UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA E MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

JOEBSON JEFFERSON DA SILVA SOUZA

APLICAÇÃO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS NOS CIRCUITOS ELÉTRICOS.

CUITÉ - PB
2019

APLICAÇÃO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS NOS CIRCUITOS ELÉTRICOS.

Monografia apresentada ao Curso de Graduação em Matemática da Unidade Acadêmica de Física e Matemática do Centro de Educação e Saúde da Universidade Federal de Campina Grande, como requisito parcial à obtenção do grau de licenciado em Matemática.

Orientadora: Glageane da Silva Souza

CUITÉ – PB

2019

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA NA FONTE
Responsabilidade Rosana Amâncio Pereira – CRB 15 – 791

S719a Souza, Joebson Jefferson da Silva.

Aplicação das equações diferenciais ordinárias nos circuitos elétricos. / Joebson Jefferson da Silva Souza – Cuité: CES, 2019.

92 fl.

Monografia (Curso de Licenciatura em Matemática) – Centro de Educação e Saúde / UFCG, 2019.

Orientação: Dra. Glageane da Silva Souza

1. Transformada de Laplace. 2. Frações parciais. 3. Circuitos elétricos. I. Título.

Biblioteca do CES – UFCG CDU 517.9

APLICAÇÃO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS NOS CIRCUITOS ELÉTRICOS.

Monografia apresentada ao Curso de Graduação em Matemática da Unidade Acadêmica de Física e Matemática do Centro de Educação e Saúde da Universidade Federal de Campina Grande, como requisito parcial à obtenção do grau de licenciado em Matemática.

Aprovada em:____/___/______

BANCA EXAMINADORA

Profª. Drª. Glageane da Silva Souza
UFCG/CES
Orientadora.

Profª. Drª. Célia Maria Rufino Franco
UFCG/CES
Examinadora

Profª. Ms. Edna Cordeiro de Souza
UFCG/CES
Examinadora

CUITÉ – PB

2019

Dedico essa monografia a Deus, autor da minha vida, companheiro de todos os momentos. Ele me deu força, paciência e perseverança para nunca desistir. Dedico, também, a minha mãe e a minha avó (mãe), por elas estarem sempre ao meu lado, me dando todo suporte necessário para que eu pudesse continuar estudando; para que fosse possível chegar à conclusão do curso.

“Se consegui enxergar longe é porque procurei olhar acima dos ombros dos gigantes" (Isaac Newton)

AGRADECIMENTOS

Inicialmente, quero agradecer a Deus, por ter me dado bastante paciência e perseverança para que fosse possível chegar à conclusão do curso de licenciatura em matemática. Quero agradecer, a minha mãe e a minha avó (mãe), por terem me ajudado ao longo dessa jornada. Quero agradecer, Aos professores, em especial, a Edna Cordeiro de Souza, Glageane da Silva Souza, Luciano Martins Barros, Maria de Jesus R da Silva, Marciel Medeiros de oliveira e Aluízio Freire da Silva Junior, por cumprirem sua profissão com responsabilidade e compromisso. Quero agradecer, também, a todos que contribuíram diretamente ou indiretamente na realização desse projeto de vida. Obrigado a todos!

RESUMO

Esta monografia apresenta, inicialmente, um breve histórico sobre o surgimento das equações diferenciais ordinárias (EDO), algumas contribuições que alguns estudiosos deram ao longo do tempo, para o surgimento e aprimoramento das equações diferenciais que conhecemos atualmente. Tem como objetivo, estudar as equações diferenciais sob o ponto de vista das aplicações. Em seguida, apresenta as equações diferenciais quanto a seu tipo, ordem e linearidade. Posteriormente, exibe um pouco sobre a transformada de Laplace e sua praticidade na resolução de equações diferenciais ordinárias, em particular, das equações diferenciais ordinárias lineares com coeficientes constantes e dos problemas de valor inicial, que são frequentes nas áreas de engenharia e física. Logo, depois, explana a aplicação das equações diferenciais ordinárias nos circuitos elétricos.

Palavras-chave: Transformada de Laplace. Frações parciais. Circuitos elétricos.

ABSTRACT

This monograph presents, initially, a brief history about the emergence of ordinary differential equations (ODE), some contributions that some scholars gave over time, for the emergence and improvement of the differential equations that we know today. It aims to study the differential equations from the point of view of applications. Then, it presents the differential equations as to their type, order and linearity. Later, it shows a little about the Laplace transform and its practicality in solving ordinary differential equations, in particular, linear ordinary differential equations with constant coefficients and initial value problems, which are frequent in the engineering and physical areas. Then, explain the application of the ordinary differential equations in the electric circuits.

Keywords: Laplace Transform. Partial fractions. Electric Circuits.

LISTA DE FIGURAS

Figura 27: Gráfico da queda de tensão no capacitor

Figura 28: Gráfico da queda de tensão no resistor

LISTA DE SIGLAS

EDO – Equação Diferencial Ordinária.

EDP – Equação Diferencial Parcial.

PVI – Problema de Valor Inicial.

RC- Resistor e Capacitor.

RL- Resistor e indutor.

RLC- Resistor, Indutor e Capacitor.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho de conclusão de curso foi desenvolvido por meio de uma pesquisa em materiais bibliográficos tais como livros e arquivos digitais. Procurou-se desenvolver um estudo sobre as equações diferenciais ordinárias, aplicada nos circuitos elétricos.

Sendo assim, esse estudo teve como finalidade, descrever alguns circuitos elétricos, em especial, circuitos RC, RL, LC e RLC, com o intuito de observar e analisar a queda de tensão em cada componente do circuito, a fim de relacionar as quedas de tensões com a segunda lei de Kirchhoff, com o objetivo de encontrar equações diferenciais ordinárias e a partir de sua resolução, chegar à solução desejada.

As equações diferenciais estão presentes em diversas áreas, seja na física, na química, biologia, economia, matemática, nas engenharias, etc.

As equações diferenciais são expressões matemáticas utilizadas para modelar situações do cotidiano com o objetivo de compreender, prevenir e prever os fenômenos que nos cercam e que nos surpreendem, deixando-nos curiosos e preocupados, às vezes, com algum acontecimento que venha ser prejudicial para a população, sendo necessário decidir se devemos interferir ou não em seu processo de desenvolvimento.

A modelagem ou a dedução de problemas encontrados em algumas áreas é expressa a partir de equações diferenciais ordinárias ou através de equações diferenciais parciais. A aplicação do conhecimento matemático é muito importante na hora de solucionar alguma situação que venha ocorrer no cotidiano.

No capítulo 2, apresentamos um breve histórico sobre o surgimento das equações diferenciais ordinárias de primeira e segunda ordem e sobre alguns estudiosos que contribuíram de forma significativa no desenvolvimento das equações diferencias que conhecemos atualmente.

No capítulo 3, apresentamos as definições, a classificação das equações diferenciais, quanto ao seu tipo, quanto a sua ordem e quanto a sua linearidade, solução geral e solução particular, sempre utilizando exemplos para facilitar a compreensão dos leitores.

No capítulo 4, abordamos sobre a transformada de Laplace, suas definições, teoremas, vantagens em relação a outros métodos e sobre sua utilidade como ferramenta, na resolução da EDO. Esse método é muito prático, uma vez que fornece a solução do problema desejado diretamente, sem precisar encontrar a solução geral. Esse método é utilizado na resolução de equações diferenciais ordinárias de primeira e segunda ordem, em particular, das equações diferenciais ordinárias lineares com coeficientes constantes e dos problemas de valor inicial.

Os conceitos são apresentados com exemplos e algumas soluções para que o leitor possa compreender da forma mais simples possível. A resolução de alguns exemplos é fundamental para que o leitor possa compreender como funciona o método da transformada de Laplace.

No capítulo 5, apresentamos a transformada inversa de Laplace, suas definições, teoremas e frações parciais. Em seguida, apresentamos alguns exemplos e resoluções.

No capítulo 6, abordamos sobre a primeira lei de Ohm e sobre segunda lei de Kirchhoff, sobre os circuitos elétricos em série e seus componentes. Abordamos, também, sobre a combinação desses dispositivos, podendo ser formado alguns circuitos como circuito RC, circuito RL, circuito LC e circuitos RLC.

No capitulo 7, definimos alguns conceitos, deduzimos algumas equações diferenciais ordinárias de primeira e segunda ordem a partir dos circuitos simples, em serie, nos quais estarão classificados como circuitos RL, circuitos RC, circuitos RLC e aplicamos essas deduções na resolução desses circuitos elétricos.

Com isso, podemos analisar o comportamento das funções da carga e da corrente graficamente e obter alguma informação que seja relevante. Por fim, abordarmos a resolução de alguns problemas de valores iniciais.

Objetivo Geral

Estudar as equações diferenciais ordinárias sob o ponto de vista das aplicações, com particular referência aos circuitos elétricos, descrevendo uma pesquisa sobre os circuitos elétricos, seus componentes, suas funções e deduzir algumas equações diferenciais ordinárias a partir dos circuitos elétricos com a ideia de analisar o comportamento da função em cada circuito.

Objetivos específicos

- Utilizar a transformada de Laplace como ferramenta na resolução da EDO;
- Descrever a representação de um circuito elétrico;
- Apresentação dos componentes básicos de um circuito;
- Explanar a combinação entre esses componentes;
- Relacionar as quedas de tensões nos componentes com a segunda lei de Kirchhoff;
- Deduzir as equações diferenciais ordinárias;
- Aplicar as deduções na resolução de um circuito específico;
- Analisar o comportamento da função em cada circuito;

2 HISTÓRICO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINARIAS.

Segundo BOYCE (2006, p 15-16) o surgimento das equações diferenciais ordinárias deu início com o desenvolvimento do cálculo, durante o século XVII, através de Leibniz (1646-1716) e através de Isaac Newton (1646-1727), na tentativa de desenvolver uma linguagem e uma notação adequada. O desenvolvimento do cálculo proporcionou aos seus estudiosos, adquirir, ao longo dos anos, conhecimentos que foram de extrema importância na criação e elaboração de notação para a derivada, dando surgimento para as equações diferenciais.

De acordo com BOYCE E DIPRIMA (2015, p 53-54-55) alguns matemáticos deram suas contribuições para a evolução das equações diferencias ordinárias. Isaac Newton nasceu no dia de natal de 1642, forneceu a base para a aplicação das equações diferenciais, através do desenvolvimento do cálculo. Realizou pesquisas no campo da óptica, e dedicou-se ao estudo da álgebra e a teoria das equações, durante anos.

Leibniz nasceu em 1646, muito jovem já dominava bastante o conhecimento de matemática, basicamente, chegou aos resultados dos cálculos independentemente, desenvolvendo o teorema fundamental do cálculo, deduzindo a regra de diferenciação.

Os irmãos Jakob Bernoulli (1654-1705) e Johan Bernoulli (1667-1748), contribuíram com o desenvolvimento de métodos para a resolução de equações diferenciais, o estudo da catenária, coordenadas polares, a equação de Bernoulli e expansão no campo de suas aplicações, enriqueceram amplamente o cálculo.

Leonhard Euler, (1707-1783), foi o matemático mais produtivo de sua época, chegando ultrapassar mais de 886 trabalhos durantes toda sua vida, seus trabalhos, incluíam-se em todos os ramos da matemática e da aplicação. Euler utilizou a ideia de fator integrante na resolução de equações diferenciais, conceituou a diferença entre as equações diferenciais homogêneas e não homogênea.

Joseph-Louis Lagrange aplicou o calculo diferencial à teoria da probabilidade, contribuindo com as relações diferenciais elementares, mostrando que a solução geral de uma equação linear homogênea de ordem n, é uma combinação linear de n soluções independentes.

Pierre – Simon de Laplace, (1749-1827), teve destaque no campo da mecânica celeste. Seu método, a transformada de Laplace, permite solucionar uma equação diferencial ordinária de coeficientes constantes por meio da resolução de uma equação algébrica.

3 REFERÊNCIAL TEÓRICO.

As equações diferenciais são modelos matemáticos importantes e fundamentais para representar situações reais. A matemática procura expor situações do nosso cotidiano por meio de simbologia matemática. Utiliza-se o termo aplicação matemática, ao fato de procurar representar as atividades por meio de conceitos, para compreensão de atividades do mundo em que vivemos.

Segundo (BOYCE E DIPRIMA, 2015), muitos dos princípios, ou leis, que regem o comportamento do mundo físico são proposições, ou relações, envolvendo a taxa segundo a qual as coisas acontecem. Expressas em linguagem matemática, as relações são equações e as taxas são derivadas. Sendo assim, equações contendo derivadas são equações diferenciais.

De acordo com (BASSANEZI, 2015) é por essa multiplicidade de aplicações que o estudo de equações diferenciais se faz tão importante. Ela representa a dualidade do rigor matemático, com todas as suas definições, conceitos e a sua prática, com o estabelecimento de modelos que tendem a se aproximar do real. Assim, além de fazerem parte de alguns cursos de ciências exatas, elas servem como ferramenta de estudo em outras áreas buscando análise das suas próprias experiências.

As equações diferenciais estão presentes em diversas áreas, seja na física, na química, biologia, economia, matemática e nas engenharias etc. As equações diferenciais são expressões matemáticas que são utilizadas para modelar situações do cotidiano com o objetivo de compreender, prevenir e prever os fenômenos que nos cercam e que nos surpreendem deixando-nos curiosos e preocupados, às vezes, com algum acontecimento que venha ser prejudicial para a população, sendo necessário, decidir, às vezes, a interferir ou não em seu processo de desenvolvimento.

Segundo (BOYCE E DIPRIMA, 2015), uma equação diferencial que descreve algum processo físico é chamada, muitas vezes, de modelo matemático do processo. As equações surgiram na ânsia de se descrever fenômenos naturais, é comum pensarmos em sua aplicação direta na física.

De acordo com (BASSANEZI, 2006), as equações diferenciais são objetos de intensas atividades que envolvem tanto pesquisa científica quanto tecnológica justamente por apresentarem além de uma matemática rigorosa, uma diversidade quanto as suas aplicações.

Ainda de acordo com (BASSANEZI, 2006), utiliza-se o termo aplicação matemática, ao fato de tentar representar as atividades por meio de conceitos, para compreensão de atividades do mundo em que vivemos. Desta forma, a Matemática aplicada moderna pode ser considerada a arte de aplicar a matemática à situações problemas, utilizando como recurso a modelagem matemática.

A modelagem ou a dedução de problemas encontrados em algumas áreas é expressa a partir de equações diferenciais ordinárias ou através de equações diferenciais parciais. A aplicação do conhecimento da matemática é muito importante na hora de solucionar alguma situação que venha ocorrer no cotidiano.

De acordo com (BOYCE E DIPRIMA, 2015) Para aplicar as equações diferenciais nos diversos campos em que são úteis, é preciso primeiro formular a equação diferencial apropriada que descreve, ou modelar, o problema em questão.

> A modelagem matemática consiste na arte de transformar problemas da realidade e resolvê-los, interpretando suas soluções na linguagem do mundo real. (BASSANEZI, 2002, p. 16).

A finalidade de modelar uma situação real é conseguir a taxa de variação com o tempo das grandezas que descrevem o problema. Determinando uma equação diferencial que possa definir o processo em questão, utilizando a equação diferencial na tentativa de conseguir informações necessárias com o intuito de prever o seu comportamento.

Segundo (D'AMBROSIO, 1986) a modelagem é um processo muito rico de encarar situações e culmina com a solução efetiva do problema real e não com a simples resolução formal de um problema artificial.

> A modelagem matemática é uma arte, de formular, resolver e elaborar expressões que valham não apenas para uma solução particular, mas também sirvam, posteriormente, como suporte para outras aplicações e teorias (BIEMBENGUT,HEIN, 2007, p. 13).

Desta forma, os estudos das equações diferenciais são de grande valor para a compreensão de problemas reais do cotidiano, exibindo aplicações em diversas áreas do conhecimento, em particular, nas áreas das exatas.

3.1 Equação diferencial.

As equações diferenciais são equações cuja incógnita é uma função que aparece nas equações sob a forma de derivada. As equações podem ser classificadas quanto ao tipo, quanto à ordem e quanto a sua linearidade.

3.2 Classificação quanto ao tipo.

As equações diferenciais dividem-se em dois tipos: em equações diferenciais ordinárias e em equações diferenciais parciais. Uma equação diferencial ordinária (EDO), contem apenas funções de uma variável e derivada da mesma variável. Uma equação diferencial parcial (EDP), contem funções com mais de uma variável e suas derivadas parciais.

DEFINIÇÃO: Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) são equações que contem somente derivada ordinária de uma ou mais variáveis dependente, em relação a uma única variável independente.

Exemplo:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

onde t, é a variável independente e x é a variável dependente.

DEFINIÇÃO: Equações Diferenciais Parciais (EDP) são equações que envolvem as derivadas parciais de uma ou mais variáveis dependentes e duas ou mais variáveis independentes.

Exemplo:

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = x - y$$

onde, $x\ e\ y$ são as variáveis independentes e u a dependente.

