aumentar a eficiência espectral . . .	44
4.3	Sistemas com eficiência de 2 bits/s/Hz . . . . .	46
4.4	Sistemas com eficiência de 1 bits/s/Hz . . . . .	49
<b>5</b>	<b>Conclusão e trabalhos futuros</b>	<b>54</b>
5.1	Principais Contribuições . . . . .	54
5.2	Trabalhos futuros . . . . .	55



# Lista de Figuras

1.1	Diagrama de blocos do sistema com codificação wavelet. . . . .	2
2.1	Diagrama de blocos do sistema com codificação wavelet. . . . .	8
2.2	Diagrama do codificador para uma MCW 2x8. . . . .	15
3.1	Constelações M-PSK . . . . .	27
3.2	Constelações M-PSK com média zero . . . . .	28
3.3	Constelações M-PO . . . . .	29
3.4	Curvas de SER para codificação wavelet com MCW 2x8 . . . . .	30
3.5	Desempenho em termos de BER para codificação wavelet com MCW 2x8 .	31
3.6	Desempenho em termos de SER para codificação wavelet com MCW 2x128	31
3.7	Desempenho em termos de BER para codificação wavelet com MCW 2x128	32
4.1	Diagrama do codificador para uma MCW 2x8. . . . .	37
4.2	Pares de símbolos wavelet dados pelo mapeamento simples no espaço dos sinais (plano $\mathbb{R}^2$ ) para MCW $2 \times 8$ . Cada ponto da constelação é rotulado pelo par de símbolos que representa. A probabilidade do par é igual ao inteiro na diagonal acima do ponto da constelação multiplicado por $2^{-8}$ . . .	39
4.3	Pares de símbolos wavelet no plano $\mathbb{R}^2$ para MCW 2x8. Constelação (normalizada) obtida após uma rotação de $45^\circ$ com desempenho equivalente a da constelação original mostrada na Figura 4.2. Cada ponto da constelação é rotulado pelo par de símbolos que representa. A probabilidade do par é igual ao inteiro na diagonal acima do ponto da constelação multiplicado por $2^{-8}$ .	45
4.4	Curvas de BER para sistemas wavelet 11-PSK (1 bit/s/Hz) e eficiência espectral 2 bits/s/Hz com MCW 2x8 e 2x128. . . . .	47

---

4.5	Curvas de BER para sistemas wavelet 2x128 (2 bit/s/Hz) e 4-QAM. . . . .	48
4.6	Curvas de BER para sistemas wavelet com eficiência espectral de 2 bits/s/Hz com MCW 2x8 e 2x128, e dois sistema com codificação espaço-temporal de bloco sendo um com 2 antenas de transmissão e outro com quatro antenas.	48
4.7	Desempenho para a constelação modificada. . . . .	49
4.8	Pares de símbolos wavelet no plano $\mathbb{R}^2$ para MCW 2x8 e R=1/2 . . . . .	52
4.9	Curvas de BER para sistemas wavelet com eficiência espectral 1 bits/s/Hz para MCW 2x128 e R=1/2, um sistema com constelação 11-PSK e um sistema com codificação espaço-temporal de bloco com 2 antenas de transmissão e uma na recepção . . . . .	53

# Lista de Tabelas

2.1	Exemplo de codificação wavelet . . . . .	11
2.2	Símbolos gerados a partir de uma MCW $2 \times 8$ . . . . .	11
2.3	Esquema de quantização para uma MCW $2 \times 128$ . . . . .	13
4.1	Pares de símbolos wavelet e suas respectivas probabilidades para sistema de posto $m = 2$ e gênero $g = 4$ , portanto uma MCW $2 \times 8$ . . . . .	40
4.2	Exemplo de codificação wavelet com taxa $1/2$ . . . . .	50
4.3	Símbolos gerados a partir de uma MCW $2 \times 8$ para $R=1/2$ . . . . .	51
4.4	Pares de símbolos wavelet e suas respectivas probabilidades para MCW $2 \times 8$ e $R=1/2$ . . . . .	51

# Capítulo 1

## Introdução

Os problemas abordados em engenharia de comunicações consistem, basicamente, em projetar meios para transmitir informação de uma fonte para um ou mais destinatários via um canal de comunicação, com qualidade (mínimo de distorção ou erros), eficiência, altas taxas de transmissão e, recentemente, com baixo consumo de energia. Esses objetivos são conflitantes entre si, ou seja, a melhora de um resulta na degradação dos outros, logo o atendimento aos mesmos implica encontrar uma solução de compromisso adequada ao sistema de comunicação em questão.

Em um sistema de comunicação sem fio, além de ruído e interferência, o sinal transmitido está sujeito a atenuações devido tanto à propagação quanto ao movimento do receptor em relação ao transmissor. Estas atenuações podem degradar severamente a qualidade do sinal recebido. O desempenho de sistemas de comunicações sem-fio é limitado pelo desvanecimento plano produzido por múltiplos percursos de propagação [20; 14]. Para combater os efeitos deletérios dos multipercursos na comunicação destacam-se as técnicas de diversidade, o uso de codificadores e equalizadores e esquemas de modulação codificada [1].

Em que pese a maior parte das aplicações de wavelets ocorra em codificação de fontes [15], em 1992, Tzannes et. al. [23], propuseram seu uso para codificação de canal. Em especial demonstraram os autores que as matrizes de coeficientes wavelet definem um codificador símbolos de uma fonte discreta. Os símbolos da fonte podem ser inteiros, reais ou complexos, ou seja, em geral, símbolos no corpo do números complexos. As sequências codificadas formadas por símbolos, que podem ser interpretados como inteiros, reais

ou complexos, são então mapeados em sinais a serem transmitidos através do canal. Estas sequências possuem propriedades de resistência ao desvanecimento plano, como também ao ruído impulsivo. O livro de Resnikoff et. al. [15] apresenta de modo detalhado a análise wavelet sob o ponto de vista matricial e diversas aplicações.

Na figura 1.1 encontra-se o diagrama de blocos do sistema com codificação wavelet explorado. nesta tese. A fonte é binária, com símbolos  $\{1, -1\}$ . No processo de codificação wavelet adotado um mesmo dígito binário gerado pela fonte de informação participa da composição de vários símbolos codificados, doravante denominados símbolos wavelet, ao longo do intervalos de sinalização, ensejando uma forma de diversidade temporal. É essa diversidade permite combater no receptor as degradações sofridas pelo sinal ao longo do canal, em particular as degradações devidas ao desvanecimento plano.

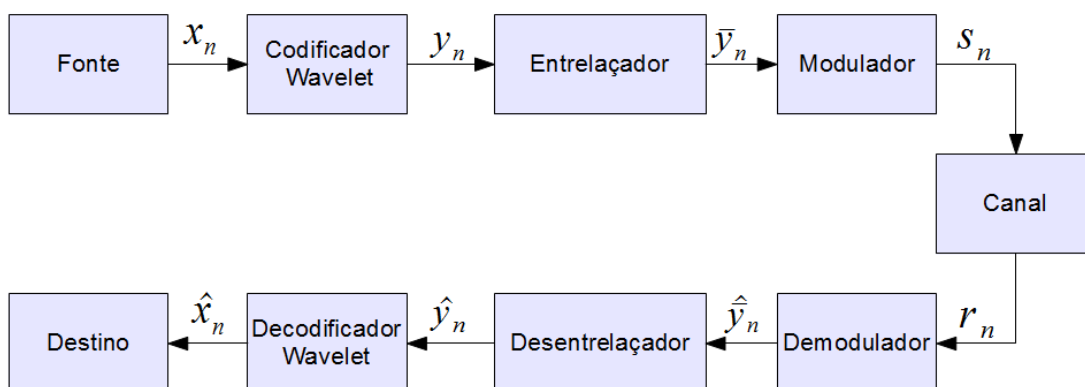


Figura 1.1: Diagrama de blocos do sistema com codificação wavelet.

A quantidade de símbolos afetados por um mesmo bit está relacionada ao número de colunas da matriz de coeficientes wavelet (MCW) utilizada na codificação e portanto o ganho de desempenho da codificação wavelet depende fortemente deste parâmetro [5], mas diferentemente de outras codificações, como a convolucional, um aumento desta grandeza não resulta em grande impacto a complexidade do processo de decodificação.

As propriedades de ortogonalidade da matriz wavelet permitem que a decodificação seja

feita através de um simples banco de correlatores casados às linhas da matriz utilizada na codificação [15]. No entanto, como o aumento no número de colunas da MCW resulta em um aumento na cardinalidade do alfabeto de símbolos codificados, a transmissão, i.e., o mapeamento dos símbolos codificados em sinais deve ser considerado com cuidado para evitar a aglomeração de pontos da constelação de sinais e consequente perda de desempenho.

Os trabalhos que sucederam o de Tzannes [23], buscaram em sua maioria resolver o problema de encontrar uma modulação adequada à transmissão dos símbolos wavelets. Esta questão decorre do fato que os símbolos gerados são multiníveis e não equiprováveis, tornando a modulação utilizada para transmitir os mesmos, um ponto crucial no projeto de sistemas que empreguem esta técnica. Uma vez que se transmite um sinal para cada símbolo wavelet, quando a codificação wavelet é combinada com as seguintes técnicas de modulação pode-se afirmar que [23]:

- PAM (*Amplitude pulse modulation*): um aumento no número de colunas da matriz requer um aumento na energia média por símbolo.
- M-FSK (*M-ary frequency shift keying*): um aumento no número de colunas da matriz requer um aumento na largura de banda da transmissão.
- M-PSK (*M-ary phase shift keying*): um aumento no número de colunas da matriz resulta em degradação no desempenho devido a aglomeração de pontos na constelação PSK.

Em [18] apresenta-se uma análise matemática para a probabilidade de erro de bit para um sistema que emprega codificação wavelet em canais com desvanecimento Rayleigh, a expressão obtida é utilizada como função a ser minimizada por um algoritmo genético no projeto das constelações propostas. Para contornar o problema da grande quantidade de símbolos gerados na codificação, propõe-se um esquema de quantização no qual mais de um símbolo wavelet é levado a um mesmo ponto da constelação. Para fins de comparação mostrou-se que os esquemas propostos tinham desempenho superior ao de um sistema com codificação espaço-temporal de mesma eficiência espectral (STBC - *Space-Time Block Coding*).

Além dos trabalhos já supra citados apresentados, em [19] e [4] exploraram a codificação wavelet proposta por Tzannes em [23]. O que todos os esquemas propostos têm em comum é a baixa eficiência espectral, de no máximo 1 bit/s/Hz.

## Questões de Pesquisa

O aumento da eficiência espectral é importante para que se possa explorar melhor os sistemas com codificação wavelet. Sabe-se que sistemas com codificação wavelet podem ser utilizados com taxa diferente de 1, porém, até então nenhum trabalho explorou essa possibilidade, pois essa taxa de codificação reduziria ainda mais a eficiência dos sistemas com codificação wavelet.

As formas tradicionalmente utilizadas em sistemas digitais para aumentar a eficiência espectral quando empregadas ao sistema com codificação wavelet resultariam em uma quantidade ainda maior de símbolos codificados e portanto dos sinais na constelação, podendo levar a um baixo desempenho. Neste caso é necessário investigar alternativas não usuais.

Diante do exposto, a técnica de codificação wavelet como codificação de canal primeiramente proposta por Tzannes e outros [23] apresenta uma gama de questões e aspectos não explorados, dentre estas foram questões de pesquisa desta tese:

1. Como projetar constelações adequadas à transmissão de símbolos wavelets ?
2. Como aumentar a eficiência espectral de sistemas com codificação wavelet mantendo-se uma boa relação de compromisso entre desempenho e complexidade ?

Quanto à questão 2, podemos afirmar que tivemos como motivação o desejo de projetar um sistema com codificação wavelet de taxa variável. Que segundo a literatura científica, pode ser obtida somente pela mudança da sobreposição das linhas da matriz de coeficientes wavelet.

## Organização do Trabalho

Este documento está organizado da seguinte forma:

- No capítulo 2 as matrizes wavelets são definidas e suas principais propriedades são apresentadas. Apresenta-se o processo de codificação e decodificação com matrizes wavelet como proposto por Tzannes e outros [23], bem como a distribuição de probabilidades dos símbolos gerados pelo processo de codificação.
- No capítulo 3, apresenta-se uma metodologia de projeto de constelações de sinais para codificação wavelet. Baseada na otimização de constelações para fontes com distri-

buição não equiprovável proposta por Alajaji e outros em [21]. O desempenho das constelações obtidas pelo método de otimização proposto é avaliado e apresentado neste capítulo.

- O capítulo 4 é dedicado a sistemas com codificação wavelet de eficiência espectral igual ou superior a 1 bit/s/Hz.
- No capítulo 5 são feitas as considerações finais, bem como sugestões para trabalhos futuros.



## Capítulo 2

# Codificação com Matrizes Wavelet

No capítulo anterior foi visto que a codificação por intermédio de matrizes de coeficientes wavelet (WCM) foi proposta originalmente em 1992 por Tzannes et al. [23] como uma técnica para combater aos efeitos do desvanecimento plano em comunicações digitais. A ortogonalidade entre as linhas das WCM permite “distribuir” a informação de cada símbolo da fonte em diversos símbolos codificados, denominados *símbolos wavelet* e recuperá-los com uso de um simples banco de correlatores.

A quantidade de símbolos afetados por um mesmo bit de entrada é denominado aqui *comprimento de restrição do codificador wavelet*,  $K$ , em analogia com o termo utilizado no jargão dos códigos convolucionais. O comprimento de restrição é dado pelo número de colunas da WCM. Seja  $m$  o número de linhas da WCM então o número de colunas é  $mg$ , em que  $g$  é um parâmetro, um número natural, denominado *gênero da matriz wavelet*. Portanto, exceto no caso de alguma modificação da matriz, e.g., encurtamento ou perfuração, o comprimento de restrição do codificador wavelet é dado  $K = mg$ .

É interessante ressaltar que devido a propriedade de ortogonalidade entre suas linhas, pode ser mostrado que a sequência de símbolos da fonte pode ser recuperada por intermédio de um banco de  $m$  filtros lineares de  $K$  elementos.

Convém salientar que não obstante em [23] terem sido consideradas apenas fontes binárias e canais com desvanecimento plano, o método permite codificar símbolos complexos sem alteração dos algoritmos. De fato, as matrizes wavelet e o sistema de codificação nelas baseado é definido para qualquer corpo numérico. Este fato será utilizado nesta tese para introdução das técnicas para aumento de eficiência espectral.

Além da robustez contra os efeitos de desvanecimento plano e lento, em trabalhos posteriores ao de Tzannes constatou-se por intermédio de simulações que a codificação por WCM apresenta vantagens de desempenho em canais sujeitos a desvanecimento plano variante no tempo e ruídos localizados [17; 18].

Neste capítulo são revistos os processos de codificação e decodificação wavelet propostos por Tzannes et. al[23]. A visão geral de um sistema com codificação wavelet é apresentada na Seção 2.1. Na Seção 2.2 são definidas e apresentadas as propriedades das matrizes de coeficientes wavelet. A técnica de codificação com matrizes wavelet é apresentada na Seção 2.3, bem como a distribuição de probabilidades e quantização dos símbolos wavelet. Em seguida, na Seção 2.4 apresenta-se o processo de decodificação. Na Seção 2.5 a codificação wavelet é apresentada sobre uma perspectiva algébrica. Finalmente, algumas considerações finais são feitas na Seção 2.6.

## 2.1 Modelo do Sistema

O diagrama de blocos do sistema com codificação wavelet adotado neste trabalho encontra-se na figura 2.1. Nesse sistema, a fonte gera uma sequência de bits de informação equiprováveis e independentes entre si,  $(x_n, x_{n+1}, \dots)$ . Os bits são codificados em símbolos wavelet,  $y_n$ , no bloco intitulado de codificador wavelet, utilizando-se uma matriz wavelet real plana, conforme descrito na Seção 2.3. Os símbolos,  $y_n$ , são então entrelaçados e mapeados em sinais da constelação adotada,  $s_n$ , transmitidos através de um canal sujeito a desvanecimento Rayleigh plano.

O equivalente em banda básica do sinal recebido é dado por  $\mathbf{r}_n = \alpha \mathbf{s}_n + \mathbf{n}_n$ . Em que  $\alpha$  é a amplitude do desvanecimento com distribuição Rayleigh, e  $\mathbf{n}_n$  é o vetor ruído de média zero com componentes gaussianas descorrelacionadas, cada uma com variância  $N_n/2$ . Assume-se que  $\alpha$ ,  $\mathbf{s}_n$  e  $\mathbf{n}_n$  são independentes entre si, que  $\alpha$  pode ser corretamente estimado a partir do sinal recebido, e que o entrelaçamento é perfeito<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>Foi verificado em [5] que para um desvanecimento lento (com máximo desvio Doppler normalizado de aproximadamente 0,002) o uso de entrelaçador com profundidade de entrelaçamento da ordem de  $mg$  (número de linhas da matriz wavelet utilizada) resulta em um desempenho similar ao obtido com entrelaçamento perfeito.

Os símbolos  $\hat{y}_n$  estimados no demodulador são desentrelaçados e utilizados no decodificador wavelet para estimar os bits transmitidos. De fato, uma das vantagens da codificação wavelet encontra-se na simplicidade do processo de decodificação, que explora as propriedades de ortogonalidade da matriz de coeficientes wavelet, permitindo que a decodificação seja feita através de um banco de correlatores casados às linhas da matriz utilizadas na codificação [15].

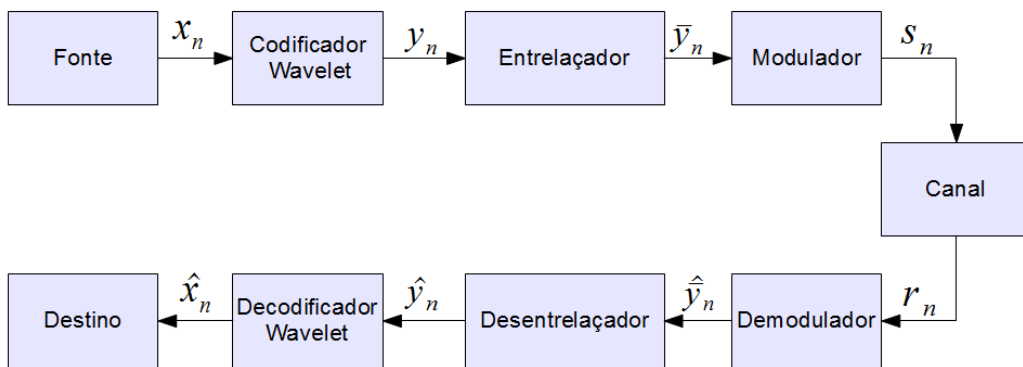


Figura 2.1: Diagrama de blocos do sistema com codificação wavelet.

