



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE - UFCG
CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE - CES
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA E MATEMÁTICA - UAFM
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

NATHAM CÂNDIDO DE OLIVEIRA

**UM ESTUDO SOBRE A PROPRIEDADE DE REFLEXÃO DOS BILHARES
CÔNICOS**

CUITÉ - PB
2019

NATHAM CÂNDIDO DE OLIVEIRA

**UM ESTUDO SOBRE A PROPRIEDADE DE REFLEXÃO DOS BILHARES
CÔNICOS**

Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática, Centro de Educação e Saúde da Universidade Federal de Campina Grande, campus Cuité, em cumprimento às exigências para obtenção de título de Licenciado em Matemática, sob a orientação do professor Dr. Luciano Martins Barros.

CUITÉ - PB
2019

O48e

Oliveira, Natham Cândido de.

Um estudo sobre a propriedade de reflexão dos bilhares cônicos /
Natham Cândido de Oliveira. – Cuité, 2019.

58 f.

Monografia (Licenciatura em Matemática) – Universidade Federal
de Campina Grande, Centro de Educação e Saúde, 2019.

"Orientação: Prof. Dr. Luciano Martins Barros".

Referências.

1. Geometria. 2. Bilhares Cônicos. 3. Cônicas. 4. Propriedade de
Reflexão. I. Barros, Luciano Martins. II. Título.

CDU 514(043)

NATHAM CÂNDIDO DE OLIVEIRA

**UM ESTUDO SOBRE A PROPRIEDADE DE REFLEXÃO DOS BILHARES
CÔNICOS**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Matemática da Unidade Acadêmica de Física e Matemática do Centro de Educação e Saúde da Universidade Federal de Campina Grande, como requisito parcial à obtenção do grau de licenciado em Matemática

Trabalho de Conclusão de Curso aprovado em 04 de julho de 2019.

BANCA EXAMINADORA

Luciano Martins Barros

Prof. Dr. Luciano Martins Barros - UFCG
Orientador

Geilson F. Germano

Prof. Dr. Geilson Ferreira Germano - UFRN
Examinador

Maria de Jesus Rodrigues da Silva

Prof. Me. Maria de Jesus Rodrigues da Silva -
UFCG
Examinador

Dedico esse trabalho à minha mãe Maria Anunciada, por todo carinho e compreensão. Sem o seu incentivo e suas palavras de apoio não teria conseguido.

AGRADECIMENTOS

É muito difícil fazer agradecimentos em momentos tão importantes em nossas vidas como esse, pois sempre deixamos de citar algumas pessoas que de uma forma ou de outra foram importantes para nossa caminhada. Em razão disso, começo agradecendo à Deus pela vida, pela força para superar todos os desafios ao longo dessa caminhada.

Em especial, agradeço à meus pais Áecio Cândido e Maria Anunciada, por todo incentivo, ajuda e paciência ao longo do curso. Desculpa meu pai pela ausência quando o senhor precisou. Minha mãe, sem a senhora nada disso seria concretizado.

As minhas irmãs Djailma Cândido, Danielly Cândido, Emanuely Cândido, Maria José Cândido e Bruna Cândido, que me apoiaram e incentivaram de alguma forma.

Os meus sobrinhos Ana Clara, João Vitor e Maria Luiza, pelos silêncios e compreensão.

Ao meu orientador Dr. Luciano Barros, pela disponibilidade, ajuda e ensinamentos. Obrigado por apoiar nessa ideia, foram enriquecedoras as experiências como seu aluno e orientando.

A Cassianne Lins pelo incentivo, apoio e compreensão nessa reta final da graduação.

Aos meus amigos, Erick Caique, Rennan Porto, Tácio Silva, Sérgio Romilson, pelas opiniões e conselhos valorosos.

Aos “Paçoqueiros” Judcely Nytyeska, Mônica Soares, Hiago Rodrigues, Fatima Carvalho, Ismael Nascimento, Alexandre Gonçalves, Jucielly Micaele e Rita Santos por cada risada e cada paçoca que compartilhamos durante a graduação.

Aos meus amigos de trabalho, que compõem a SEFIN, Roseni Maia, Ivanildo Souto, Esthefsom David e Daniel Lira, pela compreensão e apoio.

A Issac Ferreira, pelas dicas e ajuda.

Aos Professores da Banca Examinadora, Dr. Geilson Ferreira Germano e Me. Maria de Jesus Rodrigues da Silva por todas contribuições e conselhos.

Aos amigos que a UFCG proporcionou, Damião Franceilton, Luis Gomes, Ticiany Marques, Elton Cezar, Seu Vital e Jardel Ribeiro por toda vivência e companheirismo.

A todos os professores do Centro de Educação e Saúde que fizeram parte da minha vida acadêmica. Obrigada por todo ensinamento.

RESUMO

Neste trabalho realiza um estudo sobre as cônicas com o objetivo de apresentar a propriedade refletora utilizando os bilhares cônicos, por ser uma aplicação direta dessa propriedade, possibilitando uma melhor interpretação da mesma, pois ao entrar em movimento a trajetória da bola irá descrever um ponto sobre a mesa do bilhar, que ao atingir a tabela será refletida para a caçapa. Essa propriedade de reflexão, contida nos bilhares cônicos, ocorre pelo fato de que o ângulo de incidência, ou seja, o ângulo de chegada quando a bola atinge a tabela, é igual ao ângulo de reflexão. Para cada bilhar ocorre de maneira diferente. No bilhar elíptico se a bola estiver localizada em uma marcação feita sobre a mesa, ao taca-la em qualquer ponto da tabela, com força suficiente, a mesma tocará apenas uma vez na tabela e será refletida para a caçapa do bilhar. Caso a bola não esteja sobre a marcação ao taca-la, com força suficiente, em direção a mesma a bola tocará apenas uma vez na tabela e será refletida para a caçapa. No bilhar hiperbólico, independentemente da posição, ao tacar a bola em direção a uma marcação feita na tabela, a mesma atingirá apenas uma vez a tabela e será refletida para a caçapa do bilhar. No bilhar parabólico, também independentemente da posição da bola, ao taca-la paralelamente ao eixo de simetria, ou seja, taca-la reta em qualquer ponto da tabela, tocará apenas uma vez na mesma e será refletida para a caçapa. Demonstra-se essa propriedade de reflexão utilizando definições de cada curva, deduzindo a equação canônica das mesmas, derivando implicitamente cada equação deduzida, obtendo o coeficiente angular das retas tangente e normal de cada cônica, utilizando a Tangente Trigonométrica dos Ângulos, Teorema do Ângulo Externo, Coeficientes Angulares e Manipulações Algébricas.

Palavras-chave: Cônicas, Propriedade de Reflexão, Bilhares Cônicos.

ABSTRACT

In this work, a study is carried out on the conics with the objective of presenting the reflective property using the conical billiards, since it is a direct application of this property, allowing a better interpretation of the same, because when moving the ball trajectory will describe a point about the billiard table, which upon reaching the table will be reflected to the pocket. This reflection property, contained in the conical billiards, is due to the fact that the angle of incidence, ie the angle of arrival when the ball reaches the table, is equal to the angle of reflection. For each billiard it occurs differently. In elliptical billiards if the ball is located on a marking made on the table, to draw it anywhere on the table with enough force, it will only play once in the table and will be reflected to the billiard pocket. If the ball is not over the mark, with sufficient force, towards it the ball will play only once in the table and will be reflected to the pocket. In hyperbolic billiards, regardless of the position, when you hit the ball towards a mark made on the table, it will hit only once the table and will be reflected to the billiard deck. In the parabolic billiard, also regardless of the position of the ball, to stick it parallel to the axis of symmetry, that is, to pick it straight at any point in the table, it will touch only once in the same and will be reflected to the pocket. This property of reflection is demonstrated using definitions of each curve, deducing the canonical equation of the same, deriving implicitly each deduced equation, obtaining the angular coefficient of the tangent and normal lines of each conic, using Angular Trigonometric Tangent, External Angle Theorem , Angular Coefficients and Algebraic Manipulations.

Keywords: Conics, Property of Reflection, Conics Billiard.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1	– $\triangle ABC$.	3
Figura 2	– O ponto D na semirreta definida pelo segmento \overline{BC} .	4
Figura 3	– Reta r paralela ao segmento \overline{AB} .	4
Figura 4	– Os pontos P_1 e P_2 da reta s .	5
Figura 5	– Os pontos P_1 e P_2 sobre o gráfico da função.	6
Figura 6	– Sucessivas posições da reta s .	7
Figura 7	– Reta n normal.	8
Figura 8	– Retas perpendiculares.	9
Figura 9	– Retas r e s .	11
Figura 10	– Retas r e s .	12
Figura 11	– Cone.	13
Figura 12	– Ângulo formado pela interseção.	13
Figura 13	– Variação da inclinação do plano de secção.	14
Figura 14	– Pontos da elipse.	14
Figura 15	– Elementos da elipse.	15
Figura 16	– $\triangle B_1CF_1$ e o $\triangle B_1CF_2$.	16
Figura 17	– Pontos da hipérbole.	21
Figura 18	– Elementos da hipérbole.	22
Figura 19	– Hipérbole.	26
Figura 20	– Pontos da parábola.	27
Figura 21	– Elementos da parábola.	27
Figura 22	– Pontos $Q = (x, y)$ e $G = (-p, y)$.	28
Figura 23	– Bilhar Elíptico.	31
Figura 24	– O ponto P no vértice.	32
Figura 25	– O ponto P pertencente a elipse.	32
Figura 26	– Tangente trigonométrica do ângulo.	34
Figura 27	– $\triangle QPF_2$.	34
Figura 28	– $\triangle F_1PQ$.	36
Figura 29	– Refletor odontológico.	38
Figura 30	– Galeria de sussurro.	39
Figura 31	– Bilhar Hiperbólico.	40
Figura 32	– Reta t tangente.	41
Figura 33	– Tangente trigonométrica do ângulo.	42
Figura 34	– $\triangle F_1PG$.	43
Figura 35	– $\triangle GPF_2$.	45

Figura 36 – Telescópios de reflexão.	47
Figura 37 – Bilhar Parabólico	48
Figura 38 – O ponto P coincidindo com o vértice da parábola.	49
Figura 39 – O ponto P diferente do vértice da parábola.	49
Figura 40 – Reta n	50
Figura 41 – Tangente trigonométrica do ângulo.	51
Figura 42 – $\triangle FPG$	51
Figura 43 – Reta r_2	53
Figura 44 – Propriedade de reflexão da parábola.	54
Figura 45 – Antena parabólica.	55

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	1
1 ELIPSE, HIPÉRBOLE e PARÁBOLA	3
1.1 Resultados Básicos	3
1.2 Elipse	14
1.2.1 Equação Canônica da Elipse	17
1.2.2 Coeficiente Angular das Retas Tangente e Normal à Elipse	19
1.3 Hipérbole	21
1.3.1 Equação Canônica da Hipérbole	22
1.3.2 Coeficiente Angular das Retas Tangente e Normal à Hipérbole	24
1.3.3 Assíntotas	26
1.4 Parábola	27
1.4.1 Equação Canônica da Parábola	28
1.4.2 Coeficiente Angular das Retas Tangente e Normal à Parábola	29
2 BILHAR ELÍPTICO	31
2.1 Demonstração Algébrica	31
2.2 Aplicação da Propriedade de Reflexão da Elipse	38
3 BILHAR HIPERBÓLICO	40
3.1 Demonstração Algébrica	40
3.2 Aplicação da Propriedade de Reflexão da Hipérbole	47
4 BILHAR PARABÓLICO	48
4.1 Demonstração Algébrica	48
4.2 Aplicação da Propriedade de Reflexão da Parábola	54
CONCLUSÃO	56
Referências	57

INTRODUÇÃO

A matemática foi e vem sendo desenvolvida mediante as necessidades do ser humano em solucionar determinados problemas, no caso das cônicas não foi diferente, com os avanços nos estudos as propriedades das cônicas obtiveram aplicações. Ganhou notoriedade nas áreas como astronomia, problemas físicos e arquitetônicos.

As cônicas possuem a propriedade de reflexão, cujas aplicações são encontradas em diversas áreas. Podendo citar a propriedade refletora da elipse empregada em aparelhos de iluminação em consultórios dentários, por meio da propriedade o equipamento tem a capacidade de concentrar feixes de luz em um único ponto. A propriedade refletora da parábola abrange diversas áreas, suas aplicações são encontradas nas antenas parabólicas, faróis de veículos entre outras. A propriedade de reflexão da hipérbole combinada com a propriedade de reflexão da parábola propicia a construção de telescópios de reflexão.

De acordo com Lorenzato (2006) material didático é “qualquer instrumento útil ao processo de ensino e aprendizagem”. Então tabuleiros, cartas, tangram, jogos, lápis, bilhares cônicos e quadro de acordo com a definição do autor são considerados materiais didáticos. Neste trabalho será apresentada a propriedade de reflexão das cônicas, utilizando os bilhares cônicos como material didático.

O bilhar é qualquer jogo desenvolvido em uma mesa utilizando tacos e bolas. No caso do bilhar cônico o diferencial está no formato da mesa de jogo, pois foram construídos sobre o esboço de uma elipse, de uma parábola e de uma hipérbole o qual é jogado com apenas uma bola de cada vez.

A utilização dos bilhares cônicos como recurso didático pode favorecer o ensino/aprendizagem de definições e propriedades de uma forma lúdica possibilitando ao estudante adquirir conhecimentos matemáticos por meio de um processo alternativo. Esta forma de ensino permite que os alunos construam um pensamento crítico sobre o assunto abordado.

Ainda segundo Lorenzato (2006), os materiais didáticos podem desempenhar múltiplas funções, dependendo do objetivo almejado, seja ele, expor um assunto, motivar os alunos, auxiliar a memorização de resultados ou apresentar uma propriedade.

Será apresentada a propriedade refletora das cônicas por meio dos bilhares cônicos com a finalidade de facilitar a interpretação da mesma, pois a bola irá representar um ponto que descreverá uma trajetória sobre a mesa, ao atingir a tabela do bilhar, a bola será refletida com o ângulo de reflexão igual ao ângulo de incidência. Com isso, será refletida em direção a um ponto denominado foco.

O trabalho é constituído por uma pesquisa bibliográfica e está dividido em quatro ca-

pítulos. No primeiro Capítulo, apresenta alguns resultados básicos a respeito de coeficientes angulares, tangente trigonométrica, derivada implícita e as deduções das equações canônicas das curvas. No segundo Capítulo, demonstra-se a propriedade de reflexão da elipse por meio do bilhar elíptico e aborda algumas aplicações além do bilhar. No terceiro Capítulo, através do bilhar hiperbólico demonstra-se a propriedade de reflexão da hipérbole e aborda algumas aplicações. No quarto Capítulo, utilizando o bilhar parabólico, também demonstra a propriedade de reflexão da parábola e algumas aplicações.