3.3 Classificação quanto à ordem.

Uma equação diferencial pode ser de primeira, segunda e n ordem, dependendo da derivada de maior ordem que apareça na equação. Denotamos como segue:

$$1^{\underline{o}}, 2^{\underline{o}}, \ldots, n - ésima\ ordem$$

Exemplos:

$y' - 10y = 0$ (equação diferencial de primeira ordem)

$y'' - y' + 10y = 0$ (equação diferencial de segunda ordem)

De modo geral, uma equação diferencial ordinária de ordem n com x independente e y dependente, pode ser escrita na forma, como segue:

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0$$

3.4 Classificação quanto à linearidade.

As equações diferenciais classificam-se em linear e não linear.

DEFINIÇÃO: As incógnitas e suas derivadas aparecem em uma soma em que cada parcela é um produto de alguma derivada das incógnitas com uma função que não depende das incógnitas.

Exemplo:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

onde t é uma variável independente e x é a variável dependente.

Uma equação diferencial ordinária linear de ordem n pode ser escrita na forma como

segue:

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = f(x) \qquad \text{(I)}$$

Propriedades:

- A variável dependente y e todas suas derivadas são de 1° grau
- Cada coeficiente depende apenas de uma variável independente x

DEFINIÇÃO**:** são as equações diferenciais que não podem ser colocadas na forma (I)

Exemplo:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y^3 = 0$$

é uma EDO não linear, devido o termo y^3.

3.5 Solução de uma Equação Diferencial Ordinária.

DEFINIÇÃO: A solução geral de uma equação diferencial ordinária de ordem n, em um intervalo I, é uma família de soluções $y(t)$, no intervalo I, dependendo de n constantes arbitrarias, tais que, qualquer solução particular, pode ser obtida da solução geral, atribuindo valores as constantes.

DEFINIÇÃO: Uma solução particular de uma equação diferencial ordinária de ordem n, em um intervalo I, é uma função $y(t)$, definida no intervalo I, tal que, suas derivadas de ordem até n são definidas no intervalo I e satisfaz a equação nesse intervalo.

Exemplo: Encontrando a solução geral da equação diferencial ordinária.

$$\frac{dy}{dt} = e^{3t}. \qquad (a)$$

Resolução:

Integrando (a), em ambos os lados e usando a regra da cadeia.

Temos:

$$\int \frac{dy}{dt} = \int e^{3t}.$$

Isto implica,

$$y = \frac{1}{3}\, e^{3t} + c. \text{ (solução geral)}$$

Para obter uma solução particular, basta, atribuir valores a constante c.

Exemplos:

$$y = \frac{1}{3} e^{3t} + 10. \quad \text{(solução particular)}$$

$$y = \frac{1}{3} e^{3t} + 50. \quad \text{(solução particular)}$$

4 TRANSFORMADA DE LAPLACE

O método da transformada de Laplace é uma importante ferramenta para a resolução de equações diferenciais, em particular, das equações diferenciais ordinárias, lineares com coeficientes constantes e dos problemas de valores iniciais, que são bastante frequentes na área de engenharia. O procedimento inicial para a obtenção da solução de um problema consiste, praticamente, em três etapas.

$\boldsymbol{1^{\underline{o}}\ etapa}$: A equação diferencial ordinária é transformada em uma equação algébrica.

$\boldsymbol{2^{\underline{o}}\ etapa}$: A equação é resolvida por manipulação algébrica.

$\boldsymbol{3^{\underline{o}}\ etapa}$: A solução da equação diferencial ordinária é transformada de volta, resultando na resolução do problema dado ou modelado.

O método da Transformada de Laplace tem algumas vantagens, em relação a outros métodos.

- Os problemas são resolvidos mais diretamente, sem precisar determinar uma solução geral.
- É possível resolver uma EDO não homogênea sem ter que resolver, antes, sua EDO homogênea correspondente.
- Em suas aplicações costuma-se interpreta-las como transformações de domínio tempo, denotado pela variável t, para o domínio de frequência, denotado pela variável s.

DEFINIÇÃO: Seja $f(t)$ uma função em $[0, \infty)$. A transformada de Laplace é a função F(s), definida pela integral.

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\mathrm{st}} f(t)\mathrm{dt} \quad (1)$$

Será uma transformada de Laplace de f, desde que a integral convirja.

O resultado será uma função de s. O domínio de $F(s)$ são todos os valores de s para os quais a integral em (1) existe. A transformada de Laplace de f é indicada por F e $\mathcal{L}\{F\}$. A integral (1) é uma integral imprópria.

Assim,

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \to \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-st} f(t)dt$$

Denomina-se integral impropria de f no intervalo $[a, \ \infty)$, se o limite existir e for finito, neste caso, a integral converge, caso contrario, se o limite não existir, a integral será divergente.

Exemplo: Analisando se a integral imprópria é convergente ou divergente.

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^3}$$

Resolução:

A partir da definição.

Segue,

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^3} = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^3} = \lim_{b\to\infty} \int_1^b x^{-3}\,dx$$

Aplicando os limites superiores e inferiores.

Obtemos:

$$\lim_{b\to\infty} \frac{x^2}{-2} \Big|_1^b$$

$$\frac{-1}{2} \lim_{b\to\infty} [x^{-2} - x^{-2}] \Big|_1^b$$

$$\frac{-1}{2} \lim_{b\to\infty} [\frac{1}{b^2} - \frac{1}{1^2}]$$

$$\frac{-1}{2} \lim_{b\to\infty} [-1]$$

$$\frac{-1}{2}(-1) = \frac{1}{2}$$

Logo, converge.

Exemplo:

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty} \ln|x| \Big|_1^b$$

Aplicando os limites superiores e inferiores,

Obtemos:

$$\lim_{b\to\infty} [\ln|x| - \ln|x|] \Big|_1^b$$

$$\lim_{b\to\infty} [\ln|b| - \ln|1|]$$

$$\lim_{b\to\infty} [\ln|b| - 0] = \infty$$

Logo, é divergente.

Agora, iremos calcular algumas transformadas de Laplace com o objetivo de utilizar os resultados, a partir de uma tabela.

Exemplo: Determinando a transformada de Laplace da função constante $f(t) = 1$, para $t \geq 0$.

Resolução:

Usando a definição da transformada de Laplace, temos:

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-st}\, 1dt = \lim_{t\to\infty} \frac{-e^{-st}}{s} \Big|_0^b$$

Aplicando os limites superiores e inferiores.

Temos:

$$\lim_{b\to\infty} \frac{-e^{-sb}}{s} \Big|_0^b = \lim_{b\to\infty} \left(\frac{-e^{-sb}}{s} + \frac{e^{-s0}}{s}\right)$$

Como $e^{-sb} \to 0$, para $s > 0$ quando b$\to \infty$.

Obtemos,

$$\lim_{b\to\infty} \left(\frac{-e^{-sb}}{s} + \frac{1}{s}\right) = \frac{1}{s}$$

Quando $s \leq 0$ a integral (I), diverge.

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)\mathrm{dt} \qquad \text{(I)}$$

Exemplo: Determinando a transformada de Laplace da função $f(t) = e^{\alpha t}$ sendo α uma constante.

Resolução:

Usando a definição da transformada.

Temos:

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \int_0^\infty e^{-st}\, e^{\alpha t} dt = \int_0^\infty e^{-(s-\alpha)t}\, dt$$

$$\lim_{b\to\infty} \left(\int_0^b e^{-(s-\alpha)b} dt\right) = \lim_{b\to\infty} \frac{e^{-(s-\alpha)b}}{s-\alpha} \Big|_0^b$$

Aplicando os limites superiores e inferiores.

Temos:

$$\lim_{b\to\infty} \left(\frac{-e^{-(s-\alpha)b}}{s-a} - \left(\frac{-e^{-(s-\alpha).0}}{s-\alpha}\right)\right) = \lim_{b\to\infty} \frac{-e^{-(s-\alpha)b}}{s-\alpha} + \frac{1}{s-\alpha}$$

Se $s \leq \alpha$, a integral diverge, portanto, o domínio de F(s) é todo $s > \alpha$.

Segue,

$$\lim_{t\to\infty} \left(0 + \frac{1}{s-\alpha}\right) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{s-\alpha} = \frac{1}{s-\alpha}$$

Exemplo: Determinando a transformada de Laplace da função $f(t) = t$, para t ≥ 0.

Resolução:

Usando a definição de transforma.

Temos:

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \int_0^\infty e^{-st} t dt = \lim_{t\to\infty} \left(\int_0^t e^{-st} t dt\right)$$

Calculando a integral, por partes.

Temos:

$$u = t;\ du = dt;\ dv = e^{-st} dt \ e \ v = \frac{-e^{-st}}{s}.$$

Segue:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Substituindo os valores correspondentes.

Temos:

$$\int e^{-st} t dt = t\,(\frac{-e^{-st}}{s}) - \int \frac{-e^{-st}}{s} dt$$

$$= (\frac{-te^{-st}}{s}) + \frac{1}{s} \int e^{-st}\, dt$$

Logo,

$$\int_0^b e^{-st} t dt = \lim_{b\to\infty} \left(\frac{-te^{-st}}{s} - \frac{e^{-st}}{s^2} dt\right) \Big|_0^b$$

Aplicando os limites superiores e inferiores.

Temos:

$$\lim_{b\to\infty} (\frac{-be^{-sb}}{s} - \frac{1}{s^2} . e^{-sb} - (\frac{-0e^{-s0}}{s} - \frac{1}{s^2} . e^{-s0}))$$

Para $s > 0$, a integral converge e $e^{-sb} \to 0$ quando $b \to \infty$.

Assim,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{s^2} = \frac{1}{s^2}, \qquad para\ s > 0$$

Exemplo: Determinando a transformada de Laplace da função f: $[0\,,\infty) \to R$ dada por $f(t) = t^n$ para $n = 0,1,2,3$ ...

Resolução:

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = \int_0^\infty e^{-st} t^n dt = \lim_{t\to\infty} (\int_0^\infty e^{-st} t^n dt) \qquad (i)$$

Integrando (i), por partes.

Temos:

$$u = t^n;\ du = nt^{n-1} dt;\ dv = e^{-st} dt\ ;\ v = \frac{-e^{-st}}{s}$$

Assim,

$$\int udv = uv - \int vdu \qquad (ii)$$

De (i),

$$\int e^{-st}t^n = \lim_{t\to\infty}(t^n\,(\frac{-e^{-st}}{s}) - \int (\frac{-e^{-st}}{s})\, nt^{n-1}dt)$$

Considerando $t^n\,(\frac{-e^{-st}}{s})$ e $(-\int \frac{-e^{-st}}{s}(nt^{n-1})dt\,)$ como (I) e (II), respectivamente. Em seguida, Aplicando os limites superiores e inferiores, em (I) e (II), separadamente.

De (I),

Segue,

$$\lim_{t\to\infty}\frac{e^{-st}t^n}{s}\,\Big|\,\begin{matrix} b \\ 0\end{matrix} = (\frac{-b^n e^{-sb}}{s} - (-\frac{0^n e^{-s0}}{s})) = 0$$

Pois, e^{-sb} cresce mais rápido que b^n, para $s > 0$.

Analisando (II).

Temos:

$$\frac{n}{s}\int e^{-st}t^{n-1}\,dt$$

A partir da definição da transformada de Laplace, podemos notar que:

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n}{s}\mathcal{L}\{t^{n-1}\}$$

pois, $\int e^{-st}t^{n-1}dt = \mathcal{L}\{t^{n-1}\}$ para $n =$ 1, 2, 3 ...

Fazendo a analise da transformada de $f(t) = t$ e depois comparando com $f(t) = t^n$.

Temos:

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n}{s}\mathcal{L}\{t^{n-1}\}\ (*)$$

Para n= 1, 2, 3.... Em (*).

Temos:

$$\mathcal{L}\{t^1\} = \frac{1}{s}\,\mathcal{L}\{t^0\} = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}\frac{.\,1}{s} = \frac{1}{s^2}$$

$$\mathcal{L}\{t^2\} = \frac{2}{s}\mathcal{L}\{t^1\} = \frac{2}{s}\frac{.\,1}{s^2} = \frac{2.1}{s^3}$$

$$\mathcal{L}\{t^3\} = \frac{3}{s}\mathcal{L}\{t^2\} = \frac{3}{s}\frac{.\,2}{s^3} = \frac{3.2.1}{s^4}$$

$$\mathcal{L}\{t^4\} = \frac{4}{s}\mathcal{L}\{t^3\} = \frac{4}{s}\frac{3.2}{s^4} = \frac{4.3.2.1}{s^5}$$

$$\mathcal{L}\{t^5\} = \frac{5}{s}\mathcal{L}\{t^4\} = \frac{5}{s}\frac{4.3.2.1}{s^5} = \frac{5.4.3.2.1}{s^6}$$

Logo, podemos concluir que:

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

Exemplo: Determinando a transformada de Laplace de $f(t) = sen(at)$, onde a é uma constante diferente de zero.

Resolução:

A partir da definição da transformada de Laplace.

Temos:

$$F(s) = \mathcal{L}\{sen(at)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \int_0^\infty e^{-st}\, sen(at)dt$$

$$\lim_{b\to\infty} (\int_0^b e^{-st}\, sen(at)dt) \qquad (*)$$

Integrando por partes (*)

Segue,

$$u = sen(at);\ du = \cos(at)\,.\,adt;\ dv = e^{-st}dt\ e\ v = \frac{-e^{-st}}{s}$$

Assim,

$$\int udv = u.\,v - \int vdu$$

Substituindo seus respectivos valores

Obtemos:

$$\int e^{-st}sen(at) = sen(at)\left(\frac{-e^{-st}}{s}\right) - \int \frac{-e^{-st}}{s}\cos(at)\ adt$$

$$= \frac{-sen(at)e^{-st}}{s} + \frac{a}{s}\int e^{-st}\cos(at)dt \quad (1)$$

Considerando ($\frac{-sen(at)e^{-st}}{s}$) e ($\frac{a}{s}\int e^{-st}\cos(at)\,dt$) como (I) e (II) respetivamente. Em seguida, Integrando, novamente (II), por partes.

Temos:

$$u = \cos(at)\ ; \quad du = -asen(at)dt; \quad dv = e^{-st}dt \ e \ v = \frac{-e^{-st}}{s}.$$

Segue,

$$\int udv = u.v - \int vdu$$

$$\frac{a}{s}\int e^{-st}\cos(at)\,dt = \frac{a}{s}\left(\cos(at)\left(\frac{-e^{-st}}{s}\right) - \int \frac{-e^{-st}}{s}(-asen(at))dt\right)$$

$$= \frac{-a}{s^2}\cos(at)\,e^{-st} - \frac{a^2}{s^2}\int e^{-st}sen(at)dt \qquad (III)$$

Somando (I) e (III) em (1).

Obtemos:

$$\frac{-sen(at)e^{-st}}{s} + \left(\frac{-a}{s^2}\cos(at)\,e^{-st}\right) - \frac{a^2}{s^2}\int e^{-st}sen(at)dt$$

Segue, que:

$$\int e^{-st}sen(at)dt = \frac{-sen(at)e^{-st}}{s} + \left(\frac{-a}{s^2}\cos(at)\,e^{-st}\right) - \frac{a^2}{s^2}\int e^{-st}sen(at)dt$$

Deixando os termos em comum do mesmo lado.

Temos:

$$\int e^{-st}sen(at)dt + \frac{a^2}{s^2}\int e^{-st}sen(at)dt = \frac{-sen(at)e^{-st}}{s} + \left(\frac{-a}{s^2}\cos(at)e^{-st}\right)$$

Colocando a integral comum, em evidência.

$$\int e^{-st}sen(at)dt\left(1 + \frac{a^2}{s^2}\right) = \frac{-sen(at)e^{-st}}{s} + \left(\frac{-\,a\cos(at)\,e^{-st}}{s^2}\right)$$

$$\int e^{-st}sen(at)dt = \frac{\frac{-sen(at)e^{-st}}{s} + \left(\frac{-\,a\cos(at)\,e^{-st}}{s^2}\right)}{\left(1 + \frac{a^2}{s^2}\right)}$$

$$\int e^{-st} sen(at)dt\, dt = \frac{\frac{-sen(at)e^{-st}}{s}}{\frac{s^2+a^2}{s^2}} + \frac{(\frac{-\operatorname{acos}(at)\, e^{-st}}{s^2})}{\frac{s^2+a^2}{s^2}}$$

A partir da divisão de frações.

Temos:

$$\int e^{-st} sen(at)dt = \frac{-sen(at)e^{-st}}{s} . (\frac{s^2}{s^2+a^2}) + (\frac{-\operatorname{acos}(at)e^{-st}}{s^2}) . (\frac{s^2}{s^2+a^2})$$

$$\int e^{-st} sen(at)dt\, dt = \frac{-sen(at)e^{-st}. s}{s^2+a^2} - \frac{a\cos(at)\, e^{-st}}{s^2+a^2}$$

$$\lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-st}\, sen(at)dt = \lim_{b\to\infty} (\frac{1}{s^2+a^2}(-sen(at)e^{-st}s - a\cos(at)\, e^{-st})) \Big|_0^b \; (iii)$$

Aplicando o limite superior e inferior em (iii).