## 2.2 Matrizes de Coeficientes Wavelet

Nesta seção introduz-se a definição e as propriedades relevantes das matrizes de coeficientes wavelet; detalhes e provas podem ser encontrados em [15]. Considere a matriz  $\mathbf{A} = (A_k^j)$  com  $m \geq 2$  linhas e  $mg$  colunas

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_0^0 & \cdots & a_{mg-1}^0 \\ a_0^1 & \cdots & a_{mg}^1 \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_0^{m-1} & \cdots & a_{mg-1}^{m-1} \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

com elementos no conjunto dos reais ou complexos.

A matriz  $A$  é dita ser uma *matriz wavelet de posto  $m$  e gênero  $g$*  se as condições a seguir forem satisfeitas

$$\sum_{k=0}^{mg-1} a_k^s = m\delta_{s,0}, \quad 0 \leq s \leq m-1 \quad (2.2)$$

$$\sum_{k=0}^{mg-1} a_{[k+mr']}^{s'} \bar{a}_{[k+mr]}^s = m\delta_{s',s}\delta_{r',r}, \quad 0 \leq s', s \leq m-1, 0 \leq r', r \leq g-1 \quad (2.3)$$

em que o operador  $[k+ml]$  representa  $k+ml$  módulo  $mg$ ,  $\bar{a}$  é o conjugado complexo de  $a$  e  $\delta_{x,y}$  é o delta de Kronecker, definido por:

$$\delta_{x,y} = \begin{cases} 1 & \text{se } x = y \\ 0 & \text{se } x \neq y \end{cases} \quad (2.4)$$

A Equação (2.2) estabelece que interpretadas como vetores, as linhas de uma matriz wavelet são ortogonais duas a duas e têm comprimento  $\sqrt{m}$ . Note que a ortogonalidade se mantém se os índices de uma das linhas forem deslocados por um múltiplo do posto  $m$  e que a ortogonalidade é válida para uma linha e sua cópia deslocada de  $m$  posições.

A Equação(2.2) requer que a soma dos elementos da primeira linha seja  $m$  e que a soma das demais seja igual a zero.

## MCW Utilizadas Nesta Tese

Embora a codificação wavelet possa ser implementada com qualquer MCW, até o momento os trabalhos que abordam codificação wavelet têm concentrado suas atenções em matrizes wavelet planas, cujos elementos possuem o mesmo valor absoluto. As matrizes wavelet utilizadas neste trabalho correspondem a matrizes wavelets reais planas cujos coeficientes  $(a_k^j)$  assumem valores  $\{+1, -1\}$  e satisfazem a condições modificadas dadas por [23]:

$$\sum_{k=0}^{mg-1} a_k^j = m\sqrt{g}\delta_{0,j}, \quad 0 \leq j \leq m-1 \quad (2.5)$$

e

$$\sum_{k=0}^{mg-1} a_{[k+ml]}^j a_{[k+ml']}^{j'} = mg\delta_{j,j'}\delta_{l,l'}, \quad 0 \leq j, j' \leq m-1 \\ 0 \leq l, l' \leq m-1. \quad (2.6)$$

As condições de ortogonalidade, que para o caso de matrizes wavelet reais planas são dadas pela Equação (2.6), são a base para a codificação de canal wavelet.

O exemplo mais simples de matriz wavelet real plana corresponde às matrizes de Haar de posto 2 e gênero 1 dadas por:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

As matrizes de Haar mostradas anteriormente são as únicas matrizes wavelet quadradas de posto 2 com coeficientes reais. Através da operação de extensão sobre uma matriz wavelet, e do produto tensorial entre matrizes wavelet é possível obter matrizes wavelet reais planas com dimensões maiores a partir de uma matriz wavelet real plana de dimensão menor<sup>2</sup>.

Neste trabalho de tese utilizou-se matrizes wavelet  $2 \times 8$  e  $2 \times 128$ . A seguir a matriz  $2 \times 8$  usada neste trabalho:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

## 2.3 Codificação com Matrizes Wavelet

Seja a sequência de bits de informação  $\{x_n\}$ , com  $x_n \in \{+1, -1\}$ , e seja uma MCW  $\mathbf{A}$  de posto  $m$  e gênero  $g$ . No processo de codificação,  $m$  bits da sequência  $\{x_n\}$  são sucessivamente multiplicados pelas  $m$  linhas de uma MCW, a cada  $m$  bits os resultados desta multiplicação são deslocados de  $m$  e somados para gerar os símbolos wavelets<sup>3</sup>. Este processo de codificação está ilustrado na Tabela 2.1 para uma MCW de posto 2 e gênero 4. Na Tabela 2.2 encontram-se os símbolos wavelet gerados na codificação até o instante  $n = 10$ , nota-se que o processo de codificação leva  $mg$  tempos de codificação até entrar em regime. Depois que o processo atinge o estado de regime, cada símbolo carrega informação sobre exatamente  $mg$  bits, e cada bit “espalha” sua informação em  $mg$  símbolos.

Os símbolos wavelet também podem ser obtidos por um produto matricial expresso por:

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{C}_{MCW} \quad (2.9)$$

<sup>2</sup>Para maiores detalhes sobre a operação de extensão e o produto tensorial ver [15].

<sup>3</sup>O codificador wavelet pode ser representado por bancos de filtro como mostrado em [18].

Tabela 2.1: Exemplo de codificação wavelet

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
$x_1a_0^0$	$x_1a_1^0$	$x_1a_2^0$	$x_1a_3^0$	$x_1a_4^0$	$x_1a_5^0$	$x_1a_6^0$	$x_1a_7^0$			
$x_2a_0^1$	$x_2a_1^1$	$x_2a_2^1$	$x_2a_3^1$	$x_2a_4^1$	$x_2a_5^1$	$x_2a_6^1$	$x_2a_7^1$			
		$x_3a_0^0$	$x_3a_1^0$	$x_3a_2^0$	$x_3a_3^0$	$x_3a_4^0$	$x_3a_5^0$	$x_3a_6^0$	$x_3a_7^0$	
		$x_4a_0^1$	$x_4a_1^1$	$x_4a_2^1$	$x_4a_3^1$	$x_4a_4^1$	$x_4a_5^1$	$x_4a_6^1$	$x_4a_7^1$	
				$x_5a_0^0$	$x_5a_1^0$	$x_5a_2^0$	$x_5a_3^0$	$x_5a_4^0$	...	...
				$\vdots$	...	...	...	...	...	...
$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$	$y_6$	$y_7$	$y_8$	$y_9$	$y_{10}$	...

Tabela 2.2: Símbolos gerados a partir de uma MCW 2x8

$n$	Símbolo $y_n$
1	$x_1a_0^0 + x_2a_0^1$
2	$x_1a_1^0 + x_2a_1^1$
3	$x_1a_2^0 + x_2a_2^1 + x_3a_0^0 + x_4a_0^1$
4	$x_1a_3^0 + x_2a_3^1 + x_3a_1^0 + x_4a_1^1$
5	$x_1a_4^0 + x_2a_4^1 + x_3a_2^0 + x_4a_2^1 + x_5a_0^0 + x_6a_0^1$
6	$x_1a_5^0 + x_2a_5^1 + x_3a_3^0 + x_4a_3^1 + x_5a_1^0 + x_6a_1^1$
7	$x_1a_6^0 + x_2a_6^1 + x_3a_4^0 + x_4a_4^1 + x_5a_2^0 + x_6a_2^1 + x_7a_0^0 + x_8a_0^1$
8	$x_1a_7^0 + x_2a_7^1 + x_3a_5^0 + x_4a_5^1 + x_5a_3^0 + x_6a_3^1 + x_7a_1^0 + x_8a_1^1$
9	$x_3a_6^0 + x_4a_6^1 + x_5a_4^0 + x_6a_4^1 + x_7a_2^0 + x_8a_2^1 + x_9a_0^0 + x_{10}a_0^1$
10	$x_3a_7^0 + x_4a_7^1 + x_5a_5^0 + x_6a_5^1 + x_7a_3^0 + x_8a_3^1 + x_9a_1^0 + x_{10}a_1^1$

em que  $\mathbf{y}$  é a palavra código wavelet e  $C_{MCW}$  é a matriz de codificação construída a partir de sucessivas repetições e deslocamentos (de  $m$  posições) da MCW, até que o número de linhas de  $C_{MCW}$  seja igual a dimensão do vetor de bits de informação que se deseja codificar.

Por exemplo, a matriz  $C_{MCW}$ , obtida a partir da MCW 2x8 é dada por:

$$C_{MCW} = \begin{pmatrix} a_0^0 & a_1^0 & a_2^0 & \cdots & \cdots & a_7^0 & & \\ a_0^1 & a_1^1 & a_2^1 & \cdots & \cdots & a_7^1 & & \\ & & a_0^0 & a_1^0 & \cdots & a_5^0 & \cdots & \\ & & a_0^1 & a_1^1 & \cdots & a_5^1 & \cdots & \\ & & & & \vdots & \vdots & \ddots & \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

Nota-se para o processo de codificação apresentado anteriormente, que a cada  $m$  bits de informação que entram no processo de codificação  $m$  novos símbolos wavelet são gerados e enviados durante  $m$  intervalos de sinalização. Se cada símbolo do canal representar apenas um símbolo wavelet, tem-se uma eficiência espectral de 1 bit/s/Hz. Esse processo de codificação corresponde a uma taxa de codificação igual a um, ou seja, um bit de informação por símbolo wavelet codificado.

Outros valores de taxa de codificação wavelet,  $R$ , podem ser obtidos variando-se a sobreposição (em múltiplos de  $m$ ) das linhas da matriz, obtendo-se valores de taxa tão pequenos quanto  $1/g$ .

### Probabilidade e Quantização de Símbolos Wavelet

O símbolo wavelet  $y_n$  produzido no tempo  $n = pm + q$  é igual a soma da  $n$ -ésima coluna na Tabela 2.1, e portanto não se restringe a valores  $\pm 1$ . Podendo ser expresso como [18]:

$$y_{pm+q} = \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{g-1} a_{lm+q}^j x_{(p-l)m+j}. \quad (2.11)$$

e assume valores no conjunto  $\{-mg, -mg + 2, \dots, -mg + 2k, \dots, 0, \dots, mg - 2, mg\}$ .

Considerando os bits de informação equiprováveis, pode ser mostrado que os símbolos wavelet são distribuídos de acordo com [15]:

$$\Pr(y_n = 2k - mg) = \binom{mg}{k} (0.5)^{mg}, \quad 0 \leq k \leq mg \quad (2.12)$$

Para uma MCW  $m \times mg$  são gerados  $mg + 1$  símbolos. Esses símbolos precisam ser mapeados em uma constelação de sinais para serem transmitidos pelo canal de comunicação. Se cada símbolo wavelet for mapeado em ponto da constelação (mapeamento um a um), um aumento na dimensão  $m \times mg$  da MCW utilizada na codificação pode resultar em uma degradação do desempenho devido à aglomeração dos símbolos na constelação.

Para evitar o problema da aglomeração dos pontos na constelação, e constatando através da Equação (2.12) que quanto maior o valor absoluto do símbolo menor sua probabilidade em relação aos símbolos de menor valor, pode-se utilizar um esquema de quantização de símbolos, em que mais de um símbolo wavelet é mapeado em um único ponto da constelação. Em [5], [18] e [6] foram propostos esquemas de quantização de símbolos obtidos empiricamente. Ferreira [10] propôs novas constelações e esquemas de quantização obtidos por meio de algoritmo genético.

Em particular, o esquema de quantização para uma MCW  $2 \times 128$  proposto por Silveira [5], encontra-se na Tabela 2.3. Este esquema reduziu os sinais da constelação de 129 para 11 sinais. O conjunto de símbolos wavelet, que neste caso pertence ao intervalo -128 a 128 é subdividido em subconjuntos. Todos os símbolos do subconjunto são mapeados em um símbolo representativo do conjunto.

Tabela 2.3: Esquema de quantização para uma MCW 2x128

Subconjunto	Símbolo Representativo	Subconjunto	Símbolo Representativo
{0}	0	{14, 16, 18}	16
{2, 4, 6}	4	{-14, -16, -18}	-16
{-2, -4, -6}	-4	{20, 22, 24}	22
{8, 10, 12}	10	{-20, -22, -24}	-22
{-8, -10, -12}	-10	{26, 28, 30, ..., 128}	28
		{-26, -28, -30, ..., -128}	28



## 2.4 Decodificação Wavelet

A sequência de bits enviada  $\{x_n\}$  pode ser recuperada a partir da sequência recebida, utilizando-se um banco de  $m$  correladores de comprimento  $mg$  casados com as linhas da MCW utilizada no processo de codificação. Na ausência de erros, a saída do correlator casado a linha  $a^j$  no tempo  $i = m(g + p) - 1$  pode ser expressa como [5]:

$$z_i^j = \sum_{k=0}^{mg-1} a_{(mg-1)-k}^j y_{i-k} \quad (2.13)$$

$$= \sum_{k=0}^{mg-1} \sum_{j'=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{g-1} a_k^j \left( a_{k-lm}^{j'} x_{j'+lm+i-(mg-1)} \right). \quad (2.14)$$

Pela condição (2.6), pode ser verificado que todos os termos da Equação (2.13) são cancelados exceto quando  $j' = j$  e  $l = 0$ , e então

$$z_i^j = x_{j+i-(mg-1)} \sum_{k=0}^{mg-1} a_k^j a_k^j = mg x_{j+i-(mg-1)}. \quad (2.15)$$

Observe que existe um atraso de  $mg - 1$  intervalos de bit na decodificação do primeiro símbolo, a partir de então a cada  $m$  símbolos que entram no decodificador t em-se  $m$  bits de informação.

## 2.5 Estrutura Algébrica da Codificação Wavelet

Nesta seção, a codificação wavelet é vista sob o ponto de vista algébrico, conforme apresentada em [6]. A representação algébrica da codificação permite destacar algumas características inerentes do mecanismo de codificação, além de ser útil mais adiante neste trabalho, para estabelecer a distribuição conjunta de blocos de símbolos wavelet. Como já foi anunciado, a distribuição conjunta dos de blocos de símbolos é requerida no projeto de sistemas com eficiência espectral arbitrária e crucial para uso da regra MAP na decodificação.

Para maior clareza, inicialmente considere um caso particular de MCW, com  $m = 2$  e gênero  $g = 4$ . Note que a generalização é trivial. Em [18], mostra-se que o codificador wavelet pode ser representado por bancos de filtros em tempo discreto. Assim, para exemplo em foco, ( $m = 2$  e  $g = 4$ ), o diagrama em blocos do codificador tem o aspecto mostrado na Figura 2.2. Observe que o conversor série-paralelo (S/P) recebe em sua entrada a sequência

de bits da fonte,  $\{X_n\}$ , formando em sua saída duas seqüências paralelas: uma formada pelos bits da fonte com índice par, denotada na Figura 2.2 por  $X_{2p} = x_0, x_2, x_4, \dots$ , e outra e formada pelos bits da fonte de índice ímpar, denotada por  $X_{2p+1} = x_1, x_3, x_5, \dots$

Cada uma destas seqüências, será codificada por um banco de registradores de deslocamento,  $MCW_j$ , cujos coeficientes são dados pela  $j$ -ésima linha da matriz,  $0 \leq j \leq m - 1$ . Claramente tem-se dois regimes de codificação que geram as seqüências de símbolos wavelet pares e ímpares.

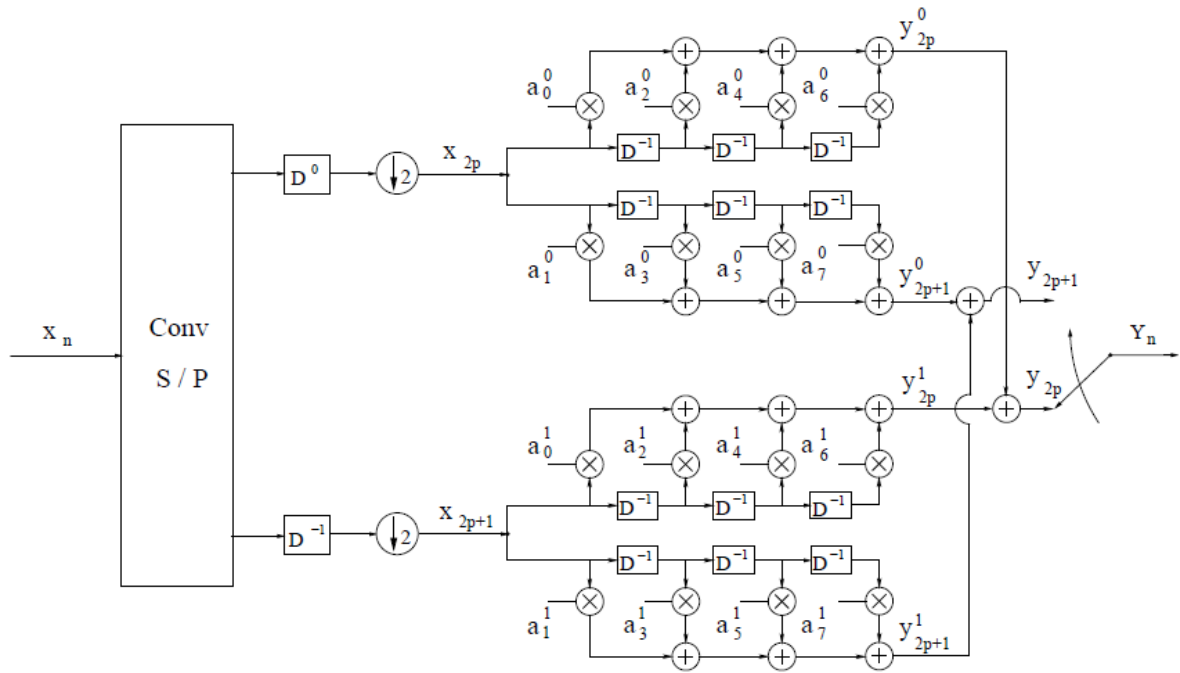


Figura 2.2: Diagrama do codificador para uma MCW 2x8.

É conveniente representar as seqüências pares e ímpares como séries formais:

$$\begin{aligned}
 X_{\mathcal{E}}(D) &\triangleq x_0 + x_2D + x_4D^2 + \dots \\
 &= \sum_{i=0}^{\infty} x_{2i}D^i \\
 X_{\mathcal{O}}(D) &\triangleq x_1 + x_3D + x_5D^2 + \dots \\
 &= \sum_{i=0}^{\infty} x_{2i+1}D^i.
 \end{aligned}$$

O argumento  $D$  representa um operador de atraso, cujo expoente designa a posição temporal do símbolo da seqüência.