1 ELIPSE, HIPÉRBOLE E PARÁBOLA

Este Capítulo apresenta alguns resultados básicos a respeito de coeficientes angulares, tangente trigonométrica, derivada implícita e as deduções das equações canônicas das curvas estudadas.

Utiliza-se as letras maiúsculas, A, B, C , para representar os pontos do plano, as letras minúsculas, r, s, \dots , para representar as retas e para os ângulos as letras gregas α, β, φ .

O símbolo \blacktriangle designa triângulo. O ângulo é a reunião de duas semirretas de mesma origem, sendo $\hat{A}BC$ usado para denotar o ângulo formado no ponto B e, a notação $m(\hat{A}BC)$ usada para representar a medida do ângulo.

O segmento AB é constituído por dois pontos (A e B) e por todos os pontos que encontra-se entre eles e, denotado por \overline{AB} . Sendo a notação $m(\overline{AB})$ usada para representar a medida do \overline{AB} .

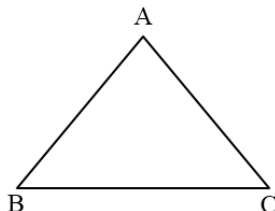
1.1 Resultados Básicos

O Teorema do Ângulo externo faz-se necessário para o entendimento dos próximos capítulos, enunciado como sendo:

Teorema 1.1 (Ângulo Externo) *A medida de um ângulo externo de um triângulo é igual a soma das medidas dos dois ângulos internos que não lhe são adjacentes.*

Demonstração. Considera-se o $\blacktriangle ABC$,

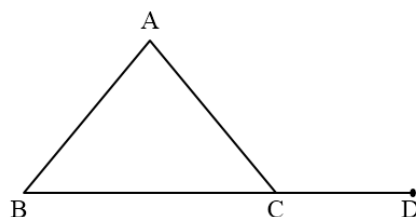
Figura 1 – $\blacktriangle ABC$.



Fonte: Autoria própria.

Marca-se um ponto D na semirreta definida pelo segmento \overline{BC} de tal maneira que o ponto C fique entre os pontos B e D , como mostra a Figura (2).

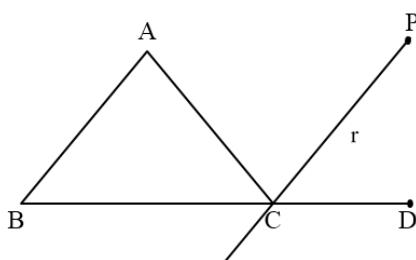
Figura 2 – O ponto D na semirreta definida pelo segmento \overline{BC} .



Fonte: Autoria própria.

A partir do ponto C traça-se uma reta r paralela ao \overline{AB} e marca um ponto P na reta r , Figura (3).

Figura 3 – Reta r paralela ao segmento \overline{AB} .



Fonte: Autoria própria.

Por construção tem-se:

$$m(\hat{A}CD) = m(\hat{ACP}) + m(\hat{PCD}). \quad (1.1)$$

Note que, os ângulos \hat{ACP} e \hat{A} são alternos internos, pois a semirreta definida pelo segmento \overline{AB} e a reta r são paralelas e interceptam outra semirreta transversal que é definida pelo segmento \overline{AC} . Portanto,

$$m(\hat{ACP}) = m(\hat{A}). \quad (1.2)$$

Por outro lado os ângulo \hat{PCD} e \hat{B} são correspondentes, pois o segmento \overline{AB} é paralelo a reta r e é interceptada por uma semirreta transversal definida pelo segmento \overline{BD} . Logo,

$$m(\hat{PCD}) = m(\hat{B}). \quad (1.3)$$

Substituindo (1.2) e (1.3) em (1.1),

$$m(\hat{A}CD) = m(\hat{A}) + m(\hat{B}). \quad (1.4)$$



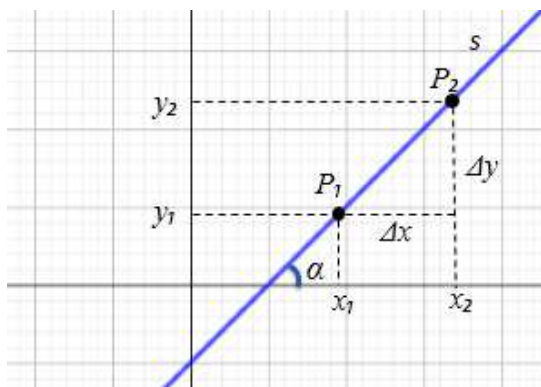
Assim a medida do ângulo externo \widehat{ACD} é igual a soma das medidas dos dois ângulos internos que não lhe são adjacentes, respectivamente \widehat{ABC} e \widehat{BAC} .

Iniciando o conceito de coeficiente angular de uma reta chegando até a interpretação geométrica da derivada de uma função, que será posteriormente definida.

Sejam s uma reta, não-vertical, $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ dois pontos quaisquer de s , com $P_1 \neq P_2$, os números $\Delta x = x_2 - x_1$ e $\Delta y = y_2 - y_1$ são chamados de acréscimo de x e y , respectivamente.

Em outras palavras, $x_2 = \Delta x + x_1$ e $y_2 = \Delta y + y_1$ são os acréscimos que levam do ponto P_1 ao ponto P_2 , Figura (4).

Figura 4 – Os pontos P_1 e P_2 da reta s .



Fonte: Autoria própria.

Existe uma relação entre as coordenadas dos pontos que expressa a inclinação da reta s , a qual é dada pela definição a seguir.

Definição 1.1 *O coeficiente angular de uma reta é dado pela seguinte razão*

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

ou

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

O resultado de m expressa o quanto a reta s está inclinada em relação ao eixo x e pode ser chamada também de declive ou declividade.

A escolha, seja ela do ponto P_1 para o ponto P_2 , ou do ponto P_2 para o ponto P_1 , é irrelevante para o número m . Ou seja,

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}.$$

Por outro lado, com base na figura (4), pode-se deduzir que a inclinação de uma reta também pode ser obtida pela tangente trigonométrica do ângulo α . Então:

$$\tan(\alpha) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

ou

$$\tan(\alpha) = m.$$

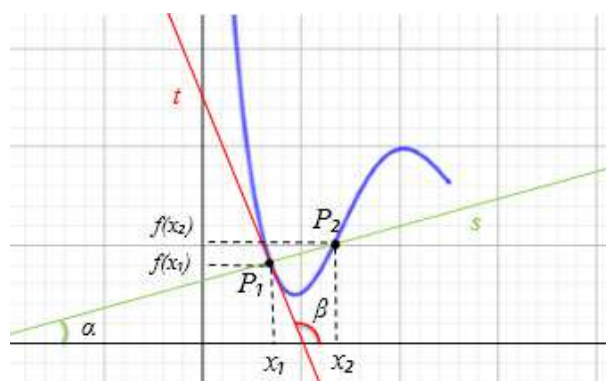
Dados dois pontos quaisquer sobre uma reta, por meio das coordenadas dos mesmos obtêm-se o coeficiente angular m . Considerando $P = (x_1, y_1)$ um ponto particular e $Q = (x, y)$ um ponto genérico da reta, e escrevendo,

$$y - y_1 = m(x - x_1),$$

tem-se a equação da reta de coeficiente angular m , que passa pelo ponto P .

Agora ao invés de uma reta considere uma curva. Como os pontos não acompanham uma linha reta, então valores de m diferem, pois a inclinação varia de acordo com o contorno da curva. Sendo f uma função contínua no intervalo aberto I e sobre o gráfico da mesma dois pontos, $P_1 = (x_1, f(x_1))$ e $P_2 = (x_2, f(x_2))$, como mostra a Figura (5).

Figura 5 – Os pontos P_1 e P_2 sobre o gráfico da função.



Fonte: Autoria própria.

Seja s a reta que passa por P_1 e P_2 , o coeficiente angular da reta definida por esses dois pontos é dada por:

$$m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

também podemos escrever como a tangente trigonométrica de α . Ou seja,

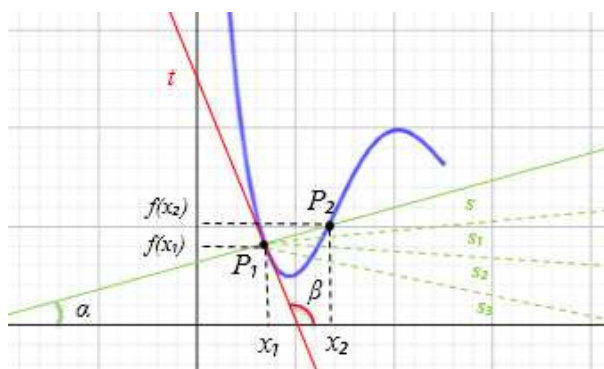
$$\tan(\alpha) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

ou ainda,

$$\tan(\alpha) = m.$$

Considere o ponto P_1 fixo e o ponto P_2 aproximando-se de P_1 , obtendo sucessivas posições, s_1, s_2, s_3, \dots , como mostra na Figura (6).

Figura 6 – Sucessivas posições da reta s .



Fonte: Autoria própria.

Induzir o ponto P_2 a aproximar-se do ponto P_1 , consiste em tomar o número x_2 cada vez mais próximo de x_1 , denotado por m_t , escrevendo como sendo,

$$m_t = \lim_{x_2 \rightarrow x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}, \text{ desde que exista}$$

com $\Delta x = x_2 - x_1$, tem-se:

$$m_t = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x},$$

note que, quando Δx tende a 0, então $\tan(\alpha)$ tende a $\tan(\beta)$. Portanto:

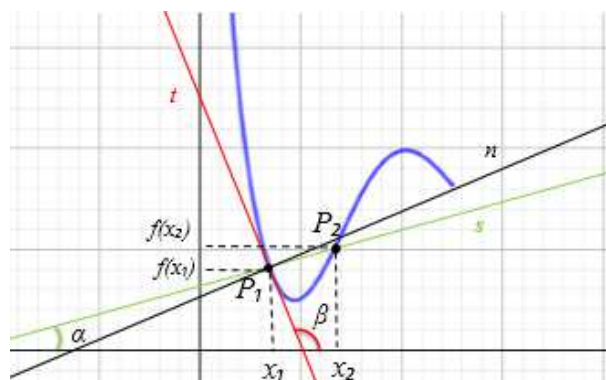
$$\tan(\beta) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}.$$

Assim, o declive da reta s secante aproxima-se de uma posição limite m_t que é igual a $\tan(\beta)$, dada pela reta t , na medida que o ponto P_2 tende ao ponto P_1 . Com isso, segue a seguinte definição:

Definição 1.2 A reta que passa pelo ponto P_1 e tem coeficiente angular m_t é chamado reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x_1, f(x_1))$.

Definida a reta t , tangente ao gráfico da função f em P_1 , a reta n perpendicular à t nesse ponto é chamada reta normal, Figura (7).

Figura 7 – Reta n normal.



Fonte: Autoria própria.

Realiza-se a seguinte definição, para a derivada de uma função.

Definição 1.3 *Sejam f uma função definida em um intervalo aberto I e $x_1 \in I$. O limite*

$$\lim_{x_2 \rightarrow x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

quando existe e é finito, denomina-se derivada de f em x_1 e indicaremos por $f'(x_1)$. Portanto

$$f'(x_1) = \lim_{x_2 \rightarrow x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

A derivada de f , em x_1 , é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa x_1 . Finalizado os assuntos envolvendo funções que podem ser descritas por uma variável, usualmente y , que depende explicitamente de outra variável, normalmente x , ou seja

$$y = f(x),$$

no entanto em algumas ocasiões é mais conveniente definir y de maneira implícita, então segue a seguinte definição.

Definição 1.4 *Uma função contínua em um intervalo aberto é dita ser implícita numa equação onde figurem as variáveis x e y , contando que ao substituir o y por $f(x)$, a equação resultante seja verdadeira para todos os valores de x no domínio de f .*

Quando $y = f(x)$, a inclinação da reta tangente ao gráfico no ponto $(x_1, f(x_1))$ é a derivada $f'(x_1)$, que indicaremos por m_t . Ou seja,

$$m_t = f'(x_1),$$

ou, sob uma notação distinta,

$$m_t = \frac{dy}{dx}.$$

Com $y = f(x)$, pode-se encontrar $\frac{dy}{dx}$, derivando a função f , onde escreve-se como sendo, $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ ou apenas como $\frac{dy}{dx} = y'$.

Quando y está definido por meio de uma equação implícita, pode-se calcular a derivada da função definida implicitamente sem a necessidade de explicitá-la, usando a Regra da Cadeia. Considerando $y = f(x)$, onde a expressão para $f(x)$ não é conhecida, derivando ambos os membros da equação em relação a x . Obtendo a resolução da equação isolando y' . Seguindo o mesmo raciocínio, considerando $x = g(y)$ chega a x' .

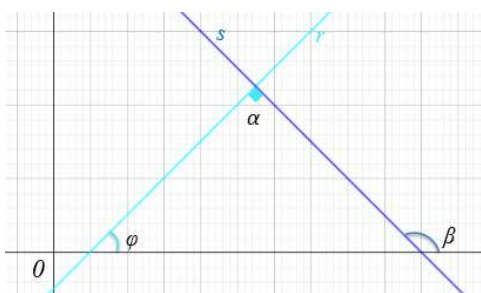
Enfatizado o conceito de coeficiente angular e derivada, segue com assuntos referentes a ângulos formados por duas retas. Apresentando o seguinte lema:

Lema 1.1 *Sejam m_r, m_s os coeficientes angulares das retas r e s , respectivamente. As retas r e s são perpendiculares entre si se o produto de m_r e m_s for igual a -1 . Ou seja,*

$$m_r m_s = -1.$$

Demonstração. r e s duas retas no plano, formando ângulos φ e β , respectivamente. α é o ângulo formado pela interseção das retas, Figura (8).

Figura 8 – Retas perpendiculares.



Fonte: Autoria própria.