Segue,

$$\lim_{b\to\infty} (\frac{1}{s^2+a^2}((-sen(ab)e^{-sb}. s - a\cos(ab)\, e^{-sb}) - (-sen(a0)e^{-s0}. s - a\cos(a0))\, e^{-s0}))$$

Dai,

$e^{-sb} \to 0$ para $s > 0$ quando b$\to \infty$. Como e^{-sb} cresce mais rápido que $sen(ab)$.

Considerando $(-sen(ab)e^{-sb}s - a\cos(ab)\, e^{-sb})$ e $(-sen(a0)e^{-s0}. s - a\cos(a0))\, e^{-s0})$ como (iv) e (v), respectivamente.

Segue, de (iv).

$$\lim_{b\to\infty} \frac{1}{s^2+a^2} (-sen(ab)e^{-sb}. s - a\cos(ab)\, e^{-sb}) = 0$$

Segue, de (v).

$$\lim_{b\to\infty} \frac{1}{s^2+a^2}(-sen(a0)e^{-s0}s - a\cos(a0)\, e^{-s0})$$

Logo, o limite em (vi), será:

$$0 - \frac{1}{s^2+a^2}. (-a) = \frac{a}{s^2+a^2}$$

Exemplo: Determinando a transformada de Laplace de $f(t) = cos(at)$, com $a \neq 0$. A partir definição da transforma de Laplace.

Temos:

$$f(s) = \mathcal{L}\{cos(at)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \int_0^\infty e^{-st} cos(at)dt$$

$$\lim_{b\to\infty} (\int_0^b e^{-st} cos(at)dt) \ (vii\ )$$

Integrando (vii) por partes.

Segue,

$$u = e^{-st};\ du = -se^{-st}dt;\ dv = \cos(at)dt\ e\ v = \frac{sen(at)}{a}$$

Assim,

$$\int udv = u.v - \int vdu\ (viii)$$

Substituindo seus respectivos valores em $(viii)$.

Temos:

$$\int e^{-st} \cos(at)\ dt = (e^{-st}) \frac{sen(at)}{a} - \int \frac{sen(at)}{a} (-se^{-st})dt$$

$$= \frac{e^{-st}sen(at)}{a} + \frac{s}{a} \int \operatorname{sen}(at)e^{-st}dt. \quad (1)$$

Considerando, $(\frac{e^{-st}sen(at)}{a})$ e $(\frac{s}{a}\int \operatorname{sen}(at)\ e^{-st}dt\ )$ como (I) e (II), respectivamente. Em seguida, Integrando novamente (II), por partes.

Temos:

$$u = e^{-st};\quad du\ = -se^{-st}dt;\qquad dv = sen(at)dt\ e\ v = \frac{-\cos(at)}{a}$$

Segue,

$$\int udv = u.v - \int vdu$$

$$\int sen(at)e^{-st}dt = (e^{-st})\ \frac{-\cos(at)}{a} - \int \frac{-\cos(at)}{a}\ (-se^{-st})dt$$

$$= (\frac{-e^{-st}\cos(at)}{a}) - \frac{s}{a}\int \cos(at)e^{-st}dt \qquad (II')$$

Substituindo (I) e (II') em (1).

Obtemos:

$$\frac{e^{-st}sen(at)}{a} + \frac{s}{a}(\frac{-e^{-st}\cos(at)}{a} - \frac{s}{a}\int \cos(at)e^{-st}dt)$$

Segue, que

$$\int e^{-st}cos(at)dt = \frac{e^{-st}sen(at)}{a} + \frac{s}{a}(\frac{-e^{-st}\cos(at)}{a} - \frac{s}{a}\int \cos(at)e^{-st}dt)$$

$$\int e^{-st}cos(at)dt = \frac{e^{-st}sen(at)}{a} - \frac{se^{-st}\cos(at)}{a^2} - \frac{s^2}{a^2}\int e^{-st}\cos(at)dt)$$

Deixando os termos em comum, do mesmo lado.

Temos:

$$\int e^{-st}cos(at)dt + \frac{s^2}{a^2}\int e^{-st}\cos(at)dt) = \frac{e^{-st}sen(at)}{a} - \frac{se^{-st}\cos(at)}{a^2}$$

Colocando a integral comum, em evidência.

$$\int e^{-st}cos(at)dt.(1 + \frac{s^2}{a^2}) = \frac{e^{-st}sen(at)}{a} - \frac{se^{-st}\cos(at)}{a^2}$$

$$\int e^{-st}cos(at)dt = \frac{\frac{e^{-st}sen(at)}{a} - \frac{se^{-st}\cos(at)}{a^2}}{(1 + \frac{s^2}{a^2})}$$

$$\int e^{-st}cos(at)dt = \frac{\frac{e^{-st}sen(at)}{a}}{\frac{a^2+s^2}{a^2}} - \frac{\frac{se^{-st}\cos(at)}{a^2}}{\frac{a^2+s^2}{a^2}}$$

A partir da divisão de frações.

Temos:

$$\int e^{-st}cos(at)dt = \frac{e^{-st}sen(at)}{a}.(\frac{a^2}{a^2+s^2}) - (\frac{se^{-st}\cos(at)}{a^2})\ (\frac{a^2}{a^2+s^2})$$

$$\int e^{-st}cos(at)dt = \frac{e^{-st}sen(at).\,a}{a^2+s^2} - \frac{se^{-st}\cos(at)}{a^2+s^2}$$

$$\int e^{-st}cos(at)dt = \frac{1}{a^2+s^2}\left(e^{-st}sen(at).\,a - se^{-st}\cos(at)\right)\ (2)$$

Aplicando o limite superior e inferior.

Segue, de (2) e de (**)

$$\lim_{b\to\infty}\left(\int_0^b e^{-st}cos(at)dt\right) = \frac{1}{a^2+s^2}\lim_{b\to\infty}\left(e^{-st}sen(at)a - se^{-st}\cos(at)\right)\Big|_0^b$$

$$\frac{1}{s^2+a^2}\lim_{b\to\infty}\left(e^{-sb}sen(ab)a - se^{-sb}\cos(ab) - (e^{-s0}sen(a0)a - se^{-s0}\cos(a0))\right)$$

Como, $e^{-sb} \to 0$ Para $s > 0$. Quando $b \to \infty$

Isto implica,

$$\frac{1}{a^2+s^2}\lim_{b\to\infty}(e^{-sb}sen(ab)a - se^{-sb}\cos(ab) = 0$$

pois, e^{-st} cresce mais rápido que $cos(at)$ e $sen(ab)$

Além disso,

$$\frac{1}{a^2+s^2}\lim_{b\to\infty}(-e^{-s0}sen(a0).\,a - se^{-s0}\cos(a0))$$

$$= \frac{1}{a^2+s^2}(0+s)$$

$$\frac{1}{a^2+s^2}.\,s = \frac{s}{a^2+s^2}.$$

4.1 Linearidade da transformada.

TEOREMA: Sejam *f, g e h* funções cuja transformada de Laplace existam para $s > \alpha$ e considere que c seja uma constante.

Então, para $s > \alpha$.

(I) $\mathcal{L}\{f+g\} = \mathcal{L}\{f\} + \mathcal{L}\{g\}$
(II) $\mathcal{L}\{ch\} = c\mathcal{L}\{h\}$

Demonstração (I)

A partir da definição, da transformada de Laplace.

Temos:

$$\mathcal{L}\{f+g\} = \int_0^{\infty} e^{-st}\,[f(t)+g(t)]dt$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-st}\,f(t)dt + \int_0^{\infty} e^{-st}\,g(t)dt$$

$$= \mathcal{L}\{f\} + \mathcal{L}\{g\}$$

Demonstração: (II)

$$\mathcal{L}\{ch\} = \int_0^{\infty} e^{-st}\,[ch(t)]dt$$

$$= c\int_0^{\infty} e^{-st}\,h(t)dt$$

$$= c\mathcal{L}\{\mathrm{h}\}$$

4.2 Continuidade por Parte.

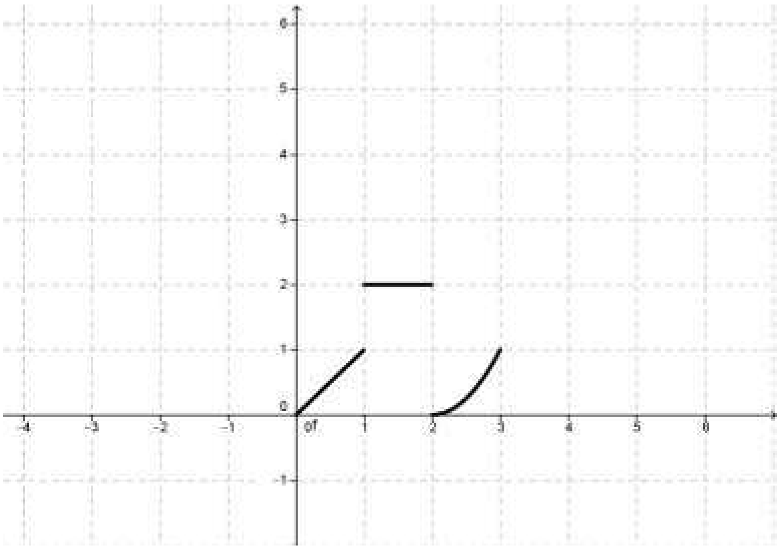
DEFINIÇÃO: Uma função $f(t)$ é dita ser contínua por partes em um intervalo $[a, b]$ se $f(t)$ é contínua em cada ponto de $[a, b]$, exceto talvez em um número finito de pontos nos quais $f(t)$ tem uma descontinuidade do tipo salto.

Uma função $f(t)$ é dita ser continua por partes em $[a, \infty)$, se $f(t)$ é continua por partes em $[a, N]$ para todo $N > a$

Exemplo: Analisando se a função é continua por partes.

$$f(t) = \begin{cases} \mathrm{t} & 0 < \mathrm{t} < 1 \\ 2 & 1 < \mathrm{t} < 2 \\ (\mathrm{t}-2)^2 & 2 \le \mathrm{t} \le 3 \end{cases}$$

Figura 1: Gráfico da função contínua por parte.



Fonte: Autor

A partir do gráfico de $f(t)$, vemos que $f(t)$ é contínua nos intervalos]0, 1[,]1,2[,]2, 3]. Podemos notar que, nos pontos $t = 1, 2,$ a função tem descontinuidade do tipo salto. Pois os limites laterais existem como números finitos e distintos. Portanto, $f(t)$ é continua por partes no intervalo [0, 3].

Uma função f(t) em [a, b] é dita ter descontinuidade do tipo salto em um t pertencente a (a, b), se $f(t)$ for descontinua em t, mas os limites laterais existem como números finitos e distintos.

Exemplo: Verificando se a função tem descontinuidade do tipo salto.

$$f(t) = \frac{|t|}{t}, t \neq 0$$

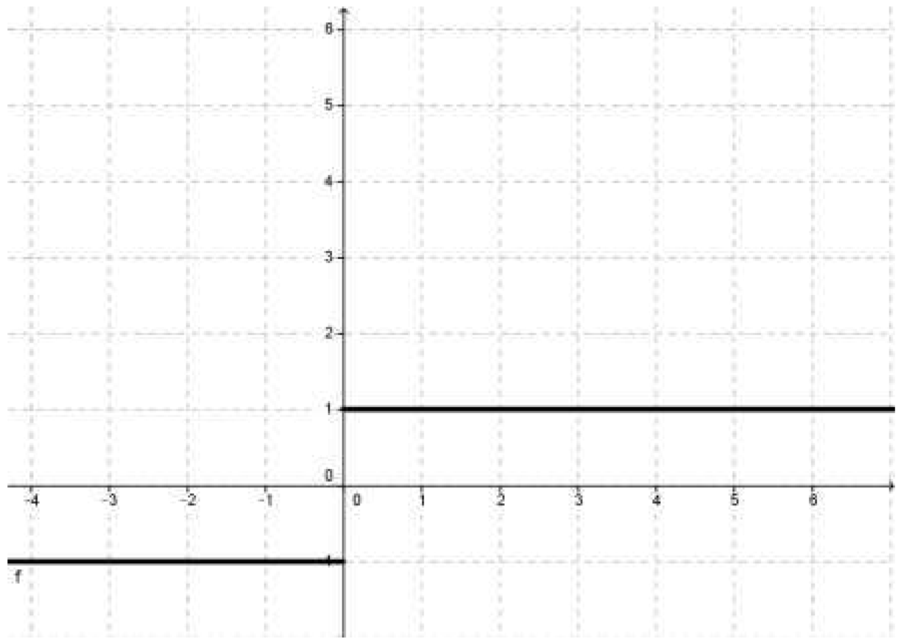
Calculando os limites laterais no ponto $t = 0$.

Temos,

$$\lim_{t \to 0+} \frac{|t|}{t} = 1 \ e \ \lim_{t \to 0-} \frac{|t|}{t} = -1$$

Logo, temos limites distintos e finitos. Portanto, a função tem descontinuidade do tipo salto. No ponto $t = 0$

Figura 2: Gráfico da função com descontinuidade do tipo salto.



Fonte: Autor

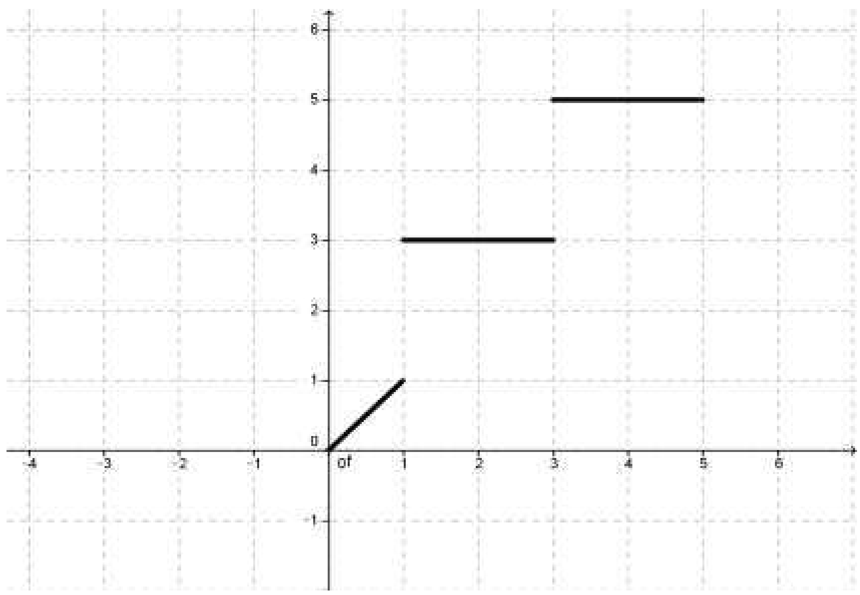
Exemplo:

$$f(t) = \begin{cases} t & 0 \leq t \leq 1 \\ 3, & 1 < t < 3 \\ 5, & 3 < t \leq 5 \end{cases}$$

Verificando se a função é descontinua do tipo salto.

Resolução:

Figura 3: Gráfico da função com descontinuidade do tipo salto.



Fonte: Autor

Calculando os limites laterais, quando $t \to 1$.

Temos:

$$\lim_{t \to 1+} 3 = 3 \; e \; \lim_{t \to 1-} t = 1$$

Calculando os limites laterais, quando $t \to 3$.

Temos:

$$\lim_{t \to 3+} 5 = 5 \; e \; \lim_{t \to 3-} 3 = 3$$

Logo, os limites laterais existem como números finitos e distintos. Portanto, a função tem descontinuidade do tipo salto.

4.3 Ordem Exponencial.

DEFINIÇÃO: Uma função $f(t)$ é considerada de ordem exponencial α se houver constantes positivas T e M, tais que: $|f(t)| \leq Me^{\alpha t} \; \forall \; t > T$

Exemplo: Verificando se a função $f(t) = t$ é de ordem exponencial.

A partir da definição.

Temos:

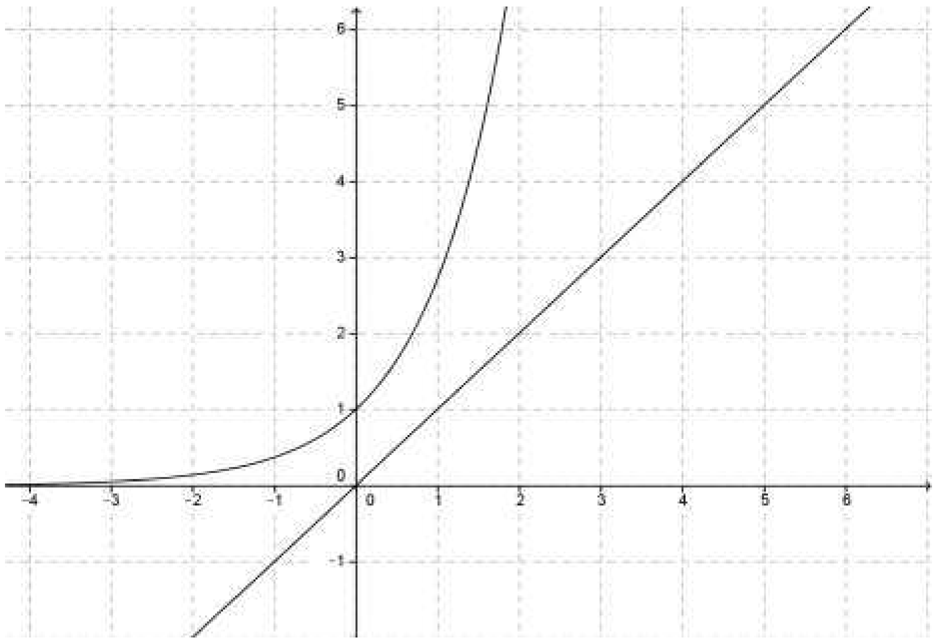
$$|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$$

$$|f(t)| \leq 1e^{1t}$$

$$|t| \leq e^{t}$$

Através do gráfico, podemos perceber que a função $f(t) = e^{t}$ cresce mais rápido que o gráfico da função $f(t) = t$.