A matriz wavelet é para  $m = 2$   $g = 4$  tem a forma:

$$A = \begin{bmatrix} a_0^0 & a_1^0 & a_2^0 & a_3^0 & a_4^0 & a_5^0 & a_6^0 & a_7^0 \\ a_0^1 & a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & a_4^1 & a_5^1 & a_6^1 & a_7^1 \end{bmatrix}$$

Defina  $Y_{2p}^0(D)$  e  $Y_{2p}^1(D)$  como a sequência de sub-símbolos wavelet associados ao regime de codificação par a qualquer tempo, tem-se:

$$\begin{aligned} Y_{2p}^0(D) &= X_{\mathcal{E}}(D) (a_0^0 + a_2^0 D + a_4^0 D^2 + a_6^0 D^3) \\ Y_{2p}^1(D) &= X_{\mathcal{O}}(D) (a_0^1 + a_2^1 D + a_4^1 D^2 + a_6^1 D^3). \end{aligned}$$

Combinando as duas expressões anteriores obtém-se a expressão algébrica para a sequência de símbolos wavelet com índices ímpares:

$$Y_{2p}(D) = [X_{\mathcal{E}}(D), X_{\mathcal{O}}(D)] \begin{bmatrix} a_0^0 + a_2^0 D + a_4^0 D^2 + a_6^0 D^3 \\ a_0^1 + a_2^1 D + a_4^1 D^2 + a_6^1 D^3 \end{bmatrix}.$$

Analogamente, obtém-se expressão algébrica para sequência de símbolos wavelet com índices pares:

$$Y_{2p+1}(D) = [X_{\mathcal{E}}(D), X_{\mathcal{O}}(D)] \begin{bmatrix} a_1^0 + a_3^0 D + a_5^0 D^2 + a_7^0 D^3 \\ a_1^1 + a_3^1 D + a_5^1 D^2 + a_7^1 D^3 \end{bmatrix}.$$

Note que a sequência completa é dada por:

$$Y(D) = Y_{2p}(D^2) + D Y_{2p+1}(D^2)$$

em que o atraso  $D$  está ao quadrado para permitir intercalar ambas as sequências. Utilizando as equações obtidas a priori obtém-se:

$$\begin{aligned} Y(D) &= Y_{2p} D^2 + D Y_{2p+1}(D^2) \\ &= [X_{\mathcal{E}}(D^2), X_{\mathcal{O}}(D^2)] \begin{bmatrix} a_0^0 + a_2^0 D^2 + a_4^0 D^4 + a_6^0 D^6 \\ a_0^1 + a_2^1 D^2 + a_4^1 D^4 + a_6^1 D^6 \end{bmatrix} + D [X_{\mathcal{E}}(D^2), X_{\mathcal{O}}(D^2)] \begin{bmatrix} a_1^0 + a_3^0 D^2 + a_5^0 D^4 + a_7^0 D^6 \\ a_1^1 + a_3^1 D^2 + a_5^1 D^4 + a_7^1 D^6 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

A última equação pode ser reescrita da seguinte forma:

$$Y(D) = [X_{\mathcal{E}}(D^2), X_{\mathcal{O}}(D^2)] \begin{bmatrix} a_0^0 + a_1^0 D + a_2^0 D^2 + a_3^0 D^3 + a_4^0 D^4 + a_5^0 D^5 + a_6^0 D^6 + a_7^0 D^7 \\ a_0^1 + a_1^1 D + a_2^1 D^2 + a_3^1 D^3 + a_4^1 D^4 + a_5^1 D^5 + a_6^1 D^6 + a_7^1 D^7 \end{bmatrix}.$$

Note que a matriz obtida corresponde à transformada  $D$  da matriz de coeficientes wavelet.

Um pouco de raciocínio, deixa clara a generalização para uma matriz WCM  $m \times mg$  qualquer:

$$Y(D) = [X_{[0]}(D^m), X_{[1]}(D^m), \dots, X_{[m-1]}(D^m)] M(D) \quad (2.16)$$

em que  $X_{[i]}(D^m)$  corresponde à  $i$ -ésima sequência dizimada, e:

$$M(D) \triangleq \begin{bmatrix} a_0^0 + a_1^0 D + a_2^0 D^2 + \dots + a_{mg-2}^0 D^{mg-2} + a_{mg-1}^0 D^{mg-1} \\ a_0^1 + a_1^1 D + a_2^1 D^2 + \dots + a_{mg-2}^1 D^{mg-2} + a_{mg-1}^1 D^{mg-1} \\ \dots \\ a_0^{m-1} + a_1^{m-1} D + a_2^{m-1} D^2 + \dots + a_{mg-2}^{m-1} D^{mg-2} + a_{mg-1}^{m-1} D^{mg-1} \end{bmatrix}$$

corresponde à “transformada”  $D$  para a MCW  $m \times mg$  utilizada na codificação.

A descrição algébrica apresentada nesta seção ressalta os seguintes aspectos da codificação wavelet:

- O emprego de uma MCW de dimensão  $m \times mg$ , leva à obtenção de  $m$  “modos de codificação” associados a  $m$  sucessivos tempos de codificação, os quais ponderam de forma diferente o mesmo conjunto de bits;
- Cada modo de codificação, codifica a informação de  $mg$  bits sobre um mesmo símbolo wavelet;
- O conjunto de bits é alterado a cada  $m$  intervalos de codificação, o que insere  $m$  novos símbolos no banco de registradores, levando à saída de outra mesma quantidade.

Sendo o modo de codificação especificado por um conjunto de coeficientes da MCW conhecidos,  $b_k$ , o  $n$ -ésimo símbolo wavelet produzido,  $y_n$ , obtido no tempo de codificação  $nT_s$ , em que  $T_s$  é tempo de símbolo, pode ser expresso de uma maneira mais simples,

$$y_n = \sum_{k=0}^{mg-1} b_k x_k \quad (2.17)$$

em que  $x_k$  a sequência de  $mg$  bits de entrada no codificador. Note que os  $b_k$ s, com  $b_k \in -1, +1$ , coeficientes da matriz wavelet são usados para ponderar o  $k$ -ésimo bit,  $x_k$ .

## 2.6 Considerações Finais

Este capítulo abordou as bases da codificação wavelet, apresentou-se as propriedades de ortogonalidade das matrizes de codificação wavelet, o processo de codificação e de decodificação. Em especial, na Seção 2.3 apresentou-se a expressão para a probabilidade de

símbolos wavelet, bem como um esquema de quantização para codificação com uma MCW de dimensão  $2 \times 128$ .

Como visto, os símbolos wavelet gerados na codificação são multiníveis e não equiprováveis, de forma que a constelação utilizada para modular os símbolos wavelet passa a desempenhar um papel muito importante no desempenho deste esquema de codificação. Dentro deste contexto, no próximo capítulo será abordada uma forma alternativa de realizar uma busca por uma constelação ótima ou sub-ótima para um sistema de comunicação com codificação wavelet.

## Capítulo 3

# Projeto de Constelações para Sistemas com Codificação Wavelet

A distribuição de probabilidades dos símbolos wavelet dada pela Equação ( 2.12) sendo não equiprovável, requer que uma escolha conveniente da constelação de sinais utilizada para transmitir os símbolos; esta escolha é na verdade crucial que se consiga um melhor desempenho do sistema.

Em [5] e [18] utilizou-se algoritmo genético para projetar constelações PSK (*Phase Shift Keying*) especiais para sistemas com codificação wavelet. Embora bons resultados tenham sido obtidos, as constelações obtidas *não* possuem média zero; assim uma técnica similar àquela empregada na codificação simplex [14, p.184] e explorada detalhadamente em [21] foi utilizada alcançando, como esperado, melhor desempenho em termos de probabilidade de erro de símbolo. Entretanto, nota-se que a nova sinalização deixa de exibir envoltória constante.

A translação não muda as distâncias relativas entre os pontos da constelação mas a energia média da constelação é reduzida, e quando a constelação é normalizada para a energia média original a distância relativa entre os pontos aumenta, o que leva a um melhor desempenho do sistema com esta nova constelação. Pode ser facilmente verificado que a energia da constelação transladada para apresentar média zero tem uma redução da energia média em relação a constelação inicial dada por  $E' = E - \|\bar{s}\|^2$ , em que  $E$  é a energia média inicial e  $\bar{s}$  é o vetor médio da constelação antes da translação.

Motivados pelos bons resultados obtidos pela otimização em pares (*pairwise optimiza-*

tion) para fontes com distribuição não uniforme apresentada em [21], adaptamos ao projeto de constelações para codificação wavelet. Em [21] as constelações foram projetadas considerando um canal de comunicação com ruído AWGN (*Additive White Gaussian Channel*), aqui considerou-se um canal com desvanecimento plano e os símbolos da constelação representam os símbolos wavelet gerados na saída do codificador.

O restante deste capítulo está organizado da seguinte forma: na Seção 3.1 o problema de otimização é detalhado e o método de otimização proposto é explicado. Na Seção 3.1 apresenta-se o algoritmo de otimização utilizado. Os resultados são apresentados na Seção 3.2. Finalizando o capítulo tem-se a Seção 3.3.

## 3.1 Formulação do Problema

Sejam os símbolos wavelet resultantes da codificação por uma MCW de gênero  $m$  e posto  $g$ , com distribuição dada por (2.12). Considere que um esquema de modulação  $M$ -ário bidimensional é utilizado para transmitir os símbolos wavelet através de um canal com desvanecimento Rayleigh, e a demodulação é feita pelo critério de máxima probabilidade a posteriori (MAP). A utilização do algoritmo proposto por Alajaji et al. [21] requer algumas adaptações motivadas por importantes diferenças entre os sistemas adotados na derivação daquele algoritmo e o sistema explorado nesta tese.

### Diferenças importantes

O algoritmo proposto em [21] considera a construção de constelações de sinais para a transmissão de fontes binárias não-uniformes que podem ser encontradas em algumas aplicações mencionadas pelos autores. A comparação é feita em relação ao desempenho de sistemas QAM com codificação Gray ou outras. Portanto o que se pressupõe é a formação de blocos de  $M = 2^r$  ( $r$  inteiro) bits oriundos de uma fonte binária não-uniforme que são mapeados em sinais de uma constelação bidimensional de sinais. A diferença entre os esquemas QAM e os propostos em [21] é que a constelação considera a distribuição dos blocos induzida pela natureza não-uniforme de uma fonte binária.

Esta é uma importante diferença entre os paradigmas em [21] e a transmissão de símbolos wavelet discutida nesta tese. Os símbolos wavelet pertencem a um alfabeto com  $mg + 1$

símbolos, que não é em geral uma potência de dois, e que, *em média*, conduzem um bit de informação, isto por que a *taxa de entropia* [3] da sequência de símbolos wavelet é 1. A entropia da distribuição dos símbolos wavelet considerados isoladamente é facilmente calculada a partir da Equação 2.12 resultando:

$$H(Y) = mg - \frac{1}{2^{mg}} \sum_{k=0}^{mg} \binom{mg}{k} \log \binom{mg}{k}. \quad (3.1)$$

Por intermédio da equação anterior, obtêm-se, por exemplo,  $H(Y) \approx 2,5$  e  $H(Y) \approx 4,5$  bits para, respectivamente,  $mg = 8$  e  $mg = 128$ .

Outra importante diferença entre os paradigmas é que as distribuições de probabilidades dos símbolos wavelet apresentam uma forte simetria caracterizada pela Equação 2.12, explicitamente têm-se

$$\Pr[Y = k] = \Pr[Y = -k], \quad k \in \{0, \pm 2, \pm 4, \dots, \pm mg\}. \quad (3.2)$$

O algoritmo proposto por Alajaji et al. é deduzido sem considerar qualquer simetria. Esta simetria deve ser considerada para a constelação inicial e para as modificações obtidas a cada iteração.

O algoritmo descrito a seguir adota a notação utilizada em [21] com o objetivo de facilitar comparações. Finalmente, é importante destacar que para blocos de símbolos wavelet, apresentados no Capítulo 4, a busca de constelações mais eficazes (ótimas ou sub-ótimas) apresentam simetrias em torno da origem, caso os blocos sejam compostos por um número par de símbolos wavelet.

Para obter uma constelação ótima ou sub-ótima, inicia-se mapeando cada símbolo wavelet em um vetor  $\vec{s}_i$  de uma constelação  $M$ -ária inicial, em que  $\vec{s}_i = (s_{i,x}, s_{i,y})$ . O objetivo é mudar a disposição dos pontos da constelação para obter uma taxa de erro de símbolo (SER - *Symbol Error Rate*) o mais baixa possível para uma dada razão sinal-ruído  $E_b/N_0$ , em que  $E_b$  é a *energia média por bit do sinal transmitido*.

O espaço de busca considerado na otimização é contínuo e consiste de todas as coleções de pontos  $\{\vec{s}_1, \vec{s}_2, \dots, \vec{s}_M\}$  que satisfazem as seguintes restrições:

- restrição de média zero:  $\sum_{i=1}^M p_i \vec{s}_i = 0$ , e
- restrição da energia média:  $\sum_{i=1}^M p_i \|\vec{s}_i\|^2 = E$ .



- restrição da simetria: apenas pares de sinais  $(\vec{s}_1, \vec{s}_2)$  com coordenadas  $s_{i,y} \geq 0$  devem ter posições atualizadas; soluções que resultem  $s_{i,y} < 0$  devem ser descartadas. Represente o sinal correspondente ao símbolo wavelet  $y = 0$  por  $\vec{s}^{(0)}$ , então obrigatoriamente  $s_y^{(0)} = 0$ .

As constelações foram projetadas para codificação wavelet de taxa  $R = 1$ , e neste caso  $E = E_b$ .

Para uma determinada constelação que atende às restrições acima, não é possível ajustar a posição de um único ponto sem deixar de atender às restrições. Entretanto, utilizando-se um par qualquer de pontos da constelação, é possível mudá-los de posição de tal forma que a constelação ainda atenda às restrições. Esta otimização feita aos pares foi proposta em [21] e será detalhada a seguir.

Para dois pontos da constelação  $\vec{s}_1$  e  $\vec{s}_2$  selecionados de forma aleatória, a restrição de média zero implica em

$$p_1 \vec{s}_1 + p_2 \vec{s}_2 = - \sum_{i=3}^M p_i \vec{s}_i \quad (3.3)$$

e seja  $\vec{b} = \sum_{i=3}^M p_i \vec{s}_i$ , então

$$\vec{s}_1 = \frac{1}{p_1} (-\vec{b} - p_2 \vec{s}_2) \quad (3.4)$$

ou

$$\vec{s}_1 = \vec{a} - c \vec{s}_2 \quad (3.5)$$

em que  $\vec{a} = -\frac{\vec{b}}{p_1}$  e  $c = \frac{p_2}{p_1}$ , temos que

$$s_{1,x} = a_x - c \cdot s_{2,x} \text{ e } s_{1,y} = a_y - c \cdot s_{2,y}. \quad (3.6)$$

A restrição de energia média implica em:

$$p_1 \|\vec{s}_1\|^2 + p_2 \|\vec{s}_2\|^2 = E - \sum_{i=3}^M p_i \|\vec{s}_i\|^2. \quad (3.7)$$

Faça  $d = \sum_{i=3}^M p_i \|\vec{s}_i\|^2$  e substitua (3.6) em (3.7):

$$p_1 ((a_x - c \cdot s_{2,x})^2 + (a_y - c \cdot s_{2,y})^2) + p_2 (s_{2,x}^2 + s_{2,y}^2) = E - d \quad (3.8)$$

Expandindo e completando os quadrados temos que

$$\left( s_{2,x} - \frac{p_1 a_x}{(p_1 + p_2)} \right)^2 + \left( s_{2,y} - \frac{p_1 a_y}{(p_1 + p_2)} \right)^2 = r^2 \quad (3.9)$$

em que

$$r^2 = \frac{p_1(E-d)}{p_2(p_1+p_2)} - \frac{p_1^3}{p_2(p_1+p_2)^2}(a_x^2 + a_y^2). \quad (3.10)$$

A Equação (3.9) corresponde a uma circunferência, centrada em  $\left(\frac{p_1 a_x}{p_1+p_2}, \frac{p_1 a_y}{p_1+p_2}\right)$  com raio  $r$ , no qual  $\vec{s}_2$  pode caminhar sem contrariar as restrições impostas à constelação, e a relação dada pela equação (3.6) define uma circunferência correspondente para  $\vec{s}_1$ .

Com a Equação (3.9), o problema de busca em quatro variáveis  $(s_{1,x}, s_{1,y}, s_{2,x}, s_{2,y})$  para cada par de pontos selecionados é reduzido à busca em uma única variável,  $\theta$ , a qual corresponde ao ângulo que parametriza a circunferência para  $\vec{s}_2$ . Para um dado valor de  $\theta$ ,  $\vec{s}_2$  está bem definido, e  $\vec{s}_1$  está relacionado pela Equação (3.6).

Note que o algoritmo pode levar a soluções complexas, o que não é aceitável. Isto pode ocorrer por que a solução de sistemas de equações quadráticas pode resultar em soluções complexas. Por exemplo, considere o sistema simples de equação quadráticas que representa dois círculos de raio unitário, com centro na origem e a outra no ponto  $(3, 0)$ .

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 1 \\ (x-3)^2 + y^2 &= 1 \end{aligned}$$

Se o domínio for o conjunto dos reais o sistema não tem solução, entretanto soluções existem se o domínio for estendido para o corpo dos números complexos. Detalhes sobre curvas e sistemas algébricos podem ser encontrados em Kirwan [11, Cap. 3].

Em que situação ocorrem soluções com partes imaginárias? Um pouco de algebrismo permite reescrever a Equação 3.10 na forma

$$\begin{aligned} r^2 = & \frac{p_1}{p_2(p_1+p_2)} \left[ p_1 \|s_1\|^2 + p_1 \|s_2\|^2 - \right. \\ & \left. \frac{1}{p_1+p_2} \left[ \left( \sum_{i=3}^M p_i s_{i,x} \right)^2 + \left( \sum_{i=3}^M p_i s_{i,y} \right)^2 \right] \right] \end{aligned} \quad (3.11)$$

Assim, sempre que ocorrer

$$p_1 \|s_1\|^2 + p_1 \|s_2\|^2 < \frac{1}{p_1+p_2} \left[ \left( \sum_{i=3}^M p_i s_{i,x} \right)^2 + \left( \sum_{i=3}^M p_i s_{i,y} \right)^2 \right],$$

a solução deve ser descartada.

