UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA E MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

MÔNICA SOARES DA SILVA

TEOREMA DE LIOUVILLE: UMA APLICAÇÃO NA INTEGRAÇÃO DE FUNÇÕES

CUITÉ - PB
2019

MÔNICA SOARES DA SILVA

TEOREMA DE LIOUVILLE: UMA APLICAÇÃO NA INTEGRAÇÃO DE FUNÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Matemática da Unidade Acadêmica de Física e Matemática do Centro de Educação e Saúde da Universidade Federal de Campina Grande, como requisito parcial à obtenção do grau de licenciado em Matemática

Orientador: Dr. Aluízio Freire da Silva Junior.

CUITÉ - PB
2019

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA NA FONTE
Responsabilidade Rosana Amâncio Pereira – CRB 15 – 791

S586t Silva, Mônica Soares da.

Teorema de Liouville: uma aplicação na integração de funções. / Mônica Soares da silva – Cuité: CES, 2019.

51 fl.

Monografia (Curso de Licenciatura em Matemática) – Centro de Educação e Saúde / UFCG, 2019.

Orientação: Dr. Aluízio Freire da Silva Junior

1. Primitivas. 2. Funções elementares. 3. Teorema fundamental do cálculo. I. Título.

Biblioteca do CES – UFCG CDU 510.56

MÔNICA SOARES DA SILVA

TEOREMA DE LIOUVILLE: UMA APLICAÇÃO NA INTEGRAÇÃO DE FUNÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Matemática da Unidade Acadêmica de Física e Matemática do Centro de Educação e Saúde da Universidade Federal de Campina Grande, como requisito parcial à obtenção do grau de licenciado em Matemática

Trabalho de Conclusão de Curso aprovado em 27 de mês junho de 2019.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Aluízio Freire da Silva Junior - UFCG
Orientador

Profa. Dra. Célia Maria Rufino Franco - UFCG
Examinadora

Profa. Me. Maria de Jesus Rodrigues da Silva - UFCG
Examinadora

A toda minha família.
Em especial mãe e vó,
Maria Soares e Maria do Carmo.

AGRADECIMENTOS

Durante toda essa jornada como aluna, são muitas as pessoas a quem devo agradecer, pelo fato de estarem comigo, me motivando a seguir em frente nos momentos mais árduos e por principalmente não desistirem de mim.

Agradeço a Deus primeiramente, por ter me dado saúde e me presenteado com a graça de ter pessoas maravilhosas ao meu redor para serem a minha base. É com o coração cheio de alegria e um sorriso enorme nos lábios que agradeço a minha mãe Maria Soares e avó materna Maria do Carmo, por toda a paciência que tiveram comigo e por todo o esforço que fizeram para que eu não desistisse.

Aos meus familiares em geral, em especial a meus tios Francisco (Liquinho), Cristiano, a José Eudes e Silvana que sempre acreditaram em mim e por quem tenho um apreço e um carinho enorme. Aos meus primos Yasmin, Joyce, Rodrigo e Carlinhos que me motivam a vencer na minha caminhada. De uma forma geral, a toda a minha família.

A todos os professores da Unidade Acadêmica de Física e Matemática da UFCG-CES, em especial Drª Jaqueline Lixandrão, Marciel, Aluska Ramos, Edna Souza, Glageane Souza, Maria de Jesus, Luciano Barros, Célia Maria, Leonardo Brito, e Renato Ignácio todo o meu carinho, afinal, sem estes os meus sonhos não seriam realizados, e restaurados a cada dia.

Ao meu orientador professor Dr. Aluízio Freire por tudo o que me ensinou, por todo o apoio que me prestou desde que entrou na minha vida acadêmica e por toda a paciência que teve comigo, que não mediu esforços na orientação, prestando todo o apoio necessário com grande competência, com sinceridade nas suas opiniões sobre o trabalho e sempre com um argumento em que direcionava à uma melhor elaboração deste estudo, um verdadeiro exemplo a ser seguido.

Às professoras, Me. Maria de Jesus e a Drª Célia Maria por seus ensinamentos, paciência confiança ao longo das supervisões em minhas atividades na UFCG-CES. É um prazer tê-las na banca examinadora, pois dividiram comigo este momento tão importante e esperado.

Aos meus amigos Ivo Dantas, Ivo Sena, Anderson Santos, Leandro, William, Isaac, Anailde, Marcos Sérgio, Jacilene, Hiago, Thiago, Ailton, Girlene, Vanderlúcia, Ana Maria, Nytyeska, Natham, Aldemir, Fátima, Igor, e em especial André Macedo por me auxiliar na formatação deste trabalho, aos quais fizeram com que essa caminhada fosse menos difícil, enchendo de alegria os meus dias e me fazendo compartilhar dos melhores momentos. Também quero agradecer a Elias pelos conselhos e por mostrar sempre o melhor caminho para me tornar uma boa professora.

Ao “Quarto três” composto por Elinailda, Yorrane e Elen o qual agradeço grandiosamente pelo apoio e por me aceitaram do jeitinho que sou, pelas gargalhadas e por proporcionarem alguns dos melhores momentos da minha vida, por todos os conselhos e por todas as motivações nos dias em que mais pensei em desistir, onde foram vítimas dos meus dias de estresse. Em especial, Jéssyka, Rafaela e Jacilene que ouviram tantas reclamações e conseguiram suportar o meu estresse em todas as horas do dia, apesar disto, continuaram me motivando e me dizendo que Deus estava ao meu lado, além de proporcionarem os melhores sorrisos, no decorrer de todo este percurso.

A CAPES pelo apoio financeiro. A Coordenação de Assistência Estudantil pelo auxílio moradia durante todos esses anos.

Para resumir, a todos que contribuíram direta ou indiretamente, meus sinceros agradecimentos!

RESUMO

Este estudo apresenta um pouco da história do Cálculo, enfatizando o desenvolvimento do Teorema Fundamental do Cálculo- (TFC) considerado um dos mais importantes desta área, sendo uma ferramenta essencial abordada em cursos de nível superior. São apresentados alguns conceitos relevantes sobre funções elementares, juntamente com propriedades, definições e resultados de integração. Além disso, investigado o problema de como resolver integrais que não podem ser calculadas aplicando o TFC. Nesse sentido, o principal objetivo deste trabalho é saber se, dada uma função f a sua primitiva é expressa ou não "em termos elementares". Assim, busca-se dar um significado preciso a noção de integração nestes termos, e apresenta-se dois teoremas, o de Chebyshev, e em especial, o teorema de Liouville, que estabelecem um caminho prático, tornando possível saber se algumas funções são expressas em termos elementares ou não. Desta forma, apesar deste problema não ser muito explorado nos livros de Cálculo, é de grande relevância ser estudado.

Palavras-chave: Primitivas. Funções Elementares. Teorema Fundamental do Cálculo.

ABSTRACT

This study we will present some of the history of calculus, emphasizing the development of the Fundamental Theorem of Calculus- (TFC) one of the most important theorems of this area, being a essential tool addressed in courses of higher levels, of paramount importance and of essential application. Some important concepts related to elementary functions along their properties, definitions, and integration results will be presented. In addition, investigated the problem of how to solve integrals that cannot be calculated by applying TFC. Therefore, the main objective of this work is to know if, given a function f, its primitive can be expressed or not "in elementary terms". Thus, it is sought to give a precise meaning to the notion of integration in these terms, where we will present two theorems, Chebyshev's theorem and especially Liouville's theorem, that establish a practical path, making it possible to know whether some functions are expressed in elementary terms or not. Thus, although this problem is not widely explored in the calculus books, it is of great relevance to be a study.

Keywords: Primitives. Elementary Functions. Fundamental Theorem of Calculus.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O propósito de escrever sobre este assunto, é um interesse pessoal que tenho em relação ao Teorema Fundamental do Cálculo, o qual acredito ser um dos mais importantes teoremas da Matemática. Poder dizer por meio de uma expressão matemática a relação entre a taxa de crescimento de uma determinada grandeza e a quantidade que esta grandeza cresceu, ou melhor, a partir da taxa de crescimento poder obter a quantidade que tal grandeza cresceu e vice-versa, foi uma grande melhoria não só para a matemática, mas também para todas as demais ciências que baseiam-se neste teorema para resolver inúmeros problemas resultantes de suas áreas específicas.

Este trabalho trata de um tema em que poucos livros de cálculo se detém, com relação a integração, no que diz respeito a saber quais os tipos de funções para as quais se pode encontrar uma expressão para sua primitiva em termos de funções elementares (conhecidas), ou em outras palavras, quais as funções cujas primitivas não são elementares, ou seja, primitivas que não podem ser expressas sem o símbolo de integração $\int$. Este estudo tem como referência três teoremas, onde dois deles é um caso particular do outro os quais são devido a Liouville, e o terceiro devido a Chebyshev em que pesquisas de ambos contribuíram muito com relação a este tema. Abaixo segue um breve resumo de cada capítulo deste estudo.

No capítulo 1 apresenta um pouco da história do Cálculo, bem como alguns matemáticos essenciais no desenvolvimento do mesmo.

O capítulo 2 trata-se de alguns conceitos básicos, tais como o de função contínua, o de função derivável e a relação entre ambas. O conceito de integral como uma soma de Riemann, a relação entre função contínua e função integrável, o Teorema Fundamental da Álgebra e a Fórmula de Euler, onde estes conceitos são resultados importantes para incrementar este estudo.

No capítulo 3 e último, aborda apresentar um dos teoremas mais importantes do Cálculo, Teorema Fundamental do Cálculo e sua demonstração, a relação entre duas primitivas de uma determinada função. Logo após, apresenta-se de uma classificação das funções baseada nas operações usadas para defini-las, ou seja, classifica-se as funções como: funções polinomiais ou funções racionais ou funções algébricas ou transcendentais. Denota-se por $\mathbb{E}$ a Classe das Funções Elementares e intuitivamente esta classe é constituída por todas as funções conhecidas por um aluno de Cálculo.

Ainda o terceiro capítulo, elenca a três importantes teoremas, dois quais são devidos a Joseph Liouville (1809-1882) um grande matemático francês e o outro devido a P. L. Chebyshev (1812-1894) um excelente matemático russo. Ambos que contribuíram muito para o problema de saber se a primitiva de uma determinada função pertence ou não a classe das funções elementares. E, por último, após expor estes teoremas, seguem-se cinco aplicações referentes ao Teorema de

Liouville, para mostrarmos que algumas primitivas não são funções elementares, e uma aplicação referente ao teorema de Chebyshev, apresentando alguns exemplos para facilitar o entendimento do leitor.

1 UM BREVE RELATO HISTÓRICO SOBRE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

O Cálculo Diferencial e Integral- CDI é uma disciplina indispensável estudada pelos alunos da área de exatas quando ingressam no ensino superior. O professor ao ensinar CDI apresenta um dos conteúdos mais relevantes da disciplina que é o Teorema Fundamental do Cálculo-TFC.

Este teorema é uma poderosa ferramenta matemática usada na resolução de diversos problemas que envolvem diferentes áreas do conhecimento. Trazendo muitas contribuições para a física, química, economia, administração, engenharia, estatística, computação entres outras áreas, é notável a importância de suas aplicações em vários ramos. Esta pesquisa abordar um pouco da história do TFC, apresentando alguns dos seus principais contribuidores por volta do século XVII, como os grandes estudiosos Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz. Estes são os nomes na construção dos resultados do Cálculo Diferencial e Integral, de maneira independente, ambos chegaram aos mesmos resultados sobre o tema, porém de formas distintas em que cada um defendia suas ideias de acordo com suas próprias investigações, colaborando para o Cálculo Integral e Diferencial que conhecemos até hoje.

O TFC estabelece uma fundamental ligação entre a integração e a diferenciação. Na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral nota-se que a diferenciação está ligada a questão de determinar a inclinação da reta tangente a uma curva em um ponto e a integração está ligada a questão de encontrar a área de figuras planas ou volume de um sólido. Mesmo que aparentemente não seja fácil de ver, há uma ligação entre essas operações graças ao TFC.

1.1 Cálculo Diferencial e Integral

Historicamente o cálculo teve várias colaborações de muitos estudiosos como acontece em boa parte de todo o conhecimento que temos hoje. O século XVII foi uma época bastante proveitosa para a expansão do universo da matemática, já que os colaboradores matemáticos para o desenvolvimento do Cálculo são consideráveis.

Boa parte deles, mesmo que de forma direta ou indiretamente, já usavam ideias do Cálculo para a resolução de alguns probleminhas, como, Bonaventura Cavalieri, John Wallis, Isaac Barrow, Pierre de Fermat e Johannes Kepler. O ajuntamento das ideias conhecidas e usadas até então, ligadas ao desenvolvimento e aprimoramento dos métodos, ocorreu com Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz que deram origem as operações mais consideráveis do Cálculo: a Integração e a Derivação.

1.1.1 Cálculo integral

Segundo EVES (2004), o desenvolvimento histórico do cálculo seguiu na ordem contrária à daquela dos textos e cursos básicos atuais sobre o assunto: ou seja, primeiro surgiu cálculo integral e só muito tempo depois o cálculo diferencial. Diante disso, iremos abordar brevemente o desenvolvimento do cálculo integral e logo após, o cálculo diferencial.

De antemão, temos que um dos primeiros problemas que "quebraram"a cabeça da humanidade relacionados a integrais foram os problemas sobre quadraturas, sendo que quadratura é uma expressão antiga que se tornou sinônimo do processo de determinar áreas, era utilizado um quadrado para calcular áreas de figuras planas, pois consideravam essa figura a mais simples a ser utilizada. Os gregos tinham bastante curiosidades com problemas relacionados a medidas de superfícies a fim de encontrar suas áreas. Assim, procuravam encontrar um quadrado que tivesse área igual à da figura que estavam estudando.