Figura 4: Gráfico da função de ordem exponencial.



Fonte: Autor

Logo, $f(t) = t$ é de ordem exponencial.

Exemplo: Seja $f(t) = e^{t^2}$ para $M = \alpha = 1$. Vamos verificar se a função é de ordem exponencial.

A partir da definição.

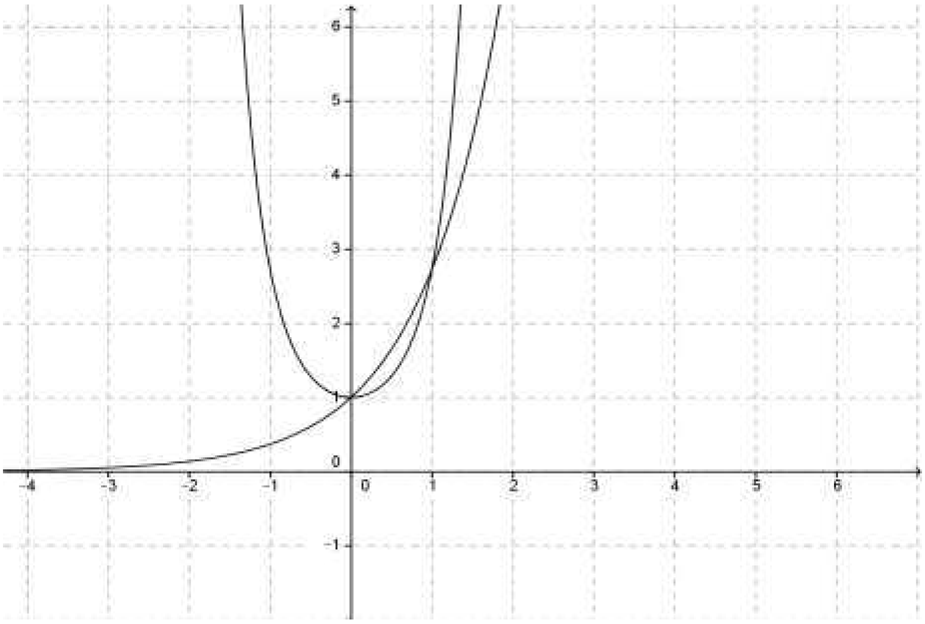
Temos:

$$|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$$

$$|e^{t^2}| \leq 1e^{1t}$$

$$|e^{t^2}| \leq e^{t}$$

Figura 5: Gráfico da função que não é de ordem exponencial.



Fonte: Autor

A partir do gráfico, podemos analisar que, a função $f(t) = e^{t^2}$ cresce mais rápido que a função $f(t) = e^t$. Logo, não é de ordem exponencial.

4.4 Condição para a Existência da Transformada.

TEOREMA: Se $f(t)$ é contínua por partes em $[0, \infty)$ e de ordem exponencial α,

Então, $\mathcal{L}\{F\}$ existe para $s > \alpha$

Demonstração.

Inicialmente, vamos analisar se a integral converge para $s > 0$

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$

Dividindo a integral em dois intervalos, ou seja, em duas integrais.

Temos:

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \int_0^b e^{-st} f(t)dt + \int_b^\infty e^{-st} f(t)dt$$

Analisando as duas integrais. Vamos considerar a integral $\int_0^b e^{-st} f(t)dt$ e a integral $\int_b^\infty e^{-st} f(t)dt$ como (I) e (II), respectivamente.

De (I),

Temos que a integral é contínua por partes em $[0,\ \infty)$, já que a função $f(t)$ é contínua por partes em $[0,\ b]$, para $b\ >\ 0$. Logo, a partir da definição de continuidade por partes, está bem definida.

Analisando (II),

Como a função $f(t)$ é de ordem exponencial α então existem constantes positivas T e M, tais que, $|f(t)\ | \leq \mathrm{M}e^{\alpha t}\ \forall\ \mathrm{t} > \mathrm{T}$.

Temos:

$$|f(t)| \leq \mathrm{M}e^{\alpha t}$$

Multiplicando ambos os lados da desigualdade por e^{-st}.

Temos:

$$e^{-st}|f(t)| \leq \mathrm{M}e^{\alpha t}e^{-st}$$

$$e^{-st}|f(t)| \leq \mathrm{M}e^{-(s-\alpha)t}\quad \forall\ \ t' \geq T\ e\ s\ > \alpha \qquad (1)$$

Se $t' > T$, vamos usar o teste de comparação para integrais impróprias para mostrar que

$$\int_t^\infty e^{-st} f(t)dt$$

Converge.

Considerando a integral $\int_t^\infty \mathrm{Me}^{-(\mathrm{s}-\alpha)\mathrm{t}}\ dt \quad como\ (III)$ e calculando a integral.

Temos:

$$\int_{t'}^\infty \mathrm{Me}^{-(\mathrm{s}-\alpha)\mathrm{t}} dt = M \int_{t'}^\infty \mathrm{e}^{-(\mathrm{s}-\alpha)\mathrm{t}} dt$$

Usando a definição de integrais impróprias

$$M \lim_{b\to\infty} \int_{t'}^{\infty} \mathrm{e}^{-(\mathrm{s}-\alpha)\mathrm{t}}\, dt \quad = M \lim_{b\to\infty} \frac{\mathrm{e}^{-(\mathrm{s}-\alpha)\mathrm{t}}}{\alpha - s} \Big|_{t'}^{b}$$

Temos:

Aplicando os limites.

Temos:

$$\lim_{b\to\infty} \frac{\mathrm{Me}^{-(\mathrm{s}-\alpha)\mathrm{t}}}{\alpha - \mathrm{s}} \Big|_{t'}^{b} = \lim_{b\to\infty} \left(\frac{\mathrm{Me}^{-(\mathrm{s}-\alpha)\mathrm{b}}}{\alpha - \mathrm{s}} - \frac{\mathrm{Me}^{-(\mathrm{s}-\alpha)\mathrm{t}'}}{\alpha - \mathrm{s}}\right)$$

Considerando $\frac{Me^{-(s-\alpha)b}}{\alpha - s}$ e $\frac{Me^{-(s-\alpha)t}}{\alpha - s}$ como (i) e (ii), respectivamente.

Para $s > \alpha$, temos que (i), tende a zero. Quando $b \to \infty$

Vejamos:

$$\frac{Me^{-(s-\alpha)t}}{\alpha - \mathrm{s}} = \frac{M}{e^{(s-\alpha)t}\alpha - \mathrm{s}} \to 0 \; para \; s > \alpha$$

Pois, $e^{(s-\alpha)b} \to \infty$. Quando $b \to \infty$

De (ii), Quando $b \to \infty$, temos

$$\frac{-Me^{-(s-\alpha)t'}}{\alpha - \mathrm{s}} \to \frac{M}{e^{(s-\alpha)t}\alpha - \mathrm{s}} (iii)$$

Logo,

$$\int_{t'}^{\infty} M\, e^{-(s-\alpha)t} dt = \frac{M}{e^{-(s-\alpha)t'}(s-\alpha)}, \qquad s > \alpha$$

Como

$$\lim_{t'\to\infty} \frac{M}{e^{-(s-\alpha)t'}(s-\alpha)} = 0$$

Para $s > \alpha$. Segue do teste de comparação que:

$$\int_{t'}^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

Converge para $s > \alpha$

Portanto, as duas integrais (I) e (II), existem. Logo, a transformada de Laplace $\mathcal{L}\{F\}$ existe para $s > \alpha$.

Demonstração da propriedade de primeira ordem

A partir da definição, da transformada de Laplace.

Temos:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f'(t)dt \qquad (*)$$

Integrando (*), por partes.

$$u = e^{-st}; \qquad du = -se^{-st}dt; \qquad dv = f'(t)dt \ e \ v = f(t)$$

Assim,

$$\int udv = u.v - \int vdu$$

Substituindo os valores na integral.

Temos:

$$\int e^{-st} f'(t)dt = e^{-st} f(t) - \int f(t)\ (-se^{-st})dt$$

$$= e^{-st} f(t) + s\int f(t)\ e^{-st}dt$$

Aplicando o limite separadamente.

Temos:

$$\lim_{b\to\infty} (e^{-s\infty} f(\infty) - e^{-s0} f(0)) + s\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$

Dai,

$e^{-sb} \to 0$, para $s > 0$, quando $b \to \infty$

Segue, da definição.

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt.$$

Logo,

$$-f(0) + sF(s) \quad (IV)$$

É a transformada de Laplace da derivada $f'(t)$.

Demonstração da propriedade da EDO de segunda ordem.

A partir da definição, da transformada de Laplace.

Temos:

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f''(t)dt \qquad (**)$$

Integrando (**), por parte.

$$u = e^{-st}; \quad du = -se^{-st}dt; \quad dv = f''(t)dt \text{ e } v = f'(t)$$

Assim,

$$\int \mathrm{udv} = \mathrm{u.v} - \int \mathrm{vdu}$$

Substituindo os valores na integral.

Temos:

$$\int e^{-st} f''(t)dt = e^{-st} f'(t) - \int f'^{(t)} (-se^{-st})dt$$

$$= e^{-st} f'(t) + s\int f'(t)\, e^{-st}dt$$

Aplicando o limite, separadamente.

Temos:

$$\lim_{b\to\infty} (e^{-sb} f'(b) - e^{-s0} f'(0)) + s\int_0^\infty e^{-st} f'(t)dt$$

Dai,

$e^{-s\infty} \to 0$, Para $s > 0$, Quando $b \to \infty$

Segue, da definição.

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f'(t)dt$$

Utilizando o resultado de (IV).

Temos:

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = -f'(0) + s(sF(s) - f(0))$$

$$= -f'(0) + s^2F(s) - sf(0)$$

$$= s^2F(s) - sf(0) \ - f'(0)$$

É a transformada de Laplace, da derivada $f''(t)$**.** Logo, temos todos os resultados necessários, na tabela abaixo, para auxiliar na resolução de algumas transformadas.

TABELA DAS TRANSFORMADAS DE LAPLACE.

1	$1/s$
e^{at}	$1/s-a$
t^n	$n!/s^{n+1}$
$sen(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
$e^{at}f(t)$	$f(s-a)$
$f(t)$	$F(s)$
$f'(t)$	$sF(s)-f(0)$
$f''(t)$	$s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$

5 TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE.

DEFINIÇÃO 4. Dada à função F(s), se houver uma função $f(t)$ que seja contínua em $[0,\ \infty)$ e satisfaça $\mathcal{L}^{-1}\{f\} = F$, dizemos que $f(t)$ é a transformada de Laplace inversa de F(s) e empregamos a notação $f = \mathcal{L}^{-1}\{F\}$.

5.1 Linearidade da transformada inversa.

TEOREMA7. Suponha que $\mathcal{L}^{-1}\{F\}, \mathcal{L}^{-1}\{G\}\ e\ \mathcal{L}^{-1}\{H\}$ existam e sejam contínuas em $[0, \infty)$, e considere que c seja qualquer constante.

Então:

(I) $\mathcal{L}^{-1}\{F + G\} = \mathcal{L}^{-1}\{F\} + \mathcal{L}^{-1}\{G\}$

(II) $\mathcal{L}^{-1}\{cH\} = \mathrm{c}\mathcal{L}^{-1}\{H\}$

Demonstração (I)

A partir da definição da transformada de Laplace

$$\mathcal{L}^{-1}\{\mathrm{F} + \mathrm{G}\} = \mathcal{L}^{-1} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}[\mathrm{f(t)} + \mathrm{g(t)}]\mathrm{dt}$$

$$\{\, \mathcal{L}^{-1} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\mathrm{f(t)dt}\} + \mathcal{L}^{-1} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\mathrm{g(t)dt}\}$$

$$\mathcal{L}^{-1} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\mathrm{f(t)dt} + \mathcal{L}^{-1} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\mathrm{g(t)dt}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{\mathrm{F}\} + \mathcal{L}^{-1}\{\mathrm{G}\}.$$

Demonstração (IV).

A partir da definição da transformada de Laplace.

$$\mathcal{L}^{-1}\{\mathrm{cH}\} = \mathcal{L}^{-1} \{\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\mathrm{cH(t)dt}\}$$

$$c\mathcal{L}^{-1} \{\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\mathrm{H(t)dt}\}$$

$$\mathrm{c}\mathcal{L}^{-1}\{\mathrm{H}\}.$$

5.2 Frações Parciais.

Para encontrar a transformada de Laplace é importante observar a forma que ela se encontra, para que seja possível aplicar o caso correspondente para cada situação. Se ela se encontrar da forma como segue, $F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$, onde P(s) e Q(s) são polinômios com coeficientes reais, sendo o grau de P(s) menor que o grau de Q(s), usaremos as frações parciais para apresentar F(s), através de frações parciais simples, quando for conhecida a transformada. Assim, utilizaremos três casos sobre as frações parciais.

5.3 1º $caso$: Fatores Lineares Distintos no Denominador.

Quando a transformada conter fatores lineares distintos no denominador, denotado por Q(s) e puder ser fatorada para a forma de um produto de fatores lineares e distintos. Isto é, $Q(s) = (s - r_1)(s - r_2) \ldots (s - r_n)$, onde os r's são todos os números reais distintos. Então, podemos expressar a expansão de todas as frações parciais, da forma como segue:

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{A_1}{s - r_1} + \frac{A_2}{s - r_2} + \cdots + \frac{A_n}{s - r_n}$$

onde, esses A's são números reais.

Exemplo: Calculando a transformada inversa abaixo.

$$\mathcal{L}^{-1}\ \{\frac{1}{s^2-6s+8}\} \qquad (1)$$

Inicialmente, encontraremos as raízes de $s^2 - 6s + 8$.

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-6)^2 - 4.1.8$$

$$\Delta = 36 - 32$$

$$\Delta = 4$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{6+2}{2} = 4$$

$$x' = \frac{6-2}{2} = 2$$

Reescrevendo, $s^2 - 6s + 8$ na forma de um produto de fatores.
Temos:

$$ax^2 - bx + c = a(x - x1)(x - x2)$$

$$s^2 - 6s + 8 = (x - 4)(x - 2) \qquad (i)$$

Substituindo (í), em (1).

Temos:

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{(s-4)(s-2)}\}$$

Segue,

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{(s-4)(s-2)}\} = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{A}{(s-4)} + \frac{B}{(s-2)}\} \qquad (*)$$

A partir do 1º caso de frações parciais.

Temos:

$$\frac{1}{(s-4)(s-2)} = \frac{A}{(s-4)} + \frac{B}{(s-2)}$$

Multiplicando ambos os lados por $(s-4)(s-2)$.

Obtemos:

$$1 = (s-2)A + (s-4)B$$

Para encontrar A e B, atribuímos valores a s, desde que esse valor venha cancelar um termo.

Para $s = 2$.

Obtemos:

$$1 = (2-2)A + (2-4)B$$

$$1 = (0)A + (-2)B$$

$$1 = (-2)B$$

$$B = -\frac{1}{2}$$

Para $s = 4$.

Obtemos:

$$1 = (4-2)A + (4-4)B$$

$$1 = (2)A + (0)B1$$

$$= (2)A$$

$$\mathrm{A} = \frac{1}{2}$$

Temos que $A = \frac{1}{2}$ e $B = -\frac{1}{2}$

Substituindo A e B em (*).

Temos:

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{A}{(s-4)} + \frac{B}{(s-2)}\} = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1/2}{(s-4)} + \frac{-1/2}{(s-2)}\} = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1/2}{(s-4)} - \frac{1/2}{(s-2)}\}$$

Usando as propriedades de linearidade.

Temos:

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1/2}{(s-4)}\} - \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1/2}{(s-2)}\}$$

$$\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{(s-4)}\} - \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{(s-2)}\} \qquad (3)$$

A partir da tabela das transformadas.

Temos:

$$f(s-\alpha) = e^{\alpha t} f(t)$$

com o deslocamento.

Analisando as transformadas sem o deslocamento.

Temos:

$$\mathcal{L}^{-1}\ \{\frac{1}{s}\} = 1 = f(t)$$

E com o deslocamento.