### Função de custo

Para avaliar as possíveis constelações foi utilizado o limitante superior da união para a SER ( $P_s$ ) dado pela Equação (3.12), o qual é justo para médias e altas SNRs [21]. Este limitante pode ser muito frouxo para baixas SNR, no entanto é mais simples que outros limitantes mais justos e atendeu adequadamente ao problema aqui explorado. O desempenho do sistema pode ser melhorado se forem utilizados limitantes mais justos apresentados em [12] e [25].

Seja

$$\begin{aligned}
 P_s &= \sum_{u=1}^M P(\epsilon | \vec{s}_u) P(\vec{s}_u) \\
 &= \sum_{u=1}^M P\left(\bigcup_{i \neq u} \epsilon_{iu} | \vec{s}_u\right) P(\vec{s}_u) \\
 &\leq \sum_{u=1}^M \sum_{i \neq u} P(\epsilon_{iu} | \vec{s}_u) P(\vec{s}_u)
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

em que  $P(\epsilon_{iu} | \vec{s}_u)$  é a probabilidade que  $\vec{s}_i$  apresente uma métrica MAP maior que  $\vec{s}_u$  dado que  $\vec{s}_u$  foi enviado, ou seja,  $P(\vec{s}_i | \vec{r}) \geq P(\vec{s}_u | \vec{r})$ . Em que  $\vec{r} = \alpha \vec{s}_u + \vec{n}$  é o sinal recebido,  $\alpha$  é a amplitude do desvanecimento com distribuição Rayleigh tendo como segundo momento  $2\sigma^2$ , e  $\vec{n}$  é o vetor ruído de média zero com componentes gaussianas decorrelacionadas, cada uma com variância  $N_0/2$ .

Assume-se que  $\alpha$ ,  $\vec{s}_u$ , e  $\vec{n}$  são independentes entre si, e que  $\alpha$  pode ser corretamente estimada a partir do sinal recebido. Então, condicionada ao valor de  $\alpha$ ,  $P(\epsilon_{iu} | \alpha, \vec{s}_u)$  é dado por:

$$P(\epsilon_{iu} | \alpha, \vec{s}_u) = Q\left(\frac{\alpha \|\vec{s}_i - \vec{s}_u\|}{\sqrt{2N_0}} + \frac{\sqrt{2N_0} \ln(P(\vec{s}_u) / P(\vec{s}_i))}{2\alpha \|\vec{s}_i - \vec{s}_u\|}\right). \tag{3.13}$$

em que  $Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty \exp(-t^2/2) dt$ .

E,  $P(\epsilon_{iu} | \vec{s}_u)$  é dada por [25]:

$$\begin{aligned}
 P(\epsilon_{iu} | \vec{s}_u) &= \mathbb{E}_\alpha [P(\epsilon_{iu} | \alpha, \vec{s}_u)] \\
 &= \int_0^\infty P(\epsilon_{iu} | \alpha, \vec{s}_u) \frac{\alpha}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{\alpha^2}{2\sigma^2}\right) d\alpha \\
 &= \begin{cases} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\tau_{iu}}\right) \exp\left[-\frac{\omega_{iu}}{2} (1 - \tau_{iu})\right], & \text{if } \omega_{iu} \geq 0 \\ 1 - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\tau_{iu}}\right) \exp\left[-\frac{\omega_{iu}}{2} (1 + \tau_{iu})\right], & \text{if } \omega_{iu} < 0 \end{cases}
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

em que  $\omega_{iu} = \ln [P(\vec{s}_u)/P(\vec{s}_i)]$ ,  $\tau_{iu} = \sqrt{(\sigma^2 d_{iu}^2 + 2N_0) / (\sigma^2 d_{iu}^2)}$ , e  $d_{iu} = \|\vec{s}_i - \vec{s}_u\|$  (em que  $\|\cdot\|$  é norma Euclidiana).

A análise acima para  $P(\epsilon_{iu}|\vec{s}_u)$  foi feita para o canal com desvanecimento Rayleigh plano, diferentemente da análise feita em [21] na qual considerou-se um canal AWGN. Note que, para o canal com desvanecimento,  $P(\epsilon_{iu}|\vec{s}_u)$  admite uma expressão fechada, enquanto que para o canal AWGN é preciso realizar uma integração numérica devido ao cálculo da função  $Q$ .

Levando-se em conta que a cada iteração da otimização somente o par de pontos  $\vec{s}_1$  e  $\vec{s}_2$  mudam suas posições na constelação, pode-se ignorar os termos na Equação (3.12) para  $u \neq 1, 2$  e  $i \neq 1, 2$  uma vez que eles permanecem constantes. De forma que a função objetivo a ser minimizada para cada par é:

$$F_{12} = \sum_{i \neq 1} P(\epsilon_{i1}) P(\vec{s}_1) + \sum_{i \neq 2} P(\epsilon_{i2}) P(\vec{s}_2) + \sum_{u=3}^M P(\vec{s}_u) (P(\epsilon_{1u}) + P(\epsilon_{2u})). \quad (3.15)$$

Uma vez que os símbolos wavelet de mesmo valor absoluto são igualmente prováveis, é natural que exista uma simetria na constelação de sinais. Esta restrição foi adicionada ao algoritmo de otimização. De maneira que, somente pares de símbolos positivos são selecionados a cada iteração, depois de determinada as suas posições, as posições dos símbolos negativos são obtidas por simetria com relação ao eixo x. Antes de iniciar a iteração seguinte, a constelação é ajustada para satisfazer as restrições de média e energia.

## Algoritmo

O pseudo-código do algoritmo implementado para otimizar as constelações é mostrado no quadro Algoritmo 1. Note que dependendo dos valores assumidos pelas variáveis  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $d$  e  $\vec{a}$  na Equação (3.10), o parâmetro  $r^2$  pode assumir valores negativos, ou seja, pode não haver solução real para a circunferência. Então foi incluído a verificação do valor de  $r^2$  no Passo 3, que não está presente no algoritmo original [21]. O algoritmo proposto é do tipo busca exaustiva, assim no Passo 4, o ângulo  $\theta$  que parametriza o círculo é fixado em zero relativo ao eixo x, e assume passos discretos no sentido anti-horário, cada um no valor de três graus. A cada passo de  $\theta$ ,  $F_{12}$  é calculada usando os pontos correspondentes  $\vec{s}_1$  e  $\vec{s}_2$  em

seus respectivos círculos, e para um determinado valor de SNR ( $E_b/N_0$ ) projetado, o qual é mantido constante.

**Entrada:** função objetivo, probabilidade dos símbolos

**Saída:** constelação ótima ou sub-ótima

**Inicialização:**

- Configure uma constelação inicial, garantido que atende às restrições de média zero, de energia média e de simetria.

**Iteração:** ENQUANTO PARADA = FALSO, FAÇA

1. Aleatoriamente (uniformemente) selecione um par de pontos  $(\vec{s}_1, \vec{s}_2)$ , correspondente a símbolos positivos da constelação atual.
2. Calcule os parâmetros dados por (3.9) e (3.6).
3. Se  $r^2 < 0$ , volte para o PASSO 1
4. Encontre as posições de  $(\vec{s}_1, \vec{s}_2)$  minimizando (3.15), e fixe-as na constelação.
5. Obtenha, por simetria em relação ao eixo x, a posição dos símbolos negativos correspondentes.
6. Ajuste a constelação para satisfazer as restrições.
7. Se a constelação estabilizou, PARADA = VERDADE

**FIM**

**Algoritmo 1:** Algoritmo de Otimização das constelações

O limitante superior da união para SER, dado pela Equação (3.12), é utilizado para determinar se a constelação estabilizou. Diferentemente do algoritmo utilizado em [21] em que a estabilização foi determinada por inspeção visual. A cada 100 iterações o valor do limitante é verificado, se a variação for menor que  $10^{-10}$ , a condição PARADA se torna VERDADE. Foram realizadas pelo menos 3000 iterações para cada otimização.

## 3.2 Resultados Numéricos

Esta seção é dedicada à investigação de desempenho em termos de SER e BER das constelações projetadas utilizando-se o algoritmo proposto na seção anterior. Os resultados foram obtidos por simulação de Monte Carlo dos sistemas utilizando as constelações otimizadas aos pares (as quais serão doravante denominadas de M-PO, referente a *pairwise optimized*, em que  $M$  corresponde ao número de pontos da constelação). Os resultados obtidos são também comparados ao desempenho de constelações PSK especiais de mesma eficiência espectral, as quais serão denominadas de  $M$ -PSK, obtidas pelo uso de algoritmo genético (AG) para os mesmo sistemas de codificação wavelet aqui utilizados, apresentadas em [18] e [5]. Admite-se que canal é lento, não seletivo em frequência e modelado pela distribuição

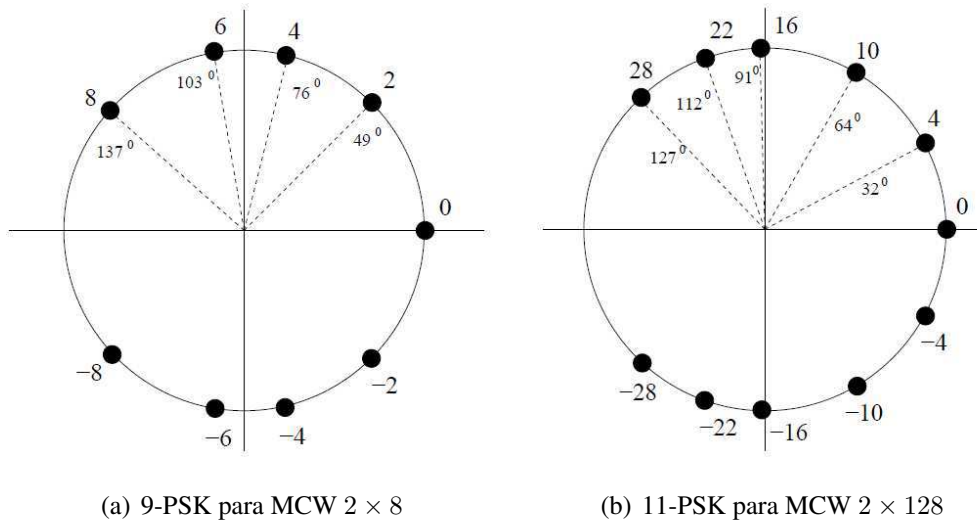


Figura 3.1: Constelações M-PSK

Rayleigh. Assume-se também que o canal é perfeitamente estimado no receptor. A regra de máxima probabilidade a posteriori (MAP) é utilizada para detectar os símbolos wavelet no receptor.

Na Figura 3.1 encontram-se as constelações PSK obtidas através de algoritmo genético, utilizadas na comparação de desempenho. As constelações para MCWs  $2 \times 8$  e  $2 \times 128$  são encontradas em [5] e [18]. Os sinais das constelações estão rotulados com os valores dos símbolos wavelet que representam. E na Figura 3.2 encontram-se as constelações M-PSK após a translação e normalização para apresentar média zero. Foram projetadas constelações para codificação com MCW's reais planas de dimensões  $2 \times 8$  e  $2 \times 128$ , que encontram-se

nas Figuras 3.3(a) e 3.3(b) respectivamente. Todas as constelações foram otimizadas para uma restrição de energia média  $E = 1$  e  $\text{SNR} = 4$  dB. Para o sistema baseado na MCW  $2 \times 128$  foi projetada uma constelação com 11 sinais, considerando o esquema de truncamento apresentado na Seção 2.3. As constelações M-PO também apresentam energia média igual a 1.

Na Figura 3.4 encontram-se curvas de SER *versus*  $E_b/N_0$  obtidas para MCW  $2 \times 8$ . As curvas correspondem a constelação 9-PO, 9-PSK, 9-PSK transladada e normalizada para ter média zero e energia média igual a 1. A constelação 9-PO apresenta um ganho na  $E_b/N_0$  da ordem de 2 dB em relação a constelação 9-PSK com média zero, e um ganho da ordem de 4 dB em relação à 9-PSK.

Na Figura 3.5 encontram-se curvas de BER *versus*  $E_b/N_0$  obtidas para MCW  $2 \times 8$ . Pode ser verificado que transladar e normalizar a constelação 9-PSK melhora seu desempenho em cerca de 2 dB. A constelação 9-PO apresenta um ganho em termos de  $E_b/N_0$  da ordem de 1 dB em relação à constelação 9-PSK para valores de BER abaixo de  $10^{-2}$ , e um ganho de 2 dB para valores abaixo de  $10^{-4}$ . Estes ganhos foram obtidos porque com a imposição de média zero é possível aumentar a mínima distância Euclidiana da constelação e ainda manter a energia média original. As curvas de SER para um sistema wavelet com MCW  $2 \times 128$  encontram-se na Figura 3.6. Pode ser observado que a constelação 11-PO apresenta um ganho da ordem de 3 dB em relação à constelação 11-PSK com média zero e da ordem

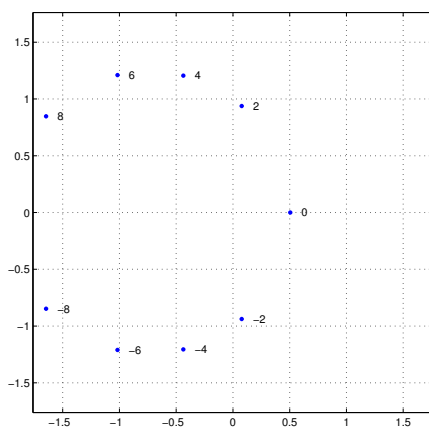
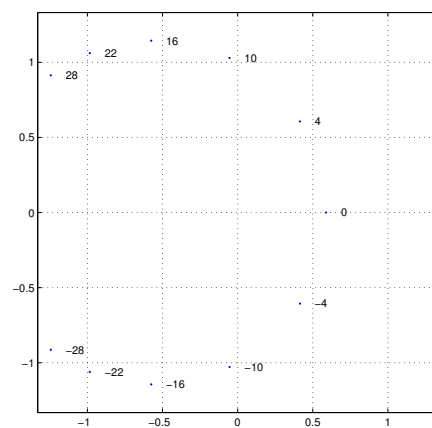
(a) 9-PSK para MCW  $2 \times 8$ (b) 11-PSK para MCW  $2 \times 128$ 

Figura 3.2: Constelações M-PSK com média zero

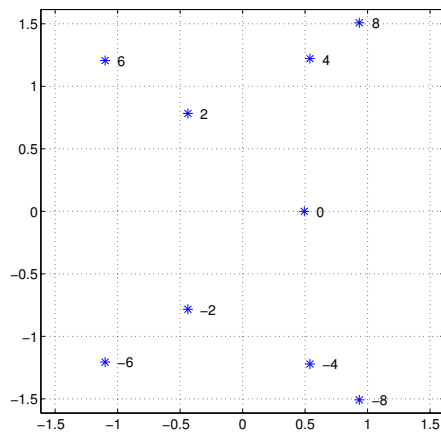
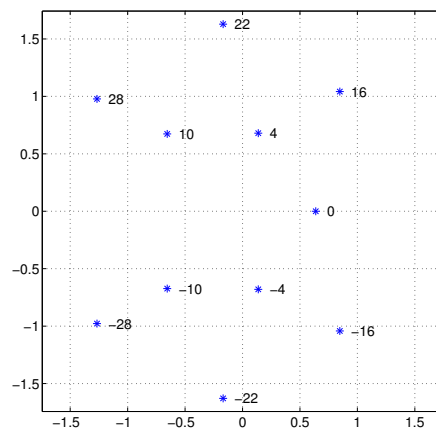
(a) 9-PO para MCW  $2 \times 8$ (b) 11-PO para MCW  $2 \times 128$ 

Figura 3.3: Constelações M-PO

de 4 dB sobre a constelação 11-PSK.

As curvas de BER obtidas para a codificação wavelet com MCW  $2 \times 128$  encontram-se na Figura 3.7. Pode ser observado que a constelação 11-PO apresenta um desempenho próximo ao da constelação 11-PSK para BER até  $10^{-4}$  e um desempenho superior para BER abaixo de  $10^{-5}$ . Novamente, pode ser verificado que a constelação PSK com média zero apresenta um ganho sobre a constelação PSK com média diferente de zero. O desempenho da constelação 11-PO também é comparado ao de um sistema com codificação espaço-temporal (STBC - *Space-Time Block Coding*). No sistema com STBC, a cada intervalo de tempo  $n$ , símbolos  $ci_n$ ,  $i = 1, 2$  são modulados por sinais BPSK e transmitidos simultaneamente por



duas antenas [22]. Este sistema também apresenta eficiência espectral de 1 bit/s/Hz. O sistema com codificação wavelet e a constelação 11-PO proposta aqui, apresenta um ganho da ordem de 2 dB sobre o sistema STBC para um BER de  $10^{-5}$ .

### 3.3 Considerações Finais

Neste capítulo, foi proposto um algoritmo de otimização baseado na otimização em pares para projetar constelações para um sistema com codificação wavelet sujeito um canal Rayleigh plano. Foi constatado dos resultados numéricos obtidos que as constelações obtidas pela otimização aos pares exibiram melhor desempenho, em termos de SER, sobre as constelações PSK especiais. Em termos de BER o desempenho foi próximo ao das constelações PSK.