Pelo Teorema do Ângulo Externo, tem-se:

$$\beta = \varphi + \alpha$$

ou ainda,

$$\beta - \alpha = \varphi,$$

aplicando a tangente em ambos os membros da expressão,

$$\tan(\varphi) = \tan(\beta - \alpha),$$

reescrevendo segue,

$$\tan(\varphi) = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\cos(\beta - \alpha)}.$$

Tome $\alpha = \left(\frac{\pi}{2}\right)$,

$$\tan(\varphi) = \frac{\sin\left(\beta - \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\beta - \frac{\pi}{2}\right)}.$$

Desenvolvendo o seno e o cosseno da diferença, temos:

$$\tan(\varphi) = \frac{\sin(\beta) \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos(\beta)}{\cos(\beta) \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin(\beta) \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)},$$

sabendo $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ e $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. Então,

$$\tan(\varphi) = -\frac{\cos(\beta)}{\sin(\beta)},$$

com algumas manipulações algébricas,

$$\tan(\varphi) = -\frac{1}{\tan(\beta)},$$

multiplicando ambos os lados da expressão anterior por $\tan(\beta)$, tem-se:

$$\tan(\beta) \tan(\varphi) = -1.$$

Como a tangente trigonométrica do ângulo, formada pela reta e o eixo x , é o coeficiente angular das respectivas retas, então escreve como sendo:

$$m_s m_r = -1.$$

■

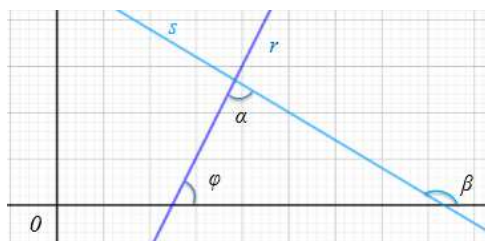
Apresenta-se também um lema de extrema importância para as demonstrações nos próximos capítulos:

Lema 1.2 *Sejam duas retas r , s , não verticais, de coeficientes angulares m_r e m_s , respectivamente, formam entre si um ângulo agudo de medida α , então:*

$$\tan(\alpha) = \left| \frac{m_s - m_r}{1 + (m_s m_r)} \right|.$$

Demonstração.

Tome duas retas r e s , com φ o ângulo formado pela reta r e o eixo x , β o ângulo formado pela reta s e o eixo x , e α o ângulo formado pela interseção dessas duas retas. Figura (9).

Figura 9 – Retas r e s .

Fonte: Autoria própria.

Pelo Teorema do Ângulo Externo, tem-se:

$$\beta = \varphi + \alpha$$

da expressão anterior, segue:

$$\beta - \varphi = \alpha,$$

ou ainda,

$$\tan(\alpha) = \tan(\beta - \varphi)$$

chegando,

$$\tan(\alpha) = \frac{\tan(\beta) - \tan(\varphi)}{1 + [\tan(\beta) \tan(\varphi)]}.$$

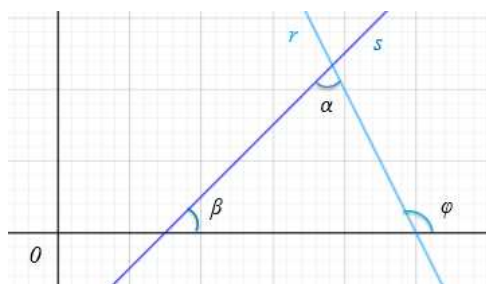
Como o coeficiente angular pode ser escrito como a tangente trigonométrica do ângulo, segue que:

$$\tan(\beta) = m_s \quad e \quad \tan(\varphi) = m_r,$$

reescrevendo como sendo,

$$\tan(\alpha) = \frac{m_s - m_r}{1 + (m_s m_r)}.$$

Por outro lado.

Figura 10 – Retas r e s .

Fonte: Autoria própria.

Mais uma vez pelo Teorema do Ângulo Externo, tem-se:

$$\varphi = \beta + \alpha$$

obtendo,

$$\alpha = \varphi - \beta.$$

segue que:

$$\tan(\alpha) = \tan(\varphi - \beta),$$

chegando a:

$$\tan(\alpha) = \frac{\tan(\varphi) - \tan(\beta)}{1 + [\tan(\varphi) \tan(\beta)]}.$$

Como o coeficiente angular pode ser escrito como a tangente trigonométrica do ângulo, ou seja,

$$\tan(\varphi) = m_r \quad e \quad \tan(\beta) = m_s,$$

reescrevendo,

$$\tan(\alpha) = \frac{m_r - m_s}{1 + (m_r m_s)}$$

ou ainda,

$$\tan(\alpha) = -\frac{m_s - m_r}{1 + (m_s m_r)}.$$

Logo, em qualquer situação tem-se:

$$\tan(\alpha) = \left| \frac{m_s - m_r}{1 + (m_s m_r)} \right|.$$

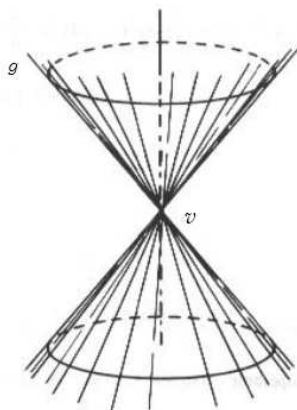
■

Portanto, a expressão anterior nos fornece um ângulo agudo α , formado pelas retas r e s .

A propriedade que pretende-se demonstrar está presente nas curvas obtidas por meio de secções com um plano no cone. Considere um cone circular de duas folhas, que estende-se indefinidamente em ambas as direções.

Uma geratriz do cone é uma reta que encontra-se sobre o mesmo, o conjunto de todas essas geratrizes contém um ponto v em comum, denominado vértice, Figura (11).

Figura 11 – Cone.

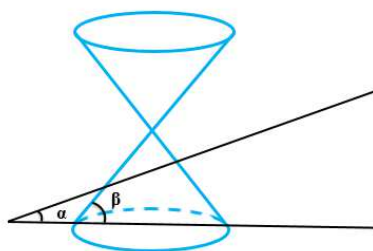


Fonte: Autoria própria.

Por meio de um cone circular duplo, variando o ângulo entre agudo, reto ou obtuso, do plano de secção obtém-se curvas distintas.

Considere β o ângulo formado pela entre geratriz e a base do cone e seja α o ângulo formado pelo plano secante e a base do cone, Figura (12).

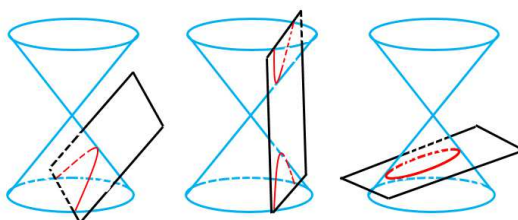
Figura 12 – Ângulo formado pela interseção.



Fonte: Autoria própria.

De acordo com a variação da inclinação do plano de secção tem-se,

Figura 13 – Variação da inclinação do plano de secção.



Fonte: Autoria própria.

a parábola com $\alpha = \beta$, hipérbole com $\alpha > \beta$ e elipse com $\alpha < \beta$.

1.2 Elipse

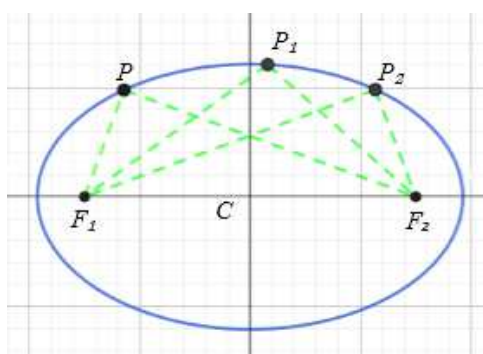
Definição 1.5 Sejam F_1, F_2 pontos do plano e r um número real positivo, com $d(F_1, F_2) < r$. O conjunto de todos os pontos P do plano, tais que

$$d(F_1, P) + d(P, F_2) = r$$

é chamado de elipse de focos F_1, F_2 e Eixo Maior r .

Se P, P_1, P_2, \dots , são pontos da elipse, então

Figura 14 – Pontos da elipse.

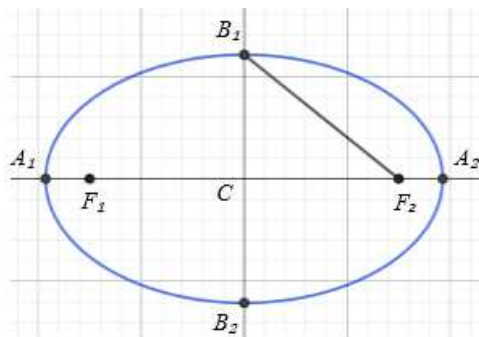


Fonte: Autoria própria.

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = d(P_1, F_1) + d(P_1, F_2) = d(P_2, F_1) + d(P_2, F_2) = r. \quad (1.5)$$

Os elementos da elipse são:

Figura 15 – Elementos da elipse.



Fonte: Autoria própria.

1. Os pontos A_1 , A_2 e B_1 , B_2 , são os vértices;
2. O segmento com extremidade A_1 e A_2 é o eixo maior;
3. O segmento com extremidade B_1 e B_2 é o eixo menor;
4. O ponto C gerado pela interseção dos eixos da elipse é o centro;
5. Os pontos F_1 e F_2 situados no eixo maior, dispostos equidistantes dos vértices e do centro da elipse, são os focos.

Antes de deduzir a equação canônica da curva, mostra-se que a distância do centro da elipse ao vértice A é igual a uma constante a , com $a > 0$, e a medida do segmento $\overline{B_1F_2}$ também é igual a a , ou seja, $m(\overline{B_1F_2}) = a$.

Pela definição da elipse, segue que:

$$d(A_1, A_2) = 2a, \text{ com } a > 0$$

reescrevendo $d(A_1, A_2)$, como sendo:

$$d(A_1, A_2) = d(F_1, A_2) + d(F_2, A_2)$$

assim,

$$d(F_1, A_2) + d(F_2, A_2) = 2a. \tag{1.6}$$

Também reescrevendo $d(F_1, A_2)$. Ou seja,

$$d(F_1, A_2) = 2d(C, F_2) + d(F_2, A_2), \tag{1.7}$$

substituindo (1.6) em (1.7), obtemos

$$2d(C, F_2) + d(F_2, A_2) + d(F_2, A_2) = 2a$$

somando os termos iguais, segue que:

$$2d(F_2, A_2) + 2d(C, F_2) = 2a, \tag{1.8}$$

dividindo (1.8) por 2, tem-se:

$$d(C, F_2) + d(F_2, A_2) = a. \tag{1.9}$$

Note pela figura (15), que:

$$d(C, F_2) + d(F_2, A_2) = d(C, A_2) \tag{1.10}$$

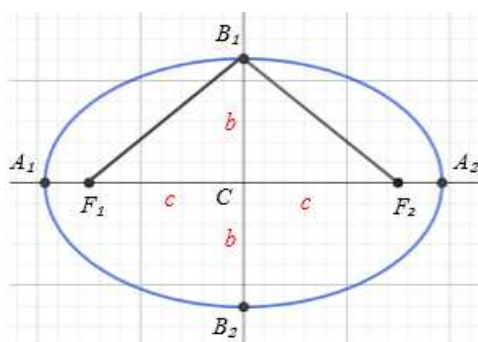
substituindo (1.10) em (1.9). Então,

$$d(C, A_2) = a. \tag{1.11}$$

Agora mostrará que, $m(\overline{B_1F_2}) = a$. Pela definição tem-se,

$$d(F_1, B_1) + d(B_1, F_2) = 2a. \tag{1.12}$$

Figura 16 – $\triangle B_1CF_1$ e o $\triangle B_1CF_2$.



Fonte: Autoria própria.

Pelo fato dos focos serem equidistantes e os $\triangle B_1CF_1$ e $\triangle B_1CF_2$ compartilharem o mesmo segmento, $\overline{B_1C}$, então os triângulos são congruentes. Então,

$$d(F_1, B_1) = d(B_1, F_2). \tag{1.13}$$

Substituindo (1.13) em (1.12):

$$d(B_1, F_2) + d(B_1, F_2) = 2a,$$

somando os termos em comum. Ou seja,

$$2d(B_1, F_2) = 2a$$

dividindo ambos os membros da igualdade por 2, tem-se:

$$d(B_1, F_2) = a.$$

Portanto, a medida do segmento $\overline{B_1F_2}$ é igual a a , com $a > 0$.

1.2.1 Equação Canônica da Elipse

Para obter a equação canônica da curva, é conveniente considerar a elipse no plano xy , de tal maneira que seu centro C coincida com a origem do sistema xy e os focos F_1 e F_2 estejam localizados nas partes positiva e negativa do eixo x , ou seja, $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$.

Pela definição, se $P = (x, y)$ pertence a elipse, então:

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a. \quad (1.14)$$

As distâncias entre o ponto P e os focos F_1 e F_2 são:

$$d(P, F_1) = \sqrt{(x - (-c))^2 + (y - 0)^2} \quad e \quad d(P, F_2) = \sqrt{(x - c)^2 + (y - 0)^2} \quad (1.15)$$

substituindo (1.15) em (1.14), segue que:

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a$$

ou ainda,

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x - c)^2 + y^2}.$$

Elevando ambos os membros da expressão anterior ao quadrado.

$$\left(\sqrt{(x + c)^2 + y^2}\right)^2 = \left(2a - \sqrt{(x - c)^2 + y^2}\right)^2,$$

tem-se:

$$(x + c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + (x - c)^2 + y^2.$$

Desenvolvendo o quadrado da soma e o quadrado da diferença, obtendo:

$$x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2,$$

chegando a,

$$4xc = 4a^2 - 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2}.$$

Dividindo ambos os membros da equação por 4, tem-se:

$$xc = a^2 - a\sqrt{(x - c)^2 + y^2}$$

da expressão anterior, obtêm-se que:

$$xc - a^2 = -a\sqrt{(x - c)^2 + y^2}.$$

Elevando mais uma vez, ambos os membros da equação ao quadrado.

$$(xc - a^2)^2 = \left(-a\sqrt{(x - c)^2 + y^2}\right)^2,$$

segue que:

$$x^2c^2 - 2a^2xc + a^4 = a^2[(x - c)^2 + y^2].$$

Desenvolvendo o quadrado da diferença.

$$x^2c^2 - 2a^2xc + a^4 = a^2(x^2 - 2xc + c^2 + y^2),$$

pela propriedade distributiva da multiplicação, segue que:

$$x^2c^2 - 2a^2xc + a^4 = a^2x^2 - 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2$$

ou ainda,

$$x^2c^2 + a^4 = a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2.$$

Com algumas manipulações algébricas, chegando a:

$$a^4 - a^2c^2 = a^2x^2 - x^2c^2 + a^2y^2$$

reescrevendo, tem-se:

$$a^2(a^2 - c^2) = x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2.$$

Usando o Teorema de Pitágoras no $\triangle CB_1F_2$, como $a > c$, então:

$$a^2 - c^2 = b^2,$$

substituindo na expressão anterior, obtendo:

$$a^2b^2 = x^2b^2 + a^2y^2.$$

Dividindo por a^2b^2 , segue que:

$$\frac{a^2b^2}{a^2b^2} = \frac{x^2b^2}{a^2b^2} + \frac{a^2y^2}{a^2b^2}.$$

Donde concluí-se que:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{1.16}$$

é a equação canônica da elipse nas condições iniciais. Analogamente encontra-se a equação da elipse, cujo eixo maior esteja localizado sobre o eixo das ordenadas y e o centro na origem no plano xy , chegando a:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

Não iremos trabalhar os casos de translação de eixos, pois não é o foco desse estudo.