Temos:

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{(s-4)}\} = e^{\alpha t} f(t) = e^{4t}.1 = e^{4t}$$

A transformada de Laplace com o deslocamento é o produto entre a função f(t), sem o deslocamento com a exponencial da função deslocamento. Seguindo a mesma ideia, Analisaremos a transformadas sem o deslocamento.

Temos:

$$\mathcal{L}^{-1}\ \{\frac{1}{s}\}=1=f(t)$$

E com o deslocamento.

Temos:

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{(s-2)}\}=e^{\alpha t}f(t)=e^{2t}.\,1=e^{2t}$$

Substituindo as transformadas inversa em 3.

Temos:

$$\frac{1}{2}\mathrm{e}^{4\mathrm{t}}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2\mathrm{t}}$$

$$\frac{\mathrm{e}^{4\mathrm{t}}}{2}-\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{t}}}{2}$$

Que é a transformada inversa de Laplace.

5.4 2º $caso$: Fatores Lineares Repetidos no Denominador.

Seja $(s-r)$, um fator de $\mathrm{Q(s)}$ no denominador e supondo que $(\mathrm{s}-\mathrm{r})^{\mathrm{m}}$ seja a potência mais alta de $(\mathrm{s}-\mathrm{r})$, que divide $\mathrm{Q(s)}$. Então, a partir de $\frac{P(s)}{Q(s)}$ podemos escrever em temos de frações parciais. Onde r é um numero real e m ≥ 2.

Assim,

$$\mathrm{F(S)}=\frac{\mathrm{P(s)}}{\mathrm{Q(s)}}=\frac{\mathrm{A}_1}{(\mathrm{s}-\mathrm{r})}+\frac{\mathrm{A}_2}{(\mathrm{s}-\mathrm{r})^2}+\cdots+\frac{\mathrm{A_m}}{(\mathrm{s}-\mathrm{r})^{\mathrm{m}}}$$

Onde os A’s são números reais.

Exemplo: calculando a transformada inversa de Laplace, Abaixo.

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{s^2+9s+2}{(s-1)^2(s+3)}\} \qquad (i)$$

Segue,

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{s^2+9s+2}{(s-1)^2(s+3)}\} = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{A}{(s-1)} + \frac{B}{(s-1)^2} + \frac{C}{(s+3)}\} \qquad (*)$$

A partir do 2º caso de frações parciais.

Temos:

$$\frac{s^2+9s+2}{(s-1)^2(s+3)} = \frac{\mathrm{A}}{(\mathrm{s}-1)} + \frac{\mathrm{B}}{(s-1)^2} + \frac{C}{(s+3)} \qquad (**)$$

Multiplicando ambos os lados por $(s-1)^2(s+3)$.

Obtemos:

$$s^2 + 9s + 2 = (\mathrm{s}-1)(\mathrm{s}+3)\mathrm{A} + (\mathrm{s}+3)\mathrm{B} + (s-1)^2C \qquad (**)$$

Para encontrar A e B e C atribuímos valores a s, desde que esse valor venha cancelar algum(s) termo ou formar um sistema.

Assim, para $s = 1$

Temos:

$$s^2 + 9s + 2 = (\mathrm{s}-1)(\mathrm{s}+3)\mathrm{A} + (\mathrm{s}+3)\mathrm{B} + (s-1)^2C$$

$$1^2 + 9 + 2 = (1-1)(1+3)\mathrm{A} + (1+3)\mathrm{B} + (1-1)^2C$$

$$12 = (1+3)\mathrm{B}$$

$$12 = (4)\mathrm{B}$$

$$\mathrm{B} = \frac{12}{4}$$

$$B = 3$$

De modo, semelhante.

Para $s = -3$

Obtemos:

$$(-3)^2 + 9(-3) + 2 = (-3-1)(-3+3)\mathrm{A} + (-3+3)\mathrm{B} + (-3-1)^2C$$

$$9-27+2=(-4)(0)\mathrm{A}+(0)\mathrm{B}+(-4)^2C$$

$$-16=16\mathrm{C}$$

$$\mathrm{C}\ =-1$$

Por fim, para encontrar A.

Para $s=0$.

$$0^2+9.0+2=(0-1)(0+3)\mathrm{A}+(0+3)\mathrm{B}+(0-1)^2C$$

$$2=(-1)(3)\mathrm{A}+(3)\mathrm{B}+(-1)^2C$$

$$2=-3\mathrm{A}+3\mathrm{B}+C$$

Substituindo os valores encontrados de C e de B.

Temos:

$$2=-3\mathrm{A}+3.3-1$$

$$-8+2=-3\mathrm{A}$$

$$A=\frac{-6}{-3}$$

$$A=\ 2$$

Substituindo os valores encontrados de A, B e C em (**).

Obtemos:

$$\frac{s^2+9s+2}{(s-1)^2(s+3)}=\ \frac{\mathrm{A}}{(s-1)}+\frac{\mathrm{B}}{(s-1)^2}+\frac{C}{(s+3)}=\frac{2}{(s-1)}+\frac{3}{(s-1)^2}+\frac{-1}{(s+3)}$$

Agora, determinando a transformada inversa de Laplace.

De (*).

Temos:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{A}{(s-1)}+\frac{B}{(s-1)^2}+\frac{C}{(s+3)}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s-1)}+\frac{3}{(s-1)^2}+\frac{-1}{(s+3)}\right\}$$

Aplicando a propriedade de linearidade.

Obtemos:

$$2\mathcal{L}^{-1}\ \{\frac{1}{(s-1)}\}+3\mathcal{L}^{-1}\ \{\frac{1}{(s-1)^2}\}-\mathcal{L}^{-1}\ \{\frac{1}{(s+3)}\} \qquad (***)$$

A partir da tabela das transformadas.

Temos que:

$$f(s-\alpha)=e^{\alpha t}f(t)$$

Com o deslocamento.

Analisando as transformadas sem o deslocamento.

Temos:

$$\mathcal{L}^{-1}\ \{\frac{1}{s}\}=1=f(t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\ \{\frac{1}{s^2}\}=t=f(t)$$

e com o deslocamento.

Temos:

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{(s-1)}\}=e^{\alpha t}f(t)=e^{t}.\,1=e^{t}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{(s-1)^2}\}=e^{\alpha t}f(t)=e^{t}.\,t=te^{t}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{(s+3)}\}=e^{\alpha t}f(t)=e^{-3t}.\,1=e^{-3t}$$

A transformada de Laplace do deslocamento é o produto entre a exponencial com a função $f(t)$, sem o deslocamento.

Substituindo as transformadas inversas em (***).

Temos:

$$2e^{t}+3te^{t}-e^{-3t}$$

que é a transformada inversa de Laplace.

5.5 3º $caso$: Termos quadráticos sem fatores repetidos.

Neste caso, temos a cada fator linear da forma $(s + r)$ que aparece n vezes no denominador, igual no 2º caso, juntamente com um fator quadrático irredutível, $\frac{bs+c}{s^2+r^2}$. Onde é possível expandir para a forma de frações parciais, decomposta como segue:

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{A_1}{(s+r)} + \frac{A_2}{(s+r)^2} + \cdots + \frac{A_m}{(s+r)^m} + \frac{Bs + C}{s^2 + r^2}$$

Exemplo: Calculando a transformada inversa abaixo.

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s-2}{s^3(s^2+4)}\right\}. \ (1)$$

Resolução:

Segue,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s-2}{s^3(s^2+4)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s^3} + \frac{Ds+E}{s^2+4}\right\}. \qquad (*)$$

A partir do 3º caso de frações parciais.

Temos:

$$\frac{3s-2}{s^3(s^2+4)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s^3} + \frac{Ds+E}{s^2+4}. \qquad (**)$$

Multiplicando ambos os lados por $s^3(s^2 + 4)$.

Obtemos:

$$3s - 2 = s^2(s^2 + 4)A + s(s^2 + 4)B + (s^2 + 4)C + s^3(Ds + E). \qquad (i)$$

Para encontrar A, B, C, D, e E atribuímos valores a S, desde que esse valor venha cancelar algum(s) termo ou formar um sistema.

Aplicando a distributividade em (i).

Obtemos:

$$3s - 2 = (s^4A + 4s^2A) + (s^3B + 4sB) + (s^2C + 4C) + (Ds^4 + Es^3)$$

$$3s - 2 = s^4A + 4s^2A + s^3B + 4sB + s^2C + 4C + Ds^4 + Es^3$$

Somando os temos com a mesma potencia e colocando os termos s em evidencia.

Obtemos:

$$3s - 2 = s^4(A + D) + s^3(B + E) + s^2(4A + C) + s(4B) + 4C$$

Segue que: $P(s) = 3s - 2$, onde s tem potência 1.

Isto implica,

$$s^4(A + D) + s^3(B + E) + s^2(4A + C) + s(4B) + 4C = 3s - 2$$

Então,

$$s^4(0) + s^3(0) + s^2(0) + s(4B) + 4C = 3s - 2$$

Assim,

$$A + D = 0; \quad B + E = 0; \quad 4A + C = 0; \quad 4B = 3 \quad e \quad 4C = -2$$

Dai, podemos encontrar os valores para A, B, C, D e E.

Temos:

$$4C = -2 \rightarrow C = \frac{-2}{4} \rightarrow C = \frac{-1}{2}$$

$$4B = 3 \quad \rightarrow B = \frac{3}{4}$$

$$4A + C = 0 \rightarrow 4A - \frac{1}{2} = 0 \rightarrow A = \frac{\frac{1}{2}}{4} = \frac{1}{8}$$

$$B + E = 0 \rightarrow \frac{3}{4} + E = 0 \rightarrow E = \frac{-3}{4}$$

$$A + D = 0 \rightarrow \frac{1}{8} + D = 0 \rightarrow D = -\frac{1}{8}$$

Substituindo os valores encontrados de A, B, C, D, e E em (**)

$$\frac{3s-2}{s^3(s^2+4)} = \frac{{}^{1}/_{8}}{s} + \frac{{}^{3}/_{4}}{s^2} + \frac{({}^{-1}/_{2})}{s^3} + \frac{(({}^{-1}/_{8})s + ({}^{-3}/_{4}))}{s^2+4}$$

Encontrando a transformada inversa de Laplace.

De (*).

Temos:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s-2}{s^3(s^2+4)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s^3} + \frac{Ds+E}{s^2+4}\right\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1/8}{s}+\frac{3/4}{s^2}+\frac{(-1/2)}{s^3}+\frac{((-1/8)s+(-3/4))}{s^2+4}\right\}$$

Aplicando as propriedades de linearidade.

Temos:

$$\frac{1}{8}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}+\frac{3}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}-\frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^3}\right\}-\frac{1}{8}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\}-\frac{3}{8}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\}\ (***)$$

Analisando as transformadas sem o deslocamento, a partir da tabela das transformadas.

Temos:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}=1=f(t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}=t=f(t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^3}\right\}=t^{2}=f(t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\}=\cos(at)=\cos(2t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\}=sen(at)=sen(2t)$$

Substituindo as transformadas inversa, encontradas em (***).

Temos:

$$\frac{1}{8}+\frac{3}{4}t-\frac{1}{4}t^2-\frac{1}{8}\cos(2t)-\frac{3}{8}sen(2t)$$

Portanto,

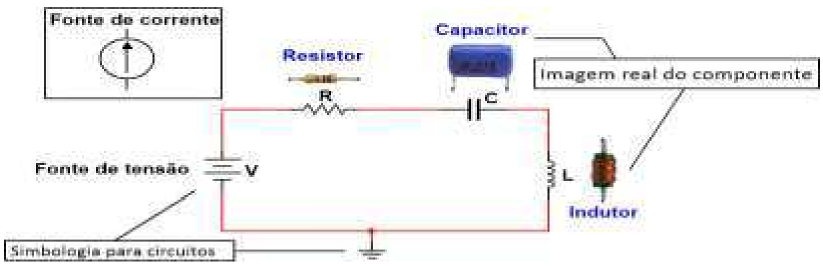
$$\frac{1}{8}+\frac{3t}{4}-\frac{t^2}{4}-\frac{\cos(2t)}{8}-\frac{sen(2t)}{8}$$

é a transformada inversa de Laplace.

6 INTRODUÇÃO AOS CIRCUITOS ELÉTRICOS.

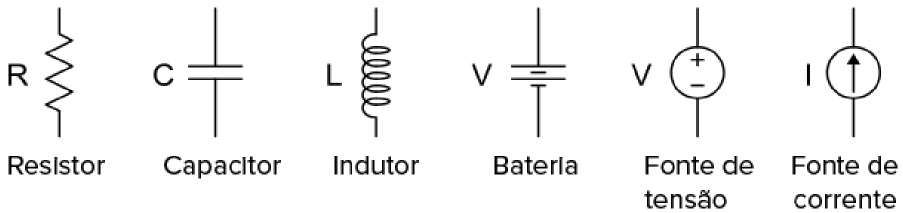
Um circuito elétrico é a ligação de dispositivos elétricos, interligados por meio de um fio, onde devem conter resistores, indutores, capacitores, fontes de tensão, interruptores, entre outros componentes, de modo que esses componentes formem pelo menos um caminho fechado para as corrente elétricas.

Figura 6: Representação de um circuito elétrico.



Fonte: disponível em: https://eletronicaqui.com/2016/04/circuito-eletrico/

Figura 7: Simbologia dos componentes de um circuito elétrico.



Fonte: disponível em: https://pt.khanacademy.org/science/electrical-engineering/ee-circuit-analysis-topic/circuit-elements/a/ee-circuit-terminology

6.1 Alguns componentes de um circuito.

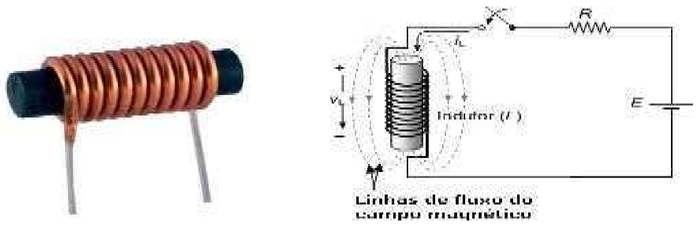
Resistor: É um dispositivo com a finalidade de limitar a passagem de corrente elétrica em um circuito. Ele oferece uma resistência elétrica, ou seja, ele dificulta a passagem de energia elétrica.

Figura 8: Resistor.

Fonte: Disponível em: https://www.arduinobelem.com.br/produto/kit-resistor-1-4w-x20-unidades/ https://www.eletropecas.com/Produto/resistor-de-fio-5w-15-k

Indutor: É um dispositivo que serve para armazena energia através de um campo magnético, também serve para impedir variações na corrente elétrica.

Figura 9: Indutor.



Fonte: Disponível em: http://www.portaleletricista.com.br/indutor-armazenador-de-energia/ https://www.electronica-pt.com/bobina

Capacitor: É um dispositivo que serve para armazenar cargas elétricas.

Figura 10: Capacitor.

Fonte: Disponível em: https://www.mundodaeletrica.com.br/como-funcionam-os-capacitores/https://www.instructables.com/lesson/Capacitors-2/

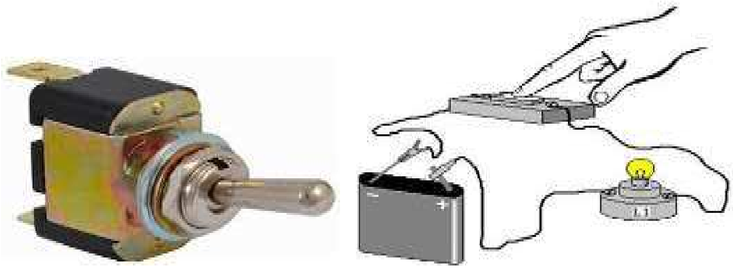
Fonte de tensão: É um dispositivo que gera uma força eletromotriz entre seus terminais, ou seja, gera uma quantidade de energia para movimentar uma carga.

Figura 11: Fonte de tensão.

Fonte: disponível em: https://aventa.com.br/novidades/quanto-custa-um-gerador-de-energia https://marianaplorenzo.com/tag/substancias-das-pilhas/

Interruptor: É um dispositivo, utilizado para abrir ou fechar circuitos elétricos.

Figura 13: Interruptor.



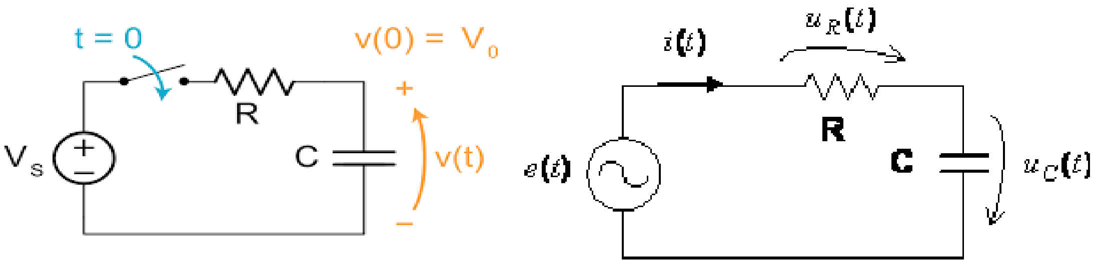
Fonte: disponível em: http://www.nauticexpo.com/pt/produto-fabricante/interruptor-circuito-eletrico-attwood-27464-528.html/https://mundoeducacao.bol.uol.com.br/fisica/circuito-eletrico.htm

6.2 Existem três componentes básicos de um circuito analógico.

Resistor (R), capacitor (C) e o indutor (L). Eles podem ser combinados em quatro circuitos. O circuito **(RC), (RL), (LC)** e **(RLC).**

Circuito (RC): resume-se em um resistor e em um capacitor, podendo esses dispositivos estar ligados em série ou em paralelos, onde o circuito é alimentado por uma fonte de tensão.