É necessário ressaltar que as constelações aqui obtidas foram otimizadas considerando-se o desempenho em termos de SER. Note que, minimizar a SER não necessariamente implica em minimizar a BER. Em particular, para a codificação wavelet, um erro de demodulação entre símbolos wavelet de valores próximos pode resultar em nenhum bit errado, enquanto

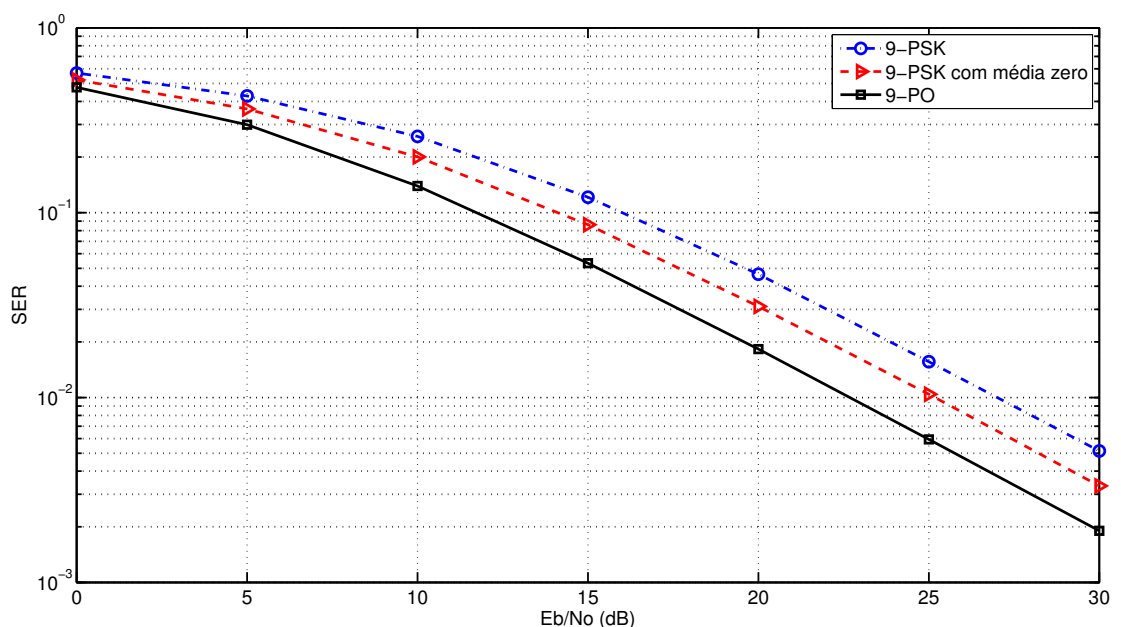


Figura 3.4: Curvas de SER para codificação wavelet com MCW 2x8

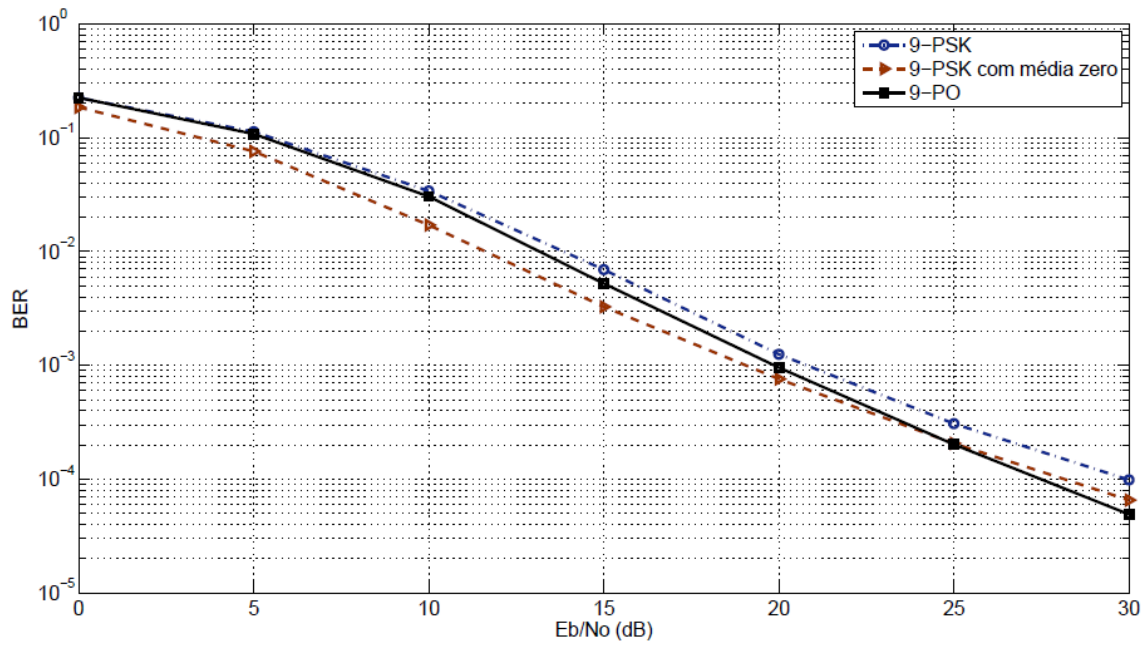


Figura 3.5: Desempenho em termos de BER para codificação wavelet com MCW 2x8

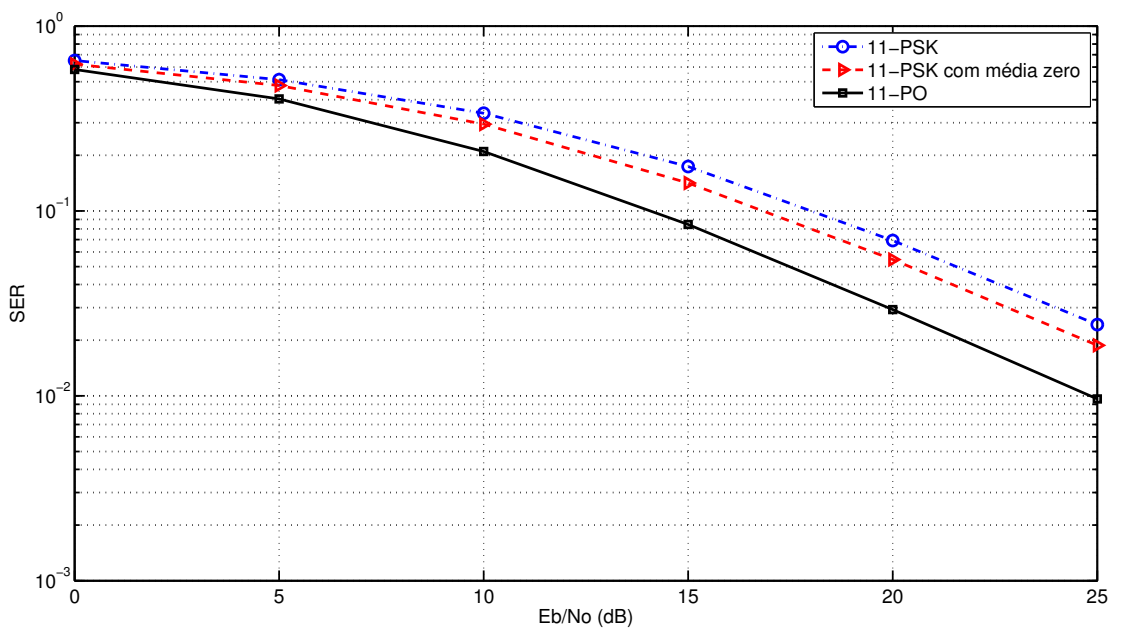


Figura 3.6: Desempenho em termos de SER para codificação wavelet com MCW 2x128

que um erro de demodulação entre símbolos com valores distantes pode ocasionar um surto de bit errados [23]. Esta restrição está implícita na BER, mas é invisível à otimização quando a função a ser minimizada é a SER. No entanto, a restrição de simetria assegura uma certa estrutura a constelação. No próximo capítulo, será explorada uma técnica que permite aliar

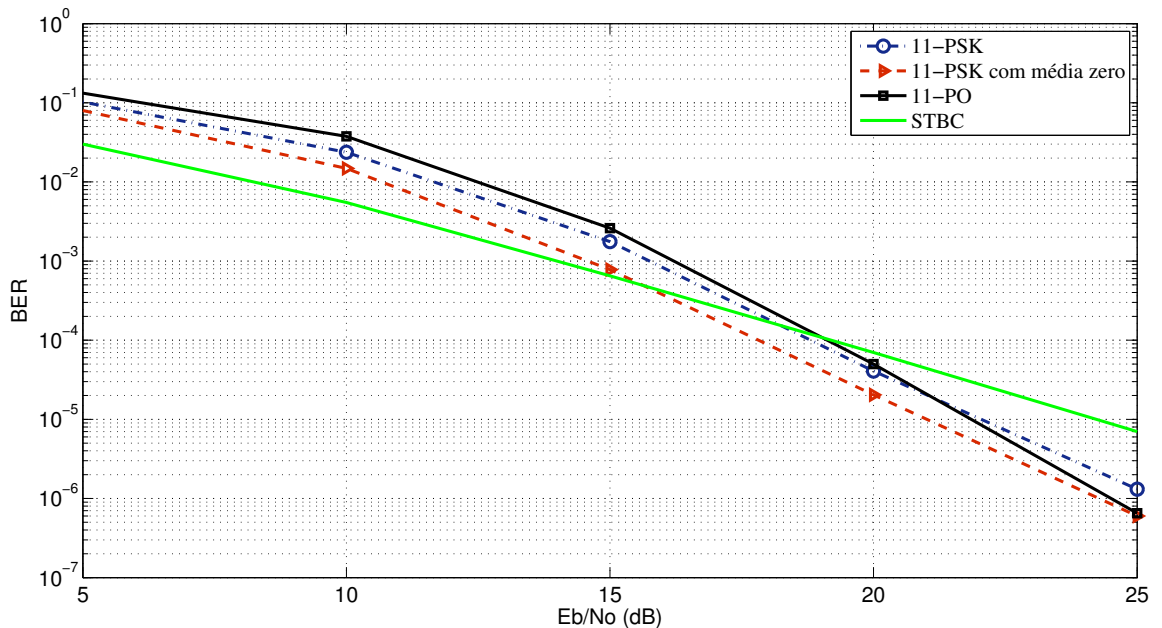


Figura 3.7: Desempenho em termos de BER para codificação wavelet com MCW 2x128

a codificação wavelet com eficiência espectral arbitrária. A ideia é considerar blocos de símbolos e mapeá-los em pontos adequados do espaço dos sinais. Nota-se que a técnica assemelha-se em princípio àquela dos sistemas OFDM [13] por intermédio da qual, o resultado de uma transformação de blocos da saída da fonte — transformada rápida de Fourier inversa (IFFT) — é mapeado no espaço dos sinais para transmissão. A aplicação proposta nesta tese pode ser imaginada como uma substituição da matriz da IFFT, usada nos sistemas OFDM, por uma matriz de coeficientes wavelet.

# Capítulo 4

## Codificação Wavelet com Eficiência Espectral

No Capítulo 3 foram apresentadas técnicas para construção de constelações de sinais e foram revistas técnicas para minimizar a degradação de desempenho provocada pelo aumento do números de símbolos wavelet e em consequente redução da distância euclidiana entre os sinais.

Entretanto os métodos apresentados resultam sempre em eficiência espectral limitada 1 bit/s/Hz [4]. Isto ocorre por que o mapeamento adotado, é do tipo um para um, i.e. a cada símbolo do alfabeto de símbolos wavelet corresponde um único ponto na constelação de sinais e como cada símbolo conduz em média um bit de informação a eficiência não pode ser aumentada.

Uma solução natural para o problema é formar blocos de símbolos antes de mapeá-los em sinais da constelação de sinais. Por exemplo, formando blocos de dois símbolos,  $(y_n, y_{n+1})$ , em  $n$  é o índice temporal, é possível interpretar o par como um ponto do espaço dos sinais em que o primeiro elemento é componente em fase e o segundo o componente em quadratura do sinal. Neste caso uma eficiência espectral de 2 bits/seg/Hz é obtida. Naturalmente, o procedimento pode em princípio ser generalizado para blocos de tamanho qualquer aumentando arbitrariamente a eficiência espectral.

Seja  $\mathcal{Y}$  o alfabeto dos símbolos wavelets com  $mg + 1$  símbolos. A idéia é formar blocos

de comprimento  $N \geq 2$ ,  $\mathbf{y}_N = (y_n, y_{n+1}, \dots, y_{n+N-1}) \in \mathcal{Y}^N$ , e especificar um mapeamento

$$\begin{aligned}\mathcal{Y}^N &\rightarrow \mathcal{C} \\ \mathbf{y}_N &\mapsto c(\mathbf{y}_N)\end{aligned}$$

em que  $\mathcal{C}$  denota uma constelação de sinais definida em um espaço de sinais com uma dimensão  $l$ . Os exemplos de aplicação apresentados nesta tese consideram o caso  $l = 2$  em combinação com um mapeamento simples, segundo o qual cada par de símbolos de um bloco de tamanho  $N = 2$  é correspondente ao sinal no espaço dos sinais. Os resultados obtidos com este esquema são encorajadores, principalmente pela sua simplicidade. Todavia para blocos de comprimento  $N > 2$ , para uma eficiência espectral maior que 2 bits/seg/Hz, mapeamentos mais elaborados devem ser considerados necessariamente. Este aspecto foi deixado para pesquisa futura.

Tendo em mente efetivamente aplicar a abordagem de formação de blocos  $\mathbf{Y}_N$ ,  $N \geq 2$ , é necessário determinar quais blocos se formam, bem como sua distribuição de probabilidades. Em um esquema modulação (sem truncamento) a constelação de sinais  $\mathcal{C}$  a ser utilizada deve ter a mesma cardinalidade do conjunto de vetores  $\mathbf{Y}_N$  que efetivamente ocorrem.

A distribuição dos símbolos wavelet não é equiprovável e há dependência entre símbolos consecutivos, por isso a determinação em geral da distribuição de probabilidades dos blocos requer alguma elaboração. A distribuição de probabilidades é importante para o cálculo da energia média da constelação e também porque a decodificação adotada utiliza o critério de máximo a posteriori (MAP).

Uma consequência interessante é que a formação de blocos de símbolos possibilita também a transmissão com taxas  $R$  em bits por uso do canal (ou bits por intervalo de sinalização) menores que 1 e aumento da distância euclidiana entre pontos de sub-constelações de sinais convenientemente definidas. Esta possibilidade pode ser interessante em cenários tais que a degradação do canal recomende a utilização de taxas variáveis.

Para determinar os blocos mencionados e suas probabilidades foi criada uma função geradora de probabilidades modificada, que pode ser usada para blocos de símbolos de tamanho arbitrário e também para sistemas com taxa  $R$  menor que 1. A utilidade desta função é exemplificada para sistemas em blocos de dois símbolos consecutivos são empregados com eficiência espectral de 2 bits/s/Hz.

Convém ressaltar que as propriedades de simetria das constelações obtidas com a formação de blocos resolvem um problema encontrado em formulações anteriores, e.g., [18], qual seja, a ocorrência de erros relativamente pequenos no espaço dos sinais que acarretam erros de grande magnitude no domínio dos símbolos wavelet.

Há que se destacar que a técnica proposta aqui apresenta semelhanças com os sistemas OFDM [13], no sentido em que ambos mapeiam o resultado de uma transformação aplicada a saída da fonte em sinais de uma constelação. Especificamente, no caso OFDM utiliza-se a transformada rápida de Fourier inversa (IFFT) já na aplicação proposta nesta tese a “transformada” é definida por intermédio da matriz de coeficientes wavelet.

A distribuição dos pares de símbolos (e portanto a constelação de sinais) é obtida por intermédio de uma função geratriz de probabilidades generalizada, na qual o vetor aleatório é substituído por uma série formal em uma variável muda  $D$  representando o retardo de um intervalo de símbolo. A função geratriz mencionada pode ser usada para encontrar a distribuição conjunta de  $N$ -úplas quaisquer com  $N \geq 2$ , além de definir o sinal no espaço de sinais de dimensão  $N$ . Entretanto suas propriedades não foram exploradas para verificar, por exemplo, sua utilidade para o cálculo de momentos. Na Seção 4.1 expõe-se como utilizar a função geradora de probabilidades para obter as probabilidades das sequências de símbolos wavelets. Na Seção 4.2 apresenta-se como utilizar o agrupamento de símbolos wavelet para aumentar a eficiência espectral. Na Seção 4.3 os sistemas com eficiência espectral de 2 bits/s/Hz são propostos e avaliados. Para finalizar, na Seção 4.4 apresenta-se um sistema com taxa de codificação  $R=1/2$  agrupado em 2 símbolos resultando em uma eficiência de 1 bit/s/Hz.

## 4.1 Distribuição de probabilidades de blocos de símbolos wavelet

Para usar a função geradora de probabilidades e obter a distribuição de probabilidade dos agrupamentos de símbolos wavelet consecutivos, considere bloco de símbolos wavelet que inicia no instante  $n$  de comprimento  $N$ , i.e.,  $\mathbf{Y}_N = (y_n, y_{n+1}, y_{n+2}, \dots, y_{n+N-1})$ . Note que é conveniente, além dos símbolos isolados,  $N = 1$ , considerar, valores de  $N$  que sejam múltiplos de  $m$ , o posto da matriz wavelet. Esta conveniência se deve ao fato que a geração de

símbolos wavelet é realizada com a tomada de blocos de  $m$  bits  $\pm 1$  em paralelo e a saída do mesmo número de símbolos wavelet em série (ver Figura 4.1 e Equação 2.16 no Capítulo 2). Para uma variável aleatória a função geratriz de probabilidade é definida por [24]:

$$G_X(z) \triangleq \mathbb{E}z^X. \quad (4.1)$$

Para um vetor aleatório de  $N$  componentes,  $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_N)$  é usual definir uma função geratriz de momentos em  $N$  variáveis,  $s_1, s_2, \dots, s_N$ , na forma [2, pag. 218]:

$$\Phi_{\mathbf{Y}}(s_1, s_2, \dots, s_N) = \mathbb{E} \left[ e^{\sum_{i=1}^N s_i Y_i} \right].$$

Entretanto, para os objetivos desta tese, a forma a seguinte variante definição de função geratriz de probabilidades revelou-se mais adequada. Considere a série formal em  $D$  e coeficientes as variáveis aleatórias  $Y_n, Y_{n+1}, Y_{n+2}, \dots, Y_{n+N-1}$ , i.e.,

$$Y(D) = Y_n + Y_{n+1}D + Y_{n+2}D^2 + \dots + Y_{n+N-1}D^{N-1} \quad (4.2)$$

em que  $D$  marca a posição de um símbolo em um bloco e pode ser interpretado como o operador de retardo de um intervalo de sinalização.