1.2.2 Coeficiente Angular das Retas Tangente e Normal à Elipse

Com algumas condições iniciais, consegue obter a equação canônica da elipse, na forma:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ com } a > 0 \text{ e } b > 0,$$

partindo dessa equação encontra-se o coeficiente angular da reta tangente no ponto $P = (x, y)$, por meio da derivada implícita.

Derivando a equação (1.16), em relação a x ambos os membros da equação. Ou seja,

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) = \frac{d}{dx}(1),$$

a derivada da soma é a soma das derivadas, então:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{x^2}{a^2} \right) + \frac{d}{dx} \left(\frac{y^2}{b^2} \right) = 0.$$

Lembrando que y é uma função de x usando a Regra da Cadeia, estamos levando em consideração que o público alvo já possua conhecimento dessa regra de derivação, dessa forma.

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{x^2}{a^2} \right) + \frac{d}{dy} \left(\frac{y^2}{b^2} \right) \frac{dy}{dx} = 0,$$

segue que,

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2} \frac{dy}{dx} = 0$$

ou ainda,

$$\frac{2y}{b^2} \frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{a^2}.$$

Multiplicando a expressão anterior por $\frac{b^2}{2y}$, tem-se:

$$\frac{dy}{dx} = \left(-\frac{2x}{a^2} \right) \left(\frac{b^2}{2y} \right),$$

onde segue que:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2xb^2}{2ya^2},$$

simplificando,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y}.$$

O coeficiente angular da reta t , tangente ao gráfico no ponto P , é:

$$m_t = -\frac{b^2x}{a^2y}. \quad (1.17)$$

Pelos resultados já trabalhados. a equação da reta t , tangente à elipse no ponto P , pode ser obtida por:

$$y - y_1 = m(x - x_1),$$

substituindo o resultado (1.17), tem-se:

$$y - y_1 = -\frac{b^2x}{a^2y}(x - x_1),$$

multiplicando ambos os membros da equação anterior por a^2y , obtendo:

$$a^2y(y - y_1) = -b^2x(x - x_1)$$

aplicando a propriedade distributiva,

$$a^2y^2 - a^2yy_1 = -b^2x^2 + b^2xx_1,$$

adicionando $a^2yy_1 + b^2x^2$ em ambos os membros, tem-se:

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2y_1y + b^2xx_1.$$

Dividindo ambos os lados por a^2b^2 , segue,

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = \frac{y_1y}{b^2} + \frac{xx_1}{a^2}.$$

Como,

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1.$$

Concluí-se que:

$$\frac{y_1y}{b^2} + \frac{xx_1}{a^2} = 1. \quad (1.18)$$

Obtendo assim a equação da reta t , tangente à elipse no ponto P . Utilizando o coeficiente angular da reta t obtêm o coeficiente angular da reta n , normal à elipse no ponto P . Como a reta n é perpendicular a reta t , então:

$$m_n = -\frac{1}{m_t}.$$

Por (1.17), segue:

$$m_n = -\frac{1}{\left(-\frac{b^2x}{a^2y}\right)},$$

após algumas manipulações algébricas, chega a:

$$m_n = \frac{a^2y}{b^2x}. \quad (1.19)$$

Com o resultado (1.19), obtêm a equação da reta n , utilizando.

$$y - y_1 = m(x - x_1),$$

segue,

$$y - y_1 = \frac{a^2y}{b^2x}(x - x_1).$$

Multiplicando ambos os membros por b^2x , tem-se:

$$b^2x(y - y_1) = a^2y(x - x_1),$$

aplicando a propriedade distributiva da multiplicação, chega a:

$$b^2xy - b^2xy_1 = a^2yx - a^2yx_1.$$

Com algumas manipulações algébricas, reescrever como sendo:

$$-b^2xy_1 + a^2yx_1 = a^2xy - b^2xy,$$

donde, concluí-se que a equação da reta n é,

$$a^2yx_1 - b^2xy_1 = xy(a^2 - b^2). \quad (1.20)$$

Concluído os assuntos preliminares da elipse, seguiremos com o conteúdo relacionados à hipérbole.

1.3 Hipérbole

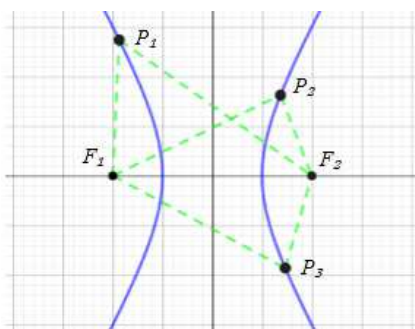
Definição 1.6 *Sejam F_1, F_2 pontos do plano e r um número real positivo com $d(F_1, F_2) > r$. O conjunto de todos os pontos P do plano, tais que:*

$$|d(F_1, P) - d(P, F_2)| = r$$

é chamado de hipérbole de focos F_1, F_2 e Eixo Maior r .

Se P_1, P_2, P_3, \dots , são pontos da hipérbole, então

Figura 17 – Pontos da hipérbole.

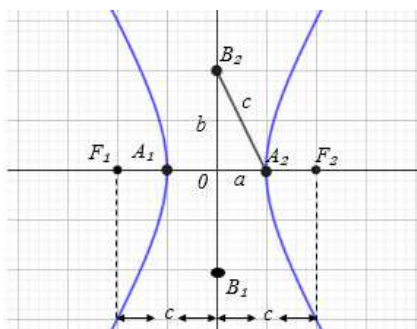


Fonte: Autoria própria.

$$|d(F_1, P_1) - d(P_1, F_2)| = |d(F_1, P_2) - d(P_2, F_2)| = |d(F_1, P_3) - d(P_3, F_2)| = r. \quad (1.21)$$

Os elementos da hipérbole são:

Figura 18 – Elementos da hipérbole.



Fonte: Autoria própria.

1. Os pontos A_1 e A_2 são os vértices;
2. O ponto 0 é o centro e ponto médio do segmento $\overline{A_1A_2}$;
3. Os pontos F_1 e F_2 situados no eixo maior. Estão dispostos equidistantes dos vértices e do centro da hipérbole são os Focos;
4. Os segmentos $\overline{A_10}$ e $\overline{0A_2}$ são os semieixo real.

1.3.1 Equação Canônica da Hipérbole

Para a dedução da equação canônica da curva, considerou-se a hipérbole no plano xy de tal maneira que o eixo x é a reta que contém os focos, F_1 e F_2 , e o eixo y como sendo a reta perpendicular que passa pelo ponto médio dos focos. Dessa maneira escreve-se F_1 e F_2 , como sendo $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$, onde $2c$ é a distância entre os focos.

Partindo da definição dada para a curva, ou seja,

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a. \quad (1.22)$$

Note que:

$$d(P, F_1) = \sqrt{(x - (-c))^2 + (y - 0)^2} \quad e \quad d(P, F_2) = \sqrt{(x - c)^2 + (y - 0)^2}. \quad (1.23)$$

Substituindo (1.23) em (1.22), chegando:

$$\left| \sqrt{(x - (-c))^2 + (y - 0)^2} - \sqrt{(x - c)^2 + (y - 0)^2} \right| = 2a.$$

Pela propriedade do módulo, tem-se:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a,$$

elevando ambos os lados ao quadrado,

$$\left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2 = \left(\pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2$$

segue que,

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2,$$

desenvolvendo o quadrado da soma e o quadrado da diferença. Chegando a:

$$x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2$$

simplificando,

$$4xc = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

dividindo ambos os membros da equação por 4, chegando:

$$xc = a^2 \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

da expressão anterior, tem-se:

$$xc - a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

elevando mais uma vez ao quadrado ambos os lados,

$$(xc - a^2)^2 = \left(\pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2,$$

desenvolvendo o quadrado da diferença, segue:

$$x^2c^2 - 2a^2xc + a^4 = a^2[(x-c)^2 + y^2],$$

desenvolvendo mais uma vez, o quadrado da diferença, tem-se:

$$x^2c^2 - 2a^2xc + a^4 = a^2(x^2 - 2xc + c^2 + y^2)$$

ou ainda,

$$x^2c^2 - 2a^2xc + a^4 = a^2x^2 - 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2,$$

simplificando, então:

$$x^2c^2 + a^4 = a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2.$$

Com algumas manipulações algébricas,

$$x^2c^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4$$

reescrevendo como sendo,

$$x^2(c^2 - a^2) - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2).$$

Como $c > a$. Então usando o Teorema de Pitágoras,

$$c^2 - a^2 = b^2$$

substituindo na expressão anterior,

$$x^2b^2 - a^2y^2 = a^2b^2,$$

dividindo ambos os lados por (a^2b^2) , ou seja,

$$\frac{x^2b^2}{a^2b^2} - \frac{a^2y^2}{a^2b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2b^2}.$$

Donde conclui-se que:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (1.24)$$

Portanto essa é a equação canônica da hipérbole nas condições iniciais. Analogamente encontra-se a equação da hipérbole, cujo eixo focal esteja localizado sobre o eixo das ordenadas y e o centro na origem do plano xy , chegando à:

$$-\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1,$$

os casos de translação de eixos não foi realizado, pois não é o foco desse estudo.

1.3.2 Coeficiente Angular das Retas Tangente e Normal à Hipérbole

Com algumas condições iniciais deduz-se equação canônica da hipérbole, na forma:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{com } a > 0 \text{ e } b > 0.$$

partindo dessa equação encontra-se o coeficiente angular da reta tangente no ponto $P = (x, y)$ por meio da derivada implícita.

Derivando em relação a x , ambos os membros da equação. Ou seja,

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) = \frac{d}{dx}(1),$$

a derivada da diferença é a diferença das derivadas, então:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{x^2}{a^2} \right) - \frac{d}{dx} \left(\frac{y^2}{b^2} \right) = 0.$$

Usando a regra da cadeia e lembrando que y é uma função na variável x , temos:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{x^2}{a^2} \right) - \frac{d}{dy} \left(\frac{y^2}{b^2} \right) \frac{dy}{dx} = 0,$$

segue que,

$$\frac{2x}{a^2} - \frac{2y}{b^2} \frac{dy}{dx} = 0$$

ou ainda,

$$-\frac{2y}{b^2} \frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{a^2}.$$

Multiplicando a expressão anterior por $-\frac{b^2}{2y}$, tem-se:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2b^2x}{2a^2y},$$

simplificando,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b^2x}{a^2y}.$$

Donde conclui que o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico no ponto P é:

$$m_t = \frac{b^2x}{a^2y}. \quad (1.25)$$

Com o coeficiente angular da reta t tangente no ponto P , obtêm o coeficiente angular da reta n normal no ponto P . Tem-se que as retas são perpendiculares, então:

$$m_n m_t = -1$$

ou ainda,

$$m_n = -\frac{1}{m_t}.$$

Substituindo $m_t = \frac{b^2x}{a^2y}$ na expressão anterior, ou seja,

$$m_n = -\frac{1}{\left(\frac{b^2x}{a^2}\right)}.$$

Logo,

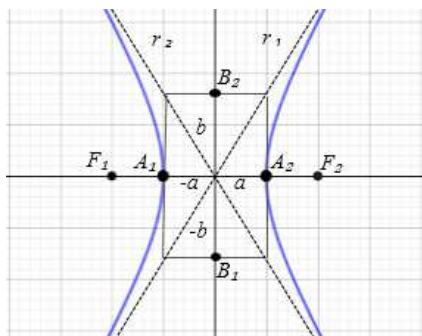
$$m_n = -\frac{a^2y}{b^2x} \quad (1.26)$$

é o coeficiente angular da retas n , normal a hipérbole.

1.3.3 Assíntotas

Considere retas que passam pelo centro da hipérbole. Os vértices A_1 e A_2 pertencentes ao eixo focal e os pontos B_1 e B_2 pertencentes ao eixo não focal, ambos da hipérbole, são pontos médios dos lados de um retângulo cujas diagonais passam pelo centro da hipérbole, ou seja, na origem do plano xy . Como mostra a Figura (19).

Figura 19 – Hipérbole.



Fonte: Autoria própria.

Essas diagonais são chamadas de assíntotas da hipérbole, no qual obtêm-se as equações da seguinte maneira:

Note que o coeficiente angular da reta r_1 é

$$m_1 = \frac{b}{a}$$

e da reta r_2 é

$$m_2 = -\frac{b}{a}.$$

As equações das respectivas retas, sabendo que $C = (0, 0)$ é da forma:

$$y - 0 = m_1(x - 0).$$

Substituindo $m_1 = \frac{b}{a}$, na expressão anterior, tem-se:

$$y = \frac{b}{a}x.$$

Por outro lado,

$$y - 0 = m_2(x - 0).$$

Substituindo $m_2 = -\frac{b}{a}$, na expressão anterior, obtêm:

$$y = -\frac{b}{a}x.$$

Portanto, a equação das assíntotas são $r_1 = \frac{b}{a}x$ e $r_2 = -\frac{b}{a}x$.

1.4 Parábola

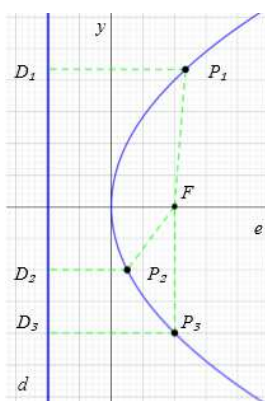
Definição 1.7 Seja d uma reta e F um ponto do plano não pertencente a d , o conjunto de todos os pontos P do plano, tal que

$$d(F, P) = d(P, d)$$

é chamado de parábola de foco F e diretriz d .

Se P_1, P_2, P_3, \dots , são pontos da parábola, então

Figura 20 – Pontos da parábola.

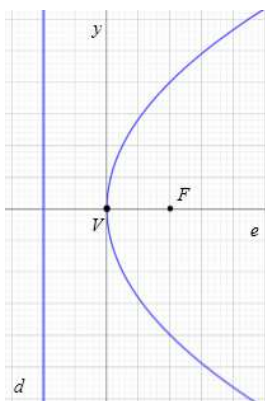


Fonte: Autoria própria.

$$d(P_1, D_1) = d(P_1, F), \quad d(P_2, D_2) = d(P_2, F), \quad d(P_3, D_3) = d(P_3, F). \quad (1.27)$$

Os elementos da parábola são:

Figura 21 – Elementos da parábola.



Fonte: Autoria própria.

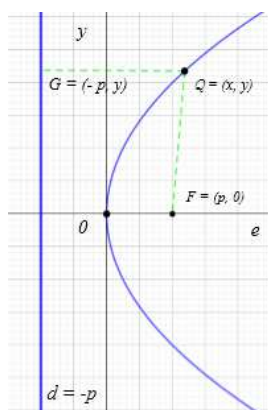
1. O ponto V é o vértice da curva;
2. O ponto F é o foco;
3. A reta d é a reta diretriz;
4. A reta e , perpendicular à reta d é o eixo da parábola ou eixo simétrico.