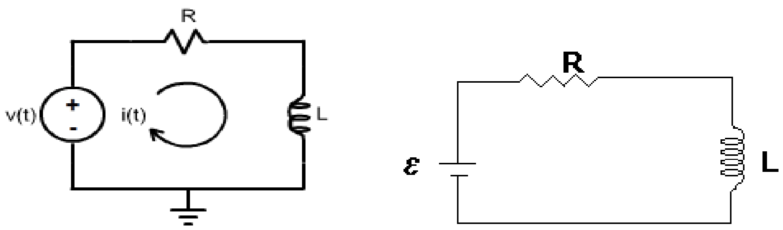
Figura 14: Circuito RC.



Fonte: Disponível em: https://pt.khanacademy.org/science/electrical-engineering/ee-circuit-analysis-topic/ee-natural-and-forced-response/a/ee-rc-step-response
https://wiki.ifsc.edu.br/mediawiki/index.php/AULA_6_-_Circuitos_2_-_Engenharia

Circuito (RL): resume-se em um resistor e em um indutor, podendo esses dispositivos estar ligados em série ou em paralelo, onde o circuito é alimentado por uma fonte de tensão.

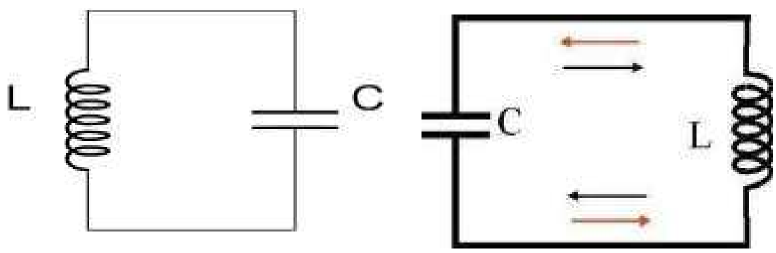
Figura 15: Circuito RL.



Fonte: Disponível em: https://www.maxwell.vrac.puc-rio.br/26174/introducao.html
http://fisicabr.org/eletromag/fis26.html

Circuito (LC): resume-se em um indutor e em um capacitor, podendo esses dispositivos estar ligados em série ou em paralelo, podendo ser alimentado por uma fonte de tensão.

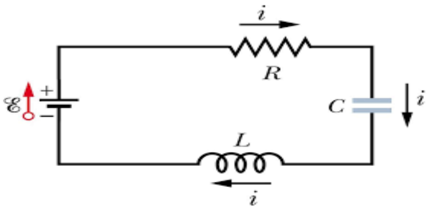
Figura 16: Circuito LC.

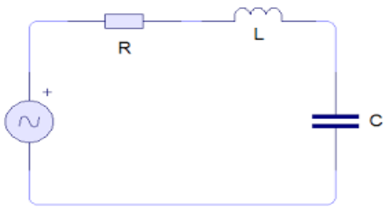


Fonte: Disponível em: https://pt.khanacademy.org/science/electrical-engineering/ee-circuit-analysis-topic/ee-natural-and-forced-response/a/ee-lc-natural-response https://sites.google.com/site/ea7ahg/antena/bobinas-y-trampas/circuitos-lc

Circuito (RLC): resume-se em um resistor, em um indutor e em um capacitor. Podendo esses dispositivos estar ligados em série ou em paralelo, podendo ser alimentado por uma fonte de tensão.

Figura 17: Circuito RLC.



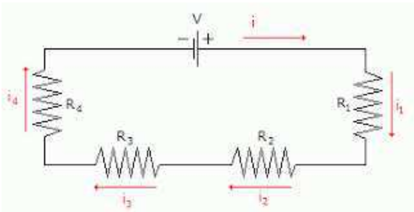


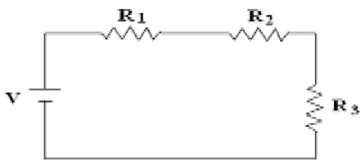
Fonte: Disponível em: https://medium.com/@marcoshuck/resolviendo-circuitos-rlc-a535e44c5b32
http://pbx-brasil.com/outrasDisciplinas/FisIV/Notas/Iarea/aula106/aula106.html

6.3 Circuito elétrico em série

Circuito em série: É o circuito onde todos os elementos se encontram interligado em série com a fonte de energia. No circuito em série a corrente elétrica é a mesma em todos os pontos do circuito e a tensão é dividida proporcionalmente.

Figura 18: Circuito em série.





Fonte: Disponível em: https://www.ebah.com.br/content/ABAAAg5-UAI/relatorio-2-medicao-erro-resist-eq /https://www.ebah.com.br/content/ABAAABRVQAD/relat5-cicuito-serie-paralelo-misto-final

1º Lei de Ohm: a intensidade da corrente elétrica em um circuito é diretamente proporcional à tensão aplicada e inversamente proporcional a sua resistência.

Utiliza-se a 1° lei de Ohm para encontrar os valores da tensão (v), da corrente (I) e da resistência (R) em um circuito elétrico. Para encontrar o valor desejado é só conhecer dois valores entre os três valores da lei de Ohm.

$$I = \frac{V}{R}; \quad R = \frac{V}{I}; \quad V = RI$$

onde as unidades das grandezas são apresentados por:

Volts (V) → tensão

Ampère (A) → corrente

Ohm (Ώ) →resistência

2º Lei de Kirchhoff.

A soma de todas as tensões geradas, menos a soma de todas as tensões consumidas em uma malha é igual à zero.

Capacitância: é uma grandeza física que vai relacionar a quantidade de carga adquirida por um capacitor com seu potencial elétrico.

$$C = \frac{Q}{V}$$

onde,

C= capacitância

Q= carga→ são partículas elementares que compõe o átomo

V= tensão

Indutância: é o fluxo criado por uma bobina de N espiras com uma determinada corrente que percorre esse circuito elétrico

$$L = \frac{N\varphi[B]}{I}$$

onde,

L= indutância

N= numero de espira

$\varphi[B]$= fluxo de cada espira

I=corrente

Resistência elétrica é a capacidade de um corpo qualquer se opor à passagem de uma corrente elétrica.

7 APLICAÇÃO DA EDO NOS CIRCUITOS ELETRICOS

Inicialmente, vamos definir alguns conceitos que serão de extrema importância para que seja possível, a partir da segunda lei de Kirchhoff, exibir algum modelo matemático, na tentativa de descrever ou simular a realidade, tendo como um dos objetivos explicar matematicamente alguma situação do cotidiano.

Dando continuidade, vamos definir alguns conceitos.

Queda de tensão no indutor é denotador por:

$$VL = L.\frac{di}{dt} \qquad (I)$$

onde,

$VL =$ Queda de tensão no indutor

L= indutância

$\frac{di}{dt}$= Variação da corrente em um intervalo de tempo

Queda de tensão no capacitor é denotada por:

$$\mathrm{VC} = \frac{1}{\mathrm{C}} \cdot \mathrm{Q} \qquad \text{(II)}$$

onde,

VC= Queda de tensão no capacitor

C= Capacitância

Q= Carga

Queda de tensão no resistor é denotada por:

$$\mathrm{VR} = \mathrm{RI} \qquad \text{(III)}$$

onde,

VR= Queda de tensão no resistor.

R= Resistência

I= Corrente

7.1 Dedução das equações diferenciais ordinárias

Segue, da 2º $lei\ de\ Kirchhoff$ (leis das tensões ou lei das malhas).

Diz que: a soma de todas as tensões geradas, menos a soma de todas as tensões consumidas em uma malha é igual à zero.

Assim, a partir da 2º $lei\ de\ Kirchhoff$.

Temos:

$$VR + VL = E(t) \qquad (IV)$$

onde, VR e VL são as tensões consumida e $E(t)$ é a tensão gerada.

Substituindo (I) e (III) em (IV).

Temos:

$$RI + L\,\frac{di}{dt} = E(t)$$

Dividindo ambos os lados por L.

Temos:

$$\frac{\mathrm{RI}}{\mathrm{L}} + \frac{\mathrm{L}\frac{\mathrm{di}}{\mathrm{dt}}}{\mathrm{L}} = \frac{\mathrm{E(t)}}{\mathrm{L}}$$

$$\frac{di}{dt} + \frac{RI}{L} = \frac{E(t)}{L}$$

$$I' + \frac{R}{L}I = \frac{E(t)}{L}$$

Logo, temos uma EDO de 1º ordem para circuito RL.

Segue, da 2º $lei\ de\ Kirchhoff$.

$$VR + VC = E(t) \qquad (V)$$

onde, VR e VC são as tensões consumida e $E(t)$ é a tensão gerada.

Substituindo (II) e (III) em (V).

Temos:

$$VR + VC = E(t)$$

$$RI + \frac{1}{C}Q = E(t)$$

$$R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = E(t)$$

Dividindo ambos os lados por R.

$$\frac{R}{R}\frac{dQ}{dt} + \frac{\frac{1}{C}Q}{R} = \frac{E(t)}{R}$$

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{CR} = \frac{E(t)}{R}$$

$$Q' + \frac{1}{CR}Q = \frac{E(t)}{R}$$

Logo, temos uma EDO de 1º ordem para circuito RC. Dando continuidade, a partir da 2º $lei\ de\ Kirchhoff$.

Temos:

$$VC + VL = E(t) \qquad (VI)$$

onde, VC e VL são as tensões consumida e $E(t)$ é a tensão gerada.

Substituindo (I) e (II) em (VI).

Temos:

$$\frac{1}{C}Q + L\,\frac{dI}{dt} = 0$$

$$\frac{1}{C}\ Q + L\frac{dI}{dt} = 0 \qquad (VII)$$

Dai,

$I = \frac{dQ}{dt}$ (i)

onde,

I= corrente

Q= carga

$\frac{dQ}{dt}$= variação da carga em um intervalo de tempo.

Assim,

Derivando em ambos os lados (i)

Temos:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{d^2Q}{dt^2} (ii)$$

Substituindo (ii) em (VII).

Obtemos:

$$\frac{1}{C}Q + L\frac{d^2Q}{dt^2} = 0$$

Dividindo ambos os lados por L.

$$\frac{1}{CL}Q + \frac{L}{L}\frac{d^2Q}{dt^2} = 0$$

$$\frac{Q}{CL} + \frac{d^2Q}{dt^2} = 0$$

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{Q}{CL} = 0$$

Logo, temos uma EDO de 2º ordem para circuito LC. Finalmente, a partir da 2º $lei\ de\ Kirchhoff$.

Segue,

$$VL + VR + VC = E(t) \qquad (VIII)$$

Onde, VR, VC e VL são as tensões consumida e $E(t)$ é a tensão gerada.

Substituindo (I), (II), e (III) em (VIII).

Temos:

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C}Q = E(t) \qquad (iii)$$

Substituindo (i) e (ii) em (iii).

Temos:

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\,\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}\,Q = E(t)$$

$$LQ'' + RQ' + \frac{Q}{C} = E(t)$$

Dividindo ambos os lados por L.

Obtemos:

$$\frac{L}{L}Q'' + \frac{R}{L}Q' + \frac{Q}{LC} = \frac{E(t)}{L}$$

$$Q'' + \frac{R}{L}\,Q' + \frac{Q}{LC} = \frac{E(t)}{L}$$

Logo, temos uma EDO de 2º ordem para circuito RLC.

7.2 Aplicação

De agora em diante, vamos aplicar as deduções das equações diferenciais ordinárias, para solucionar algumas situações envolvendo os circuitos elétricos, RC, RL, LC e RLC em série.

Exemplo:

Circuito RL.

Uma bateria de 12 $volts$ é conectada a um circuito em série, na qual a indutância é de $\frac{1}{2}henry$ e a resistência é de 10 $ohms$.

a) Determine a corrente I, sabendo que a corrente inicial é zero.
b) O que acontece quando o tempo tende ao infinito.

Resolução.

Da dedução (*).

$$I' + \frac{R}{L}I = \frac{E(t)}{L}$$

Substituindo os valores dados na equação.

Temos:

$$\mathrm{I}' + \frac{10}{1/2}\,\mathrm{I} = \frac{12}{1/2}$$

$$\mathrm{I}' + 20\mathrm{I} = 24$$

Temos uma equação diferencial ordinária de primeira ordem. Aplicando a transformada de Laplace.

Temos:

$$\mathcal{L}\{I' + 20\mathrm{I}\} = \mathcal{L}\{24\}$$

Utilizando a linearidade da transformada de Laplace, para resolver a EDO de 1ª ordem.

Temos:

$$\mathcal{L}\{I'\} + \mathcal{L}\{20I\} = \mathcal{L}\{24\}$$

A partir da tabela, das transformadas de Laplace.

Temos:

$$\mathrm{sF(s)} - \mathrm{f(0)} + 20\mathrm{F(s)} = \frac{24}{\mathrm{s}}$$

Para $t = 0$, temos $I(0) = f(0) = 0$.

Assim,

$$\mathrm{sF(s)} - 0 + 20\mathrm{F(s)} = \frac{24}{\mathrm{s}}$$

Colocando $F(s)$ em evidencia.

$$\mathrm{F(s)(s+20)} = \frac{24}{\mathrm{s}}$$

$$\mathrm{F(s)} = \frac{24}{\mathrm{s(s+20)}}$$

Usando a transformada inversa de Laplace.

$$\mathcal{L}^{-1}\ \{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\ \{\frac{24}{\mathrm{s(s+20)}}\} = \mathcal{L}^{-1}\ \{\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{s}} + \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{(s+20)}}\} \qquad (*)$$

Por frações parciais.

Temos:

$$\frac{24}{s(s+20)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s+20)} \qquad (i)$$

Multiplicando ambos os lados de (i), por $s(s+20)$.

Obtemos:

$$24 = (\mathrm{s}+20)\mathrm{A} + \mathrm{sB} \qquad \text{(ii)}$$

Para encontrar os valores de $A\ e\ B$, atribuímos valores a S de forma que cancele $A\ ou\ B$.

Para $s = -20$.

Temos:

$$24 = (-20+20)A - 20B$$

$$24 = -20B$$

$$B = \frac{24}{-20}$$

$$B = -\frac{6}{5}$$

Para $s = 0$.

Temos:

$$24 = (0+20)A + 0B$$

$$24 = 20A$$

$$A = \frac{6}{5}$$

Substituindo os valores de A e B em (*).

Temos:

$$\mathcal{L}^{-1}\ \{\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{s}} + \frac{\mathrm{B}}{(\mathrm{s}+20)}\} = \mathcal{L}^{-1}\ \{\frac{{}^{6}/_{5}}{\mathrm{s}} + \frac{({}^{-6}/_{5})}{(\mathrm{s}+20)}\}.$$

A partir da propriedade de linearidade.

Segue,

$$\frac{6}{5}\mathcal{L}^{-1}\ \{\frac{1}{\mathrm{s}}\} - \frac{6}{5}\mathcal{L}^{-1}\ \{\frac{1}{(\mathrm{s}+20)}\}\ (iii)$$

Analisando a transformada inversa de Laplace sem o deslocamento. A partir da tabela da transformada de Laplace.

Temos:

$$\mathcal{L}^{-1}\ \{\frac{1}{s}\} = 1 = f(t)$$

Com o deslocamento,

temos:

$$\mathcal{L}^{-1}\ \{\frac{1}{(s+20)}\} = e^{at}f(t) = e^{-20t}1 = e^{-20t}.$$

Substituindo as transformadas inversas encontradas em (iii).

Obtemos:

$$I(t) = \frac{6}{5} - \frac{6e^{-20t}}{5}$$

$$I(t) = \frac{6 - 6e^{-20t}}{5}$$

que é a corrente procurada.

b) calculando o limite.

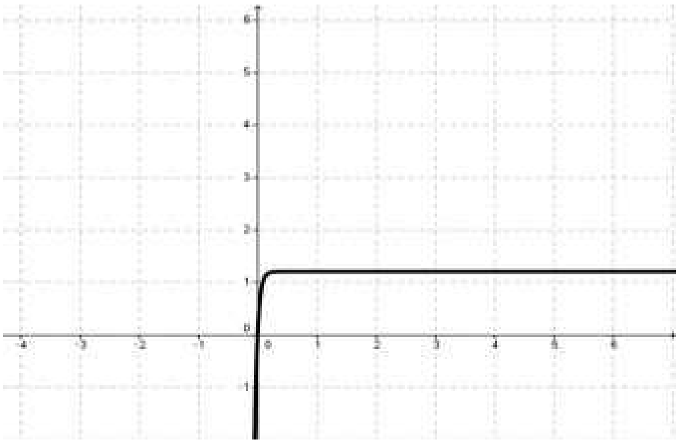
Temos:

$$\lim_{t\to\infty}\left(\frac{6}{5} - \frac{6e^{-20t}}{5}\right) = \frac{6}{5}$$

Portanto, a corrente tende a $\frac{6}{5}$, quando o tempo tende ao infinito.