A função geratriz de probabilidades modificada é definida substituindo aleatória  $X$  na Equação (4.1) pela série formal  $Y(D)$ , i.e.,

$$G_{Y(D)}(z) \triangleq \mathbb{E}z^{Y(D)}. \quad (4.3)$$

Expandindo esta função temos a sequência de comprimento  $N$  de possíveis símbolos wavelet e a distribuição conjunta dessas sequências. Como exemplo vamos determinar a distribuição conjunta de dois símbolos ( $N = 2$ ) consecutivos para uma MCW  $2 \times 8$ . A geração dos símbolos wavelet é ilustrada no diagrama do codificador mostrado na Figura 4.1, já apresentada no Capítulo 2 e repetida para facilidade de consulta e acompanhamento. Note que neste caso, há dois “regimes de codificação”, o instante  $n = 2p$  é associado como regime de codificação par, e o instante  $n + 1 = 2p + 1$  com o regime de codificação ímpar. Os símbolos wavelet são dados por:

$$\begin{aligned} Y_n &= a_0^0 X_n + a_2^0 X_{n-2} + a_4^0 X_{n-4} + a_6^0 X_{n-6} + a_0^1 X_{n+1} \\ &+ a_2^1 X_{n-1} + a_4^1 X_{n-3} + a_6^1 X_{n-5}, \quad n = 2p \end{aligned}$$

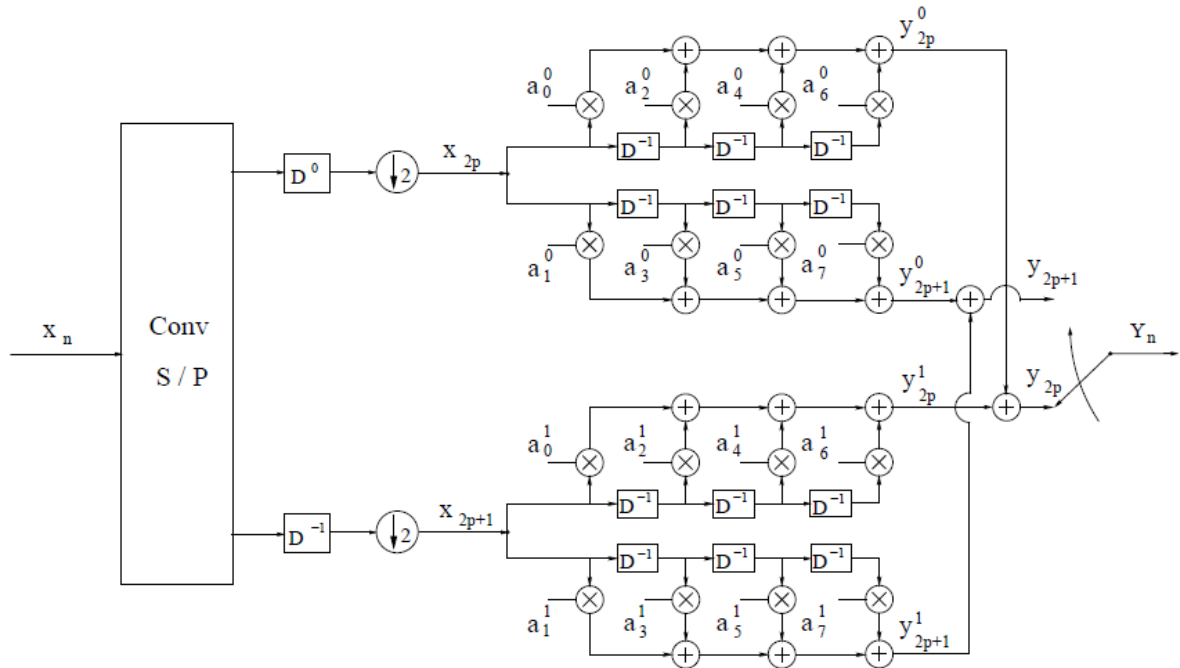


Figura 4.1: Diagrama do codificador para uma MCW 2x8.

$$\begin{aligned}
 Y_{n+1} &= a_1^0 X_n + a_3^0 X_{n-2} + a_5^0 X_{n-4} + a_7^0 X_{n-6} \\
 &+ a_1^1 X_{n+1} + a_3^1 X_{n-1} + a_5^1 X_{n-3} + a_7^1 X_{n-5}, \quad n = 2p + 1
 \end{aligned}
 \tag{4.4}$$

Substituindo os valores da MCW temos:

$$\begin{aligned}
 Y_n &= X_n + X_{n-2} + X_{n-4} - X_{n-6} + X_{n+1} \\
 &+ X_{n-1} - X_{n-3} + X_{n-5}
 \end{aligned}
 \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned}
 Y_{n+1} &= X_n - X_{n-2} + X_{n-4} + X_{n-6} + X_{n+1} \\
 &- X_{n-1} - X_{n-3} - X_{n-5}.
 \end{aligned}
 \tag{4.6}$$

É evidente a dependência estatística entre os símbolos  $Y_n$  e  $Y_{n+1}$ . Entretanto, considerando os  $mg = 8$  símbolos  $X_{n+1}, X_n, \dots, X_{n-6}$  que compõem os símbolos  $Y_n$  e  $Y_{n+1}$ , será verificado a seguir como obter a distribuição destes blocos de dois símbolos wavelet consecutivo, bem como o *alfabeto* destes pares. O termo alfabeto refere-se ao conjunto de possíveis blocos  $(Y_n, Y_{n+1})$ . Para tanto, defina a série formal

$$Y(D) = Y_n + Y_{n+1}D. \tag{4.7}$$



e considere função geratriz modificada

$$\begin{aligned} G_{Y(D)}(z) &= \mathbb{E}z^{Y(D)} \\ &= \mathbb{E}z^{Y_n+Y_{n+1}D}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

substituindo  $Y_n$  e  $Y_{n+1}$ , respectivamente por suas expressões (4.5) e (4.6) e organizando as expressões obtém-se

$$\begin{aligned} G_{Y(D)}(z) &= \mathbb{E}z^{(1+D)X_{n+1}+(1+D)X_n+(1-D)X_{n-1}} \\ &\quad + (1-D)X_{n-2}+(-1-D)X_{n-3}+(1+D)X_{n-4} \\ &\quad + (1-D)X_{n-5}+(-1+D)X_{n-6}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Dado que a fonte  $\{X_n\}$  é sem memória com símbolos identicamente distribuídos, a equação anterior pode ser reescrita na forma:

$$\begin{aligned} G_{Y(D)}(z) &= G_{X_{n+1}}(z^{1+D})G_{X_n}(z^{1+D})G_{X_{n-1}}(z^{1-D}) \\ &\quad \dots G_{X_{n-2}}(z^{1-D})G_{X_{n-3}}(z^{-1-D})G_{X_{n-4}}(z^{1+D}) \\ &\quad \dots G_{X_{n-5}}(z^{1-D})G_{X_{n-6}}(z^{-1+D}) \end{aligned} \quad (4.10)$$

Para uma fonte binária  $X_i \in \pm 1$  e  $P[X_i = 1] = P[X_i = -1] = 1/2$ , então:

$$G_{X_i}(D) = \frac{1}{2} (z^{f(D)} + z^{-f(D)}). \quad (4.11)$$

em que  $f(D)$  assume uma das formas  $\pm 1 \pm D$ . Portanto tem-se, na presente ilustração a expressão:

$$G_{Y(D)}(z) = \frac{1}{2^8} (z^{1-D} + z^{-1+D})^4 (z^{1+D} + z^{-1-D})^4. \quad (4.12)$$

Finalmente, expandindo essa equação em  $z$  determinam-se tanto os pares de símbolos wavelet que podem ser gerados bem com suas probabilidades.

### Mapeamento simples de blocos em pontos do espaço dos sinais

Os expoentes da variável  $z$  podem ser interpretados como o sinais do no espaço dos sinais com dimensão  $N$ , mediante um mapeamento a seguir, em que cada símbolo wavelet é interpretado como uma coordenada de um ponto espaço dos sinais. Defina *mapeamento simples*

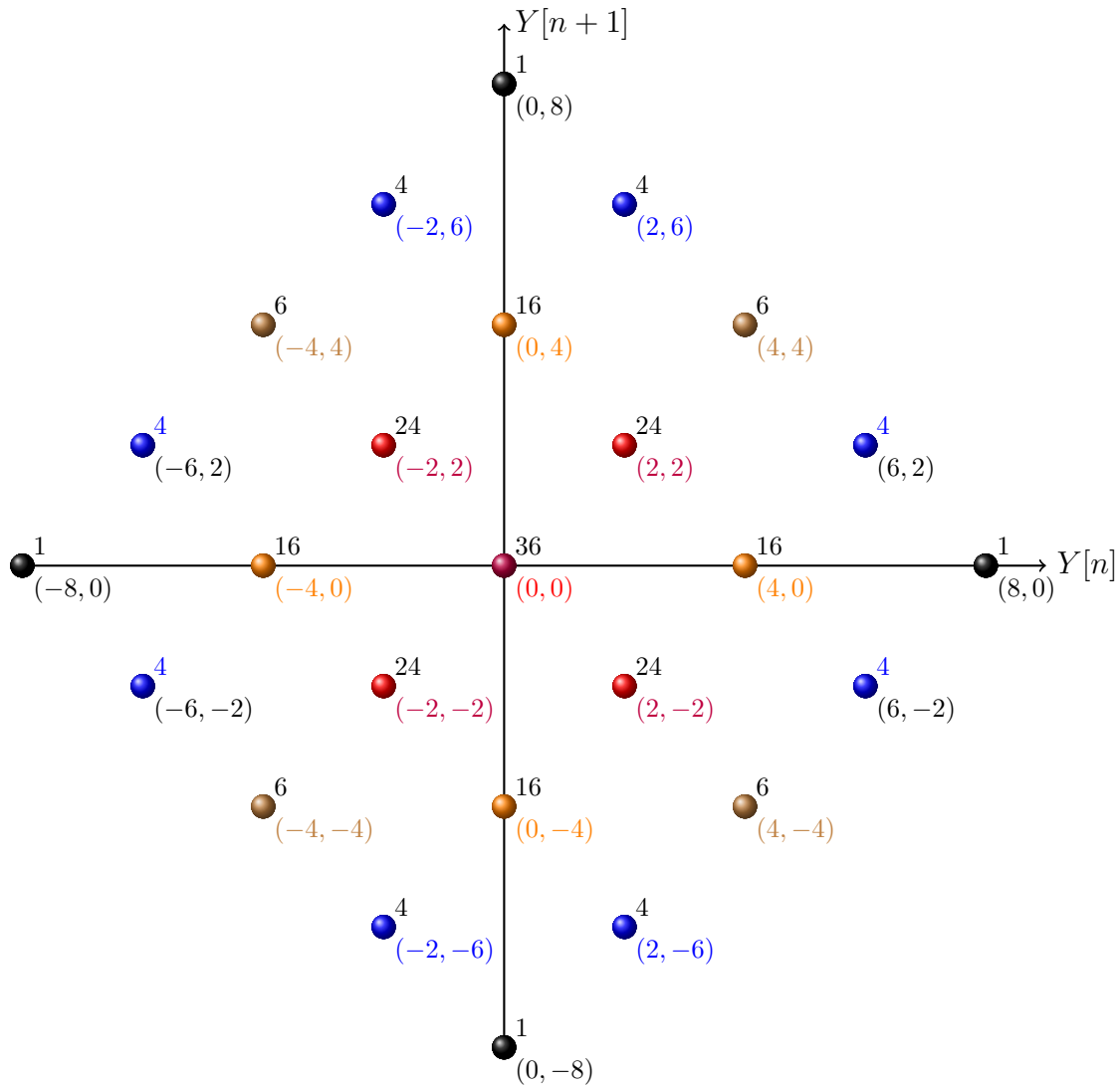


Figura 4.2: Pares de símbolos wavelet dados pelo mapeamento simples no espaço dos sinais (plano  $\mathbb{R}^2$ ) para MCW  $2 \times 8$ . Cada ponto da constelação é rotulado pelo par de símbolos que representa. A probabilidade do par é igual ao inteiro na diagonal acima do ponto da constelação multiplicado por  $2^{-8}$ .

por intermédio da correspondência

$$\mathbf{Y}_N = (Y_0, Y_1, \dots, Y_{N-1}) \leftrightarrow Y(D) = \sum_{\ell=0}^{N-1} Y_{\ell} D^{\ell}$$

obtida após a expansão da expressão inicial de  $G_{Y(D)}(z)$ .

As formas polinomiais que resultam nos expoentes de  $z$  na expressão de têm grau máximo  $N - 1$  e mediante o uso da base de monômios  $\{1, D, D^2, \dots, D^{N-1}\}$  é feito o mapeamento simples, interpretando cada coeficiente de cada forma polinomial como uma coor-

denada do espaço dos sinais com dimensão  $N$ . Os números que multiplicam cada uma das potências de  $z$  na expressão expandida  $G_{Y(D)}(z)$  correspondem as probabilidades do sinal correspondente ao bloco  $\mathbf{Y}_N$ .

Para o exemplo em tela,  $N = 2$  e  $\mathbf{Y}_2 = (Y_n, Y_{n+1})$ . A expansão mencionada resulta em

$$\begin{aligned}
G_{Y(D)}(z) = & \frac{1}{2^8} (36z^{0+0D} + 24z^{2+2D} + 24z^{2-2D} + 24z^{-2+2D} + 24z^{-2-2D} \\
& + 16z^{0+4D} + 16z^{0-4D} + 16z^{-4+0D} + 6z^{4+0D} \\
& + 6z^{4+4D} + 6z^{4-4D} + 6z^{-4+4D} + 6z^{-4-4D} \\
& + 4z^{2+6D} + 4z^{6+2D} + 4z^{2-6D} + 4z^{-6+2D} \\
& + 4z^{-2+6D} + 4z^{6-2D} + 4z^{-2-6D} + 4z^{-6-2D} \\
& + z^{0+8D} + z^{8+0D} + z^{0-8D} + z^{-8+0D}). \tag{4.13}
\end{aligned}$$

O lado direito da Equação (4.13) fornece os pares de símbolos do mapeamento simples, representados pelas formas polinomiais em cada um dos expoentes da variável  $z$ . As probabilidades de cada um dos sinais (blocos  $\mathbf{Y}_2$ ) é dado pelo número natural que multiplica o termo, dividido por  $2^8$ .

Os pares de símbolos e as respectivas probabilidades estão representados na Tabela 4.1 e na Figura 4.2. Note que nos expoentes foi mantida a forma binomial  $a + bD$  mesmo que  $a$  ou  $b$  sejam nulos, a intenção é deixar claro que cada um dos binômios formais corresponde a um ponto no espaço dos sinais bidimensional. Realizando o mesmo procedimento, encontramos

Tabela 4.1: Pares de símbolos wavelet e suas respectivas probabilidades para sistema de posto  $m = 2$  e gênero  $g = 4$ , portanto uma MCW  $2 \times 8$

Pares de Símbolos (Pontos da constelação $\mathcal{C}$ )	Probabilidade ( $\times 2^{-8}$ )
(0,0)	36
(2,2), (2,-2), (-2,2), (-2,-2)	24
(0,4), (0,-4), (4,0), (-4,0)	16
(4,4), (4,-4), (-4,4), (-4,-4)	6
(2,6), (6,2), (2,-6), (-6,2), (-2,6), (6,-2), (-2,-6), (-6,-2)	4
(0,8), (8,0), (0,-8), (-8,0)	1

a seguinte expressão para uma MCW 2x128:

$$G_{Y(D)}(z) = \frac{1}{2^{128}} (z^{1-D} + z^{-1+D})^{64} (z^{1+D} + z^{-1-D})^{64}. \quad (4.14)$$

Para recuperar os pontos da constelação que são determinados pelas séries formais presentes nos expoentes de  $z$  e suas respectivas probabilidades deve-se proceder a expansão da expressão no lado direito da Equação 4.14. Utilizou-se para tal uma função de expansão de polinômios do MATLAB<sup>®</sup>.

### Cardinalidade do conjunto de blocos de símbolos wavelet

Considere o conjunto  $\mathcal{Y}_N = \{\mathbf{Y}_N\}$  de todos os blocos de comprimento  $N$  que podem ser gerados na saída do codificador wavelet. Sabe-se que a cardinalidade deste conjunto para  $N = 1$  é  $M = |\mathcal{Y}_1| = mg + 1$ , o número de símbolos wavelet; entretanto para  $N > 1$  o cálculo de  $M$  não é óbvio devido às dependências entre símbolos consecutivos.

Por intermédio da função geratriz de probabilidades  $G_{Y(D)}(z)$  definida anteriormente, é fácil verificar que os polinômios  $f(D)$  presentes nos expoentes de  $z$  tem grau máximo  $N - 1$ , e portanto podem determinar um espaço vetorial (de polinômios) de dimensão máxima  $N$ , o que determina a dimensão do espaço dos sinais capaz de acomodar um mapeamento isométrico e sem truncamento dos blocos  $\mathbf{Y}_N$  neste espaço. Por outro lado, o tamanho da constelação de sinais requerida em um esquema de transmissão sem truncamento é  $M = |\mathcal{Y}_N|$ .

Considere novamente a Equação 4.12 e considere o desenvolvimento a seguir, em que para suavizar a notação denota-se  $b_1 = 1 + D$  e  $b_2 = 1 - D$ :

$$G_{Y(D)}(z) = \frac{1}{2^8} (z^{1+D} + z^{-1-D})^4 (z^{1-D} + z^{-1+D})^4 \quad (4.15)$$

$$= \frac{1}{2^8} \sum_{l_1=0}^4 z^{(2l_1-4)b_1} \sum_{l_2=0}^4 z^{(2l_2-4)b_2} \quad (4.16)$$

$$= \frac{1}{2^8} \sum_{l_1=0}^4 \sum_{l_2=0}^4 z^{(2l_1-4)b_1 + (2l_2-4)b_2} \quad (4.17)$$

O somatório duplo 4.17 representa uma combinação linear dos polinômios  $b_1$  e  $b_2$  que são linearmente independentes. Suponha que duas combinações, determinadas por índices,  $l_1, l_2$  e  $l'_1, l'_2$ , respectivamente, são iguais, ou seja,

$$(2l_1 - 4)b_1 + (2l_2 - 4)b_2 = (2l'_1 - 4)b_1 + (2l'_2 - 4)b_2 \quad (4.18)$$

Então sendo  $b_1$  e  $b_2$  linearmente independentes tem-se que a igualdade é satisfeita se e somente se  $l_1 = l'_1$  e  $l_2 = l'_2$ . Portanto verifica-se uma correspondência bijetora entre os pares  $(l_1, l_2)$  de índices com os polinômios no expoente de  $z$ . I.e., o número de pontos da constelação é igual ao número de pares  $(l_1, l_2)$ , em que  $l_1, l_2 \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ; por isso neste exemplo o número de polinômios distintos e portanto de uma constelação de sinais que define um mapeamento bijetor é  $M = 5^2 = 25$ . A Figura 4.2 ilustra uma das possíveis constelações de sinais com 25 pontos, em que cada ponto corresponde exatamente a uma combinação linear dos expoente da Equação 4.17.

Observando cuidadosamente o desenvolvimento feito para dedução da Equação 4.12, 4.10 e 4.11, é possível escrever uma expressão geral para a função geratriz de um sistema wavelet com parâmetros  $m, g$  e dimensão  $N > 1$ :

$$G_{Y(D)}(z) = \frac{1}{2^K} \prod_j \left( z^{f_j(D)} + z^{-f_j(D)} \right)^{k_j} \quad (4.19)$$

sendo  $K$  o número de símbolos da fonte  $X_i \in \{\pm 1\}$  suficientes para o cálculo dos blocos  $\mathbf{Y}_N$ , por exemplo no caso da Equação 4.12,  $k_1 = k_2 = 4$  e  $K = k_1 + k_2 = 8$  que é o número de símbolos da fonte usados para o cálculo de  $y_n$  e  $y_{n+1}$ . Os polinômios  $f_j(D)$ ,  $\deg f_j(D) < N$ , são em geral combinações lineares de  $b_1, b_2, \dots, b_N$ ,  $\deg b_i < N$  formando uma base do espaço vetorial dos polinômios de grau menor que  $N$ .