Um colaborador que teve uma breve participação na história do Cálculo foi Hipócrates de Chios, (440 a.C.), que realizou as primeiras quadraturas da História, mas antes dele, tinha Antifon o Sofista, (c. 430 a.C.). Segundo EVES (2004) era um contemporâneo de Sócrates que teria antecipado a ideia de que, por sucessivas duplicações do número de lados de um polígono regular inscrito num círculo, a diferença entre o círculo e o polígono ao fim exaurir-se-ia. Apesar do dito, tinha um impasse: essa sequência nunca poderia ser concluída. Apesar disso, essa foi uma ideia genial que deu origem ao método da exaustão.

Nesse contexto, uma das questões mais importantes, e que se constituiu numa das maiores contribuições gregas para o cálculo, surgiu por volta do ano 225 a.C. Trata-se de um teorema de Arquimedes para a quadratura da parábola, no qual o principal argumento considerado por ele era um método mecânico para a solução de problemas, onde a área era considerada como soma de infinitos segmentos de reta, pois tal método é utilizado para determinar a área de um segmento de parábola resolvido por uma corda. Segundo EVES (2004), Arquimedes mostrou como se calcula a área de um segmento qualquer de parábola. E, ainda, ele também determinou uma soma com infinitos termos.

> (...) corte a região correspondente num número muito grande de tiras planas ou de fatias paralelas finas e (mentalmente) pendure esses pedaços numa das extremidades de uma alavanca dada, de tal maneira a estabelecer o equilíbrio com uma figura de área ou volume e centroide conhecidos. (EVES, 2004, p. 422).

Outras contribuições após as de Arquimedes foram as do matemático alemão Johannes Kepler (1571-1630), um dos primeiros a usar ideias relacionadas a respeito de infinitésimos em estudos com a integração. Em seus estudos relacionados ao movimento dos planetas onde alcançou áreas de diversos setores de uma região elíptica, que calculava volumes de sólidos considerando a soma de fatias planas. Daí, para o cálculo de cada um desses volumes, ele subdividia o sólido em várias fatias e a soma desses infinitésimos, chegava ao volume esperado.

Logo após, vem a contribuição que o matemático italiano Boaventura Cavalieri (1598–1647) publicou em 1635, em um dos livros mais influentes do início do período moderno: *Geometria indivisibilibus continuorum*, onde afirma que "... uma área pode ser pensada como sendo formada de segmentos ou "indivisíveis" e que volume pode ser considerado como composto de áreas que são volumes indivisíveis ou quase atômicos." (BOYER, 2010, p. 226). Da mesma forma que engloba o postulado fundamental do "O teorema de Cavalieri" onde diz,

> Se dois sólidos (ou regiões planas) tem alturas iguais, e se secções paralelas as bases e as distâncias iguais delas estão sempre numa dada razão, então os volumes (ou áreas) dos sólidos (ou regiões) também estão nesta mesma razão. (BOYER,1992, p.11).

Cavalieri aplicou a ideia dos indivisíveis em inúmeros problemas e se concentrou num teorema geométrico extremamente útil, que na atualidade assemelha-se com a afirmação: $\displaystyle\int_0^a dx = \frac{a_{n+1}}{n+1}$.

Também bastante importante no desenrolamento do cálculo integral, foi o matemático inglês John Wallis (1616-1703), pois ele aritmetizou boa parte do processo geométrico desenvolvido por Cavalieri. Em seu trabalho *Arithmetica infinitorum*, Wallis desenvolveu princípios de indução e interpolação que o induziram a achar vários resultados úteis.

1.1.2 Cálculo Diferencial

O Cálculo Diferencial por sua vez, se originou de problemas relativos ao traçado de tangentes a curvas e de questões que buscavam determinar máximos e mínimos de funções, na Grécia antiga, porém a primeira manifestação realmente clara do método diferencial data de 1629 (EVES, 2004). Assim, a ideia de derivada é considerada bastante relevante pois há grande quantidade de aplicações.

Para a evolução do Cálculo Diferencial podemos contar com o matemático francês Blaise Pascal (1623-1662) que deu sua contribuição para o desenvolvimento do mesmo, pois Pascal demonstrou o triângulo que pode permanecer indefinidamente aumentando o número de linhas, o qual é intitulado como "Triângulo de Pascal" e refere-se a uma combinação triangular de números em que qualquer número é igual à soma do par de números acima dele mesmo.

Por volta do século XIX mais dois matemáticos com nome respeitáveis, René Descartes (1596-1650) e Pierre de Fermat (1607-1665), ao mesmo tempo construíram a ligação de Álgebra e Geometria, e assim obtiveram a Geometria Analítica.

Por sua vez, Fermat demonstrou está interessado na quadratura de curvas que satisfazem à equação $y = x^n$, na qual se tem $n > 0$. Fermat estudou a aproximação para áreas de curvas desse tipo utilizando uma série de retângulos os quais tem suas bases compondo uma progressão geométrica, de maneira parecida ao método da exaustão. Logo, Fermat revelou que caso utilizasse um valor menor que zero para o n, analisando os valores de x maiores que zero se obtêm uma curva do tipo $y = \frac{1}{x^n}$.

1.2 Teorema Fundamental do Cálculo

A matemática tem fundamental importância para o desenvolvimento da humanidade em diversos fatores e um deles é a tecnologia, o TFC está envolvido na evolução da mesma assim como na formulação de modelos matemáticos que permitem prever a evolução de doenças no corpo humano, efeito de medicamentos na farmacologia, acompanhamento de movimentos migratórios, entre outros tantos, devido os obstáculos dos homens diante do amplo universo matemático, assim o TFC vem facilitando o entendimento deles.

Hoje em dia, algumas vezes, o TFC estudado nas universidades, por alguns alunos é basicamente visto naquele momento da aula em que professor está ensinando e depois não dão a importância necessária a esse teorema pelo restante da disciplina ou até mesmo na sua vida acadêmica, pois se adaptam a pensar que este é apenas mais um conteúdo que não fará a mínima diferença, de tão essencial aplicação como provavelmente difícil de ser entendido por alguns alunos.

Segundo STEWART (2009, p. 364), “O Teorema Fundamental do Cálculo é inquestionavelmente o mais importante do Cálculo e um dos maiores feitos da mente humana”.

Um dos matemáticos que teve bastante influencia para o desenvolvimento do TFC foi o inglês Isaac Barrow (1630-1677), pois elaborou uma certa aproximação do Cálculo Diferencial da usada no momento atual, chamada de *triângulo diferencial*, e

> ...considera-se que Barrow foi o primeiro a perceber, de maneira plena, que a diferenciação e a integração são operações inversas uma da outra. Essa importante descoberta é conhecida como teorema fundamental do cálculo e aparece enunciada e provada nas Lectiones de Barrow. (EVES, 2004, p. 435).

Considerados um dos estudos mais significativos de Barrow, *Lectione Geometricae* foi publicado no ano de 1670 e se refere a tangentes. Esse trabalho foi revisado mais tarde por Newton e contribuiu para o desenvolvimento do cálculo diferencial. (EVES, 2004).

Como já haviam ocorrido diversas explorações na época na área do CDI: várias curvaturas, quadraturas e ajustamentos já tinham sido realizados, sem demora começava a aparecer um método de diferenciação e várias tangentes a curvas foram construídas, o conhecimento de limite logo encontrava-se anunciado e o TFC era aceito. Por outro lado “... faltava a criação de um simbolismo geral com um conjunto sistemático de regras analíticas formais e também um redesenvolvimento, consistente e rigoroso, dos fundamentos da matéria." (EVES, 2004, p. 435).

Há dois estudiosos importantes que merecem uma atenção especial na história do CDI, pois deram grandes contribuições para o TFC, já que os dois foram encarregados por encurtar a relação entre o Cálculo Diferencial e o Cálculo Integral, assim ligando os métodos que se tornaram muito eficientes para as ciências exatas. Ocorreu na "... criação de um cálculo manipulável e proveitoso, que Newton e Leibniz, trabalhando independentemente, deram suas contribuições" (EVES, 2004, p. 435), finalidade pela qual são apontados como os "pais" do cálculo em geral, mas tendo em vista que houve vários contribuidores.

1.2.1 Isaac Newton

Newton (1624-1727) nasceu em Woolsthorpe, Lincolnshire no interior da Inglaterra, próximo a Cambridge. Sabe-se pouco sobre o que o atraiu a estudar a matemática, mas foi pelo ano de 1664 que ele começou, o tio que tinha estudado em Cambridge instigou sua mãe matriculá-lo na mesma escola, em 1661.

> "No início do seu primeiro ano ele comprou e estudou um exemplar de Euclides e logo depois leu a Clavis de Oughtred, a Geometria a Renato Descartes de Schooten, A Óptica de Kepler, as obras de Viète, e o que talvez tenha sido mais importante de todas as obras para ele, Arithmetica infinitorum de Wallis. Além disso, a esse estudo devemos acrescentar as aulas de Barrow deu como 'lucasian professor', e que Newton assistiu, depois de 1663" (BOYER, 1979, p.287).

Por volta dos anos de 1665 e 1666 por causa da peste foi necessário voltar para sua casa. Então nesta época, após estudos de várias obras conhecidas, Newton deu "um pé a frente" para iniciar o desenvolvimento de suas ideias, conhecimentos e trabalhos para uma nova matemática fazendo descobertas importantes. Segundo (EVES, 2004, p. 436) a princípio "... descobrindo o teorema do binômio generalizado, depois inventando o método dos fluxos, como ele chamava o atual cálculo diferencial.". Suas pesquisas consideradas mais relevantes para o CDI são *Philosophiae naturalis principia mathematica, Optics, Universal aritmethic, Analysis per quantitatum series, fluxiones, ac differentias, Methodus differentialis* e *The method of fluxions and infinite series*.

Uma das obras mais relevantes dirigidas ao CDI é *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas*, tal qual é colocada a ideia de momento de um fluente. Segundo EVES (2004, p. 439), nos estudos de Newton,

> ... uma curva era gerada pelo movimento contínuo de um ponto. Feita essa suposição, a abscissa e a ordenada de um ponto gerador passam a ser, em geral, quantidades variáveis. A uma quantidade variável ele dava o nome de fluente (uma quantidade que flui) e à sua taxa de variação dava o nome de fluxo de fluente. Se um fluente, como a ordenada do ponto gerador, era indicada por y,

> então o fluxo desse fluente era denotado por . [...] Essa taxa de crescimento constante de alguma fluente é o que ele chamava fluxo principal, podendo o fluxo de qualquer outro fluente ser comparado com esse fluxo principal.

Assim, ele faz uma introdução por meio dos elementos que estabelece, dois tipos de problemas: achar a fluxão ligada a fluentes dados, por meio de relações conhecidas entre os mesmos, o que coincide ao procedimento de diferenciação do cálculo usual; e definir que há entre tais fluentes, processo inverso ao primeiro e que coincide ao processo de integração do cálculo usual.

> Newton encontrou diversas e importantes aplicações para o método dos fluxos: "Determinou máximos e mínimos, tangentes e curvas, curvatura de curvas, pontos de inflexão e convexidade e concavidade de curvas; aplicou-o também a muitas quadraturas e retificações de curvas", e demonstrou uma habilidade extraordinária para integrar algumas curvas diferenciais. (EVES, 2004, p. 439-440).

De acordo com BOYER, (1996, p. 496) apesar de Newton não ter sido o primeiro a usar a diferenciação e integração, o seu legado ao cálculo foi ter consolidado um algoritmo geral aplicável a todas as funções, sejam algébricas ou transcendentes.

1.2.2 Gottfried Wilhelm Leibniz

Leibniz (1646-1716) nasceu em Leipzig na Alemanha. Era filho de um professor de Filosofia Moral e com oito anos dominava o latim (SIMMONS, 1987).

É notável que os procedimentos realizados por Leibniz foram diferentes dos realizados por Newton. Desta forma, independentemente de Newton, em 1684, Leibniz apresenta a obra *Nova methodus pro maximus et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus*, assim introduzindo e determinando seu cálculo diferencial, com uma notação básica que seria usada de uma forma efetiva, como por exemplo, dx para expressar diferencial de x. Segundo BOYER, 2010 "Para achar tangentes fez uso do *calculus differentialis* e para encontrar quadraturas utilizou o *calculus summatorius* ou *calculus integralis*, de onde se originou a nomenclatura atualmente utilizada".

Em *De geometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum*, divulgado no ano de 1686, Leibniz determina o cálculo integral, elaborando a notação básica fixa que iria ser utilizada, como a notação $\int x$, depois alterada para $\int(x)dx$, da integração usada.

Leibniz, em 1676, por meio de Henry Oldenburg, tinha se comunicado com Newton, o que, de acordo com Baron, seria de grande significado matemático e se incorporaria às controvérsias envolvendo seus nomes, pela paternidade do cálculo, pelos próximos duzentos e cinquenta anos (BARON, 1969).

1.3 Isaac Newton & Gottfried Wilhelm Leibniz

Nas idas e voltas na história do CDI também houve algumas confusões, mas nada que não tenha ajudado no desenvolvimento do mesmo. De acordo com o autor GAYO, 2010,

> Leibniz foi o primeiro a publicar suas descobertas relativas ao cálculo diferencial e integral, porém Newton já havia desenvolvido sua teoria muitos anos antes, o que levou à disputa sobre a paternidade do cálculo. A Royal Society, composta pelos principais cientistas da Inglaterra, acusou Leibniz de plágio, o que marcou profundamente a carreira do alemão.

Leibniz e Isaac Newton juntaram as ideias e as reuniram em um fundamento teórico que tornaria o cálculo. Antes de tudo, Leibniz foi culpado de imitar os trabalhos não divulgados de Newton, no momento presente, mesmo assim, é conhecido como o "pai" do cálculo, ao mesmo tempo com Newton. Hoje, acredita-se que ambos desenvolveram seus estudos independentemente.