1.4.1 Equação Canônica da Parábola

Considerando no plano xy o eixo de simetria da parábola coincidindo com o eixo x e o vértice da curva com a origem 0 do plano xy . Com isso, escreve-se o foco da parábola como sendo o ponto $F = (p, 0)$, $p > 0$, e pela definição da parábola a reta diretriz e o foco são equidistantes, assim escrevendo a equação da reta diretriz na forma $d = -p$.

Considere um ponto $Q = (x, y)$ pertencente a parábola e um outro ponto $G = (-p, y)$ a projeção ortogonal do ponto Q sobre a reta d , diretriz.

Figura 22 – Pontos $Q = (x, y)$ e $G = (-p, y)$.



Fonte: Autoria própria.

A distância entre os pontos $F = (p, 0)$ e $Q = (x, y)$, denotados por $d(F, Q)$, é igual a distancia entre os pontos $Q = (x, y)$ e $G = (-p, y)$, denotado por $d(Q, G)$, então

$$d(F, Q) = d(Q, G). \tag{1.28}$$

Reescrevendo (1.28), tem-se:

$$\sqrt{(p - x)^2 + (0 - y)^2} = \sqrt{(x - (-p))^2 + (y - y)^2} \tag{1.29}$$

elevando ambos os membros da equação (1.29) ao quadrado, segue que,

$$\left(\sqrt{(p - x)^2 + (0 - y)^2}\right)^2 = \left(\sqrt{(x - (-p))^2 + (y - y)^2}\right)^2$$

chegando a,

$$(p - x)^2 + y^2 = (x + p)^2.$$

Desenvolvendo o quadrado da soma e o quadrado da diferença, ou seja,

$$p^2 - 2px + x^2 + y^2 = x^2 + 2px + p^2,$$

após algumas manipulações algébricas segue,

$$y^2 = 2px + 2px.$$

Donde conclui que:

$$y^2 = 4px, \tag{1.30}$$

é a equação canônica da parábola, nas condições iniciais.

Analogamente encontra-se a equação da parábola, cujo eixo de simetria coincida com o eixo y e o vértice da parábola esteja localizado na origem do plano xy . Chegando à

$$x^2 = 4py. \tag{1.31}$$

Não iremos trabalhar os casos de translação de eixos, pois não é o foco desse estudo.

1.4.2 Coeficiente Angular das Retas Tangente e Normal à Parábola

Com algumas condições iniciais obtêm a equação canônica da parábola, na forma:

$$y^2 = 4px,$$

partindo dessa equação encontra o coeficiente angular da reta tangente a parábola no ponto P , por meio da derivada implícita.

Derivando, em relação a x , ambos os membros da equação, ou seja:

$$\frac{d}{dx} (y^2) = \frac{d}{dx} (4px).$$

Como y é uma função de x , então tem-se:

$$\frac{d}{dy} (y^2) \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} (4px),$$

segue que,

$$2y \frac{dy}{dx} = 4p,$$

dividindo ambos os membros por $2y$, obtendo:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4p}{2y},$$

ou ainda,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2p}{y}. \quad (1.32)$$

Donde concluí, de acordo com as condições iniciais, que o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico no ponto P é

$$m_t = \frac{2p}{y}. \quad (1.33)$$

O coeficiente angular da reta tangente à parábola no ponto P , possibilita obter a o coeficiente angular da reta n no ponto P . As retas são perpendiculares, então.

$$m_n m_t = -1$$

ou ainda,

$$m_n = -\frac{1}{m_t}.$$

Substituindo $m_t = \left(\frac{2p}{y}\right)$ na expressão anterior, ou seja,

$$m_n = -\frac{1}{\left(\frac{2p}{y}\right)}.$$

Após algumas manipulações, chegando:

$$m_n = -\frac{y}{2p}. \quad (1.34)$$

2 BILHAR ELÍPTICO

O bilhar elíptico diferencia dos demais bilhares comuns por possuir tabela única (A tabela é uma borracha nas bordas internas da mesa, entre a madeira e o tecido. É assim que a bola é rebatida formando ângulos precisos), construída sobre o esboço de uma elipse, possui apenas uma caçapa (A caçapa é uma aberturas da mesa do bilhar por onde entra a bola), localizada em um dos focos, e uma marcação feita na mesa exatamente no outro foco da curva Figura (23).

Figura 23 – Bilhar Elíptico.



Fonte: Autoria própria.

A bola ao entrar em movimento descreve uma trajetória sobre a mesa até atingir a tabela do bilhar, no qual será refletida com o ângulo de reflexão igual ao ângulo de incidência. Com isso, será refletida para a caçapa do bilhar.

2.1 Demonstração Algébrica

A demonstração da propriedade de reflexão, contida no bilhar elíptico, segue direto do seguinte lema:

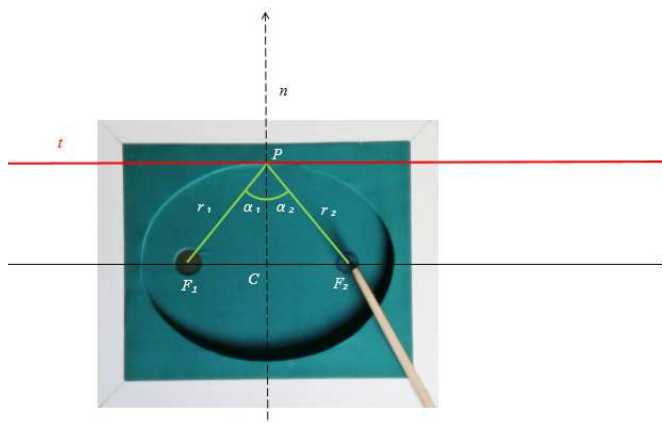
Lema 2.1 *Seja P um ponto qualquer de uma elipse e os $\overline{F_1P}$ e $\overline{PF_2}$ raios focais dessa curva, denominados r_1 e r_2 respectivamente. A reta n , normal no ponto P , é bissetriz do ângulo $F_1\hat{P}F_2$.*

Demonstração.

Sejam α_1 o ângulo formado pela reta n e o $\overline{F_1P}$, α_2 o ângulo formado pela reta n e o $\overline{PF_2}$ e a reta t tangente a elipse no ponto P . Devemos levar em consideração dois casos.

1º Caso: Considere o ponto P coincidindo com o vértice da elipse. Devido a simetria que à curva possui, mostrando em um dos vértices, de modo análogo, mostra os demais. Tomaremos como base a Figura (24).

Figura 24 – O ponto P no vértice.



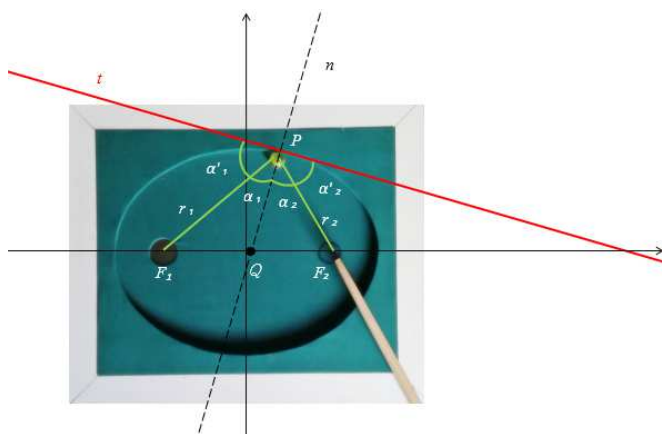
Fonte: Autoria própria.

Note que a reta t , tangente a elipse no ponto P , é paralela ao eixo focal (Eixo x do plano xy , que contém os focos da curva) e a reta n coincide com o eixo menor da elipse. Como os focos F_1 e F_2 são equidistantes, ou seja, $m(\overline{F_1C}) = m(\overline{CF_2})$ e os $\triangle F_1PC$ e $\triangle CPF_2$ compartilham o mesmo segmento \overline{CP} . Então os triângulos são congruentes. Logo,

$$\alpha_1 \equiv \alpha_2.$$

2º Caso: Considere agora o ponto P não coincidindo com os vértices da curva e mais uma vez, devido a simetria, de modo análogo mostra para qualquer ponto P pertencente a elipse.

Figura 25 – O ponto P pertencente a elipse.



Fonte: Autoria própria.

Como a reta n e a reta t são perpendiculares, então de acordo com a Figura (25), temos:

$$\alpha_1 + \alpha'_1 = 90^\circ$$

e

$$\alpha_2 + \alpha'_2 = 90^\circ,$$

donde concluir-se que $\alpha_1 < 90^\circ$ e $\alpha_2 < 90^\circ$. Utiliza-se o Lema (1.2) para mostrar que $\alpha_1 \equiv \alpha_2$.

Considerando o eixo das abscissas x a reta que passa pelos focos e o eixo das ordenadas y a reta que passa pelo ponto médio dos focos. Com isso, definir-se os focos F_1 e F_2 como sendo, $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$, onde $2c$ é a distância entre os focos.

m_1 é o coeficiente angular da reta que passa pelos pontos F_1 e P , e m_2 é o coeficiente angular da reta definida pelos pontos P e F_2 .

Tem-se:

$$F_1 = (-c, 0) \quad \text{e} \quad P = (x, y),$$

o coeficiente angular da reta que passa por esses dois pontos é,

$$m_1 = \frac{y - 0}{x - (-c)},$$

chegando à:

$$m_1 = \frac{y}{x + c}. \quad (2.1)$$

Por outro lado, os pontos:

$$P = (x, y) \quad \text{e} \quad F_2 = (c, 0),$$

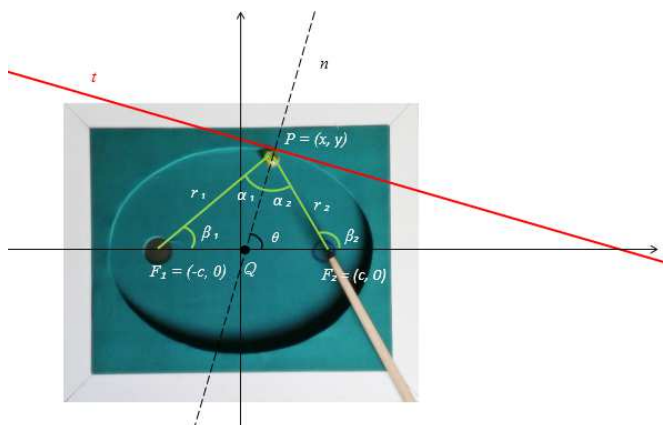
o coeficiente angular da reta definida por P e F_2 é,

$$m_2 = \frac{y - 0}{x - c}$$

ou seja,

$$m_2 = \frac{y}{x - c}. \quad (2.2)$$

Figura 26 – Tangente trigonométrica do ângulo.



Fonte: Autoria própria.

Pelos resultados anteriores, o coeficiente angular também pode ser escrito como a tangente trigonométrica do ângulo formado pela reta e o eixo x . Portanto,

$$\tan(\beta_1) = \frac{y}{x + c} \tag{2.3}$$

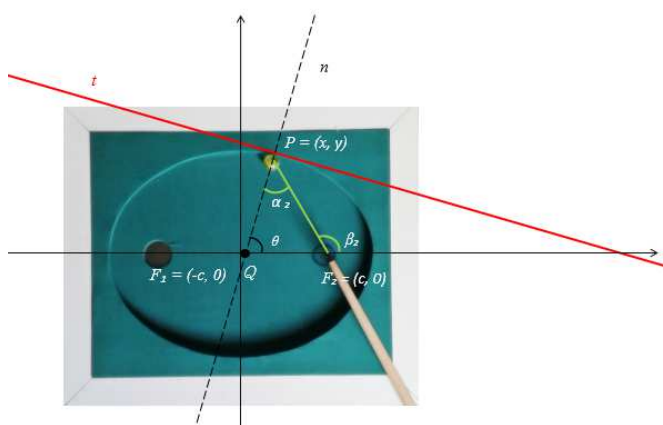
e

$$\tan(\beta_2) = \frac{y}{x - c}. \tag{2.4}$$

Para obter os coeficientes angulares m_1 e m_2 , foi usado as mesmas condições utilizadas para obter o coeficiente angular m_n , na seção (1.2). Portanto, escreve o coeficiente angular da reta n como sendo à tangente trigonométrica do ângulo θ , então

$$\tan(\theta) = \frac{a^2 y}{b^2 x}. \tag{2.5}$$

Figura 27 – $\triangle QPF_2$.



Fonte: Autoria própria.

Utilizando o Teorema do Ângulo Externo no $\triangle QPF_2$, tem-se:

$$\beta_2 = \theta + \alpha_2,$$

pela expressão anterior,

$$\alpha_2 = \beta_2 - \theta.$$

Aplicando a tangente em ambos os lados da expressão,

$$\tan(\alpha_2) = \tan(\beta_2 - \theta),$$

a igualdade permanece verdadeira, utilizando o Lema (1.2). Tem-se:

$$\tan(\alpha_2) = \left| \frac{\tan(\beta_2) - \tan(\theta)}{1 + [\tan(\beta_2) \tan(\theta)]} \right|$$

substituindo $\tan(\beta_2) = \frac{y}{x-c}$ e $\tan(\theta) = \frac{a^2y}{b^2x}$, segue:

$$\tan(\alpha_2) = \left| \frac{\frac{y}{x-c} - \frac{a^2y}{b^2x}}{1 + \left(\frac{y}{x-c}\right) \left(\frac{a^2y}{b^2x}\right)} \right|.$$

realizando a multiplicação contida no denominador da expressão anterior, chega-se,

$$\tan(\alpha_2) = \left| \frac{\frac{y}{x-c} - \frac{a^2y}{b^2x}}{1 + \frac{a^2y^2}{b^2x^2 - b^2xc}} \right|,$$

realizando a operação do m.m.c.,

$$\tan(\alpha_2) = \left| \frac{\frac{b^2xy - a^2yx + a^2yc}{b^2x^2 - b^2xc}}{\frac{b^2x^2 - b^2xc + a^2y^2}{b^2x^2 - b^2xc}} \right|,$$

com algumas manipulações algébricas, tem-se:

$$\tan(\alpha_2) = \left| \frac{(b^2xy - a^2yx + a^2yc)(b^2x^2 - b^2xc)}{(b^2x^2 - b^2xc)(b^2x^2 - b^2xc + a^2y^2)} \right|,$$

segue que,

$$\tan(\alpha_2) = \left| \frac{b^2xy - a^2yx + a^2yc}{b^2x^2 - b^2xc + a^2y^2} \right|.$$

Como o ponto P pertence a curva, então:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2,$$

substituindo,

$$\tan(\alpha_2) = \left| \frac{b^2xy - a^2yx + a^2yc}{a^2b^2 - b^2xc} \right|,$$

reescrevendo a expressão anterior,

$$\tan(\alpha_2) = \left| \frac{(b^2 - a^2)xy + a^2yc}{a^2b^2 - b^2xc} \right|.$$

Tem-se:

$$a^2 > b^2$$

então,

$$b^2 - a^2 = -c^2$$

logo,

$$\tan(\alpha_2) = \left| \frac{-c^2xy + a^2yc}{a^2b^2 - b^2xc} \right|,$$

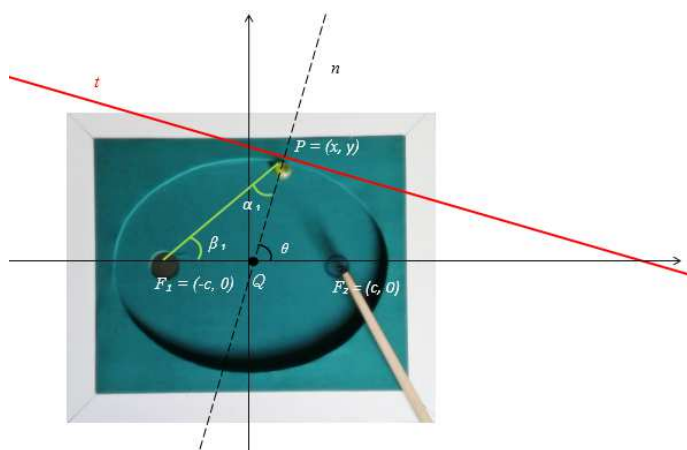
reescrevendo a expressão anterior, tem-se:

$$\tan(\alpha_2) = \left| \frac{cy(-cx + a^2)}{b^2(a^2 - xc)} \right|,$$

simplificamos, chega-se:

$$\tan(\alpha_2) = \left| \frac{cy}{b^2} \right|.$$

Figura 28 – $\triangle F_1PQ$.