Para ilustrar a descrição anterior, considere o caso de blocos de comprimento  $N = 4$  e matriz wavelet de posto  $m = 2$  e gênero  $g = 4$ . Tem-se agora que considerar o vetor

$$\mathbf{Y}_4 = (Y_n, Y_{n+1}, Y_{n+2}, Y_{n+3}), \quad n = 2p \quad (4.20)$$

Com auxílio da Figura 4.1, um cálculo simples resulta na função geratriz de probabilidades:

$$G_{Y(D)}(z) = \mathbb{E} \left[ z^{p_1(D)X_n + p_2(D)X_{n-2} + p_3(D)X_{n-6} + p_4(D)X_{n-4} + p_5(D)X_{n+1} + p_6(D)X_{n-1} + p_7(D)X_{n-2} + p_8(D)X_{n-3} + p_9(D)X_{n-2} + p_{10}(D)X_{n+3}} \right] \quad (4.21)$$

Os polinômios  $p_i(D)$  são respectivamente

$$\begin{aligned} p_1(D) &= 1 + D + D^2 - D^3 & p_2(D) &= 1 - D + D^2 + D^3 & p_3(D) &= -1 + D \\ p_4(D) &= 1 + D - D^2 + D^3 & p_5(D) &= 1 + D + D^2 - D^3 & p_6(D) &= 1 - D - D^2 - D^3 \\ p_7(D) &= -1 - D + D^2 - D^3 & p_8(D) &= 1 - D & p_9(D) &= p_{10}(D) = 1 + D \end{aligned}$$

A dimensão do espaço linear gerado pelos polinômios  $p_i(D)$  é  $N = 4$ , uma base trivial para ele é

$$\mathcal{B} = \{b_1 = 1 + D, b_2 = 1 - D, b_3 = D^2 + D^3, b_4 = D^2 - D^3\} \quad (4.22)$$

Por intermédio desta base, reescreve-se os polinômios  $p_i(D), i = 1, \dots, 10$  na forma

$$\begin{aligned} p_1(D) &= b_1 + b_4 & p_2(D) &= b_2 + b_3 & p_3(D) &= -b_2 \\ p_4(D) &= b_1 - b_4 & p_5(D) &= b_1 + b_4 & p_6(D) &= b_2 - b_3 \\ p_7(D) &= -b_1 + b_4 & p_8(D) &= b_2 & p_9(D) &= p_{10}(D) = b_1 \end{aligned}$$

Substituindo as representações anteriores na Equação 4.21, após algum algebrismo obtém-se

$$\begin{aligned} G_{Y(D)}(z) &= \frac{1}{2^{10}} \left( z^{b_1+b_4} + z^{-b_1-b_4} \right)^2 \left( z^{b_2+b_3} + z^{-b_2-b_3} \right) \left( z^{b_2} + z^{-b_2} \right) \\ &\quad \left( z^{b_1-b_4} + z^{-b_1+b_4} \right)^2 \left( z^{b_2-b_3} + z^{-b_2+b_3} \right) \left( z^{b_1} + z^{-b_1} \right)^2 \\ &= \frac{z^{10}}{2^{10}} \sum_{l_1=0}^2 \sum_{l_2=0}^1 \sum_{l_3=0}^2 \sum_{l_4=0}^2 \sum_{l_5=0}^1 \sum_{l_6=0}^2 \\ &\quad z^{-2(l_1(b_1+b_4)+l_2(b_2+b_3)+l_3b_2+l_4(b_1-b_4)+l_5(b_2-b_3)+l_6b_1)} \end{aligned} \quad (4.23)$$

Note que a Equação 4.23 representa combinações lineares dos polinômios da base  $\mathcal{B}$ , especificamente,

$$\begin{aligned} G_{Y(D)}(z) &= z^{10} \sum_{l_1=0}^2 \sum_{l_2=0}^1 \sum_{l_3=0}^2 \sum_{l_4=0}^2 \sum_{l_5=0}^1 \sum_{l_6=0}^2 \\ &\quad z^{-2((l_1+l_4+l_6)b_1+(l_2+l_3-l_5)b_2+(l_2-l_5)b_3+(l_1-l_4)b_4)} \end{aligned} \quad (4.24)$$

Reescreva a combinação linear na forma

$$c = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 b_3 + \alpha_4 b_4 \quad (4.25)$$

em que

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= l_1 + l_2 + l_6 & \alpha_2 &= l_2 + l_3 - l_5 \\ \alpha_3 &= l_2 - l_5 & \alpha_4 &= l_1 - l_4 \\ l_1, l_3, l_4, l_6 &\in \{0, 1, 2\} & l_2, l_5 &\in \{0, 1\} \end{aligned}$$

Por intermédio de um raciocínio similar ao caso anterior para  $N = 2$ , nota-se que há uma correspondência bijetora entre as 4-úplas  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$  e os polinômios distintos no

expoente a Equação 4.24. Porisso a determinação da constelação é equivalente à determinação de todas as soluções distintas do produto matricial

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \\ l_5 \\ l_6 \end{pmatrix} \quad (4.26)$$

em que os  $l_i$ s percorrem os valores:

$$l_1, l_3, l_4, l_6 \in \{0, 1, 2\} \text{ e } l_2, l_5 \in \{0, 1\}. \quad (4.27)$$

Um exame cuidadoso da Equação 4.26 releva que, para os valores possíveis dos  $l_i$ s, há uma correspondência biunívoca entre os vetores  $(l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6)$  e os vetores  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ . Portanto, neste caso,

$$M = 3^4 \times 2^2 = 324. \quad (4.28)$$

## 4.2 Agrupamento de símbolos wavelet para aumentar a eficiência espectral

A Equação (4.13) fornece os possíveis pares de símbolos wavelet e suas probabilidades, listados na Tabela 4.1, e se desenharmos esses pares de símbolos como pontos no plano  $\mathbb{R}^2$  obtemos a estrutura representada na Figura 4.2, onde também estão indicadas as probabilidades conjuntas. Observa-se a regularidade da estrutura obtida, quadrados concêntricos.

Devido a isotropia do ruído e do desvanecimento a constelação (normalizada) tem o mesmo desempenho que a da constelação mostrada na Figura 4.3 resultante de uma rotação de  $45^\circ$  da constelação original. O esquema que utiliza a constelação obtida pelo mapeamento dos agrupamentos de símbolos wavelet, como o exemplificado na Figura 4.2, faz o mapeamento da sequência de bits da fonte em símbolos do canal, e assim pode ser considerado uma codificação fonte-canal.

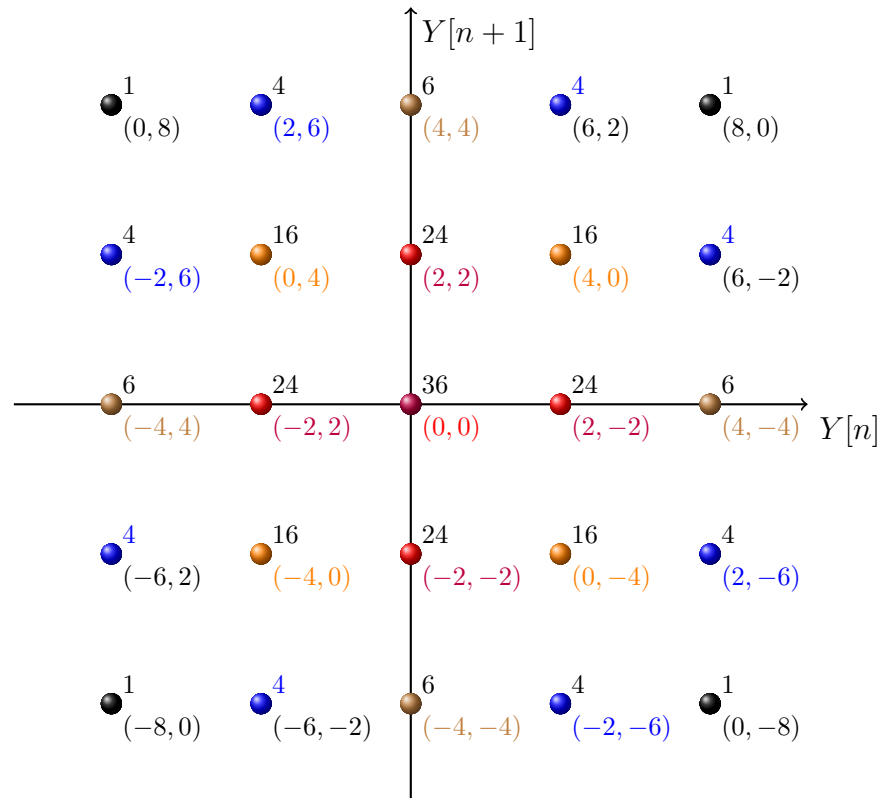


Figura 4.3: Pares de símbolos wavelet no plano  $\mathbb{R}^2$  para MCW 2x8. Constelação (normalizada) obtida após uma rotação de  $45^\circ$  com desempenho equivalente a da constelação original mostrada na Figura 4.2. Cada ponto da constelação é rotulado pelo par de símbolos que representa. A probabilidade do par é igual ao inteiro na diagonal acima do ponto da constelação multiplicado por  $2^{-8}$ .

Além disso, a “constelação” proposta tem características interessantes, pois pontos de alta probabilidade correspondem a sinais de baixa energia, e pares de símbolos wavelet próximos são mapeados para pontos vizinhos no espaço de sinais do canal, e com isso os erros impostos pelo canal que causem trocas de símbolos wavelet, que causam grande influência no desempenho, são amenizados.

O desempenho da codificação conjunta em canais com desvanecimento será analisado nas próximas seções. Sendo a primeira um esquema com eficiência espectral igual a 2bits/s/Hz, e a segunda um esquema com taxa  $R = 1/2$  resultando em uma eficiência de 1 bit/s/Hz.



### 4.3 Sistemas com eficiência de 2 bits/s/Hz

Seguindo o esquema de codificação conjunta fonte-canal proposto na seção anterior, vamos utilizar os pontos no plano  $\mathbb{R}^2$  como uma constelação de sinais que serão transmitidos pelo canal.

Nas simulações consideramos uma fonte binária i.i.d., canal com desvanecimento Rayleigh plano e lento e ruído aditivo branco gaussiano. No receptor considera-se conhecimento perfeito do canal e utilizou-se o critério MAP.

Para obter os resultados vamos usar a constelação proposta na Figura 4.2, e outra obtida para uma matriz  $2 \times 128$ , e em ambos os casos cada dois símbolos wavelet serão associados a um símbolo do canal, e assim teremos sistemas com eficiência espectral 2 bits/s/Hz.

Os resultados obtidos estão representados na Figura 4.4, onde estão apresentados os desempenhos do sistema aqui proposto para duas MCW,  $2 \times 8$  e  $2 \times 128$  e um sistema de codificação wavelet que utiliza uma MCW  $2 \times 128$ , eficiência espectral de 1 bit/s/Hz e uma constelação 11-PSK especialmente projetada [18; 8].

Pode-se observar que o sistema de maior eficiência espectral aqui proposto mantém o bom desempenho dos sistemas wavelet, e mesmo com uma matriz  $2 \times 8$  tem desempenho próximo ao sistema 11-PSK nos baixos valores de SNR. Ao utilizar a matriz  $2 \times 128$  o desempenho do sistema melhora, e supera o do esquema 11-PSK em todos os valores de SNR.

#### Comparação com sistemas em diversidade espácio-temporal

O desempenho de sistemas com  $n > 1$  antenas de transmissão e  $m \geq 1$  antenas de recepção e codificação espácio-temporal de blocos (*space-time block codes*) é discutido por Calderbank et al. em [22]. Essencialmente, nos sistemas analisados, a diversidade espacial é pressuposta com enlaces entre a  $j$ -ésima antena de transmissão e a  $i$ -ésima antena de recepção sujeitos a desvanecimento quasi-estático de Rayleigh e ruído gaussiano branco. O termo quasi-estático significa que a “profundidade” do desvanecimento, dada por uma variável aleatória gaussiana complexa de variância  $1/2$  por dimensão, permanece fixa ao longo de um quadro de  $l$  intervalos de transmissão. Supõe-se que os desvanecimento em um enlace é independente dos outros e decodificação utiliza o critério de distância mínima com conhecimento

perfeito dos estados dos canais entre a  $j$ -ésima antena de transmissão e a  $i$ -ésima antena de recepção pelo decodificador.

Na Figura 4.5 encontra-se o desempenho do sistema proposto para uma MCW 2x128 e de um sistema com modulação 4-QAM tradicional sem codificação, podemos notar ganhos de mais de 5 dB, a seguir vamos comparar com sistemas STBC.

Na Figura 4.6 estão representados os desempenhos do sistema com eficiência espectral de 2 bits/s/Hz aqui proposto, um para cada matriz wavelet, e o desempenho de um sistema com codificação espaço-temporal com código de taxa 1 com 2 antenas na transmissão e uma na recepção também com 2 bits/s/Hz, o mesmo foi simulado com o código de simulação em MATLAB<sup>®</sup> desenvolvido por Ehtesham [9]. Encontra-se também o desempenho de outro sistema com codificação espaço-temporal, porém com quatro antenas de transmissão e uma de recepção usando constelação 16-QAM [22] e código de taxa 1/2, e um sistema sem codificação.

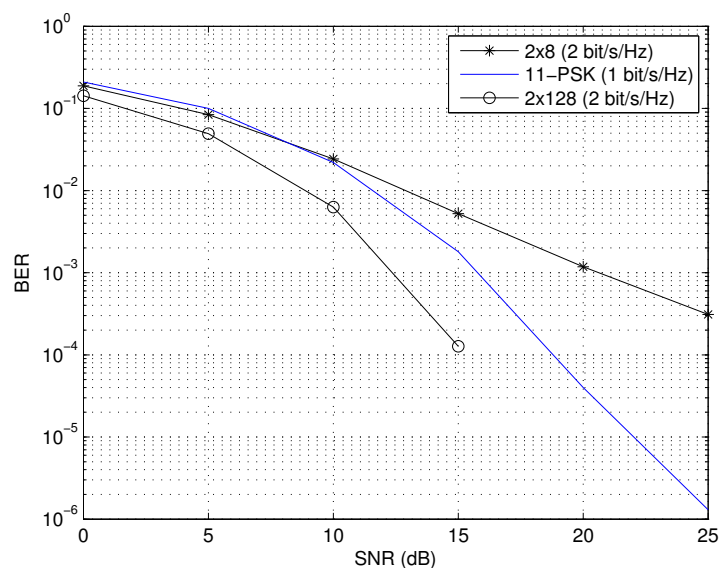


Figura 4.4: Curvas de BER para sistemas wavelet 11-PSK (1 bit/s/Hz) e eficiência espectral 2 bits/s/Hz com MCW 2x8 e 2x128.

Inicialmente deve-se observar que o sistema aqui proposto utiliza apenas uma antena de transmissão e uma de recepção, enquanto os sistemas apresentados em [22] possui forte diversidade espacial, sendo um com duas e outro com quatro antenas de transmissão e uma na recepção. A diferença de 4 dB é significativa sugerindo o potencial dos esquemas de codificação com uso de matrizes wavelet ainda que se considere que a constelação é do tipo

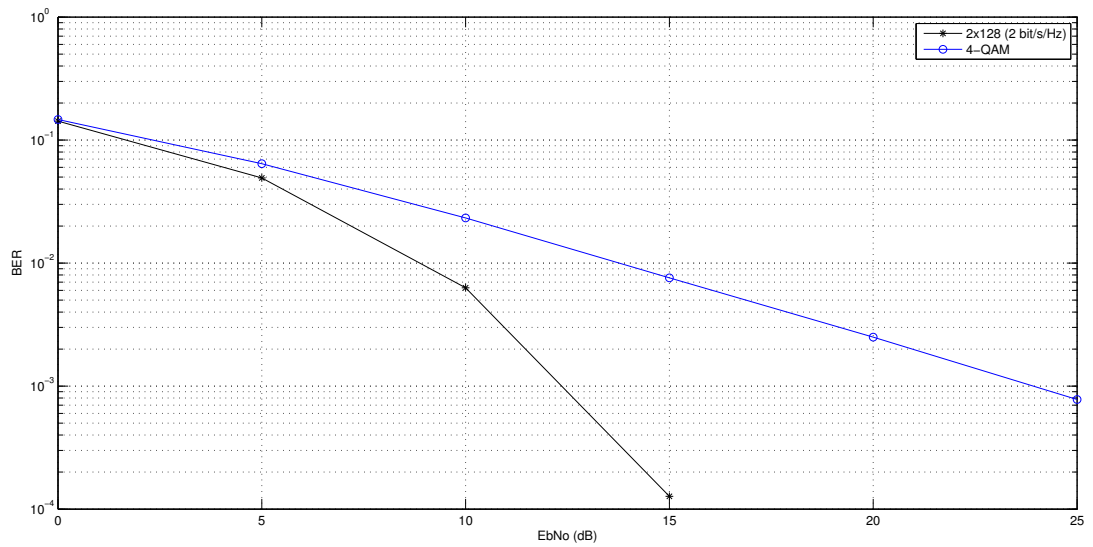


Figura 4.5: Curvas de BER para sistemas wavelet 2x128 (2 bit/s/Hz) e 4-QAM.

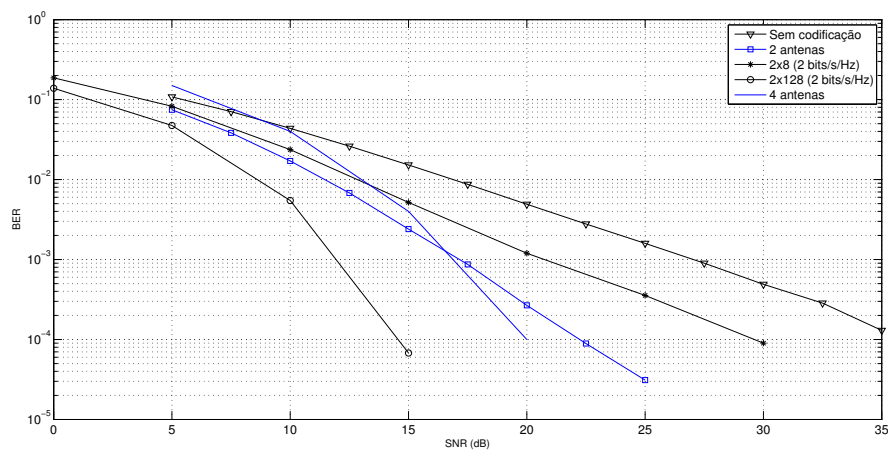


Figura 4.6: Curvas de BER para sistemas wavelet com eficiência espectral de 2 bits/s/Hz com MCW 2x8 e 2x128, e dois sistemas com codificação espaço-temporal de bloco sendo um com 2 antenas de transmissão e outro com quatro antenas.

multinível.