> ... a opinião generalizada hoje é que ambos criaram o cálculo independentemente. Embora a descoberta de Newton seja anterior, Leibniz foi o primeiro a publicar seus resultados. Se Leibniz não era tão profundo em matemática quanto Newton, era talvez mais eclético e embora inferior (...) como analista e físico-matemático, era provavelmente dotado de uma imaginação mais aguda e um sentido superior quanto à forma matemática. (EVES, 2004, p. 444).

1.4 Melhorias do Cálculo Diferencial e Integral

É notável a importância dos grandes estudiosos que contribuiram para a matemática considerados "pai" do CDI, mas Newton não era muito de compartilhar seus estudos sobre os métodos dos fluxos, já Leibniz "encontrou discípulos dedicados que estavam ansiosos por aprender o cálculo diferencial e integral e transmitir o conhecimento a outros". (BOYER, 2010, p. 286). Dito isso, os trabalhos de cálculo de Leibniz passaram a ser estudados por outros matemáticos, entre eles Jakob Bernoulli e Johann Bernoulli. Johann Bernoulli contribuiu para a história do cálculo anunciando na Europa as capacidades dessa nova ferramenta matemática.

Foi por meio de estudos fornecidos por Johann a L' Hospital (1661 – 1704) que este divulgou *Analyse des infiniment petits, pour l'intelligence*, o primeiro texto sobre cálculo. Não só o seu envolvimento com o cálculo, mas também Bernoulli contribuiu consideravelmente para outros campos da matemática. De acordo com BOYCE, (2010) "Os irmãos Bernoulli contribuíram muito no desenvolvimento de métodos para resolver equações diferenciais e ampliaram o campo de aplicações destas, como, por exemplo, a resolução de diversos problemas em mecânica com ajuda do cálculo, formulando-os como equações diferenciais".

Um dos principais matemáticos do século XVIII, Joseph Louis Lagrange (1736-1813) foi um dos primeiros a dar atenção a situação nada satisfatória dos fundamentos da análise na evolução do cálculo. Além disso, Lagrange deu início a construção para a base do cálculo, ele adotou a notação $f'(x)$ usada para mostrar a derivada de uma função. O matemático se destacou também com seu trabalho em equações diferenciais parciais e no cálculo de variações impulsionando o desenvolvimento desse campo (EVES, 2004).

Na mesma época destaca-se também o matemático Jean Le Rond D'Alembert (1717–1783) que deu contribuição para o desenvolvimento do CDI afirmando que a ideia das grandezas infinitesimais como fundamento para os cálculos era fraca, assim substituindo-a pelo conceito de limites. Além deste, Augustin Louis Cauchy (1789–1857), provou que D'Alembert estava correto, indicando que o cálculo trabalha com os limites das razões de diferenças finitas de quantidades variáveis que relacionam-se, que, de acordo com GARBY, Cauchy determinou que: "Quando os valores sucessivamente atribuídos a uma variável aproximam-se indefinidamente de um valor fixo de modo que difiram dele por uma quantidade tão pequena quanto quisermos, aquele valor é chamado limite de todos os outros." (2009, p. 299).

Cauchy, em seu trabalho *Résumé des leçons sur le calcul infinitesimal*, demonstra o TFC e aborda o CDI de uma forma mais rígida. A ideia de definição de limites de Cauchy não encontrava-se ainda em "perfeitas condições" e continha algumas expressões vagas e foi reparada pelo matemático Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815–1897), chegando à definição $f(x)$ que é utilizada ainda hoje: "uma função $f(x)$ tem por limite o valor L no ponto $x = x_0$ se, dado ε tão pequeno quanto se queira, existir $\delta > 0$ tal que, para todo $0 < |x - x_0| < \delta, |f(x) - L| < \varepsilon$,." (GARBY, 2009, p. 299). "Weierstrass tornou-se sinônimo de 'raciocínio extremamente cuidadoso' (...) e tornou-se conhecido como 'o pai da análise moderna'" (EVES, 2004, p. 613).

Posteriormente, o cálculo já se encontrava em uma forma mais elaborada, mas os interesses em estudar e desenvolve-lo não parava por aí, pois as ideais para ele foram difundidas ao espaço euclidiano e ao plano complexo. Henri Lebesgue mais tarde difundiu a ideia de integral. Apareceriam matemáticos como Bernhard Riemann em que a ideia de integral foi definida em bases matemáticas rígidas, resultando uma ferramenta importante na resolução de diversos problemas e a matemática Maria Gaetana Agnesi que foi autora do primeiro estudo a juntar as ideias de Newton e Leibniz; escreveu também um dos primeiros livros sobre CDI.

O Cálculo Diferencial e Integral aparenta fazer mais sentido a partir do momento que se informa mais sobre sua origem, seus criadores e a necessidade de sua caracterização, assim como as dificuldades encontradas até os resultados adquiridos atualmente. Durante muito tempo de estudos levantados sobre CDI desde a Grécia Antiga até os dias de hoje, é evidente que ainda não se sabe tudo sobre o mesmo.

Portanto, considerando a história do CDI, é notável que os estudos e resultados alcançados foi por dedicação de diversos matemáticos, como se cada novo resultado fosse apenas mais uma etapa do desenvolvimento de um conhecimento maior. Logo, vem a importância de estudo da história, de pesquisas e de uma boa leitura.

2 CONCEITOS BÁSICOS

Este capítulo aborda alguns conceitos importantes do Cálculo, e está dividido em quatro seções. Na primeira, apresenta-se alguns conceitos fundamentais para o trabalho, tais como a continuidade e diferenciabilidade de uma função. Em particular, mostra-se que se f for diferenciável, então f é contínua. Na segunda seção define-se a definição de integral, e lista-se algumas propriedades da Integral Definida, além disso faz-se um breve comentário a respeito do seguinte teorema: se f é contínua em um intervalo fechado, então f é integrável. A terceira seção traz o Teorema Fundamental da Álgebra e por fim, a última seção aborda brevemente a Fórmula de Euler.

Um resultado importante para essa pesquisa é Teorema Fundamental do Cálculo. Antes de passar para sua demonstração, veja os seguintes resultados.

2.1 Resultados Preliminares I

Definição 2.1 *Seja $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função definida no intervalo I. Diz-se que f é contínua no ponto $\boldsymbol{a} \in I$ se, para todo $\epsilon > 0$ dado arbitrariamente, é possível encontrar um $\delta > 0$ de tal forma que para todo $x \in I$ com $|x - a| < \delta$ implica que $|f(x) - f(a)| < \epsilon$, isto é, uma função f é contínua em um número a se:*

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(\boldsymbol{a})$$

ou seja, é capaz de tornar $f(x)$ arbitrariamente tão próximo de $f(\boldsymbol{a})$ quanto se espere, desde que se tome um x suficientemente próximo de ***a****. Diz-se que uma função f é contínua, se esta função for contínua em todo* ***a*** *pertencente ao seu domínio.*

Definição 2.2 *Seja $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função definida no intervalo aberto I. Diz-se que f é derivável em um ponto $x_0 \in I$ se o seguinte limite existir*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Em tal caso, este limite é chamado de derivada de f no ponto x_0 e denotado por $f'(x_0)$. Diz-se que f é derivável, se ela for derivável em todos os pontos do seu domínio.

- Chama-se de derivada lateral de f pela direita do ponto x_0 denotado por $f'(x_0^+)$:

$$f'(x_0^+) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

se o limite existe, onde $x \to x_0^+$ com valores $x > x_0$

- Chama-se de derivada lateral de f pela esquerda do ponto x_0 denotado por $f'(x_0^-)$:

$$f'(x_0^-) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

se o limite existe, onde $x \to x_0^-$ com valores $x < x_0$.

Observação 2.1 *Caso uma das derivadas laterais não exista em x_0 ou os seus valores sejam diferentes, diz-se que f não é derivável em x_0.*

Proposição 2.1 *Se a função $f : I \to \mathbb{R}$ é derivável no ponto **a** $\in I$, então f é contínua em **a**.*
Demonstração. *Seja $a \in I$ fixo. Basta mostrar que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.*

Por hipótese tem-se que f é derivável no ponto a, assim sua derivada neste ponto é dada por:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Pode-se escrever $f(x)$ de forma que contenha $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, como segue:

$$f(x) = \left[\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a) \right] + f(a).$$

Aplicando o limite em ambos lados da expressão acima e como existem os limites de $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ e $(x - a)$ quando $x \to a$, então tem-se:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x \to a}(x - a) + \lim_{x \to a} f(a).$$

Logo tem-se:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f'(a) \cdot 0 + f(a) \Rightarrow \lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

■

Desta forma, se uma função f é derivável no intervalo I, então f é contínua em I.

A recíproca desta preposição não é verdadeira, ou seja, nem toda função contínua é derivável. Um exemplo claro deste fato é a função $f(x) = |x|$ a qual é contínua, porém no ponto $x_0 = 0$ não possui derivada, já que as derivadas laterais neste ponto são diferentes. Pois a derivada lateral pela direita é 1 e a derivada lateral pela esquerda é -1.

2.2 Integral

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função, com a e b números reais e $a < b$. Uma partição P para o intervalo $[a, b]$ é um conjunto finito de pontos do intervalo, isto é, $P = x_0, x_1, x_2, ..., x_k$, tal que $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{k-1} < x_k = b$. Se $[a, b]$ é um intervalo contido no domínio de uma função f e $P = x_0, x_1, x_2, ..., x_k$ é uma partição de $[a, b]$, dada uma escolha de números, $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_i, ..., \alpha_k$, com $x_{i-1} \leq \alpha_i \leq x_i$, para $1 \leq i \leq k$, a soma:

$$f(\alpha_1)(x_1 - x_2) + ... + f(\alpha_i)(x_i - x_{i-1}) + .. + f(\alpha_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{i=1}^{k} f(\alpha_i)(x_i - x_{i-1})$$

é denominada uma *soma de Riemann* de f sobre a partição P. Denota-se por $R(f, P)$ a soma acima, isto é:

$$R(f, P) = \sum_{i=1}^{k} f(\alpha_i)(x_i - x_{i-1}),$$

ou de uma forma mais simplificada:

$$R(f, P) = \sum_{i=1}^{k} f(\alpha_i)\Delta_i x \ \text{ onde } \ \Delta_i x = x_i - x_{i-1}.$$

O tamanho *(norma)* de uma partição P, denotado por $|P|$, é o comprimento do maior subintervalo determinado por dois números consecutivos da partição, ou seja, intervalos da forma $[x_i - x_{i-1}]$, ou seja:

$$|P| = max\{(x_1 - x_0), (x_2 - x_1), .., (x_i - x_{i-1}), (x_k - x_{k-1})\}$$

Percebe-se pela afirmativa acima, que o comprimento de qualquer subintervalo $[x_i - x_{i-1}]$ é sempre menor ou igual ao tamanho da partição.

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, diz-se que f é integrável em $[a, b]$ e denota-se por $\int_a^b f(x)dx$, se existe um número real I, satisfazendo a seguinte condição: se para toda sequência P_n de partições de $[a, b]$, tal que o $\lim\limits_{x\to\infty} |P| = 0$, tem-se:

$$\lim_{x\to\infty} R(f, P_n) = I$$

Denota-se:

$$I = \int_a^b f(x)dx.$$

Considere as seguintes convenções, que serão utilizadas daqui em diante:

Se $a < b$, então

1. $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx;$
2. $\displaystyle\int_a^a f(x)dx = 0.$

Segue abaixo algumas propriedades das Integrais Definidas.

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funções contínuas, tem-se:

1. Seja k um número real arbitrário então $k \cdot f$ é integrável em $[a, b]$, e além disso:

$$\int_a^b k \cdot f(x)dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx.$$

2. Seja c um número real qualquer entre a e b tem-se:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

3. Se f e g são integráveis em $[a, b]$ então $f + g$ é integrável em $[a, b]$, e:

$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

4. Se f e g são integráveis em $[a, b]$ e $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$ tem-se:

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx.$$

5. Se f é integrável em $[a, b]$ e $a \leq b$, tem-se:

$$\left| \int_a^b f(x) \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

6. Se $m \leq f(x) \leq M$, onde $m = minf(x) : x$ em $[a, b]$ e $M = maxf(x) : x$ em $[a, b]$ para todo x pertencente em $[a, b]$, tem-se:

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b - a).$$

O teorema a seguir não será demonstrado, pois fugiria do objetivo deste trabalho, mas informações dele são bastante importantes para este estudo. A demonstração encontra-se em Lima (2016).

Teorema 2.1 *Toda função contínua em um intervalo fechado é integrável.*

Vale a pena ressaltar que a recíproca deste teorema é falsa, ou seja, nem toda função integrável é contínua.

Um exemplo é a função f definida:

$$f(x) = \begin{cases} 5, & \text{se} \quad x = 2 \\ x^2, & \text{se} \quad 0 \leq x \leq 3 \text{ e } x \neq 2 \end{cases}$$

a qual é integrável, mas não é contínua no ponto $x = 2$.

2.3 Teorema Fundamental da Álgebra

Esta seção aborda um resultado significante para este estudo, o Teorema Fundamental da Álgebra pois as informações contidas neste servirá em aplicações do Capítulo 3. Assim, como o teorema anterior, apenas o expor, este que fez parte da tese de doutorado do excepcional matemático alemão Carl Friedrich Gauss (1777-1855).

Teorema 2.2 *(Teorema Fundamental da Álgebra) Todo polinômio de grau $n, n \geq 1$, admite pelo menos uma raiz complexa.*

Uma consequência deste é o seguinte teorema:

Teorema 2.3 *Todo polinômio de grau $n, n \geq 1$:*

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_0$, pode ser fatorado sob a forma: $P(x) = a_n(x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)\cdot ... \cdot(x-r_n)$, em que $r_1, r_2, ..., r_n$ são todas as raízes reais ou complexas de $P(x)$, eventualmente com algumas raízes iguais.