Analisando o comportamento do gráfico abaixo. Percebemos que a função tende a um comportamento contínuo.

Figura 20: Gráfico da corrente em função do tempo.



Fonte: Autor

Exemplo:

Circuito RL.

Uma força eletromotriz de 30 volts é aplicada a um circuito em serie, no qual a indutância é de 0,5 henry e a resistência é de 50 ohm.

a) Encontre a corrente em função do tempo, sabendo que I(0) =0
b) Determine a corrente quando o tempo tende ao infinito

Resolução.

Da dedução (*).

$$I' + \frac{R}{L}I = \frac{E(t)}{L}$$

Substituindo os valores dados na equação.

Temos:

$$I' + \frac{50}{0,5}I = \frac{30}{0,5}$$

$$I' + 100I \ = 60$$

Logo, temos uma equação diferencial de primeira ordem. Aplicando a transformada de Laplace.

Temos:

$$\mathcal{L}\{I' + 100\mathrm{I}\} = \mathcal{L}\{60\}$$

Utilizando a linearidade da transformada de Laplace, para resolver a EDO de 1ª ordem.

Temos:

$$\mathcal{L}\{I'\} + \mathcal{L}\{100\mathrm{I}\} = \mathcal{L}\{60\}$$

A partir da tabela da transformada de Laplace.

Temos:

$$sF(s) - f(0) + 100F(s) = \frac{60}{s}$$

Para $t = 0$, temos $I(0) = f(0) = 0$.

Assim,

$$sF(s) - 0 + 100F(s) = \frac{60}{s}$$

Colocando $F(s)$ em evidência.

$$F(s)(s + 100) = \frac{60}{s}$$

$$F(s) = \frac{60}{s(s + 100)}$$

Usando a transformada inversa de Laplace.

$$\mathcal{L}^{-1}\ \{\mathrm{F(s)}\} = \mathcal{L}^{-1}\ \{\frac{60}{\mathrm{s(s+100)}}\} = \mathcal{L}^{-1}\ \{\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{s}} + \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{(s+100)}}\} \qquad (*)$$

Por frações parciais

Temos:

$$\frac{60}{\mathrm{s(s + 100)}} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{s}} + \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{(s + 100)}} \qquad \text{(i)}$$

Multiplicando ambos os lados de (i), por $s(s + 100)$.

$$60 = (s + 100)A + sB \qquad (ii)$$

Para encontrar os valores de $A\ e\ B$, atribuímos valores a S de forma que cancele $A\ ou\ B$.

Para $s = -100$.

Temos:

$$60 = (-100 + 100)A - 100B$$

$$60 = -100B$$

$$B = \frac{60}{-100}$$

$$B = -\frac{-3}{5}$$

Para $s = 0$.

Temos:

$$60 = (0 + 100)A + 0B$$

$$60 = 100A$$

$$A = \frac{3}{5}$$

Substituindo os valores de A e B em (*).

Temos:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{A}{s} + \frac{B}{(s+100)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3/5}{s} + \frac{-3/5}{(s+100)}\right\}$$

Pela propriedade de linearidade.

Segue,

$$\frac{3}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \frac{3}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+100)}\right\} \text{ (1)}$$

Analisando a transformada inversa de Laplace sem o deslocamento. A partir da tabela das transformadas de Laplace.

Temos:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 1 = f(t)$$

Com o deslocamento,

Temos:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+100)}\right\} = e^{at}f(t) = e^{-100t}1 = e^{-100t}$$

Substituindo as transformadas inversas encontradas em (1).

Obtemos:

$$\mathrm{I(t)} = \frac{3}{5} - \frac{3\mathrm{e}^{-100\mathrm{t}}}{5}$$

$$\mathrm{I(t)} = \frac{3 - 3\mathrm{e}^{-100\mathrm{t}}}{5}$$

Que é a corrente procurada.

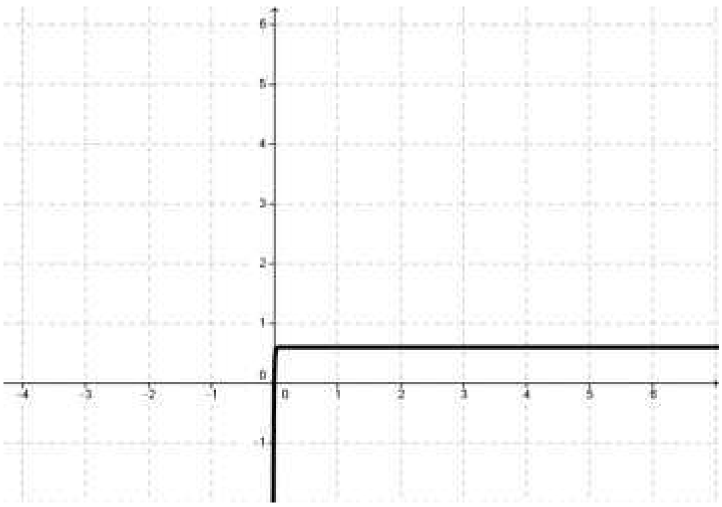
b) calculando o limite.

Temos:

$$\lim_{t \to \infty} \left(\frac{3}{5} - \frac{3e^{100t}}{5} \right) = \frac{3}{5}$$

Portanto a corrente tende a $\frac{3}{5}$. Analisando, o comportamento do gráfico abaixo. Percebemos que a função tende a um comportamento continuo.

Figura 21: Gráfico da corrente em função do tempo.



Fonte: Autor

Exemplo:

Circuito RC.

Uma força eletromotriz de 100 volts é aplicada a um circuito em série, com resistência de 200 ohm, capacitância de 0,0001 farad

a) Determine a carga $Q(t)$ no capacitor, sabendo que $Q(0) = 0$.
b) Encontre I(t).

Resolução.

A partir da dedução (**)

$$Q' + \frac{1}{CR}Q = \frac{E(t)}{R}$$

Substituindo os valores de C, R e E(t).

Obtemos:

$$Q' + \frac{1}{200.\,10^{-4}}Q = \frac{100}{200}$$

$$Q' + \frac{1}{2.\,10^{-2}}Q = \frac{100}{200}$$

$$Q' + 50Q = \frac{1}{2}$$

Logo, temos uma equação diferencial de primeira ordem. Aplicando a transformada de Laplace.

Temos:

$$\mathcal{L}\{\, Q' + 50Q\} = \mathcal{L}\{\,\frac{1}{2}\}$$

Utilizando a linearidade da transformada de Laplace, para resolver a EDO de 1ª ordem.

Temos:

$$\mathcal{L}\{\, Q'\} + \mathcal{L}\{\ 50Q\} = \mathcal{L}\{\frac{1}{2}\}$$

A partir da tabela da transformada de Laplace.

Temos:

$$sF(s) - f(0) + 50F(s) = \frac{1/2}{s}$$

Para $t = 0$, temos $Q(0) = f(0) = 0$.

Assim,

$$sF(s) - 0 + 50F(s) = \frac{1}{2s}$$

Colocando $F(s)$ em evidencia.

$$F(s)(s + 50) = \frac{1}{2s}$$

$$F(s) = \frac{1}{2s(s + 50)}$$

Usando a transformada inversa de Laplace.

$$\mathcal{L}^{-1}\ \{\mathrm{F(s)}\} + \mathcal{L}^{-1}\ \{\ \frac{1}{2s(s+50)}\} = \mathcal{L}^{-1}\ \{\ \frac{A}{2s} + \frac{B}{(s+50)}\} \qquad (*)$$

Por frações parciais.

Temos:

$$\frac{1}{2s(s + 50)} = \frac{A}{2s} + \frac{B}{(s + 50)} \qquad (i)$$

Multiplicando ambos os lados de (i), por $2s(s + 50)$.

$$1 = (s + 50)A + 2sB \qquad (ii)$$

Para encontrar os valores de $A\ e\ B$, atribuímos valores a S de forma que cancele $A\ ou\ B$.

Para $s = -50$.

Temos:

$$1 = (-50 + 50)A - 100B$$

$$1 = -100B$$

$$B = \frac{-1}{100}$$

Para $s = 0$.

Temos:

$$1 = (0 + 50)A + 0B$$

$$1 = 50A$$

$$A = \frac{1}{50}$$

Substituindo os valores de A e B em (*).

Temos:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{A}{2s} + \frac{B}{(s+50)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1/50}{2s} + \frac{-1/100}{(s+50)}\right\}$$

Usando a propriedade de linearidade.

Segue,

$$\frac{1}{50}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2s}\right\} - \frac{1}{100}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+50)}\right\}$$

$$\frac{1}{100}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \frac{1}{100}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+50)}\right\} \ (iv)$$

Analisando a transformada inversa de Laplace sem o deslocamento. A partir da tabela das transformadas de Laplace.

Temos:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 1 = f \quad (t)$$

Com o deslocamento,

Temos:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+50)}\right\} = e^{at}f(t) = e^{-50t}1 = e^{-50t}$$

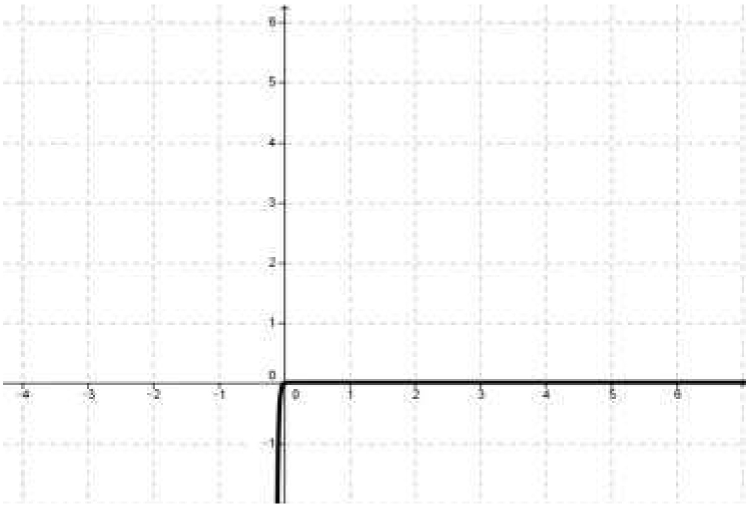
Substituindo as transformadas inversas encontradas em (iv).

Obtemos:

$$Q(t) = \frac{1}{100} - \frac{1}{100}e^{-50t}$$

que é a carga procurada.

Figura 22: Gráfico da carga em função do tempo.



Fonte: Autor

Analisando, o comportamento do gráfico acima. Percebemos que a função tende a um comportamento contínuo.

Segue,

$$I = \frac{dQ}{dt} \qquad (**)$$

Então, derivando Q.

Temos:

$$Q'(t) = -\ \frac{1}{100}e^{-50t}(-50)$$

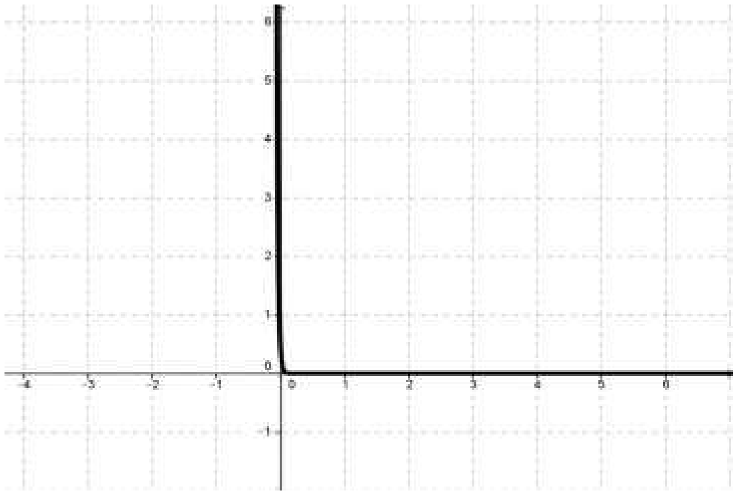
$$I(t) = \frac{50}{100}e^{-50t}$$

$$I(t) = \frac{1}{2}e^{-50t}$$

$$I(t) = \frac{e^{-50t}}{2}$$

que é a função da corrente.

Figura 23: Gráfico da corrente em função do tempo.



Fonte: Autor

Exemplo.

Circuito RLC.

Considere um circuito elétrico em serie com uma fonte de tensão de 600 volts, um indutor de 4 henry, um capacitor de 0,01 farad e um resistor de 32 ohm.

a) Encontre o valor da carga, da corrente, para um tempo qualquer.
b) Calcule a queda de tensão no indutor, no capacitor e no resistor, para um tempo qualquer.
c) Calcule os itens anteriores para t=0.
d) Mostre que o circuito elétrico satisfaz a lei das malhas.

Resolução.

A partir da dedução (****)

Temos:

$$Q'' + \frac{R}{L}Q' + \frac{Q}{LC} = \frac{E(t)}{L}$$

Substituindo os valores de C, R, L e E(t).

Obtemos:

$$Q'' + \frac{32}{4}Q' + \frac{1}{4(0{,}01)}Q = \frac{600}{4}$$

$$Q'' + 8Q' + 25Q = 150$$

Logo, temos uma equação diferencial ordinária de segunda ordem. Aplicando a transforma de Laplace.

Temos:

$$\mathcal{L}\{Q'' + 8Q' + 25Q\} = \mathcal{L}\{150\} \qquad (1)$$

Utilizando a linearidade da transformada de Laplace, para resolver a EDO de 2ª ordem.

Obtemos:

$$\mathcal{L}\{Q''\} + \mathcal{L}\{8Q'\} + \mathcal{L}\{25Q\} = \mathcal{L}\{150\} \qquad (1)$$

A partir da tabela das transformadas de Laplace.

Temos:

$$s^2F(s) - f(0) - f'(0) + 8(sF(s) - f(0)) + 25F(s) = \frac{150}{s}$$

Para $t = 0$, temos $Q(0) = i(0) = f(0) = 0$.

Dai,

$$I = \frac{dQ}{dt} = Q'(0) = f'(0) = 0$$

Assim,

$$s^2F(s) + 8(sF(s)) + 25F(s) = \frac{150}{s}$$

Colocando $F(s)$ em evidência.

Temos:

$$F(s)(s^2 + 8s + 25) = \frac{150}{s}$$

$$F(s) = \frac{150}{s(s^2 + 8s + 25)}$$

Usando a transformada inversa de Laplace.

$$\mathcal{L}^{-1}\ \{\mathrm{F(s)}\ \} = \mathcal{L}^{-1}\ \{\ \frac{150}{\mathrm{s}(s^2+8\mathrm{s}+25)}\} = \ \mathcal{L}^{-1}\ \{\ \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{s}} + \frac{\mathrm{Bs+C}}{(s^2+8\mathrm{s}+25)}\} \qquad (*)$$

Por frações parciais.

Temos:

$$\frac{150}{\mathrm{s}(s^2+8\mathrm{s}+25)} = \ \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{s}} + \frac{\mathrm{Bs}+\mathrm{C}}{(s^2+\ 8\mathrm{s}+25)} \qquad (i)$$

Multiplicando ambos os lados de (i), por $\mathrm{s}(s^2 + 8\mathrm{s} + 25)$

$$150 = (s^2 + 8\mathrm{s} + 25)A + s(Bs\ + C) \qquad (ii)$$

Para encontrar os valores de A, B e C atribuímos valores a S de forma que cancele A, B ou C, ou gere um sistema.

Para $s = 0$.

Temos:

$$150 = (0^2 + 8(0) + 25)A + 0(Bs + C)$$

$$150 = (25)A$$

$$A = \frac{150}{25}$$

$$A = 6$$

Para $s = 1$.

Temos:

$$150 = (s^2 + 8\mathrm{s} + 25)A + s(Bs +\ C)$$

$$150 = (1^2 + 8 + 25)A + 1(B1 +\ C)$$

$$150 = (34)A + (B + C)$$

Substituindo o valor de A.

Temos:

$$150 = (34)6 + (B + C)$$

$$150 = 204 + (B + C)$$

$$(B + C) = 150 - 204$$

$$(B + C) = -54$$

Para $s = -1$.

$$150 = (s^2 + 8s + 25)A + s(Bs + C$$

$$150 = ((-1)^2 - 8 + 25)A - 1(B(-1) + C)$$

$$150 = 18\ (6) + (B - C)$$

$$150 = 108 + (B - C)$$

$$(B - C) = 150 - 108$$

$$(B - C) = 42$$

Dai, temos um sistema.

$$\begin{cases} (B - C) = +42 & (3) \\ (B + C) = -54 & (4) \end{cases}$$

Resolvendo o sistema.

Temos:

$$2B \ = -12$$

$$B \ = -6$$

Substituindo B em (4).