Fonte: Autoria própria.

Mais uma vez pelo Teorema do Ângulo Externo, obtêm-se:

$$\theta = \beta_1 + \alpha_1$$

ou ainda,

$$\alpha_1 = \theta - \beta_1.$$

Utilizando novamente o Lema (1.2), segue:

$$\tan(\alpha_1) = \left| \frac{\tan(\theta) - \tan(\beta_1)}{1 + [\tan(\theta) \tan(\beta_1)]} \right|,$$

substituindo $\tan(\theta) = \frac{a^2 y}{b^2 x}$ e $\tan(\beta_1) = \frac{y}{x + c}$, tem-se:

$$\tan(\alpha_1) = \left| \frac{\frac{a^2 y}{b^2 x} - \frac{y}{x + c}}{1 + \left(\frac{a^2 y}{b^2 x}\right) \left(\frac{y}{x + c}\right)} \right|,$$

efetuando a multiplicação contida no denominador,

$$\tan(\alpha_1) = \left| \frac{\frac{a^2 y}{b^2 x} - \frac{y}{x + c}}{1 + \frac{a^2 y^2}{b^2 x^2 + b^2 xc}} \right|,$$

realizando operações com m.m.c.,

$$\tan(\alpha_1) = \left| \frac{\frac{a^2 yx + a^2 yc - yb^2 x}{b^2 x^2 + b^2 xc}}{\frac{b^2 x^2 + b^2 xc + a^2 y^2}{b^2 x^2 + b^2 xc}} \right|,$$

com algumas manipulações algébricas, chega-se:

$$\tan(\alpha_1) = \left| \frac{(a^2 yx + a^2 yc - yb^2 x)(b^2 x^2 + b^2 xc)}{(b^2 x^2 + b^2 xc)(b^2 x^2 + b^2 xc + a^2 y^2)} \right|,$$

segue que:

$$\tan(\alpha_1) = \left| \frac{a^2 yx + a^2 yc - yb^2 x}{b^2 x^2 + b^2 xc + a^2 y^2} \right|,$$

reescrevendo obtêm-se,

$$\tan(\alpha_1) = \left| \frac{(a^2 - b^2)yx + a^2 yc}{b^2 x^2 + b^2 xc + a^2 y^2} \right|,$$

como $a > b$, segue que $a^2 - b^2 = c^2$. Substituindo,

$$\tan(\alpha_1) = \left| \frac{c^2 yx + a^2 yc}{b^2 x^2 + b^2 xc + a^2 y^2} \right|.$$

Como o ponto P pertence a elipse, segue que:

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2,$$

substituindo,

$$\tan(\alpha_1) = \left| \frac{c^2 yx + a^2 yc}{a^2 b^2 + b^2 xc} \right|,$$

reescrevendo como sendo,

$$\tan(\alpha_1) = \left| \frac{yc(cx + a^2)}{b^2(a^2 + xc)} \right|,$$

simplificamos chega-se a:

$$\tan(\alpha_1) = \left| \frac{yc}{b^2} \right|. \quad (2.6)$$

■

Pelo Lema (1.2) os ângulos, formado pela interseção das retas são agudos então, são positivos e não são simétricos, conclui-se que α_1 e α_2 são congruentes, ou seja, o ângulo de reflexão é igual ao ângulo de incidência.

Ao posicionar a bola na marcação contida na mesa, representando o foco da curva, realizando a tacada, à mesma entrará em movimento. Descrevendo uma trajetória sobre a mesa do bilhar e, ao atingir a tabela será refletida com ângulo de reflexão igual ao ângulo de incidência. Ou seja, irá convergir para a caçapa do bilhar.

2.2 Aplicação da Propriedade de Reflexão da Elipse

A propriedade demonstrada tem várias aplicações, nas quais muitas delas estão presentes no cotidiano da população. Pode-se exemplificar com um espelho côncavo no formato de um elipsoide, se uma lâmpada estiver situada em um dos focos do espelho, então os raios de luz irão convergir para o outro foco após incidir no espelho, como mostra a figura (29). O refletor odontológico, tem como desígnio a concentração de luz em uma determinada distância, para que os raios de luz não cause desconforto para o tratamento dentário do paciente.

Figura 29 – Refletor odontológico.



Fonte: ODONTCLEA.

Outra aplicação é na propagação de uma fonte sonora, que ao posicionar em um dos focos o som se refletirá nas paredes do elipsoide, convergindo para o outro foco.

Figura 30 – Galeria de sussurro.



Fonte: O GLOGO.

3 BILHAR HIPERBÓLICO

O bilhar hiperbólico possui tabela única, construída sobre o esboço de um dos ramos da hipérbole, uma marcação feita na tabela, demarcando um dos focos, e uma caçapa localizada no outro foco da curva.

Figura 31 – Bilhar Hiperbólico.



Fonte: Autoria própria.

A bola ao entrar em movimento, em direção a marcação, descreve uma trajetória sobre a mesa até atingir a tabela do bilhar, no qual será refletida com o ângulo de reflexão igual ao ângulo de incidência. Com isso, será refletida para a caçapa do bilhar.

3.1 Demonstração Algébrica

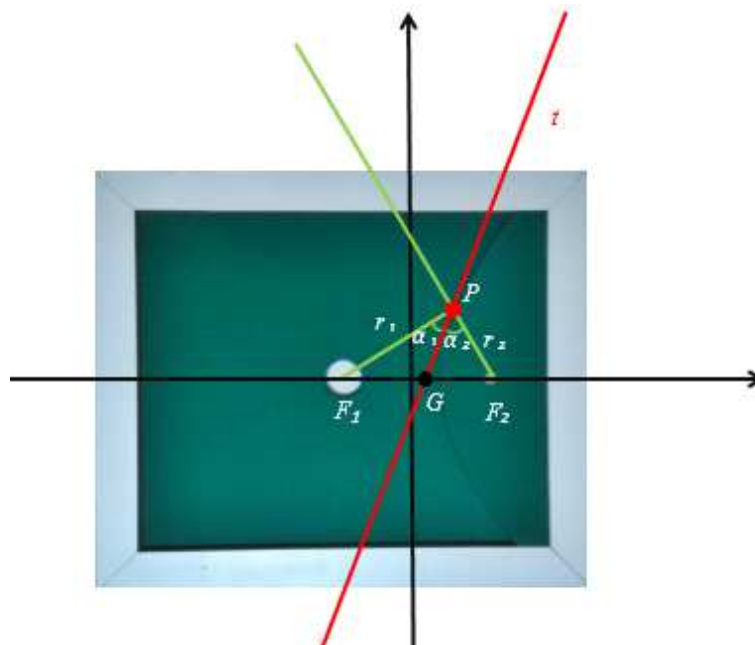
A demonstração da propriedade de reflexão, contida no Bilhar Hiperbólico, segue direto do seguinte lema:

Lema 3.1 *Seja P um ponto qualquer da hipérbole e os $\overline{F_1P}$ e $\overline{PF_2}$ raios focais dessa curva, denotados por r_1 e r_2 , respectivamente. A reta t , tangente à hipérbole no ponto P , é bissetriz do ângulo $F_1\hat{P}F_2$.*

Demonstração.

Seja t a reta tangente a hipérbole no ponto P , α_1 o ângulo formado pela reta t e o $\overline{F_1P}$ e, α_2 o ângulo formado pela reta t e o $\overline{PF_2}$.

Figura 32 – Reta t tangente.



Fonte: Autoria própria.

Considere ainda hipérbole no plano xy , de tal maneira que o eixo das abscissas x será a reta que contém os focos e o eixo das ordenadas y a reta que passa pelo ponto médio dos focos. Com isso escreve-se F_1 e F_2 , como sendo $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$.

Seja m_1 , que é o coeficiente angular da reta r_1 , e m_2 , o coeficiente angular da reta r_2 . Tem-se:

$$F_1 = (-c, 0) \quad \text{e} \quad P = (x, y),$$

o coeficiente angular da reta que passa por esses dois pontos é:

$$m_1 = \frac{y - 0}{x - (-c)}$$

ou seja,

$$m_1 = \frac{y}{x + c}. \tag{3.1}$$

Por outro lado,

$$P = (x, y) \quad \text{e} \quad F_2 = (c, 0),$$

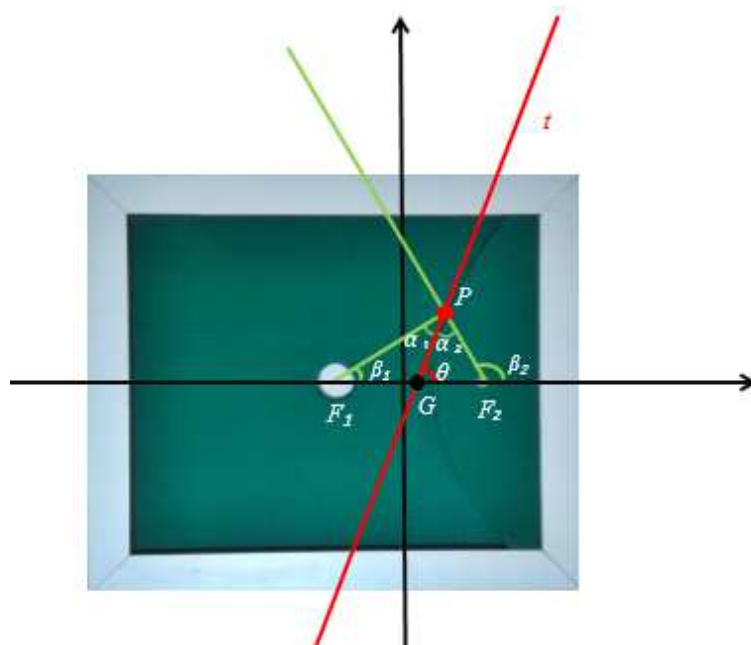
o coeficiente angular da reta definida por esses dois pontos é:

$$m_2 = \frac{y - 0}{x - c}$$

então,

$$m_2 = \frac{y}{x - c}. \quad (3.2)$$

Figura 33 – Tangente trigonométrica do ângulo.



Fonte: Autoria própria.

Podendo escrever os coeficientes angulares das retas como a tangente trigonométrica dos ângulos, formado por elas, então:

$$\tan(\beta_1) = \frac{y}{x + c}$$

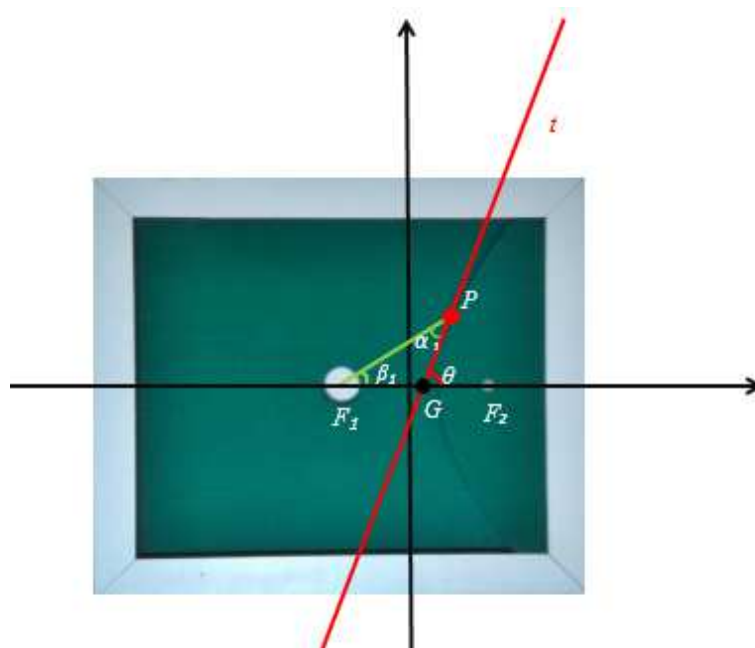
e

$$\tan(\beta_2) = \frac{y}{x - c}.$$

Para obter m_1 e m_2 foi utilizado as mesmas condições utilizadas na seção (1.3), que foram definidas para calcular o coeficiente angular da reta t tangente à hipérbole. Portanto, a tangente trigonométrica do ângulo formado pela reta t é:

$$\tan(\theta) = \frac{b^2 x}{a^2 y}.$$

Figura 34 – $\triangle F_1PG$.



Fonte: Autoria própria.