2.4 Fórmula de Euler

Esta seção apresenta a Fórmula de Euler, a qual será utilizada nas aplicações do próximo capítulo.

De acordo com Guidorizzi (1987), tem-se que se $f(x)$ é uma função derivável até a ordem n em um intervalo aberto I e seja $x_0 \in I$, define-se o polinômio $P(x)$ a seguir como o polinômio de Taylor, de ordem n, de $f(x)$ em torno do ponto x_0, ou seja,

$$P(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot\frac{f(x-x_0)^1}{1!} + ... + f^n(x_0)\frac{(x-x_0)^n}{n!} = \sum_{k=1}^{n} f^k(x_0)\frac{(x-x_0)^k}{k!}, \quad (2.1)$$

que, se fixado em torno de $x_0 = 0$, também pode ser chamado de polinômio de Mac-Laurin. Tomando-se em (2.1) $f(x) = e^x$ e $x_0 = 0$, pode-se demonstrar que

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!}\right) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + ... \quad (2.2)$$

A expressão da direita pode ser usada para definir e^x para x complexo. Analogamente demonstra-se que

$$senx = \lim_{n\to\infty}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... + (-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{x^n}{n!}\right) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... \quad (2.3)$$

e que

$$cosx = \lim_{n\to\infty}\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - ... + (-1)^n\frac{x^{2n}}{2n!}\right) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - ... \quad (2.4)$$

Para $x = z = iy, y \in \mathbb{R}$ e observando-se (2.2), (2.3) e (2.4) tem-se que

$$e^{iy} = \left(1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{4!} - ...\right) + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - ...\right) = cosy + iseny \quad (2.5)$$

que é a conhecida *Fórmula de Euler*, onde x é um número real qualquer e o número $i = \sqrt{-1}$ é a unidade imaginária.

2.4.1 Funções Trigonométricas Complexas

Aborda-se brevemente sobres funções trigonométricas com variável complexa. Tem-se que a Formula de Euler é

$$e^{xi} = cosx + isenx$$

Daí tem-se:

$$e^{-xi} = cosx - isenx$$

Deste modo, tem-se:

1. Adicionando membro a membro as expressões $e^{ix} = cosx + isenx$ e $e^{-ix} = cosx - isenx$, obtém-se:
$$cosx = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2}$$

2. Subtraindo membro a membro as expressões $e^{ix} = cosx + isenx$ e $e^{-ix} = cosx - isenx$, obtém-se:
$$senx = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i}.$$

3 OS TEOREMAS DE LIOUVILLE

Este capítulo trata-se de um assunto que poucos livros de CDI abordam no que diz respeito ao conteúdo de integração, tal assunto refere-se a como encontrar primitivas em termos de funções elementares- $\mathbb{E}$, sendo assim, primitivas que não podem ser expressadas com o símbolo de integração. Em outras palavras, este estudo baseia-se em saber se $\int f(x)dx \in \mathbb{E}$.

Durante as aulas de CDI, é provável que em algum momento os professores passem para os seus alunos um problema de integral, um problema "mirabolante"que oportuniza introduzir um assunto que nem sempre é dada a devida atenção na disciplina, por exemplo, a integral abaixo:

$$\int_{-1}^{0} \frac{senx}{x} dx. \tag{3.1}$$

Realizar o cálculo desta integral utilizando um método sistemático dá um "trabalhão"ao aluno que tentar resolve-la utilizando seu conhecimento adquirido durante as aulas de CDI, como as Técnicas de Integração que são dadas nessa disciplina. Depois de um tempo "quebrando a cabeça", o aluno perceberá que após várias tentativas frustrantes de encontrar a sua primitiva é provável se deparar com a alternativa de estar buscando fazer algo impossível: encontrar uma primitiva para uma função que "não possui primitiva". É possível que os alunos ouçam do professor de CDI que "pode-se mostrar"que estas funções não têm integral elementar; mas dificilmente é feita uma demonstração. Porém, tem-se que a expressão (3.1) é

$$\int_{-1}^{0} \frac{senx}{x} dx = 0.94608. \tag{3.2}$$

O resultado desta integral foi dado por um programa computacional intitulado *Fit Lab*, calculado por um método numérico para o qual gastou-se pouco tempo, diferente do que faria um aluno de cálculo. Por outro lado, deve-se dá atenção a uma questão de caraterística diferente, já que é possível perceber que existe a primitiva da função dada em (3.1), ou seja, o problema possui uma solução, mas não é expressa em termos de função elementar, sendo assim, está caracterizada de uma forma em que o aluno não está familiarizado, pois ele é acostumado a encontrar expressões de funções como polinômios, exponenciais, logaritmos, funções trigonométricas, racionais entre outras, isto é, as funções elementares (conhecidas).

Considerando que o lado direito da igualdade da expressão (3.2) não é "conhecido"por boa parte dos estudantes, já que é dada pouca atenção para esse tipo de problema, irá ser investigar aqui as circunstâncias sob as quais um problema com essa característica pode ser analisado de algumas formas. Sabendo que esse problema relacionado a primitiva pode ser reconhecido simplesmente quando introduzimos limitações amplas quanto às classes de funções e as formas de expressão que estamos analisando. Portanto, requer que restrinja tanto a classe de funções quanto a forma de expressão a ser utilizado.

Junto a isso, será discutido o problema acima, complementando a parte final da teoria de integração que deveria constar em vários livros de Cálculo. Além disso, o objetivo principal deste trabalho é saber se, dada uma função f a sua primitiva é expressa ou não "em termos elementares".

Conforme os matemáticos se tornaram mais conhecedores das funções que encontraram, a aceitação deles seguiu e a noção de função se desenvolveu. Durante o século XIX, a primitiva ou antiderivada levou a seguinte forma: estabelecer se uma determinada função elementar tem ou não uma primitiva, se assim for, calculá-la.

Para um melhor entendimento, é preciso um olhar mais atento ao que o matemático Joseph Liouville (1809-1882) entende sobre as funções elementares. Em vários de seus estudos, Liouville estabeleceu de maneira mais consistente as bases para abordagem do problema (3.1) de uma maneira mais geral. Sua noção sobre $\mathbb{E}$ coloca as formas consideradas conhecidas pelo aluno de CDI. É interessante ressaltar que os iniciais e mais importantes teoremas com relação a saber se $\int f(x)dx \in \mathbb{E}$ nasceram dos estudos realizados por ele.

3.1 Resultados Preliminares II

Nos cursos de ciências exatas de instituições de nível superior na disciplina de Cálculo, os alunos conhecem um importante teorema, intitulado como o Teorema Fundamental do Cálculo, este tem um papel importante neste estudo, pois a partir dele ira-se iniciar as investigações do que se refere a saber se $\int f(x)dx \in \mathbb{E}$. Nos livros de Cálculo ressaltam encontrar as primitivas de diversos tipos de funções e as apresentam como combinação finita na classe $\mathbb{E}$. Diante disso, é interessante destacar que, pelo TFC, cada função possui uma primitiva.

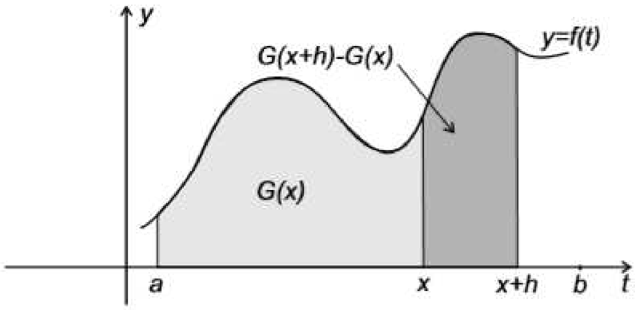
3.1.1 Teorema Fundamental do Cálculo

Seja $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ uma função integrável. Assim, fixado qualquer $x \in [a, b]$ existe $\int_a^x f(t)dt$, daí podemos determinar uma nova função $G : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$, ou seja, $G(x) = \int_a^x f(t)dt$. Observe que $G(a) = 0$ e se f é positiva e contínua, $G(x)$ é o valor da área limitada pelo eixo x e o gráfico de f, entre as retas $t = a$ e $t = x$, de acordo com a Figura 1, além disso, ocorre uma relação geométrica simples entre uma função f e o sua integral indefinida

Teorema 3.1 *(Primeiro Teorema Fundamental do Cálculo) Seja $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ uma função contínua e definimos $G : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ como sendo a função:*

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt \tag{3.3}$$

Figura 1 – $G(x)$ é a região delimitada entre f e o eixo x



Autoria própria

Então G é uma função diferenciável e:

$$G'(x) = \frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)dt\right] = f(x) \tag{3.4}$$

Demonstração. Se x e $x+h \in [a,b]$ tem-se que:

$$G(x+h) - G(x) = \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt$$

Isto é:

$$G(x+h) - G(x) = \int_x^{x+h} f(t)dt \tag{3.5}$$

e também tem-se que:

$$h \cdot f(x) = \int_x^{x+h} f(x)dt$$

onde:

$$f(x) = \frac{1}{h} \cdot \int_x^{x+h} f(x)dt$$

Agora, dividindo ambos os membros da equação (3.5) por h, obtêm-se:

$$\frac{G(x+h) - G(x)}{h} = \frac{1}{h} \cdot \int_x^{x+h} f(t)dt$$

e subtraindo $f(x)$ de ambos os membros, tem-se:

$$\begin{aligned}
\frac{G(x+h) - G(x)}{h} - f(x) = &= \frac{1}{h} \cdot \int_x^{x+h} f(t)dt - f(x) \\
&= \frac{1}{h} \cdot \int_x^{x+h} f(t)dt - \frac{1}{h} \cdot \int_x^{x+h} f(x)dt \\
&= \frac{1}{h} \cdot \int_x^{x+h} [f(t) - f(x)]dt
\end{aligned}$$

Com $\varepsilon > 0$, pela continuidade de f no ponto x, existe $\delta > 0$ tal que $t \in [a,b]$, $|t-x| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(x)| < \varepsilon$. Utilizando as propriedades de Integrais Definidas (5) e (6) do Capítulo 2. Então $0 < |h| < \delta$, $x+h \in [a,b]$ implicando em:

$$\begin{aligned}\left|\frac{G(x+h)-G(x)}{h}-f(x)\right| &\leq \frac{1}{|h|}\cdot\left|\int_x^{x+h}[f(t)-f(x)]dt\right| \\ &\leq \frac{1}{|h|}\cdot\int_x^{x+h}|f(t)-f(x)|\,dt \\ &\leq \frac{1}{|h|}\cdot|[(x+h)-x]|\cdot\varepsilon \\ &< \frac{1}{|h|}\cdot|h|\cdot\varepsilon=\varepsilon\end{aligned}$$

Então, para todo $\varepsilon > 0$:

$$\left|\frac{G(x+h)-G(x)}{h}-f(x)\right| < \varepsilon$$

Daí, temos que:

$$G'(x) = f(x)$$

■

Definição 3.1 *Diz-se que G é uma função primitiva (ou antiderivada) de f em um intervalo I, se $G'(x) = f(x)$ para todo x pertencente a I.*

Proposição 3.1 *Duas primitivas se diferenciam por uma constante.*

Teorema 3.2 *(Segundo Teorema Fundamental do Cálculo) Seja $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $F : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ é uma primitiva de f, resulta*

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

Demonstração. Supondo que F é primitiva de f, ou seja, $F' = f$. Define-se

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

do Teorema (3.1) tem-se que $G'(x) = f(x)$, isto é, G do mesmo modo é uma primitiva de f. Da Proposição (3.1), considerando-se que duas primitivas se diferenciam por uma constante, daí: $G(x) = F(x) + c$, Tem-se que: $G(a) = F(a) + c$, mas $G(a) = 0$ Então:

$$c = -F(a)$$

Assim tem-se:

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt \text{ e } G(x) = F(x) - F(a),$$

e consequentemente:

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a).$$

E como o ponto x está no intervalo $[a, b]$, substituindo x por b e adquire-se:

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

■

3.2 Funções Elementares

Nesta seção apresenta-se uma breve definição das funções elementares. Tendo-se que o problema deste trabalho é saber quando, dada uma função f, sua primitiva $\int f(x)dx \in \mathbb{E}$. Quando isso acontece, considera-se que f é *integrável em termos infinitos*. Junto a isso, considerando também que alguns professores nas aulas de Cálculo tem o costume de citar este problema, como exemplo (3.1) e não dando nem prova nem referência de como resolve-lo, pode ser realmente que vale a pena expô-lo com a maior precisão possível e dar uma prova que é tão elementar (ou não) quanto o assunto pode sugerir.

Deve-se definir os termos cuidadosamente. Para começar, não se tem interesse em funções arbitrárias, mas em funções elementares, que são funções de uma variável e constantes, junto com repetidas operações algébricas (ou seja, solucionando equações polinomiais cujos coeficientes são funções elementares antes definidas), além de aplicações de exponenciais, logaritmos, funções trigonométricas e suas inversas.

Denotaremos por $\mathbb{E}$ a classe constituída por todas as funções conhecidas por um aluno de Cálculo, e denomina-se esta classe como a Classe de Funções Elementares.

Definição 3.2 *O espaço de funções elementares $\mathbb{E}$ é formado pelas seguintes funções:*

- *funções racionais;*
- *funções algébricas;*
- *funções exponenciais: e^x;*
- *funções logarítmicas: lnx;*
- *funções trigonométricas, as trigonométricas hiperbólicas e as suas respectivas inversas;*
- *todas as funções que por um número finito de etapas, possam ser construídas por meio das funções acima, usando-se um número finito de operações de soma, produto e composição de funções.*

Assim, as trigonométricas, a função e^x, a função lnx e as funções não algébricas obtidas delas por adição, subtração, multiplicação, divisão, multiplicação por constantes, composição e formação de funções inversas são todas chamadas funções transcendentais elementares. Desta forma, em particular, $sen^{-1}x, ln[tg(x)], e^{cosx}$, são funções transcendentais elementares. A maioria das funções encontradas no Cálculo e em suas aplicações são ou algébricas, ou transcendentais elementares.