Temos:

$$(B + C) = -54$$

$$(-6 + C) = -54$$

$$C \ = -54 + 6$$

$$C \ = -48$$

Substituindo os valores de A, B, e C em (i).

$$\frac{6}{s} + \frac{-6s - 48}{(s^2 + 8s + 25)}$$

$$\frac{6}{s} - \frac{6s + 48}{(s^2 + 8s + 25)} \qquad (5)$$

Simplificando, obtemos:

$$\frac{6}{s} + \frac{-6(s+8)}{(s^2+8s+25)}$$

Resolvendo $(s^2 + 8s + 25)$.

Completando o quadrado.

$$s^2 + 8s + 16 - 16 + 25 = (s^2 + 8s + 16) - 16 + 25$$

$$(s^2 + 8s + 16) + 9$$

$$(s+4)^2 + 9 \qquad (ii)$$

Substituindo (ii) em (5).

Temos:

$$Q(S) = \frac{6}{s} + \frac{-6(s+8)}{(s+4)^2+9}$$

$$Q(S) = \frac{6}{s} + \frac{-6(s+8)}{(s+4)^2+3^2}$$

$$Q(S) = \frac{6}{s} + \frac{-6(s+4+4)}{(s+4)^2+3^2}$$

$$Q(s) = \frac{6}{s} - 6\left(\frac{(s+4)}{(s+4)^2+3^2} + \frac{4}{(s+4)^2+3^2}\right)$$

$$Q(s) = \frac{6}{s} - 6\left(\frac{(s+4)}{(s+4)^2+3^2}\right) - 6\left(\frac{4}{(s+4)^2+3^2}\right)$$

$$Q(s) = \frac{6}{s} - 6\left(\frac{(s+4)}{(s+4)^2+3^2}\right) - 8\left(\frac{3}{(s+4)^2+3^2}\right)$$

$$Q(s) = 6\frac{1}{s} - 6\left(\frac{(s+4)}{(s+4)^2+3^2}\right) - 8\left(\frac{3}{(s+4)^2+3^2}\right) \qquad (6)$$

Calculando a transformada inversa de Laplace. A partir da tabela das transformadas.

Temos:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 1 = f(t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(s+4)}{(s+4)^2+3^2}\right\} \qquad (7)$$

Analisando (7), pela tabela das transformadas, sem o deslocamento.

Temos:

$$\mathcal{L}^{-1}\ \{\frac{s}{(s)^2+3^2}\} = cos(at) = cos(3t) = f(t)$$

Analisando (7), pela tabela das transformadas, com o deslocamento.

$$\mathcal{L}^{-1}\ \{\frac{(s+4)}{(s+4)^2+3^2}\} = f(s-a) = e^{at}f(t) = e^{-4t}\cos(3t)$$

Calculando a última transformada em (6).

$$6\mathcal{L}^{-1}\ \{\frac{4}{(s+4)^2+3^2}\} = 24\mathcal{L}^{-1}\ \{\frac{1}{(s+4)^2+3^2}\} = 8\mathcal{L}^{-1}\ \{\frac{3}{(s+4)^2+3^2}\} \quad (8)$$

Analisando (7), a partir da tabela das transformadas, sem o deslocamento.

Temos:

$$\mathcal{L}^{-1}\ \{\frac{3}{(s)^2+3^2}\} = sen(at) = sen(3t) = f(t)$$

Analisando (7), a partir da tabela das transformadas, com o deslocamento.

$$\mathcal{L}^{-1}\ \{\frac{3}{(s+4)^2+3^2}\} = f(s-a) = e^{at}f(t) = e^{-4t}\text{sen}(3t)$$

A transformada com o deslocamento: é o produto da e^{at} por $f(t)$sem o deslocamento. Substituindo as transformadas inversas encontradas em (ii).

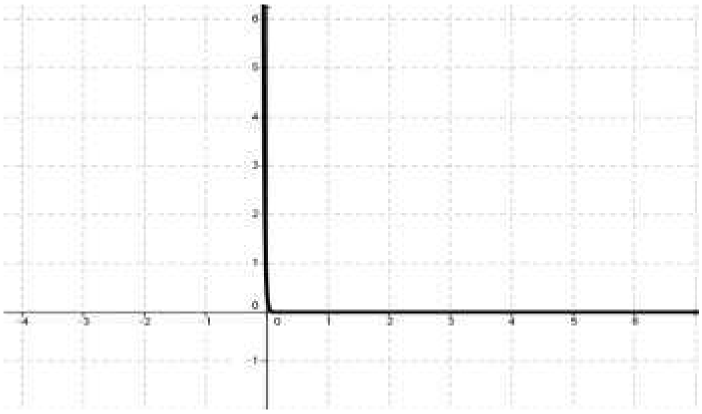
Obtemos:

$$\text{Q(s)} = 6\frac{1}{\text{s}} - 6(\frac{(s+4)}{(s+4)^2+3^2}) - 8(\frac{3}{(s+4)^2+3^2})$$

$$\text{Q(s)} = 6 - 6\ e^{-4t}\cos(3t) - 8e^{-4t}\text{sen}(3t)$$

é a carga procurada.

Figura 24: Gráfico da carga em função do tempo.



Fonte: Autor

b) Derivando Q(t), obtemos: I(t).

$$Q'(t) = 0 - 6[(e^{(-4t)'}\cos(3t) + e^{(-4t)}(cons(3t))') - 8(e^{(-4t)'}sen(3t) + \ e^{-4t}(sen(3t))']$$

$$I(t) = -6[(-4e^{-4t}\cos(3t) + e^{-4t}(-sen(3t))3) - 8(-4e^{-4t}sen(3t) + e^{-4t}cos(3t)'3]$$

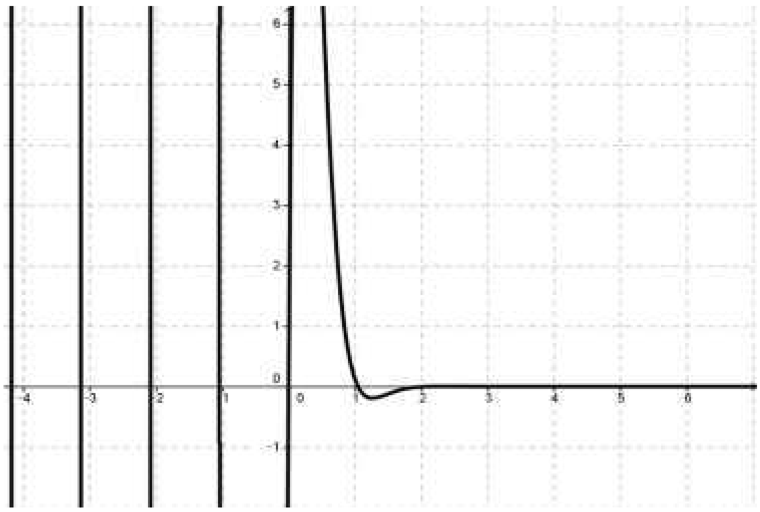
$$I(t) = (24e^{-4t}\cos(3t) + 18e^{-4t}(sen(3t))) + (32e^{-4t}sen(3t) - 24e^{-4t}\cos(3t)]$$

$$I(t) = 18e^{-4t}sen(3t) + 32e^{-4t}sen(3t)$$

$$I(t) = 50e^{-4t}sen(3t)$$

que é a corrente em função do tempo.

Figura 25: Gráfico da corrente em função do tempo.



Fonte: Autor

c). Calculando a queda de tensão no indutor.

Temos:

$$VL = L\ \frac{di}{dt} \qquad (a)$$

Derivando I(t).

Temos:

$$\frac{di}{dt} = 50[e^{-4t'}sen(3t) + e^{-4t}(sen(3t))']$$

$$\frac{di}{dt} = 50[-4e^{-4t}sen(3t) + e^{-4t}cos(3t)3]$$

$$\frac{di}{dt} = -200e^{-4t}sen(3t) + 150e^{-4t}cos(3t)$$

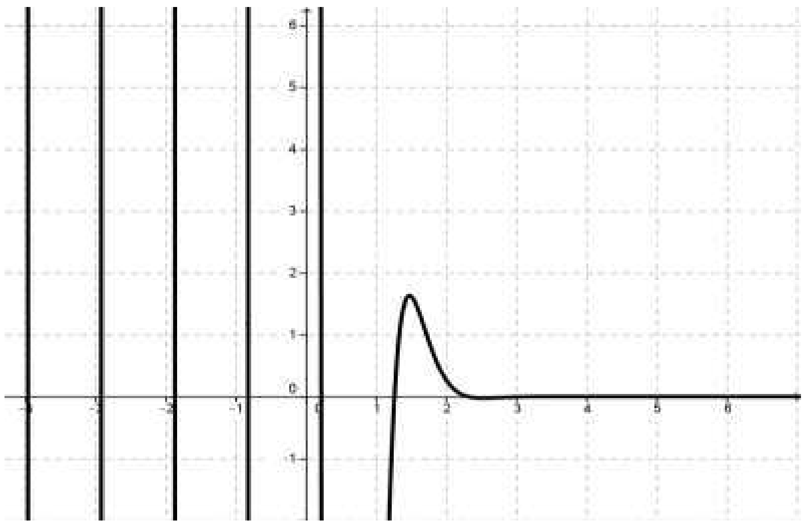
Substituindo os valores de L e de $\frac{di}{dt}$ em (a).

Obtemos:

$$VL = 4[-200e^{-4t}sen(3t) + 150e^{-4t}cos(3t)]$$

$$VL = -800e^{-4t}sen(3t) + 600e^{-4t}cos(3t)$$

Figura 26: Gráfico da queda de tensão no indutor.



Fonte: Autor

Calculando a queda de tensão no capacitor.

Temos:

$$VC = \frac{1}{C}Q \qquad (b)$$

Substituindo, $C = 0{,}01$ e Q em (b).

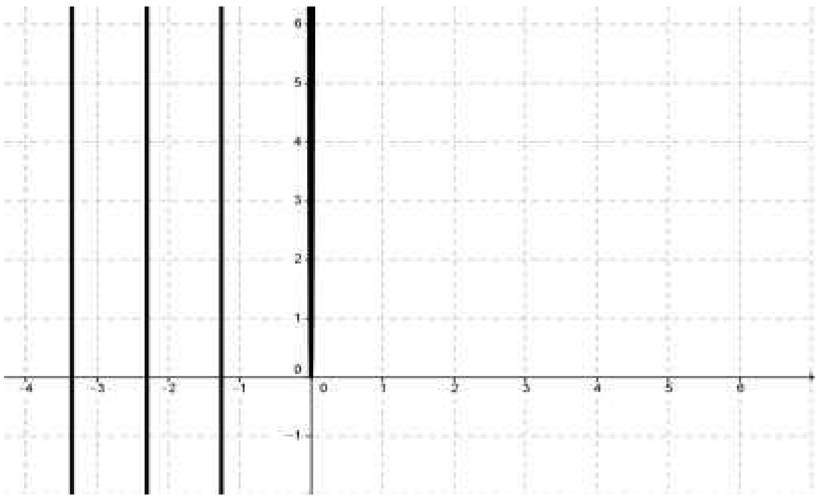
Obtemos:

$$VC = \frac{1}{0{,}01}(\ 6 - 6\ e^{-4t}\cos(3t) - 8e^{-4t}\operatorname{sen}(3t))$$

$$VC = 100(\ 6 - 6\ e^{-4t}\cos(3t) - 8e^{-4t}\operatorname{sen}(3t))$$

$$VC = 600 - 600\ e^{-4t}\cos(3t) - 800e^{-4t}\operatorname{sen}(3t)$$

Figura 27: Gráfico da queda de tensão no capacitor.



Fonte: Autor

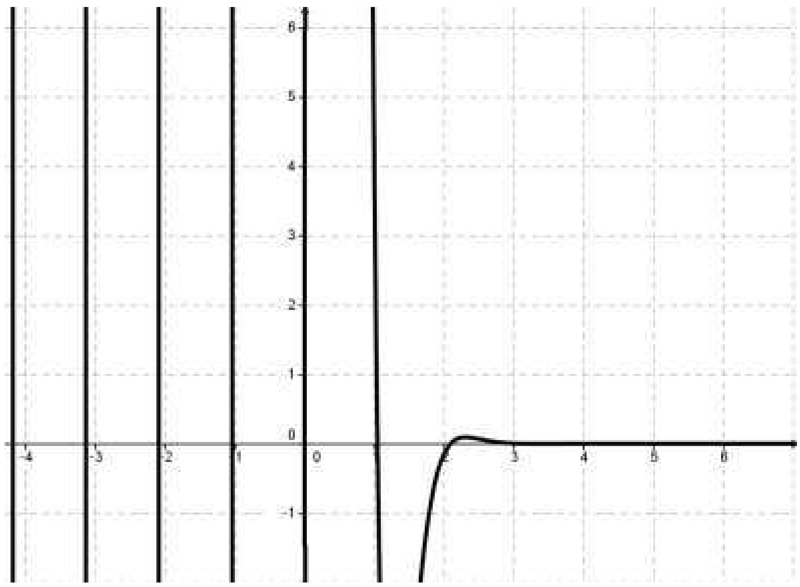
Calculando a queda de tensão no resistor.

$$VR\ = RI$$

$$VR\ = 32[50e^{-4t}sen(3t)]$$

$$VR\ = 1600e^{-4t}sen(3t)$$

Figura 28: Gráfico da queda de tensão no resistor.



Fonte: Autor

Calculando $VC, VL\ e\ VR$ para $t = 0$.

Temos:

$$VL = -800e^{-4t}sen(3t) + 600e^{-4t}cos(3t)$$

$$VL\ = 600v$$

$$VC = (\ 600 - 600\ e^{-4t}\cos(3t) - 800e^{-4t}\mathrm{sen}(3t))$$

$$VC\ = 600 - (600)$$

$$VC\ = 0$$

$$VR\ = 1600e^{-4t}sen(3t)$$

$$VR\ = 0$$

Analisando, se o circuito satisfaz a lei das malhas.

Através da lei das malhas.

Temos:

$$VC + \ VL + \ VR\ = E(t) \qquad\qquad (i)$$

Substituindo, os valores de $VC, VL\ e\ VR$ em (i).

Obtemos:

$$600 + \ 0 + \ 0 = 600$$

$$600 - 600 = 0$$

Logo, satisfaz a lei das malhas.

CONCLUSÃO

Em virtude do que foi mencionado nesse trabalho podemos notar a importância que as equações diferenciais ordinárias têm em nosso cotidiano e sua presença constante em diversas áreas. Devido isso, tivemos a oportunidade de estudar e conhecer um pouco sobre essas equações voltadas para os circuitos elétricos, visando investigar e entender um pouco sobre os circuitos, seus componentes e analisar o comportamento de cada função graficamente. Além, de conhecer e utilizar o método da transformada como ferramenta na resolução das equações diferenciais ordinárias.

REFERÊNCIA.

AMARAL, Lucicleuma Lobato. *Um estudo de transformada de Laplace aplicado a equações diferenciais ordinárias*, 81p, monografia, Universidade Federal do Amapá, Macapá, 2016.

BOYER, C. **Historia da matemática**, 2º edição, São Paulo, edgard blucher, 1996.

DAVID, E, JOHN, L, JOHNNY, R. Fundamentos de análise de circuitos elétricos, Rio de Janeiro, 4ºedição, Prentice-hall do Brasil, 1996.

EDWARD, C. DAVID, E. **Equações diferenciais elementares com problema de contorno,** 3ºedição, São Paulo, santuário, 2007

FLORIN, D. **Introdução a Equações Diferencias:** Teoria e Aplicações, Rio de Janeiro: LTC, 2004.

GUEDES, D. ALOISIO, F. **Equações diferenciais aplicadas,** 3º edição, Rio de Janeiro, 2007.

GARBI, G. **A rainha das ciências**: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática, 5º edição, São Paulo, livraria da física, 2010.

MAXIMO, A. ALVARENGA, B. **curso de física**, volume 3, 6º edição, São Paulo, spicione, 2006.

MACHADO, K. **Equações diferenciais aplicadas a física**, 3º edição, Ponta Grossa, UEPG, 2004.

NÓBREGA, Danielle Dantas. Equações diferenciais ordinárias e algumas aplicações, 58p, monografia, UFRN, Caicó-RN, 2016.

KIENITZ, K. Análise de circuitos: um enfoque de sistemas, São Jose dos Campos, 2ºedição, Instituto Tecnológico de Aeronáutica, 2010.

KREYSZIG, E. **Matemática superior para engenharia**, 9º edição, volume1, LTC, 2008

ZILL, D. G., CULLEN, M. R., **Equações Diferenciais**, São Paulo, Pearson Makron Books, Vol.2, 2001.

ZILL, D. G., CULLEN, M. R., **Equações Diferenciais,** São Paulo, Pearson Makron Books, Vol.1, 2001.

ZILL, D. G. **Equações Diferenciais**: com aplicação em modelagem, São Paulo, thomson, 2003.

ZEMANSKY, SEARS**. Física 3**, 10° edição, São Paulo, Pearson, 2007