Deve-se considerar também que nenhuma busca por uma constelação ótima foi realizada. Afim de investigar se existe margem para melhorar o desempenho do sistema proposto, como exemplo, utilizou-se a constelação mostrada na Figura 4.2 com o primeiro quadrado mais interno sendo aproximado ou afastado do ponto (0,0) por fator rho,  $\rho$ , fixou-se um relação sinal ruído e verificou-se o desempenho, o resultado encontra-se na Figura 4.7. O ponto  $\rho = 1$  corresponde a constelação original, nota-se que a um pequena melhora quando se aproxima o primeiro quadrado do ponto mais interno e conseqüentemente se afasta do quadrado mais externo, este experimento sugere que os pontos igualmente espaçados possam não ser a melhor solução. Na próxima seção será aplicada a ideia de transmissão de pares de símbolos

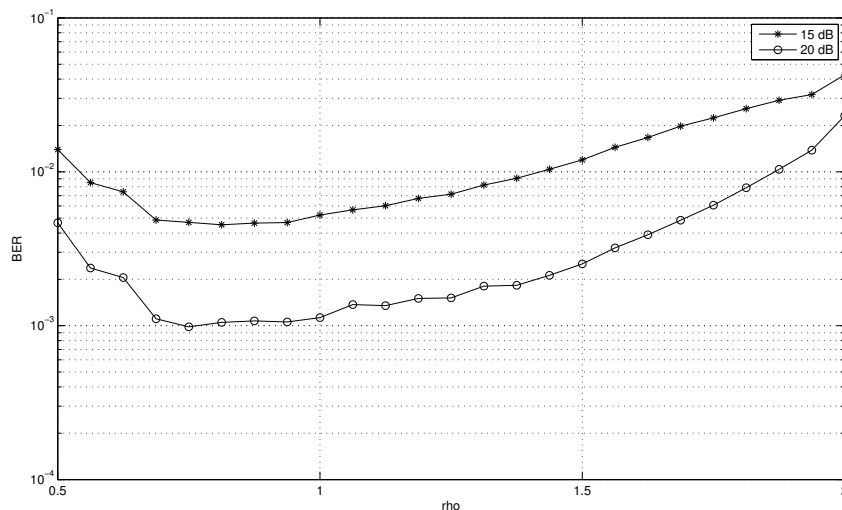


Figura 4.7: Desempenho para a constelação modificada.

wavelet a sistemas wavelet de taxa,  $R = 1/2$ , resultando em sistemas com eficiência de 1 bit/s/Hz.

## 4.4 Sistemas com eficiência de 1 bits/s/Hz

Até onde foi investigada a literatura, não há trabalhos que tenham explorado a possibilidade de fazer codificação wavelet com taxas  $R < 1$ , o que motivou a realização do desenvolvimento encontrado nesta seção. Aqui sistemas com taxa  $R = 1/2$  são descritos e têm seu desempenho avaliado.

Para obter codificações com taxa fracionária deve-se que a matriz na codificação por em  $2m$  posições. O procedimento é ilustrado na Tabela 4.2 para uma matriz MCW  $2 \times 8$ .

Tabela 4.2: Exemplo de codificação wavelet com taxa 1/2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
$x_1 a_0^0$	$x_1 a_1^0$	$x_1 a_2^0$	$x_1 a_3^0$	$x_1 a_4^0$	$x_1 a_5^0$	$x_1 a_6^0$	$x_1 a_7^0$			
$x_2 a_0^1$	$x_2 a_1^1$	$x_2 a_2^1$	$x_2 a_3^1$	$x_2 a_4^1$	$x_2 a_5^1$	$x_2 a_6^1$	$x_2 a_7^1$			
				$x_3 a_0^0$	$x_3 a_1^0$	$x_3 a_2^0$	$x_3 a_3^0$	$x_3 a_4^0$	$x_3 a_5^0$	...
				$x_4 a_0^1$	$x_4 a_1^1$	$x_4 a_2^1$	$x_4 a_3^1$	$x_4 a_4^1$	$x_4 a_5^1$	...
								$x_5 a_0^0$	...	...
								$\vdots$	...	...
$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$	$y_6$	$y_7$	$y_8$	$y_9$	$y_{10}$	...

Na Tabela 4.3 encontram-se os símbolos wavelet gerados na codificação até o instante  $n = 10$ , nota-se que após o instante  $n = 4$ , os símbolos wavelet gerados têm forma:

$$y = \sum_{k=1}^4 c_k x_k \quad (4.29)$$

E portanto têm sua probabilidade dada por:

$$Pr(y_n = 2k - mg/2) = \binom{mg/2}{k} (0.5)^{mg/2}, \quad 0 \leq k \leq mg/2 \quad (4.30)$$

Agora, para obter os pares possíveis e suas respectivas probabilidades note que tem-se dois regimes de codificação aos pares, pois os coeficientes que ponderam os bits de informação nos instantes  $n = 5$  e  $n = 6$  são os mesmos que ponderam nos instantes  $n = 9$  e  $n = 10$ , porém são diferentes dos instantes  $n = 7$  e  $n = 8$ , então ter-se-á uma função geradora para cada caso.

Por exemplo, para uma MCW  $2 \times 8$ , formando duplas de símbolos wavelet, tem-se que em um instante os pares possíveis são dados por:

$$\frac{1}{2^4} (z^{1+D} + z^{-1-D})^4 \quad (4.31)$$

e no instante seguinte:

$$\frac{1}{2^4} (z^{1-D} + z^{1+D})^4 \quad (4.32)$$

se quisermos obter os pares e suas probabilidades a qualquer tempo basta juntar as duas:

$$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{2^4} (z^{1+D} + z^{-1-D})^4 + \frac{1}{2^4} (z^{1-D} + z^{1+D})^4 \right) \quad (4.33)$$

que resulta no pares de símbolos que se encontram na Tabela 4.4.

Tabela 4.3: Símbolos gerados a partir de uma MCW 2x8 para R=1/2

$n$	Símbolo
1	$x_1 a_0^0 + x_2 a_0^1$
2	$x_1 a_1^0 + x_2 a_1^1$
3	$x_1 a_2^0 + x_2 a_2^1$
4	$x_1 a_3^0 + x_2 a_3^1$
5	$x_1 a_4^0 + x_2 a_4^1 + x_3 a_0^0 + x_4 a_0^1$
6	$x_1 a_5^0 + x_2 a_5^1 + x_3 a_1^0 + x_4 a_1^1$
7	$x_1 a_6^0 + x_2 a_6^1 + x_3 a_2^0 + x_4 a_2^1$
8	$x_1 a_7^0 + x_2 a_7^1 + x_3 a_3^0 + x_4 a_3^1$
9	$x_3 a_4^0 + x_4 a_4^1 + x_5 a_0^0 + x_6 a_0^1$
10	$x_3 a_5^0 + x_4 a_5^1 + x_5 a_1^0 + x_6 a_1^1$

Tabela 4.4: Pares de símbolos wavelet e suas respectivas probabilidades para MCW 2x8 e R=1/2

Pares de Símbolos	Probabilidade ( $\times 2^{-5}$ )
(0,0)	12
(2,2), (2,-2), (-2,2), (-2,-2)	4
(4,4), (4,-4), (-4,4), (-4,-4)	1

Colocando os pares em um plano  $\mathbb{R}^2$  obtemos a estrutura representada na Figura 4.8. Note entretanto, que a cada instante só ocorrem os símbolos pertencente a uma reta da constelação, ou seja, a cada instante tem-se uma sub-constelação acontecendo.

Seguindo os mesmos procedimentos, encontram-se os pares e suas respectivas probabilidades para uma MCW 2x128 com R=1/2, neste caso tem-se novamente dois regimes de

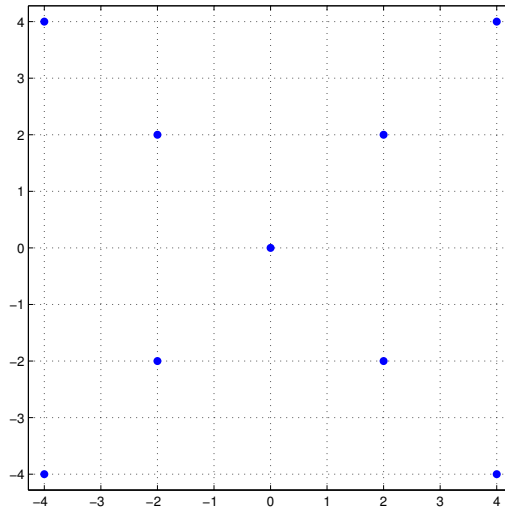


Figura 4.8: Pares de símbolos wavelet no plano  $\mathbb{R}^2$  para MCW 2x8 e  $R=1/2$

codificação que corresponderão as duas retas da constelação, tem-se então 65 pares possíveis a cada instante de um total de 129 pares possíveis, as equações para as probabilidades são dadas a seguir.

$$\frac{1}{2^{64}} (z^{1+D} + z^{-1-D})^{64} \quad (4.34)$$

e no instante seguinte:

$$\frac{1}{2^{64}} (z^{1-D} + z^{1+D})^{64} \quad (4.35)$$

se quisermos obter os pares e suas probabilidades a qualquer tempo basta juntar as duas:

$$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{2^{64}} (z^{1+D} + z^{-1-D})^{64} + \frac{1}{2^{64}} (z^{1-D} + z^{1+D})^{64} \right) \quad (4.36)$$

Para efeito de avaliação, realizou-se simulações considerando o mesmo cenário da seção anterior, considerou-se uma fonte binária i.i.d., canal com desvanecimento Rayleigh plano e lento e ruído aditivo gaussiano branco. No receptor considera-se conhecimento perfeito do canal e usa-se o critério MAP.

Os resultados obtidos estão representados na Figura 4.9, onde estão apresentados o desempenho do sistema aqui proposto para MCW  $2 \times 128$ , um sistema com eficiência espectral de 1 bit/s/Hz e uma constelação 11-PSK especialmente projetada [18], e um sistema espaço-temporal com duas antenas na transmissão de taxa 1 e modulação BPSK, portanto eficiência de 1 bit/s/Hz.

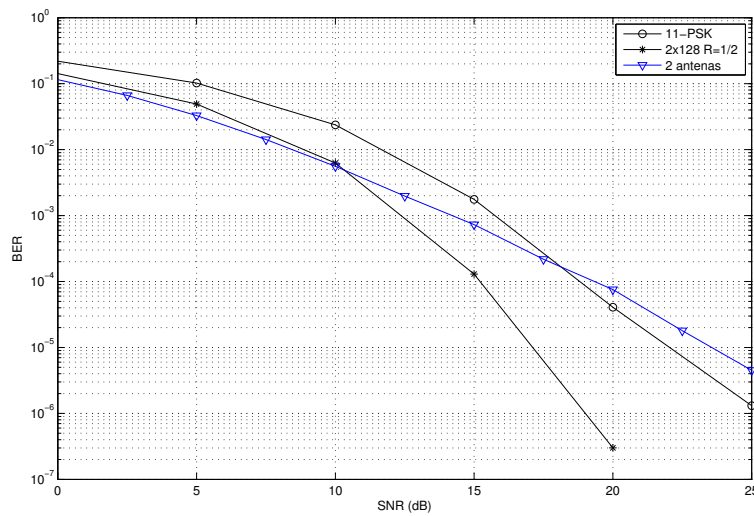


Figura 4.9: Curvas de BER para sistemas wavelet com eficiência espectral 1 bits/s/Hz para MCW 2x128 e R=1/2, um sistema com constelação 11-PSK e um sistema com codificação espaço-temporal de bloco com 2 antenas de transmissão e uma na recepção

Pode-se observar que o sistema de aqui proposto mantém desempenho superior ao com constelação 11-PSK ao longo de todos os valores de SNR, enquanto que em relação ao sistema com codificação espaço-temporal com 2 antenas, ele apresenta um desempenho ligeiramente inferior até 10 dB, deste ponto em diante o mesmo passa a apresentar desempenho superior chegando a um ganho de aproximadamente 4 dB para uma BER de  $10^{-4}$ .

Para finalizar, constata-se que os sistemas propostos neste capítulo apresentaram bom desempenho quando comparados a outros de mesma eficiência espectral.



# Capítulo 5

## Conclusão e trabalhos futuros

### 5.1 Principais Contribuições

Em face da tese apresentada, pode-se ressaltar como principais contribuições desta tese:

- Propôs-se e avaliou-se um novo método de busca de constelações, cuja a otimização é feita aos pares de símbolos inspirado no trabalho de Moore [21], que coloca-se como mais uma alternativa aos métodos existentes.
- Apresentou-se um método para a obtenção de sequências de símbolos wavelet e suas respectivas probabilidades, através do uso da função geradora de momentos, o que possibilitou a proposição de esquemas de codificação wavelet de eficiência maior que 1 bit/s/Hz.
- Pela primeira vez utilizou-se a codificação wavelet com taxa fracionária, especificamente, avaliou-se um sistema com MCW  $2 \times 128$  e taxa  $R=1/2$ , avaliando-se seu desempenho quando transmitisse dois símbolos por vez.
- Publicação de dois artigos em congressos nacionais, um em congresso internacional [16; 8; 7] e submissão para a revista EURASIP Wireless Communications.

## **5.2 Trabalhos futuros**

Como principal perspectiva de trabalho futuro, têm-se o emprego das ferramentas desenvolvidas nesta tese para a construção e avaliação de desempenho de um sistema com codificação wavelet adaptativa.

# Bibliografia

- [1] S. M. Alamouti. A simple transmit diversity technique for wireless communications. *Selected Areas in Communications, IEEE Journal on*, 16(8):1451 –1458, oct 1998.
- [2] S. Unnikrishna Pillai Athanasios Papoulis. *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*. MCGraw-Hill, 2002.
- [3] Thomas M. Cover and Joy A. Thomas. *Elements of Information Theory*. Wiley-Interscience, 2nd edition, July 2006.
- [4] L.G. de Q Silveira, L.F.Q. Silveira, and F.M. de Assis. Performance analysis of space diversity scheme in wavelet-coded systems over fading channels. In *Microwave and Optoelectronics Conference (IMOC), 2009 SBMO/IEEE MTT-S International*, pages 277 –281, nov. 2009.
- [5] Luiz Felipe de Queiroz Silveira. *Wavelet-coded system analysis over time-varying flat fading channels (in Portuguese)*. PhD thesis, DEE-UFCG, 2006.
- [6] Luiz Gonzaga de Queiroz Silveira Junior. *Decodificação Iterativa em Sistemas com Codificação Wavelet*. PhD thesis, Universidade Federal de Campina Grande, 2008.
- [7] F. M. de Assis. E. A. Santos, E. C Gurjão. Aumento da eficiência espectral em sistemas com codificação wavelet. In *XXXI Simpósio Brasileiro de Telecomunicações*, 2013.
- [8] F. M. de Assis. E. A. Santos, E. C Gurjão. Improved optimization algorithm for constellations mappings of wavelet-coded communications systems. In *International Workshop on Telecommunications, Inatel.*, 2013.

- [9] M. Ehtesham. Space-time block codes simulation. <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/10310-space-time-block-codes-simulation>, March 2006. Accessed: 2014-05-24.
- [10] T. R. Ferreira. Modulação quantizada para sistemas com codificação wavelet sujeitos ao desvanecimento rayleigh. Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, UFRN, 2009.
- [11] Frances Kirwan. *Complex Algebraic Curves*. Cambridge University Press, first edition, 1995.
- [12] H. Kuai, F. Alajaji, and G. Takahara. Tight error bounds for nonuniform signaling over awgn channels. *Information Theory, IEEE Transactions on*, 46(7):2712 –2718, nov 2000.
- [13] C. P. de Pinto, E. L. e Albuquerque. A técnica de transmissão ofdm. *Revista Científica Periódica*, Vol. 5(1), 2002.
- [14] John G. Proakis. *Digital Communications, Third Edition*. McGraw-Hill Book Company, New York, 1995.
- [15] R. O. Resnikoff, H. L.; Wells. *Wavelet Analysis, The Scalable Structure of Information*. Springer, 1998.
- [16] E. C.; F. M. de Assis Santos, E. A.; Gurjão. Projeto de constelações de sinais para sistemas com codificação wavelet. In *XXIX Simpósio Brasileiro de Telecomunicações*, 2011.
- [17] L.F.Q. Silveira, F.M. Assis, and E.L. Pinto. A new wavelet coded psk system over time-varying flat fading channels. In *Signal Processing Advances in Wireless Communications, 2004 IEEE 5th Workshop on*, pages 429 – 433, july 2004.
- [18] L.F.Q. Silveira, L.G.Q. Silveira, F.M. de Assis, and E.L. Pinto. Analysis and optimization of wavelet-coded communication systems. *Wireless Communications, IEEE Transactions on*, 8(2):563 –567, feb. 2009.

- [19] L.G.de Q. Silveira, L.F.Q. Silveira, F.M. de Assis, and E.L. Pinto. Soft-decision demodulation of wavelet-coded psk signals over flat rayleigh fading channels. In *Telecommunications Symposium, 2006 International*, pages 758 –763, sept. 2006.
- [20] B. Sklar. Rayleigh fading channels in mobile digital communication systems .i. characterization. *Communications Magazine, IEEE*, 35(7):90–100, Jul 1997.
- [21] Brendan Moore; Glen Takahara and Fady Alajaji. Pairwise optimization of modulation constellations. In *IEEE Pacific Rim Conference on Communications, Computers and Signal Processing*, August 2009.
- [22] V. Tarokh, H. Jafarkhani, and A. Calrdebank. Space-time block coding for wireless communications: performance results. *IEEE J. Selected Areas on Communications*, 17(3):451–460, Mar. 1999.
- [23] M.A. Tzannes and M.C Tzannes. Bit-by-bit channel coding using wavelets. In *Global Telecommunications Conference, 1992. Conference Record., GLOBECOM '92. Communication for Global Users., IEEE*, pages 684 –688 vol.2, 6-9 1992.
- [24] Yannis Viniotis. *Probability and Random Processes for Electrical Engineers*. MCGraw-Hill, 1998.
- [25] Libo Zhong, F. Alajaji, and G. Takahara. Error analysis for nonuniform signaling over rayleigh fading channels. *Communications, IEEE Transactions on*, 53(1):39 – 43, jan. 2005.