3.2.1 Funções Algébricas

Pode-se encontrar em alguns livros de cálculo que a definição de funções algébricas é dada da seguinte maneira: são funções que podem ser apresentadas em termos de produtos, somas ou potências racionais de polinômios, isto é, qualquer função que possa ser expressa por uma manipulação algébrica de polinômios. Uma definição mais rígida seria:

Uma função y é algébrica, se y for solução de uma equação algébrica como a expressa abaixo:

$$G(y) = P_n(x) \cdot y^n + P_{n_1}(x) \cdot y^{n_1} + P_{n_2}(x) \cdot y^{n_2} + ... + P_0(x) = 0,$$

isto é, uma equação na variável y, possuindo como coeficientes $P_0, P_1, ..., P_{n_1}, P_n$ polinômios na variável x. Equivalentemente, se cada $P_n(x)$ for escrito explicitamente, tem-se que: uma *função é algébrica* se for contínua num intervalo e determinada implicitamente por uma equação polinomial em x e y, de acordo com a expressão abaixo:

$$a_1x^{n_1}y_{m_1} + a_2x^{n_2}y^{m_2} + ... + a_kx^{n_k}y_{m_k} = 0,$$

onde os $n_1, n_2, ..., n_k$ e os $m_1, m_2, ..., m_k$ são inteiros não negativos. Em outras palavras, cada função racional e cada inversa contínua de uma função racional é algébrica.

Exemplo 3.1 *Seja $y = \sqrt{2+x^3}$, daí y é uma função algébrica, já que é solução da equação algébrica $P_1(x) \cdot y^2 - P_0(x) = 0$, onde $P_1(x) = 1$ e $P_0(x) = (2 + x^3)$.*

Exemplo 3.2 $y = x^{\frac{1}{3}}$ *é uma função algébrica determinada implicitamente pela equação dada:* $y^3 - x = 0$.

3.2.2 Funções Racionais

Uma *função racional* é uma função definida por meio de qualquer combinação das operações elementares de adição, multiplicação, e divisão, operando na variável x. É apresentado na álgebra elementar que qualquer função racional de x pode ser expressa na forma:

$$f(x) = \frac{a_0x^m + a_1x^{m-1} + .. + a_m}{b_1x^n + b_1x^{n-1} + .. + b_n}, \tag{3.6}$$

onde m e n são inteiros positivos, os $a's$ e $b's$ são constantes, e o numerador e o denominador não possuem fator comum. Adota-se essa expressão como a forma padrão de uma função racional. É necessário observar que não é de forma alguma envolvido na definição de uma função racional que essas constantes devem ser racional ou algébricas ou números reais. Por exemplo:

$$\frac{x^2 + x + i\sqrt{2}}{x\sqrt{2} - e},$$

é uma função racional.

Lembrando que um número algébrico é um número que é a raiz de uma equação algébrica cujos coeficientes são integráveis. Sabe-se que existem números (como e e π) que não são raízes de tal equação.

3.2.3 Funções Transcendentais

Funções elementares que não são racionais ou algébricas são chamadas funções transcendentes elementares. Elas incluem todas as funções restantes que ocorrem normalmente na análise elementar.

As funções trigonométricas e hiperbólicas, diretas e inversas, podem ser expressas em termos de funções exponenciais ou logarítmicas por meio das fórmulas ordinárias da trigonometria elementar, isto é, essas funções pertencem a $\mathbb{E}$. Assim, por exemplo

$$senx = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, senhx = \frac{e^{x} - e^{-ix}}{2},$$

$$arc\, tanx = \frac{1}{2i} ln\left(\frac{1+ix}{-ix}\right), arg\, tanhx = \frac{1}{2} ln\left(\frac{1+x}{-x}\right).$$

Não havia, portanto, necessidade de especificá-las particularmente [em nossa definição]. As funções transcendentes já foram classificadas de uma certa maneira pela primeira vez por Liouville. De acordo com ele, uma função é transcendente de primeira ordem se os sinais de exponenciação ou tábuas de logaritmos que ocorrem na fórmula que a define se aplicam apenas a funções racionais ou algébricas. Por exemplo

$$xe^{x^2}, e^{x^2} + e^{x}\sqrt{(lnx)},$$

são de primeira ordem.

Uma função transcendente elementar de *segunda ordem* é definida por uma fórmula na qual as exponenciações e tábuas de logaritmos são aplicadas a funções racionais ou algébricas ou a transcendentes de primeira ordem. Esta classe de funções inclui muitos de grande interesse e importância,

$$e^{e^{x}}, ln(lnx).$$

Também inclui valores irracionais e complexos de x, por exemplo,

$$x^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2} lnx}, x^{1+i} = e^{1+i}\ lnx, \text{ ou seja,}$$

a função $x^x = e^{x\ lnx}$; além dos logaritmos das funções circulares.

Temos a função

$$e^{lnx\ R(x)},$$

onde $R(x)$ é racional, não é uma transcendente do segundo tipo, uma vez que pode ser expressa na forma mais simples $R(x)$. É óbvio que pode-se, desta forma, proceder para determinar as transcendentais de e-nésima ordem. Daí

$$ln\ ln\ lnx, ln\ ln\ ln\ lnx, ...$$

são da terceira, quarta,... ordens.

É claro que uma classificação semelhante de funções algébricas pode ser feita. Assim, pode-se dizer que

$$\sqrt{x}, \sqrt{x+\sqrt{x}}, \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}},$$

são funções algébricas de primeira, segunda, terceira,... ordens. Mas o fato de que há uma teoria geral de equações algébricas e portanto, de funções algébricas implícitas, privou esta classificação da maior parte de sua importância. Não há tal teoria geral de equações transcendentais elementares mesmo que elas sejam da teoria das equações algébricas, daí devem ser encontradas em partes da teoria das equações diferenciais, e, portanto, não devemos classificar como "elementar"funções definidas por equações transcendentais como

$$y = x\ lny,$$

mas incapaz (como Liouville mostrou que neste caso y é incapaz) de ser expressa explicitamente em termos finitos.

Segundo Morais Filho (2001, pg. 147), temos as seguintes observações:

> (O_1): A primitiva de uma função pode ter uma natureza bem distinta da mesma. por exemplo, $\int \frac{1}{x-a}dx = ln(x-a)$. Diferentemente do logaritmo, a função $\frac{1}{x-a}$ é racional.
>
> (O_2): Em vários livros de Cálculo prova-se que se R é um função racional, então $\int f(x)dx \in \mathbb{E}$, já que tem-se para R um expressão do tipo
>
> $$R(x) = \sum_{i=1}^{r} a_i x^i + \sum_{j=1}^{s} \frac{b_j}{(x-c_j)^{k_j}}.$$

3.3 Um teorema sobre integração de Funções Algébricas

Nessa seção aborda-se a teoria de integração de funções algébricas. Tem-se que este tipo de integração é bem mais complicada do que a integração de funções racionais e sequer é completa. Uma primitiva de uma função algébrica pode ser dada ou não em termos de funções elementares. Em seguida tem-se um teorema sobre a integração de funções algébricas, o qual não demonstra-se pois fugiria do objetivo deste trabalho. No entanto, as informações dele será de grande auxilio nesta pesquisa.

Teorema 3.3 *(Integração de Funções Algébricas) Seja y uma função algébrica e suponha que $\int ydx \in \mathbb{E}$, então:*

$$\int ydx = R_1(x,y) + \sum_{i=2}^{k} a_i \cdot lnR_i(x,y)$$

para algum k inteiro e onde os $a_i's$ são constantes e $R_i(x,y)'s$ são funções racionais, $\forall_i = 1, 2, 3, ..., k$.

3.4 Teoremas de Liouville

Nesta seção será mostrado dois teoremas os quais são devido a Liouville, um excepcional matemático francês que contribuiu muito para o problema de saber se a primitiva de uma função pertence ou não a classe das funções elementares. Vale a pena salientar que os primeiros e mais importantes teoremas com relação a saber se $\int f(x)dx \in \mathbb{E}$ apareceram dos estudos e pesquisas feitos por ele. Sua teoria de integrais de funções elementares que provavelmente a mais significante de suas realizações, pois nela ele provou que integrais como as citadas abaixo não pertencem a classe $\mathbb{E}$,

$$\int e^{-x^2}dx, \int \frac{e^x}{x}dx, \int \frac{senx}{x}dx, \int \frac{dx}{lnx}.$$

Deixando bem claro que o objetivo deste trabalho não é expor as demonstrações dos teoremas, pois fugiria da ideia do mesmo, sendo assim, o primeiro é um teorema mais geral que será apenas enunciado, já que a partir dele pode-se extrair informações que sejam relevantes e que possam ser de boa utilidade prática na integração de funções. Da mesma forma, o segundo teorema de Liouville será apenas exposto, sendo ele um caso particular do primeiro teorema.

3.4.1 Teorema I de Liouville

De acordo com Hardy, G. H, o teorema a seguir era o resultado mais geral conhecido na época de Liouville, o qual lidava do assunto de saber se uma primitiva era dada em termos de funções elementares ou não.

Teorema 3.4 *Sejam $y_1, y_2, y_3, ..., y_k$ funções da variável x, cujas derivadas $\frac{dy_i}{dx}$ são funções algébricas de $x, y_1, y_2, y_3, ..., y_k$. Se F é um função algébrica e $\int F(x, y_1, y_2, y_3, ..., y_k)dx \in \mathbb{E}$, então*

$$\int F(x, y_1, y_2, y_3, ..., y_k)dx = z_1(x, y_1, y_2, y_3, ..., y_k) + \sum_{i=2}^{r} a_i ln z_1(x, y_1, y_2, y_3, ..., y_k),$$

onde z_i's são funções algébricas e a_i's são constantes. Caso $\frac{dy_i}{dx}$ e F sejam racionais, então z_i's são funções racionais.

Exemplo 3.3 *Um caso mais geral e mais comum no qual se introduz o Teorema I de Liouville é por exemplo, quando:*

$$F(x, e^x, e^{e^x}, lnx, ln(lnx), cosx, senx)$$

3.4.2 Teorema II de Liouville

Teorema 3.5 *Sejam S e T funções racionais, com $T \neq$ constante, tal que $\int S(x) \cdot e^{T(x)}dx \in \mathbb{E}$, então tem-se:*

$$\int S(x) \cdot e^{T(x)}dx = R(x) \cdot e^{T(x)}$$

onde $R(x)$ é uma função racional.

3.4.3 Aplicações dos Teoremas de Liouville

Nesta seção apresenta-se alguns exemplos de como utilizar os Teoremas de Liouville. Para as aplicações do Teorema II de Liouville, os argumentos que aplica-se são simples e não exige nenhum conhecimento extra, a não ser o do Teorema Fundamental da Álgebra o qual já foi mencionado anteriormente e o lema que segue abaixo:

Lema 3.1 *Seja p um polinômio com uma raiz $x = a$ de multiplicidade $r > 0$, por exemplo: $p(x) = (x - a)^r \cdot h(x)$, com h um polinômio tal que $h(a) \neq 0$. Então $x = a$ é uma raiz de multiplicidade $r - 1$ de sua derivada p', ou seja, $p'(x) = (x - a)^{r-1} \cdot q(x)$, com q um polinômio tal que $q(a) \neq 0$.*

Demonstração. Seja $x = a$ uma raiz de um polinômio $p(x)$ qualquer, isto é:

$$p(x) = (x - a)^r \cdot h(x) \text{ onde } h(a) \neq 0,$$

temos então que:

$$p'(x) = r \cdot (x - a)^{r-1} \cdot h(x) + (x - a)^r \cdot h'(x)$$

$$p'(x) = (x-a)^{r-1} \cdot \underbrace{[rh(x) + (x-a) \cdot h'(x)]}_{q(x)}$$

onde $q(a) = rh(a) \neq 0$, logo temos:

$$p'(x) = (x-a)^{r-1} \cdot q(x) \text{ onde } q(a) \neq 0.$$

■

É sabido nos cursos de Cálculo que "não é possível integrar"$\int e^{x^2} dx$ em termos de funções elementares. A primeira aplicação é uma generalização deste caso. Do Teorema (3.4) sabe-se que $\int e^{x^2} dx$ é integrável, então o que ocorre é que sua integral não é dada em termos de funções elementares.