Utilizando Teorema do Ângulo Externo no $\triangle F_1PG$ (figura 34), tem-se:

$$\theta = \beta_1 + \alpha_1 \tag{3.3}$$

ou ainda,

$$\alpha_1 = \theta - \beta_1,$$

utilizando o Lema (1.2),

$$\tan(\alpha_1) = \left| \frac{\tan(\theta) - \tan(\beta_1)}{1 + [\tan(\theta) \tan(\beta_1)]} \right|,$$

substituindo $\tan(\theta) = \frac{b^2x}{a^2y}$ e $\tan(\beta_1) = \frac{y}{x+c}$, segue:

$$\tan(\alpha_1) = \left| \frac{\frac{b^2x}{a^2y} - \frac{y}{x+c}}{1 + \left(\frac{b^2x}{a^2y}\right) \left(\frac{y}{x+c}\right)} \right|,$$

efetuando a multiplicação contida no denominador. Chegando,

$$\tan(\alpha_1) = \left| \frac{\frac{b^2x}{a^2y} - \frac{y}{x+c}}{1 + \frac{b^2xy}{a^2yx + a^2yc}} \right|,$$

com algumas operações com m.m.c.,

$$\tan(\alpha_1) = \left| \frac{\frac{b^2x^2 + b^2xc - y^2a^2}{a^2yx + a^2yc}}{\frac{a^2yx + a^2yc + b^2xy}{a^2yx + a^2yc}} \right|,$$

com algumas manipulações algébricas, tem-se:

$$\tan(\alpha_1) = \left| \frac{(b^2x^2 + b^2xc - y^2a^2)(a^2yx + a^2yc)}{(a^2yx + a^2yc)(a^2yx + a^2yc + b^2xy)} \right|,$$

segue que,

$$\tan(\alpha_1) = \left| \frac{b^2x^2 + b^2xc - y^2a^2}{a^2yx + a^2yc + b^2xy} \right|,$$

reescrevendo,

$$\tan(\alpha_1) = \left| \frac{b^2x^2 - y^2a^2 + b^2xc}{xy(a^2 + b^2) + a^2yc} \right|.$$

Tem-se que:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

substituindo, segue que:

$$\tan(\alpha_1) = \left| \frac{b^2x^2 - y^2a^2 + b^2xc}{xyc^2 + a^2yc} \right|,$$

como o ponto P pertence a hipérbole, então:

$$b^2x^2 - y^2a^2 = a^2b^2,$$

substituindo,

$$\tan(\alpha_1) = \left| \frac{a^2b^2 + b^2xc}{xyc^2 + a^2yc} \right|,$$

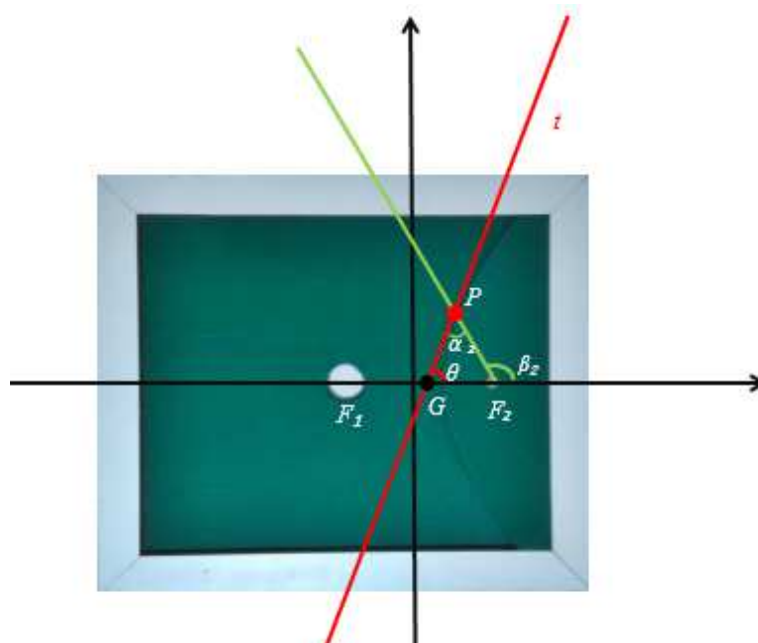
reescrevendo,

$$\tan(\alpha_1) = \left| \frac{b^2(a^2 + xc)}{cy(xc + a^2)} \right|,$$

simplificando, ou seja:

$$\tan(\alpha_1) = \left| \frac{b^2}{cy} \right|. \quad (3.4)$$

Figura 35 – $\triangle GPF_2$.



Fonte: Autoria própria.

Utilizando mais uma vez o Teorema do Ângulo Externo, então:

$$\beta_2 = \theta + \alpha_2$$

ou ainda,

$$\alpha_2 = \beta_2 - \theta.$$

utilizando novamente o Lema (1.2), segue:

$$\tan(\alpha_2) = \left| \frac{\tan(\beta_2) - \tan(\theta)}{1 + [\tan(\beta_2) \tan(\theta)]} \right|,$$

tem-se $\tan(\beta_2) = \frac{y}{x - c}$ e $\tan(\theta) = \frac{b^2x}{a^2y}$, substituindo na expressão anterior, ou seja:

$$\tan(\alpha_2) = \left| \frac{\frac{y}{x - c} - \frac{b^2x}{a^2y}}{1 + \left(\frac{y}{x - c}\right) \left(\frac{b^2x}{a^2y}\right)} \right|,$$

realizando a multiplicação contida no denominador da expressão anterior, chegando:

$$\tan(\alpha_2) = \left| \frac{\frac{y}{x - c} - \frac{b^2x}{a^2y}}{1 + \frac{b^2xy}{a^2yx - a^2yc}} \right|,$$

realizando a operação do m.m.c.,

$$\tan(\alpha_2) = \left| \frac{\frac{y^2a^2 - b^2x^2 + b^2xc}{a^2yx - a^2yc}}{\frac{a^2yx - a^2yc + b^2xy}{a^2yx - a^2yc}} \right|,$$

com algumas manipulações algébricas,

$$\tan(\alpha_2) = \left| \frac{(y^2a^2 - b^2x^2 + b^2xc)(a^2yx - a^2yc)}{(a^2yx - a^2yc)(a^2yx - a^2yc + b^2xy)} \right|,$$

simplificando, tem-se:

$$\tan(\alpha_2) = \left| \frac{y^2a^2 - b^2x^2 + b^2xc}{a^2yx - a^2yc + b^2xy} \right|,$$

reescrevendo,

$$\tan(\alpha_2) = \left| \frac{y^2a^2 - b^2x^2 + b^2xc}{xy(a^2 + b^2) - a^2yc} \right|. \quad (3.5)$$

Como o ponto P pertence a hipérbole, então:

$$y^2a^2 - x^2b^2 = -a^2b^2,$$

sabendo que:

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

substituímos ambos na expressão (3.5), chegando:

$$\tan(\alpha_2) = \left| \frac{-a^2b^2 + b^2xc}{xyc^2 - a^2yc} \right|,$$

reescrevendo,

$$\tan(\alpha_2) = \left| \frac{b^2(-a^2 + xc)}{yc(xc - a^2)} \right|,$$

simplificando, tem-se:

$$\tan(\alpha_2) = \left| \frac{b^2}{yc} \right|. \quad (3.6)$$

■

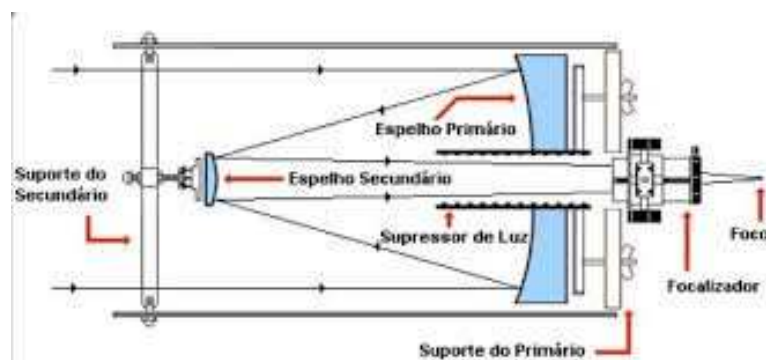
Mais uma vez pelo Lema (1.2) os ângulos, formado pela interseção das retas são agudos então, são positivos e não são simétricos pode-se deduzir que α_1 e α_2 são iguais, ou seja, o ângulo de reflexão é igual ao ângulo de incidência.

Realizando a tacada, na bola, em direção a uma marcação localizada na tabela, que representa o foco da curva, ao atingir à mesma a bola será refletida com ângulo de reflexão igual ao ângulo de incidência, convergindo para a caçapa do bilhar.

3.2 Aplicação da Propriedade de Reflexão da Hipérbole

A propriedade de reflexão da hipérbole é aplicada na construção de telescópios de reflexão, que consiste basicamente na combinação da propriedade de reflexão da parábola e a propriedade de reflexão da hipérbole. A combinação de dois espelhos, um grande parabólico e outro menor hiperbólico, posicionados de maneira que os eixos sejam coincidentes e os focos do paraboloide e do hiperboloide também sejam coincidentes, no momento que os feixes de luz incide no espelho parabólico eles irão convergir para o foco. Como o foco do paraboloide e do hiperboloide são coincidentes, os feixes de luz refletem no espelho hiperbólico e convergem para o outro foco do hiperboloide, no qual está posicionado uma lente-ocular que finalmente chega aos olhos do observador, como podemos observar na figura (36).

Figura 36 – Telescópios de reflexão.



Fonte: AMINO.

4 BILHAR PARABÓLICO

O Bilhar Parabólico também possui tabela única, construída sobre o esboço de uma parábola, e uma caçapa, localizada no foco da curva, como mostra a figura (37). O jogo é realizado com uma bola de cada vez.

Figura 37 – Bilhar Parabólico



Fonte: Autoria própria.

A parábola se caracteriza por ser uma curva com apenas um foco e por possuir a propriedade que todo raio partindo do seu foco ao incidir sobre a superfície parabólica refletirá raios paralelo ao seu eixo.

O bilhar parabólico irá realizar o caminho inverso, ou seja, se uma bola for lançada paralelamente ao eixo de simetria da parábola ao incidir na tabela, ela será refletida e passará pelo foco da parábola.

4.1 Demonstração Algébrica

A demonstração da propriedade de reflexão, contida no Bilhar Parabólico, segue direto do seguinte lema:

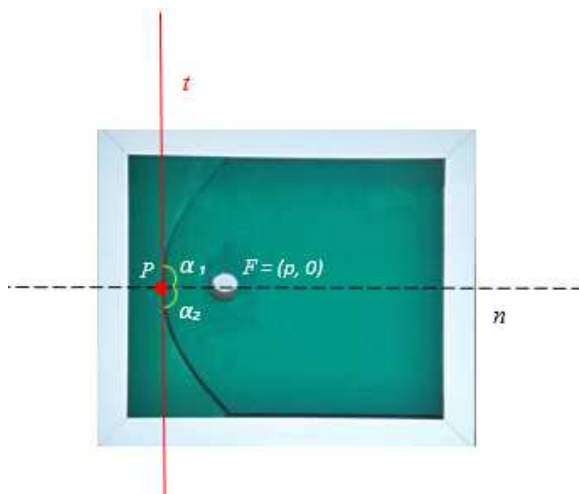
Lema 4.1 *Seja n a reta normal à parábola no ponto P e r uma reta, que contém o ponto P e é paralela ao eixo de simetria. A reta n é bissetriz do ângulo formado pela reta r e o \overline{PF} .*

Demonstração.

Sejam α_1 e α_2 os ângulos formados pela retas n , normal a parábola no ponto P , e pela reta t , tangente a parábola no ponto P .

1º Caso. O ponto P coincidindo com o vértice da parábola, como mostra a figura (38).

Figura 38 – O ponto P coincidindo com o vértice da parábola.

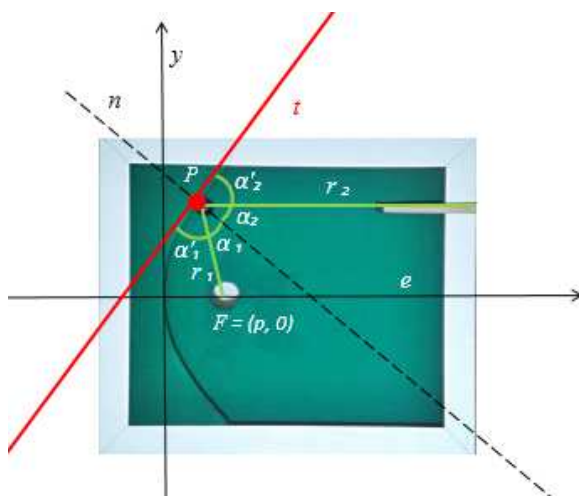


Fonte: Autoria própria.

Note pela Figura (38), que a reta t e o eixo y são coincidentes e a reta n coincide com o eixo de simetria da parábola. Pelo fato das retas serem perpendiculares, concluir-se que α_1 e α_2 são congruentes.

2º Caso. Consideremos que o ponto P não coincida com os vértices da parábola, devido a simetria da curva vale para qualquer ponto P pertencente à parábola.

Figura 39 – O ponto P diferente do vértice da parábola.



Fonte: Autoria própria.

Mais uma vez, pelo fato das retas n e t serem perpendiculares, tem-se:

$$\alpha_1 + \alpha'_1 = 90^\circ$$

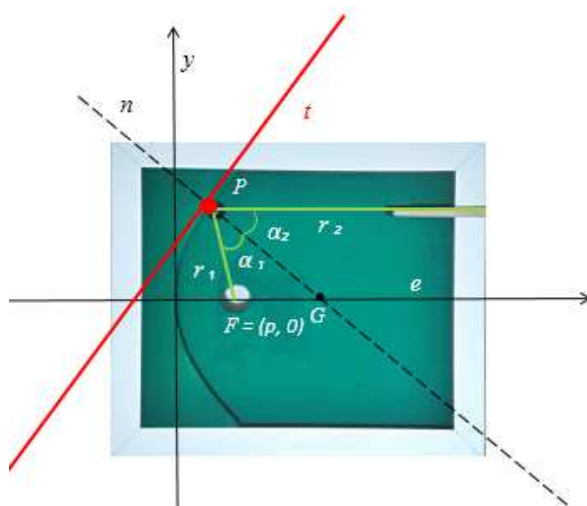
e

$$\alpha_2 + \alpha'_2 = 90^\circ,$$

então, $\alpha_1 < 90^\circ$ e $\alpha_2 < 90^\circ$. Utiliza-se o Lema (1.2) para mostrar que $\alpha_1 \equiv \alpha_2$.

Considere a parábola no plano xy , de tal maneira que o eixo de simetria da parábola coincida com o eixo x e o vértice da curva com a origem do plano xy . Assim, o foco da parábola como sendo $F = (p, 0)$.

Figura 40 – Reta n .