Aplicação 3.1 *Seja $p(x)$ um polinômio de grau $gr(p) > 1$, temos então que*

$$\int e^{p(x)} dx \notin \mathbb{E}.$$

Solução:

Com efeito prova-se por redução ao absurdo, supondo que $\int e^{p(x)} dx \in \mathbb{E}$, pelo Teorema II de Liouville tinha-se ter que $\int e^{p(x)} dx = R(x) \cdot e^{p(x)}$ para alguma função racional $R(x)$. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, tem-se:

$$e^{p(x)} = R'(x) \cdot e^{p(x)} + R(x) \cdot e^{p(x)} \cdot p'(x) \tag{3.7}$$

$$e^{p(x)} = e^{p(x)} \cdot [R'(x) + R(x) \cdot p'(x)] \tag{3.8}$$

$$\frac{e^{p(x)}}{e^{p(x)}} = R'(x) + R(x) \cdot p'(x) \tag{3.9}$$

$$1 = R' + p' \cdot R \tag{3.10}$$

Como R é uma função racional, pode-se escreve-lá como $R = \frac{P}{Q}$, onde os polinômios P e Q não tem fatores em comum, ou seja, não possuem raízes iguais. Portanto pode-se escrever a equação (3.9) da seguinte forma:

$$1 = \left(\frac{P}{Q}\right)' + p' \cdot \frac{P}{Q} \tag{3.11}$$

Temos então que:

$$1 = \frac{P' \cdot Q - P.Q'}{Q^2} + p' \cdot \frac{P}{Q} \tag{3.12}$$

$$1 = \frac{P' \cdot Q - P \cdot Q' + QPp'}{Q^2} \tag{3.13}$$

$$Q^2 = P'Q - PQ' + QPp' \tag{3.14}$$

Finalmente temos que:

$$Q \cdot (Q - P' - p'P) = -PQ' \tag{3.15}$$

Neste ponto suponha que o $gr(Q) > 0$, logo Q tem uma raiz $x = \alpha$ de multiplicidade $r > 0$. Pois bem, observe que, $P(\alpha) \neq 0$ já que P e Q são polinômios primos entre si. Daí $x = \alpha$ é uma raiz de multiplicidade $r - 1$ do polinômio do lado direito da equação (3.15), conforme já mencionado no Lema (3.1) acima e simultaneamente uma raiz de no mínimo multiplicidade r do polinômio do lado esquerdo desta mesma equação. Note que, neste caso, os polinômios dos lados direito e esquerdo possuiriam graus distintos, assim chegando a um absurdo.

Desse modo, tem-se que essa contradição garante que Q é uma constante, pois voltando na equação (3.11) e sendo Q uma constante, temos:

$$1 = \frac{P'}{Q} + p' \cdot \frac{P}{Q} \tag{3.16}$$

$$1 = \frac{P' + p'P}{Q} \tag{3.17}$$

$$Q = P' + p'P \text{ onde } p'P = Q - P' \tag{3.18}$$

E como Q é uma constante, isso é um absurdo, já que $gr(p'P) \geq gr(P) \geq gr(P')$ conforme mencionado no Lema (3.1). Portanto $\int e^{p(x)}dx \notin \mathbb{E}$, se $gr(p) > 1$. Por outro lado, é sabido que se $p(x)$ for de grau 1, então $\int e^{p(x)}dx \in \mathbb{E}$.

Segue abaixo algumas funções, cujas primitivas não podem ser dadas em termos de funções elementares as quais são utilizadas aplicação do Teorema de Liouville.

$$\int e^{x^2}dx \notin \mathbb{E}, \int e^{x^2+2}dx \notin \mathbb{E}, \int e^{x^3-1}dx \notin \mathbb{E} \;\text{ e }\; \int e^{x^7+1}dx \notin \mathbb{E}$$

Aplicação 3.2 *Se p é um polinômio de grau $gr(p) \geq 1$, então:*

$$\int \frac{e^x}{p(x)}dx \notin \mathbb{E}$$

De fato prova-se por redução ao absurdo. Supondo que $\int \frac{e^x}{p(x)}dx \in \mathbb{E}$, do Teorema II de Liouville implica que teria de:

$$\int \frac{e^x}{p(x)}dx = R(x) \cdot e^x.$$

para alguma função racional R. Como na aplicação (3.1), derivando essa expressão obtêm-se:

$$\frac{e^x}{p(x)} = R'(x) \cdot e^x + R(x) \cdot e^x \tag{3.19}$$

Daí:

$$\frac{e^x}{p(x)} = e^x \cdot [R'(x) + R(x)] \tag{3.20}$$

$$\frac{e^x}{e^x} = p(x) \cdot [R'(x) + R(x)] \tag{3.21}$$

Logo tem-se então que:

$$1 = p \cdot [R' + R] \tag{3.22}$$

Como R é uma função racional, pode-se escreve-lá como $R = \frac{P}{Q}$, onde os polinômios P e Q não tem fatores em comum, isto é, não possuem raízes iguais. Daí pode-se escrever a equação (3.22) da seguinte forma:

$$1 = p \cdot \left[\left(\frac{P}{Q} \right)' + \frac{P}{Q} \right] \tag{3.23}$$

Tem-se então que:

$$1 = p \cdot \left[\left(\frac{P' \cdot Q - P \cdot Q}{Q^2} \right) + \frac{P}{Q} \right] \tag{3.24}$$

$$1 = p \cdot \left(\frac{P' \cdot Q - P \cdot Q' + Q \cdot P}{Q^2} \right) \tag{3.25}$$

$$Q^2 = pP'Q - pPQ' + pQP \tag{3.26}$$

$$Q^2 - pP'Q - pQP = -pPQ' \tag{3.27}$$

Finalmente tem-se:

$$Q \cdot (Q - pP' - pP) = -pPQ' \tag{3.28}$$

Suponha que o grau $gr(Q) > 0$, logo Q possui uma raiz $x = \alpha$ de multiplicidade $r > 0$ e supondo também que $p(\alpha) \neq 0$, logo por um argumento igual ao da Aplicação (3.1), isto é, já que P e Q são polinômios primos entre si, de acordo com o que foi dito anteriormente e sendo $x = \alpha$ uma raiz de multiplicidade $r - 1$ do polinômio do lado direito da equação (3.28), devido ao Lema (3.1) acima, e simultaneamente uma raiz de no mínimo multiplicidade r do polinômio do lado esquerdo desta mesma equação, chegando a um absurdo.

Por outro lado, se $p(\alpha) = 0$ e $x = \alpha$ é uma raiz de multiplicidade n de $p(x)$, da expressão (3.28) concluiria-se que essa raiz seria de multiplicidade $n + r - 1$ do polinômio do lado direito de (3.28) e simultaneamente, uma raiz de multiplicidade $n + r$ do polinômio do lado esquerdo desta mesma expressão, o que também é um absurdo. Portando tem-se que Q é uma constante e pode-se então assumir que a equação (3.28) toma a seguinte forma: $-pP' = pP$, pois voltando na equação (3.23) e sendo Q uma constante, tem-se:

$$1 = p \cdot \left[\frac{P'}{Q} + \frac{P}{Q} \right]$$

$$1 = \frac{pP' + pP}{Q} \tag{3.29}$$

$$Q = pP' + pP \tag{3.30}$$

$$Q - pP' = pP \tag{3.31}$$

E como Q é uma constante, isso é um absurdo, pelo mesmo argumento que utilize-se na Aplicação (3.1), ou seja, o $gr(P) > gr(P')$, de acordo com o Lema (3.1). Portanto $\int \frac{e^x}{p(x)}dx \notin \mathbb{E}$, se o grau de $p(x)$ for maior do que zero.

Aplicação 3.3

$$\int \frac{1}{lnx}dx \notin \mathbb{E}$$

Solução:
De fato, basta fazer a mudança de variável $y = lnx$.
Seja $y = lnx$ implica que $e^y = x$, derivando esta última expressão, tem-se:

$$e^y \cdot \frac{dy}{dx} = 1 \text{ o que implica que } e^y dy = dx.$$

Substituindo, tem-se:

$$\int \frac{1}{lnx}dx = \int \frac{1}{y}e^y dy = \int \frac{e^y}{y}dy \notin \mathbb{E} \text{ de acordo com a Aplicação (3.2).}$$

Por meio do uso do Teorema II de Liouville, usando integração por partes ou alguma mudança de variável, se preciso e repetindo o raciocínio das aplicações anteriores, os alunos que cursam a disciplina de Cálculo terão o privilégio de descobrir e responder se a primitiva de várias funções pode ser dada ou não em termos de funções elementares, ou seja, aquelas funções que são conhecidas por um aluno de Cálculo, as quais foram citadas na Seção (3.2).

Exemplo 3.4

$$\int e^{e^x}dx \notin \mathbb{E}$$

Apenas mostra-se que a primitiva desta função não é elementar. Pois bem, por meio de uma mudança de variável, tem-se que

$$\int e^{e^x}dx = \int \frac{e^u}{u}du$$

Considerando de $u = e^x \Rightarrow u' = e^x \Rightarrow \frac{du}{dx} = e^x \Rightarrow dx = \frac{du}{e^x}$, daí tem-se:

$$\int e^u \cdot \frac{du}{u} = \int \frac{1}{u} \cdot e^u du = \int \frac{e^u}{u} du$$

onde esta última não pertence a $\mathbb{E}$, conforme já provado na Aplicação (3.2).

Segue abaixo algumas funções, cujas primitivas não podem ser dadas em termos de funções elementares as quais são utilizadas aplicação do Teorema de Liouville.

$$\int \frac{e^x}{x^2+3} dx \notin \mathbb{E}, \int \frac{e^x}{x^3} dx \notin \mathbb{E} \text{ e } \int \frac{e^x}{x^4-1} dx \notin \mathbb{E}$$

As próximas aplicações são do Teorema I de Liouville.

Aplicação 3.4

$$\int R(x) \cdot lnx \, dx \notin \mathbb{E}$$

Solução:

De fato, supondo que $\int R(x) \cdot lnx \, dx \in \mathbb{E}$, onde $R(x)$ é uma função racional. Mostra-se que $R(x) = \frac{C}{x} + T'(x)$, onde $T(x)$ é racional. Com efeito, pelo Teorema I de Liouville, a primitiva deve ter a seguinte forma:

$$\int R(x) \cdot lnx \, dx = R_0(x, lnx) + a_1 \cdot lnR_1(x, lnx) + ... + a_r \cdot lnR_r(x, lnx) \tag{3.32}$$

Diante do integrando, um pouco de reflexão (as quais serão detalhadas abaixo) leva-se a concluir os seguintes fatos:

I. $R_0(x, lnx) = \frac{C}{2} \cdot (lnx)^2 + T(x) \cdot lnx + U(x)$, com T e U funções racionais e $\frac{C}{2}$ constante;

II. o restante das funções racionais R_i que aparecem em (3.32) devem ser funções apenas de x, as quais podem ser escritas como $\sum_i \frac{a_i}{(x-\alpha)}$, com eventuais repetições.

Portanto a expressão (3.32) deve ter a forma:

$$\frac{C}{2} \cdot (lnx)^2 + T(x) \cdot lnx + U(x) + \sum a_i \cdot ln(x - \alpha_i)$$

Derivando essa expressão tem-se:

$$\frac{C}{2} \cdot 2 \cdot lnx \cdot \frac{1}{x} + T'(x) \cdot lnx + T(x) \cdot \frac{1}{x} + U'(x) + \sum \frac{a_i}{x - \alpha_i},$$

simplificando:

$$\frac{lnx \cdot C}{x} + T'(x) \cdot lnx + \frac{T(x)}{x} + U'(x) + \sum \frac{a_i}{x - \alpha_i}.$$

Comparando com $R(x) \cdot lnx$ encontra-se:

$$R(x) = \frac{C}{x} + T'(x) \text{ e } \frac{T(x)}{x} + U'(x) + \sum \frac{a_i}{x - \alpha_i} = 0.$$

A seguir tem-se algumas observações:
Se $\int R(x) \cdot lnx\ dx \in \mathbb{E}$ *então que deve satisfazer?*
Pois bem, segundo o Teorema I de Liouville, tem-se:

$$R_0(x, lnx) + \sum_{i=1}^{r} a_i \cdot lnR_i(x, lnx) = \int R(x) \cdot lnx\ dx. \tag{3.33}$$

onde os $R_i(x, lnx)$ *são funções racionais, logo* $R_i = \frac{\widetilde{P}_i}{\widetilde{Q}_i}$. *Aplicando o Teorema Fundamental da Álgebra, tem-se:*

$$\widetilde{P}_i(x, lnx) = c_0(x - c_1) \cdot (x - c_2) \cdot ... \cdot (x - c_r),$$

$$\widetilde{Q}_i(x, lnx) = d_0(x - d_1) \cdot (x - d_2) \cdot ... \cdot (x - d_r)$$

Portanto,

$$ln\widetilde{P}_i(x, lnx) = ln\ c_0(x - c_1) + ln(x - c_2) + ... + ln(x - c_r),$$

$$ln\widetilde{Q}_i(x, lnx) = ln\ d_0(x - d_1) + ln(x - d_2) + ... + ln(x - d_r).$$

Como os polinômios $\widetilde{P}$ *e* $\widetilde{Q}$ *são primos entre si, logo tem-se* $lnR_i(x, lnx) = ln\widetilde{P}_i(x, lnx) - ln\widetilde{Q}_i(x, lnx)$, *ou seja:*

$$lnR_i(x, lnx) = lnc_0(x-c_1)+ln(x-c_2)+...+ln(x-c_r)-[lnd_0(x-d_1)+ln(x-d_2)+...+ln(x-d_r)].$$

Logo a expressão (3.33) fica:

$$R_0(x, lnx) + \sum_{i=1}^{2r} b_i \cdot lnP_i(x, lnx) = \int R(x) \cdot lnx\ dx. \tag{3.34}$$

onde R_0 *é racional,* $b_i's$ *são os coeficientes dos polinômios* $P_i's$.
Notação: $P(x, y)$, *onde* $y = lnx$ *logo:* $P' = \frac{dP}{dx}$. *Regra da Cadeia para funções de 2 variáveis, implica que:*

$$P' = \frac{\partial P}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dx} + \frac{\partial P}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx},$$

Logo:

$$P' = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} \cdot \frac{1}{x}.$$

Derivando a expressão (3.34), obtêm-se:

$$R_0'(x, lnx) + \sum_{i=1}^{2r} b_i \cdot \frac{P_i'}{P_i} = R(x) \cdot lnx. \tag{3.35}$$

Observação 3.1 *Tem-se que a equação*

$$R_0(x, lnx) = \frac{C}{2} \cdot (lnx)^2 + T(x) \cdot lnx + U(x) \Rightarrow R_0'(x, lnx) = \frac{C \cdot lnx}{x} + T'(x) \cdot lnx + \frac{T(x)}{x} + U'(x) \tag{3.36}$$

pela igualdade, vê-se que se $\frac{P'(x,y)}{P(x,y)}$ depende de y, implica que tem-se um $W(x) \cdot y$, fato que estaria contradizendo o Lema (3.1) visto anteriormente, o qual diz que o grau de P_i é maior do que o grau de P_i' . Portanto $\frac{P'(x,y)}{P(x,y)}$ só depende de x, logo está função é racional, e pode ser escrita como: $\sum_i \frac{Ai}{x-\alpha}$. Logo pode-se escrever a expressão (3.35) da seguinte forma:

$$R_0'(x, lnx) + \sum_{i=1}^{m} \frac{B_i}{(x-\alpha_i)} = R(x) \cdot lnx \tag{3.37}$$

substituindo a expressão (3.36) em (3.34) tem-se:

$$\overbrace{\underbrace{\left[\frac{C}{x} + T'(x)\right]}_{R(x)} \cdot lnx + \frac{T(x)}{x} + U'(x)}^{R_0'(x,y)} + \sum_{i=1}^{m} \overbrace{\frac{B_i}{(x-\alpha_i)}}^{\frac{P_i'}{P_i}} = R(x) \cdot lnx. \tag{3.38}$$

Deste modo, como $R(x) = \frac{C}{x} + T'(x)$ então $\frac{T(x)}{x} + U'(x) + \sum_{i=1}^{m} \frac{B_i}{(x-\alpha_i)} = 0$.

Portanto candidatos para R_0:

$$R_0 = \frac{C}{2} \cdot [ln(x)]^2 + T(x) \cdot ln(x) + U'(x),$$

onde

$$R_0' = \frac{C}{x} \cdot ln(x) + T'(x) \cdot ln(x) + \frac{T(x)}{x} + U(x).$$

Logo,

$$R(x) = \frac{C}{x} + T'(x) \text{ onde, } T(x) \text{ é racional.} \tag{3.39}$$

***Conclusão:** Sabe-se que se $A \Rightarrow B$, tem-se que: não $B \Rightarrow$ não A. Logo é fato que se não vale (3.39) implica que $\int R(x) \cdot lnx \, dx \notin \mathbb{E}$.*

***Exemplo 3.5** Mostra-se que $\int \frac{lnx}{x-a} dx \notin \mathbb{E}$, se $a \neq 0$.*
Solução:

Como

$$R(x) = \frac{1}{x-a} = \frac{C}{x} + T'(x), \text{ para algum } a \neq 0,$$

fazendo $C = 0$ tem-se:

$$\int \frac{1}{x-a} dx = \int T'(x) dx$$

onde tem-se que: $ln(x-a) = T(x)$, logo $T(x)$ não é racional. Portanto não existe uma função $T(x)$ racional, tal que $T'(x) = \frac{1}{x-a}$, isto é, como (3.39) não foi satisfeita, implica que $\int \frac{lnx}{x-a} dx \notin \mathbb{E}$. Por outro lado se $a = 0$ tem-se que $\int \frac{lnx}{x-a} dx \in \mathbb{E}$, pois basta fazer uma substituição, chamando lnx de u.

Outros exemplos que pode-se utilizar esta aplicação são

$$\int \frac{lnx}{x^2-1} dx \notin \mathbb{E}, \int \frac{lnx}{x^2+1} dx \notin \mathbb{E} \int \frac{lnx}{x^3-2} dx, \notin \mathbb{E}$$

Exemplo 3.6

$$\int \frac{lnx}{(x-a)\cdot(x-b)}dx \notin \mathbb{E} \textit{ se } a \neq b.$$

Solução:

$$R(x) = \frac{A}{(x-a)} + \frac{B}{(x-b)} + \frac{C}{x} + T'(x) \textit{ para algum } a \neq b.$$

Fazendo $C = 0$ tem-se:

$$\int \frac{A}{(x-a)}dx + \int \frac{B}{(x-b)}dx = \int T'(x)dx$$

onde tem-se que: $A \cdot ln(x-a) + B \cdot ln(x-b) = T(x)$, logo $T(x)$ não é racional. Portanto não existe uma função $T(x)$ racional, tal que $T'(x) = \frac{A}{(x-a)} + \frac{B}{(x-b)}$, ou seja, como (3.39) não foi satisfeita, implica que $\int \frac{lnx}{(x-a)\cdot(x-b)}dx \notin \mathbb{E}$. Por outro lado se $a = b$ tem-se que $\int \frac{lnx}{(x-a)^2}dx \in \mathbb{E}$, pois basta utilizar integração por partes, chamando de $u = lnx$ e $dv = \frac{dx}{(x-a)^2}$ e depois utiliza-se o método de frações parciais.

Aplicação 3.5 *Mostra-se que $\int \frac{senx}{x}dx$ e $\int \frac{cosx}{x}dx$ não pertencem a classe das funções elementares $\mathbb{E}$. É focalizado a primeira integral, o tratamento para a segunda integral é o mesmo. Utiliza-se a fórmula de Euler, isto é, deve-se escrever $\frac{senx}{x}$ como:*

$$\frac{senx}{x} = \frac{1}{2i} \cdot \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x} \textit{ onde } i = \sqrt{-1}$$

Solução:

Usando a mudança de variável $z = ix$, temos:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{2i} \cdot \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x}dx &= \frac{1}{2i} \cdot \int \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x}dx \\
&= \frac{1}{2i} \cdot \int \frac{e^{2ix} - 1}{x \cdot e^{ix}} \\
&= \frac{1}{2i} \cdot \int \frac{e^{2z} - 1}{\frac{z}{i} \cdot \frac{1}{i}} \\
&= \frac{1}{2i} \cdot \int \frac{e^{2z} - 1}{z \cdot e^{z}dz}
\end{aligned}$$

Portanto, o problema se resume em mostrar que $\int \frac{e^{2x}-1}{e^x \cdot x}dx \in \mathbb{E}$. Pois bem, caso a $\int \frac{e^{2x}-1}{e^x \cdot x}dx \notin \mathbb{E}$, o Teorema I de Liouville assegura que essa primitiva deve ser da seguinte forma:

$$R(x, e^x) + a_1 \cdot lnP_1(x, e^x) + a_2 \cdot lnP_2(x, e^x) + ... + a_r \cdot lnP_r(x, e^x) \tag{3.40}$$

onde $R(x, e^x)$ é uma função racional e os $P_i(x, e^x)'s$ são polinômios. Abaixo lista-se alguns fatos que nos auxiliarão no decorrer da demonstração.

A. *Todo polinômio $P(x, y)$ pode ser escrito como um produto de polinômios da forma: $z(x) \cdot w(y) \cdot p(x, y) \cdot \ldots \cdot p_n(x, y)$, onde os polinômios $p_i's$ não são necessariamente distintos, mas são polinômios irredutíveis e necessariamente são funções da variáveis x e y;*

B. *Se $P(x, y)$ é um polinômio de grau r, e $P(x, y) \neq c \cdot y^r$ então $P(x, e^x)$ não divide $P'(x, e^x)$. Observe que o grau de $P(x, e^x)$ é maior ou igual ao grau de $P'(x, e^x)$.*

Como $R(x, y)$ é uma função racional, então do item (A) pode-se escrever o numerador e o denominador da seguinte forma:

$$R(x) = \frac{z_1(x) \cdot w_1(y) \cdot p_1(x, y) \cdot \ldots \cdot p_n(x, y)}{z_2(x) \cdot w_2(y) \cdot q_1(x, y) \cdot \ldots \cdot q_m(x, y)},$$

onde os z_1, w_1 e $p's$ são distintos dos z_2, w_2 e $q's$.

Suponha que algum q_j apareça no denominador de $R'(x, y)$. Afirma-se que se isso ocorrer, q_j deve necessariamente aparecer com potência ao quadrado. De fato, se q_j aparecesse no denominador de R' com potência unitária, então como:

$$R'(x) = \frac{P' \cdot [z_2(x) \cdot w_2(y) \cdot q_1(x, y) \cdot \ldots \cdot q_m(x, y)] - P \cdot [(z_2(x) \cdot w_2(y) \cdot q_1(x, y) \cdot \ldots \cdot q_m(x, y))']}{[z_2(x) \cdot w_2(y) \cdot q_1(x, y) \cdot \ldots \cdot q_m(x, y)]^2}$$

e q_j não divide P, deveria-se ter que q_j divide $(z_2(x) \cdot w_2(y) \cdot q_1(x, y) \cdot \ldots \cdot q_m(x, y))'$, e daí que q_j divide q_j', o que é um absurdo pelo item (B). O mesmo raciocínio vale para $z_2(x)$.

Porém $w_2(y)$ pode aparecer com potência unitária no denominador de R', donde nesse caso, concluiria-se que $w_2(y)$ dividiria $w_2'(y)$, e portanto pelo item (B), teria-se que $w_2(y) = w_2(e^x) = c \cdot e^{rx}$, para algum inteiro positivo r. Portanto pode-se dessa forma assumir que:

$$R'(x) = \frac{u(x, e^x)}{e^{bx} \cdot (z_2 \cdot q_1 \cdot \ldots \cdot q_m)^2} \text{ onde } u \text{ é um polinômio.}$$

De outro lado, fatorando os polinômios $P_i's$ como item (A), e das propriedades da função logaritmo, tem-se a seguinte forma:

$$\int \frac{e^{2x} - 1}{e^x \cdot x} dx = R(x, e^x) + \sum b_j \cdot lnx[t_j(e^x)] + \sum c_k \cdot lnx[v_k(x)] + \sum a_i \cdot lnx[p_i(x, e^x)] \tag{3.41}$$

onde os $t_j's$, os $v_k's$ e os $p_i's$ são polinômios irredutíveis e distintos, sendo que os $t_j's$ e os $v_k's$ são de primeiro grau e os $p_i's$ são necessariamente funções de x e de y, isto é, e^x.

Derivando a expressão (3.41) tem-se:

$$\frac{e^{2x} - 1}{e^x} = \underbrace{\frac{u(x, e^x)}{e^{bx} \cdot (z_2 \cdot q_1 \cdot \ldots \cdot q_m)^2}}_{R'(x, e^x)} + \sum b_j \cdot \frac{t_j'(e^x) e^x}{t_j(e^x)} + \sum c_k \cdot \frac{v_k'(x)}{v_k(x)} + \sum a_i \cdot \frac{p_i'(x, e^x)}{p_j(x, e^x)} \tag{3.42}$$

onde todas essas frações estão em suas formas irredutíveis.

Nesta ocasião, os fatores irredutíveis que se apresentam no denominador do lado esquerdo de (3.42), devem ser os mesmos que aparecem do lado direito dessa expressão. Diante deste fato, como os p_i's são irredutíveis, observe-se que a única possibilidade para eles, é que estejam no conjunto x, e^x, e que sejam apenas função de x ou função de e^x. Repare também que única possibilidade para os v_k's é que sejam x, e para os t_j's é que sejam e^x. Sendo assim, esses fatos permitem assumir que:

$$\sum b_j \cdot \frac{t_j'(e^x)e^x}{t_j(e^x)} + \sum c_k \cdot \frac{v_k'(x)}{v_k(x)} + \sum a_i \cdot \frac{p_i'(x, e^x)}{p_j(x, e^x)} = b_1 + \frac{b_2}{x}$$

com b_2 não nulo.

$$\frac{e^{2x} - 1}{e^x} = \frac{u(x, e^x)}{e^{bx} \cdot (z_2 \cdot q_1 \cdot \ldots \cdot q_m)^2} + b_1 + \frac{b_2}{x}, \tag{3.43}$$

Por outro lado, como nenhum polinômio irredutível q_j ou um polinômio da forma z_2 pode aparecer no denominador da expressão de $R'(x, e^x)$. De fato, caso contrário, q_j^2 ou q_2^2 apareceria(m) no denominador de $R'(x, e^x)$, e consequentemente, no denominador do lado esquerdo de (3.43). Mas isso não pode suceder, pois nesse denominador os termos irredutíveis x e e^x só aparecem elevados a potência unitária. Os comentários que acaba-se de fazer, leva-se a concluir que (3.43) é na verdade da forma:

$$\frac{e^{2x} - 1}{e^x \cdot x} = \frac{u(x, e^x)}{e^{bx}} + b_1 + \frac{b_2}{x}, \tag{3.44}$$

onde

$$\frac{e^{2x} - 1}{e^x \cdot x} = \frac{u(x, e^x) \cdot x + b_1 \cdot x \cdot e^{bx} + b_2 \cdot e^{bx}}{e^{bx} \cdot x}, \text{ onde } b = 1. \tag{3.45}$$

logo

$$\frac{e^{2x} - 1}{e^x \cdot x} = \frac{u(x, e^x) \cdot x + b_1 \cdot x \cdot e^x + b_2 \cdot e^x}{e^x \cdot x}, \tag{3.46}$$

O que é um absurdo, pois o numerador do lado direito de (3.46) não pode gerar o termo e^{2x}, que aparece no lado esquerdo desta expressão. Daí,

$$\int \frac{e^{2x} - 1}{e^x \cdot x} dx \notin \mathbb{E} \text{ e portanto } \int \frac{senx}{x} dx \notin \mathbb{E}.$$

3.5 Teorema de Chebyshev

De acordo com Morais Filho (2001) P. L. Chebyshev (1812-1894) foi uma matemático russo que deu grandes contribuições à Matemática e à Mecânica. Na metade so século XIX fundou a escola de Matemática da então São Petersburg. Bastante conhecido pelos polinômios que levam seu nome.