Fonte: Autoria própria.

m_1 é o coeficiente angular da reta definida pelos pontos $P = (x, y)$ e $F = (p, 0)$. Então:

$$m_1 = \frac{y - 0}{x - p}$$

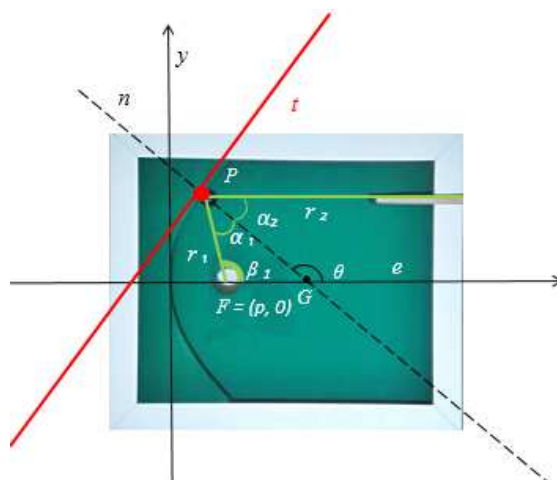
ou seja,

$$m_1 = \frac{y}{x - p}. \tag{4.1}$$

Note que o coeficiente angular da reta r_2 é nula, em relação ao eixo x , denotado por:

$$m_2 = 0. \tag{4.2}$$

Figura 41 – Tangente trigonométrica do ângulo.



Fonte: Autoria própria.

O coeficiente angular pode ser escrito como a tangente trigonométrica do ângulo, então

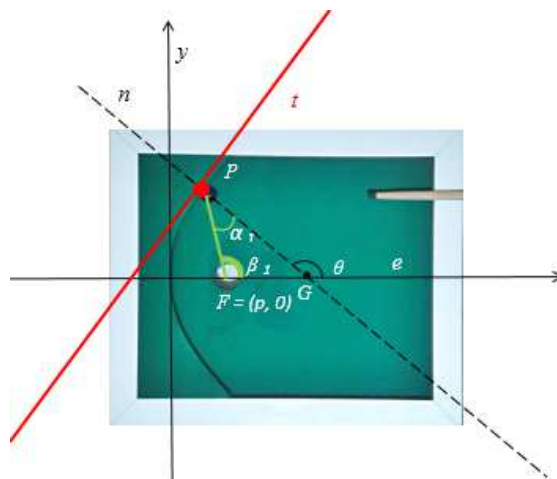
$$\tan(\beta_1) = \frac{y}{x - p},$$

e o coeficiente angular da reta r_2 é nulo, em relação ao eixo x , denota-se apenas como 0.

Para obter os coeficientes angulares m_1 e m_2 foi levado em consideração algumas condições iniciais, que foram as mesmas utilizadas na seção (1.4) para obter o coeficiente angular da reta n . Então, também escreve como a tangente trigonométrica do ângulo, ou seja:

$$\tan(\theta) = -\frac{y}{2p}. \tag{4.3}$$

Figura 42 – $\triangle FPG$.



Fonte: Autoria própria.

Note pelo triângulo $\triangle FPG$,

$$\theta = \beta_1 + \alpha_1$$

ou ainda,

$$\alpha_1 = \theta - \beta_1, \quad (4.4)$$

pelo Lema (1.2), tem-se:

$$\tan(\alpha_1) = \left| \frac{\tan(\theta) - \tan(\beta_1)}{1 + [\tan(\theta) \tan(\beta_1)]} \right|,$$

sabendo que $\tan(\theta) = -\frac{y}{2p}$ e $\tan(\beta_1) = \frac{y}{x-p}$ substituindo,

$$\tan(\alpha_1) = \left| \frac{-\frac{y}{2p} - \frac{y}{x-p}}{1 + \left(-\frac{y}{2p}\right) \left(\frac{y}{x-p}\right)} \right|,$$

efetuando a multiplicação contida no denominador, chegando:

$$\tan(\alpha_1) = \left| \frac{-\frac{y}{2p} - \frac{y}{x-p}}{1 - \left(\frac{y^2}{2px - 2p^2}\right)} \right|,$$

realizando operações com m.m.c.,

$$\tan(\alpha_1) = \left| \frac{\frac{-yx + yp - 2py}{2px - 2p^2}}{\frac{2px - 2p^2 - y^2}{2px - 2p^2}} \right|,$$

com algumas manipulações algébricas, chega-se:

$$\tan(\alpha_1) = \left| \frac{(-yx + yp - 2py)(2px - 2p^2)}{(2px - 2p^2)(2px - 2p^2 - y^2)} \right|,$$

ou ainda,

$$\tan(\alpha_1) = \left| \frac{-yx + yp - 2py}{2px - 2p^2 - y^2} \right|,$$

reescrevendo,

$$\tan(\alpha_1) = \left| \frac{-yx - yp}{2px - 2p^2 - y^2} \right|.$$

Sabendo que $y^2 = 4px$, tem-se:

$$\tan(\alpha_1) = \left| \frac{-yx - yp}{2px - 2p^2 - 4px} \right|,$$

então,

$$\tan(\alpha_1) = \left| \frac{-yx - yp}{-2px - 2p^2} \right|,$$

reescrevendo, tem-se:

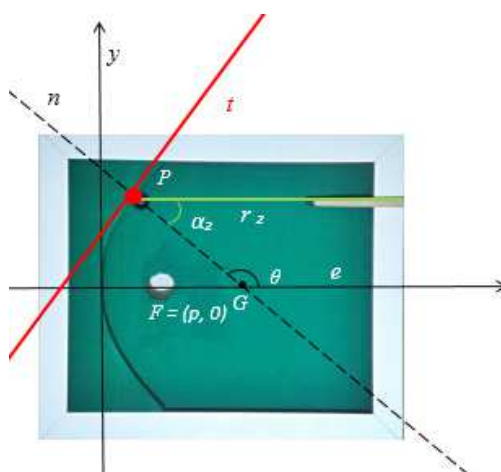
$$\tan(\alpha_1) = \left| \frac{y(-x-p)}{2p(-x-p)} \right|,$$

simplificando, chegando:

$$\tan(\alpha_1) = \left| \frac{y}{2p} \right|. \tag{4.5}$$

Por outro lado a reta r_2 , cujo coeficiente angular é nulo, e $\tan(\theta) = -\frac{y}{2p}$.

Figura 43 – Reta r_2 .



Fonte: Autoria própria.

Pelo Lema (1.2), tem-se que:

$$\tan(\alpha_2) = \left| \frac{0 - \tan(\theta)}{1 + [0 \tan(\theta)]} \right|,$$

substituindo $\tan(\theta)$, segue que:

$$\tan(\alpha_2) = \left| \frac{0 - \left(-\frac{y}{2p}\right)}{1 + \left(0 \left(-\frac{y}{2p}\right)\right)} \right|,$$

ou seja,

$$\tan(\alpha_2) = \left| \frac{\left(\frac{y}{2p}\right)}{1} \right|,$$

ou ainda,

$$\tan(\alpha_2) = \left| \frac{y}{2p} \right|. \tag{4.6}$$



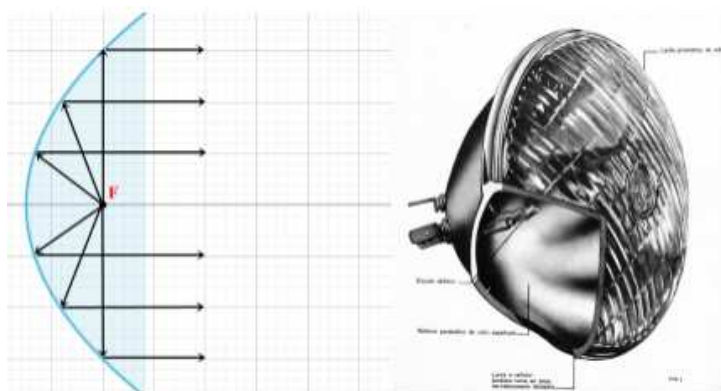
Portanto, também pelo Lema (1.2) os ângulos, formado pela interseção das retas são agudo então, são positivos e não são simétricos podemos deduzir que α_1 e α_2 são iguais, ou seja, o ângulo de reflexão é igual ao ângulo de incidência.

Realizando a tacada na bola, de modo que a mesma descreva uma trajetória paralela ao eixo da parábola, ao incidir em um ponto da superfície parabólica será refletida com ângulo de reflexão igual ao ângulo de incidência. Convergindo para a caçapa da bilhar.

4.2 Aplicação da Propriedade de Reflexão da Parábola

A propriedade de reflexão da parábola é amplamente utilizada, tanto para captação de sinal como na reflexão de luz. Essa propriedade é aplicada em faróis de carro, motos entre outros. Ao considerar uma superfície espelhada côncava no formato de um parabolóide e posicionar uma lâmpada exatamente no foco do parabolóide os feixes de luz ao incidir na superfície espelhada refletirá raios paralelos ao eixo de simetria.

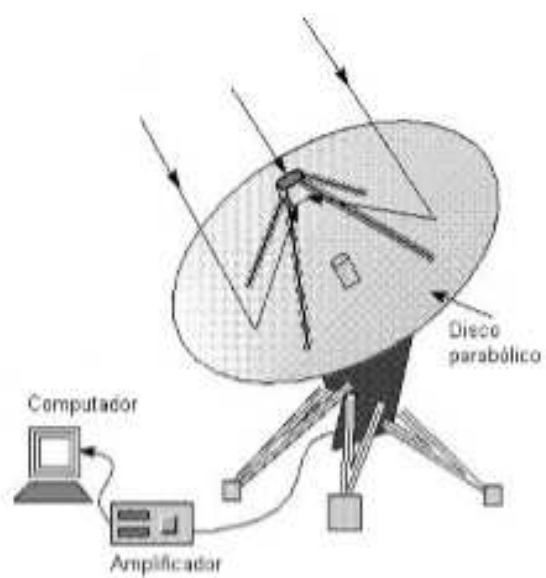
Figura 44 – Propriedade de reflexão da parábola.



Fonte: LLUAUTO.

Reciprocamente, se um feixe de sinal lançados paralelos ao eixo de simetria da parábola ao incidir sobre a superfície parabólica todos irão convergir para o foco F . Essa aplicação está presente nas antenas parabólicas, pois os feixes de sinais recebidos são concentrados em um único ponto, que é o foco da parábola, onde se encontra o receptor dos sinais de televisão, Figura (45).

Figura 45 – Antena parabólica.



Fonte: GEOCITIES.ws.

CONCLUSÃO

Neste trabalho as cônicas foram apresentadas centralizadas no plano xy e a reta focal sobre o eixo x , pois dessa forma apresentou-se os bilhares cônicos como recursos didáticos para o ensino da propriedade refletora das cônicas, os demais casos envolvendo translação e rotação dos eixos não foram abordados, mas podem ser estudados de maneira análoga.

Para demonstrar a propriedade de reflexão contida no bilhar elíptico, no bilhar hiperbólico e no bilhar parabólico utilizou-se a Tangente Trigonométrica dos Ângulos (formados pelos raios focais e eixo focal da curva), o Teorema do Ângulo Externo, manipulações algébricas e coeficientes angulares, com o objetivo de mostrar que o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão.

No bilhar elíptico a bola partindo da marcação feita sobre a mesa do bilhar exatamente no foco da curva, ou passando por ela quando realizada a tacada na bola com força suficiente em direção a tabela, tocará apenas uma vez em qualquer ponto da mesma e, será lançada em direção a caçapa do bilhar que está localizada no outro foco da curva.

No bilhar hiperbólico a bola em qualquer posição na mesa do bilhar, tacada com força suficiente em direção a uma marcação feita na tabela, exatamente no foco da curva, tocará apenas uma vez na mesma e será lançada em direção ao outro foco da curva onde está localizada a caçapa do bilhar.

No bilhar parabólico a bola em qualquer posição na mesa do bilhar, tacada em direção a tabela, de modo que descreva uma trajetória paralela ao eixo de simetria da curva e com força suficiente, tocará apenas uma vez na mesma e será lançada em direção a caçapa do bilhar que está localizada no único foco da curva.

Contudo os Bilhares Cônicos é uma aplicação direta da propriedade de reflexão das cônicas, o que reforça positivamente o objetivo do estudo, proporcionando uma metodologia de ensino atrativa para os alunos, podendo ser aplicada e verificada a eficácia da mesma.

REFERÊNCIAS

ÁVILA, G. *Cálculo das Funções de uma Variável*, Volume 1. 7ª ed. Rio de Janeiro - RJ: LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora S.A. 1978.

ÁVILA, G. *Cálculo das Funções de uma Variável*, Volume 2. 7ª ed. Rio de Janeiro - RJ: LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora S.A. 2004.

AMINO. Como Telescópios funcionam. Disponível em: <https://aminoapps.com/c/astrologo/page/blog/como-telescopios-funcionam/aeKg_eeh0ug2JIGj5KnVbNppRGNXvEog6>. Acesso em 08 de junho de 2019.

BARBOSA, J. L. M. *Geometria Euclidiana Plana*. 10ª ed. Rio de Janeiro - RJ: SBM - Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.

BOYER, C. B. *História da Matemática*. 2ª ed. São Paulo - SP: Editora Edgard Bluecher LTDA. 1996.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais: matemática / Secretaria de Educação Fundamental*. Brasília: MEC/SEF, 1997. 142p.

CONTADOR, P. R. M. *Matemática uma Breve História*, Volume 1. 2ª ed. São Paulo - SP: Editora Livraria da Física, 2006.

FLEMMING, D. M.; GONÇALVES M. B. *Cálculo A*. 6ª ed. São Paulo - SP: Pearson Prentice Hall, 2006.

GEOCITIES.ws. Sala de Física. Disponível em: <<http://www.geocities.ws/saladefisica7/funciona/antena.html>>. Acesso em: 07 de junho de 2019.

GUIDORIZZI, H. L. *Um Curso de Cálculo*, Volume 1. 5ª ed. Rio de Janeiro - RJ: LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora S.A. 1985.

IEZZI, G. *Fundamentos de Matemática Elementar*, Volume 7. 5ª ed. São Paulo - SP: Atual, 2005.

LORENZATO. *Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores*, 3 ed. Campinas - SP: Editora Autores Associados, 2006.

LLUAUTO. Autopeças. Disponível em: <<http://blogdaluauto.blogspot.com/2011/12/quando-surgiu-2-farol-lampada.html>>. Acesso em: 08 de junho de 2019.

ODONTCLEA. Led Para Refletor Odontológico Dabi-gnatus-kavo E Outras Marcas. Disponível em: <http://odontclea.com/index.php?route=product/product&product_id=567>. Acesso em 06 de abril 2019.

O GLOGO. As Paredes têm Ouvidos na Grand Central Station. Disponível em: <<https://blogs.oglobo.globo.com/nova-york/post/as-paredes-tem-ouvidos-na-grand-central-station-516551.html>>. Acesso em: 13 de março de 2019.

REIS, G. L.; SILVA, V. V. *Geometria Analítica*. 2ª ed. Rio de Janeiro - RJ: LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora S.A. 1996.

STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. *Álgebra Linear*. 2ª ed. São Paulo - SP: Pearson Makron Books. 1987.