Dá-se à atenção agora em um teorema de Chebyshev porque, embora seja posterior (e complementar) da teoria estabelecida por Liouville, é um teorema mais simples para se aplicar. Chebyshev estava interessado em casos especiais de funções algébricas e seu trabalho sobre a integração deste tipo de funções é ligado de forma muito mais próxima com o trabalho de Liouville. No artigo *"Sur l'integration des différentielles irrationelles"*. Chebyshev resolveu o problema de obter a *"parte logarítmica"* da integral

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} \frac{dx}{\sqrt[m]{R(x)}},$$

onde P, Q e R são polinômios e m é um inteiro positivo. Mas no artigo citado acima é mais bem conhecido pela solução completa do problema da integração do *binômio diferencial*

$$\int x^m (a + bx^n)^p dx. \tag{3.47}$$

Já Christian Goldbach (1690- 1764) e Leonhard Euler (1707-1783) mostraram que este tipo de integral é expressa em termos de funções elementares em casos onde P é um inteiro, $\frac{(m+1)}{n}$ é um inteiro ou $\frac{(m+1)}{n+p}$ é um inteiro. Chebyshev demonstrou, com métodos analíticos, que estes são os únicos casos em que esta integral pode ser expressa em termos de funções elementares.

Considera-se (3.47) a primitiva das seguintes funções algébricas, onde a e b são constantes não-nulas e m, n e p são números racionais.

Fazendo a mudança de varável, $x^n = t$, vê-se que a primitiva reduz-se a

$$\int t^q (a + bt)^p dt, \tag{3.48}$$

onde p e $q = \frac{m+1}{n} - 1$ são números racionais. É fácil ver que

$$\textit{se pelo menos um dos números } q, p, \textit{ ou } p + q \textit{ é inteiro} \tag{3.49}$$

a integral (3.48) e, consequentemente (3.47) pode ser transformada numa integral de uma função racional. O teorema de Chebyshev, cuja a demonstração pode ser encontrada em Ritti (1948), assegura que esses são os únicos casos onde a integral (3.47) é dada em termos de funções elementares:

Teorema 3.6 *(Teorema de Chebyshev) Dados os números racionais p e q, caso a condição (3.49) não seja satisfeita, então $\int x^m (a + bx^n)^p dx \notin \mathbb{E}$.*

No caso da integral poder ser expressa em termos de funções elementares, o modo de obter a primitiva é por meio de substituições, estas substituições transformam o integrando em uma função racional que, pelo algoritmo de J. Bernoulli, sempre tem primitiva elementar.

Aplicação 3.6 *O teorema pode ser usado para decidir se uma função da forma $x^m(a + bx^n)^p$ "Binomio diferencial" tem primitiva elementar e também para o cálculo.*
Solução:

Para calcular, primeiro faz a substituição $x = u^{\frac{1}{n}}$ *então* $dx = \frac{1}{u}u^{\frac{1}{n}-1}du$ *e*

$$\int x^m(a+bx^n)^p dx = \frac{1}{n}\int u^q(a+bu)^p du \text{ com } q = \frac{m+1}{n} - 1.$$

- *Se* p *é inteiro e* q *é racional. Se* $q = \frac{h}{d}$ *então fazendo a substituição* $u =^{\frac{t}{d}}$*;*
- *Se* $\frac{m+1}{n}$ *é inteiro e* p *é racional. Se* $p = \frac{h}{d}$ *então fazendo a substituição* $a + bu = \frac{t}{d}$*;*
- *Se* $\frac{m+1}{n} + p$ *é inteiro e* p *é racional. Primeiro, a integral é transformada,*

$$\frac{1}{n}\int u^q(a+bu)^p du = \frac{1}{n}\int u^{p+q}\left(\frac{a+bu}{u}\right)^p du, \text{ com } q = \frac{m+1}{n} - 1.$$

Se $q = \frac{h}{d}$*, fazendo a substituição* $\frac{a+bu}{u} = \frac{t}{d}$.

Exemplo 3.7 *Mostra-se que* $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}\sqrt{x+1}}$ *não pertence a classe das funções elementares.*

Solução:

Considerando a integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}\sqrt{x+1}} = \int x^{-\frac{1}{3}}(1+x)^{-\frac{1}{2}}dx$$

Neste caso, $m = -\frac{1}{3}$, $\frac{m+1}{n} = \frac{2}{3}$ *e* $\frac{m+1}{n} + p = \frac{2}{3} - \frac{1}{2}$*. Como nenhum desses números são inteiros, a integral não pode ser expressa em termos de funções elementares.*

Exemplo 3.8

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(4x-x^2)^3}} \in \mathbb{E}$$

.

Solução:

Considerando a integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(4x-x^2)^3}} = \int x^{-\frac{3}{2}}(4-x)^{-\frac{3}{2}}dx.$$

Como $\frac{m+1}{n} + p = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -2$ *a integral pode ser expressa em termos de funções elementares. Usando as indicações já mencionadas, se obtém*

$$\int x^{-\frac{1}{3}}(1+x)^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{4}\frac{x-2}{\sqrt{x(4-x)}} + C.$$

Exemplo 3.9 *A seguir algumas integrais utilizando a aplicação do Teorema de Chebyshev.*

(a) $\int \sqrt{senx}\, dx$ *não é elementar*

Solução:

Se $u = senx$ *obtemos*

$$\int \sqrt{senx}\, dx = \int u^{\frac{1}{2}}(1-u^2)^{\frac{1}{2}}du$$

que, conforme o teorema de Chebyshev, não pode ser expressa em termos de funções elementares, ou seja, $\int \sqrt{senx}\, dx \notin \mathbb{E}$. *Mas temos que* $\int senx^p dx \in \mathbb{E}$ *(*p *racional) se, e somente se,* p *for um inteiro.*

(b) $\int \sqrt[3]{x-x^2}dx, \int x\sqrt[3]{1-x}dx \notin \mathbb{E}.$

(c) *Verifica-se, neste caso, se esta função abaixo pertence ou não a classe* $\mathbb{E}$

$$\int (1-x^n)^{\frac{1}{k}}dx.$$

Solução:

Como $m = 0$ *e* $p = \frac{1}{k}$, *a integral é elementar apenas se* $\frac{1}{n}$ *é inteiro ou* $\frac{1}{k}$ *é inteiro ou* $\frac{1}{n} + \frac{1}{k}$ *é inteiro, ou seja, só se* $k = \pm 1$, *ou* $n = \pm 1$, *ou* $k = n = 2$ *ou* $n = -k$ *(em outro caso* $\left|\frac{1}{n} + \frac{1}{k}\right| < 1$*).*

Se $k > 0$, *deixa-se* $1 - x^n$, $\sqrt[k]{1-x}$, $\sqrt[k]{1-\frac{1}{x}}$, $\sqrt{1-x^2}$ *e* $\sqrt[k]{1-x^{-k}}$ *com primitiva elementar.*

(d) $\int \sqrt{1-x^n}dx, \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^n}}dx \notin \mathbb{E}$, *para qualquer inteiro* $n > 2$.

(e) $\int \sqrt{tanx}\, dx \in \mathbb{E}.$

Solução:

Fazendo a substituição $u = \sqrt{tanx} \Rightarrow u^2 = tanx$, *a integral é*

$$\int \sqrt{tanx}\, dx = \int 2u^2(u^4+1)^{-1}du,$$

quando aplicado o teorema de Chebyshev, pois $p = -1$.

(f) $\int senx^p cosx^q dx \notin \mathbb{E}$, *(*$p$ *e* q *números racionais) se, e somente se* p *e* q *é inteiro ímpar ou* $p + q$ *é um inteiro par. Tem-se que se a* $\int senx^{\frac{2}{3}}cosx^{\frac{1}{3}}dx \notin \mathbb{E}$, *porém se* $\int senx^2 cosx^3 dx \in \mathbb{E}$.

Segue abaixo uma tabela com as funções apresentadas neste trabalho, cujas primitivas não podem ser dadas em termos de funções elementares. Ela está dividida em duas colunas onde a primeira refere-se aos exemplos da utilização do Teorema de Liouville e na segunda coluna os exemplos onde se aplica o Teorema de Chebyshev. Com isso espera-se facilitar a busca do leitor sobre as integrais não elementares.

1. A Tabela 1 abaixo apresenta exemplos de primitivas não elementares

Tabela 1: Exemplos de primitivas não elementares

Teorema de Liouville	Teorema de Chebyshev
$\int e^{p^x}dx \notin \mathbb{E},$ se o grau de $p(x) > 1$	$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}\sqrt{x+1}} \notin \mathbb{E}$
$\int \frac{e^x}{p(x)} \notin \mathbb{E},$ se o grau de $p(x) \geq 1$	$\int \sqrt{senx}\ dx \notin \mathbb{E}$
$\int \frac{1}{lnx}dx \notin \mathbb{E}$	$\int \sqrt{cosx}\ dx \notin \mathbb{E}$
$\int e^{e^x}dx \notin \mathbb{E}$	$\int x\sqrt[3]{1-x}dx \notin \mathbb{E}$
$\int ln(lnx)dx \notin \mathbb{E}$	$\int \sqrt[3]{x-x^2}dx \notin \mathbb{R}$
$\int R(x)\cdot lnx\ dx \notin \mathbb{E}$	$\int \sqrt{1-x^n}dx \notin \mathbb{E}$, para qualquer inteiro $n > 2$.
$\int \frac{lnx}{(x-a)\cdot(x-b)}dx \notin \mathbb{E}$ se $a \neq b$.	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^n}}dx \notin \mathbb{E}$, para qualquer inteiro $n > 2$.
$\int \frac{cosx}{x} \notin \mathbb{E}$	$\int (1-x^n)^{\frac{1}{k}}dx \notin \mathbb{E}$
$\int \frac{senx}{x} \notin \mathbb{E}$	$\int senx^p cosx^q dx \notin \mathbb{E}$, ($p$ e q números racionais) se, e somente se p e q é inteiro ímpar ou $p+q$ é um inteiro par.

Tabela 1 – Tabela de primitivas não elementares

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este estudo proporcionou o entendimento sobre essa área da matemática que é pouca estudada nos livros de Cálculo, mas que é de grande importância; possibilitou, ainda, uma rica experiência acadêmica por despertar a atenção e a curiosidade dos alunos da disciplina de Cálculo em saber quais os tipos de funções para as quais se pode encontrar uma expressão para a sua primitiva em termos de funções elementares.

Alguns alunos ao utilizarem programas computacionais, tais como *Mathematics* ou *Maple* para cálculo de primitivas, podem encontrar-se com uma situação incomum, o programa pode apresentar uma expressão (primitiva) para uma determinada função, a qual não pode ser escrita em termos de funções elementares. Deixando claro que não foi interesse neste estudo de estar utilizando estes programas computacionais citados antes, porém fica aqui está observação, as expressões (primitivas) apresentadas por estes programas de funções as quais suas primitivas não são elementares, estas expressões são dadas em termos de funções como por exemplo as elípticas, gama, etc, as quais não são elementares.

Neste trabalho é notável a importância dos teoremas de Liouville e Chebyshev para saber se uma determinada primitiva pode ser dada ou não em termos de funções elementares. Observa-se que nem sempre o cálculo da integral de funções é possível pelo Teorema Fundamental do Cálculo ou pelas Técnicas de Integração, as quais são bastante úteis na pratica de integração de funções. Assim, por meio de estudos desenvolvidos principalmente por Liouville e Chebyshev foi possível elaborar teoremas que são capazes de mostrar se essas funções podem ou não serem expressas por meio de termos elementares.

Por fim, considerando que o Cálculo se fez uma disciplina indispensável na formação científica dos alunos hoje em dia, um fator importante é o amadurecimento matemático que se firmou no decorrer da produção deste estudo, pois é notável a importância de estudar o Teorema de Liouville e suas aplicações.

REFERÊNCIAS

BARON, M. E., **The origins of the infinitesimal calculus** Hungary: Pergamon Press, 1969

BOYER, C. B., **Cálculo**.Trad. de Hygino H. Domingues. v. 6. São Paulo: Editora Atual, 1992.

BOYER, C. B., **História da matemática**. 3ª ed. São Paulo: Blucher, 2010.

BOYER, C. B., **História da matemática**. São Paulo: Edgard Blucher, 1979.

DE MORAIS FILHO, D. C., **Professor, qual a primitiva de e^{x^2}?** . Matemática Universitária, Brasil, v. 31, p. 143-161, 2001.

EVES, G. H., **Introdução à história da matemática**. Campinas: Unicamp, 2004.

GARBI, G. G., **A rainha das ciências**. 3. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

GAYO, J., **Fundamentos e história da matemática**. Indaial: Uniasselvi, 2010.

GUIDORIZZI, H.L., **Um curso de cálculo**. Vol. 1, 2a Edição, São Paulo: Ed. Livros Técnicos e Científicos, 1987.

HARDY, G. H., **The Integration of functions of a single variable**. Cambridge University Press, 1928.

KAPLAN, W., **Cálculo e Álgebra Linear**,vol. 02, LTC, 1973.

LIMA, E. L., **Análise real**, vol. 01, 12ªed. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.

MALTA, I., **Cálculo a uma Variável**, vol. 02, 2ªed. PUC-Rio, 2002.

OLMSTED, J. M. H., **Advanced Calculus**. Appleton-Century-Crofts, INC, 1961.

PAIVA, M. R., **Matemática**. Vol. 3. Moderna, 1995.

PISKUNOV, N. S., **Cálculo Diferencial e Integral**. 2ª ed., 1973.

RITT, J. F., **Integration in finite terms, Liouville's Theory of Elementary Methods**. Columbia University Press, 1948.

SIMMONS, G. F., **Cálculo com Geometria Analítica**. Vol. 01. McGraw-Hill, 1987.

SILVA, W. P., SILVA, C. M. D. P. S., LAB Fit Curve Fitting Software . V.7.2.46. wwwlabfit.net, 2009.

SWOKOWSKI, E. W., **Cálculo com Geometria Analítica**. Vol. 01, 2ª ed. Makron Books, 1994.