UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE

CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE

UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA E MATEMÁTICA

CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

AILTON FAUSTINO DOS SANTOS

TEOREMA DE EULER: UMA APLICAÇÃO DA TEORIA DOS GRAFOS

CUITÉ - PB

2019

AILTONFAUSTINO DOS SANTOS

TEOREMA DE EULER: UMA APLICAÇÃO DA TEORIA DOS GRAFOS

Monografia apresentada à Banca Examinadora, como exigência parcial à conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática, da Universidade Federal de Campina Grande campus Cuité.

Orientador: profº Dr. Aluízio Freire da Silva Júnior.

CUITÉ – PB

2019

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA NA FONTE
Responsabilidade Rosana Amâncio Pereira – CRB 15 – 791

S237t Santos, Ailton Faustino dos.

Teorema de Euler: uma aplicação da teoria dos grafos. / Ailton Faustino dos Santos – Cuité: CES, 2019.

34 fl.

Monografia (Curso de Licenciatura em Matemática) – Centro de Educação e Saúde / UFCG, 2019.

Orientação: Dr. Aluízio Freire da Silva Junior

1. Leonard Euler. 2. Grafos. 3. Árvores. Teorema de Euler. I. Título.

Biblioteca do CES – UFCG CDU 519.17

AILTON FAUSTINO DOS SANTOS

TEOREMA DE EULER: UMA APLICAÇÃO DA TEORIA DOS GRAFOS

Monografia apresentada à Banca Examinadora, como exigência parcial à conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática, da Universidade Federal de Campina Grande Campus Cuité.

Aprovada em: 27/06/2019

BANCA EXAMINADORA

Aluízio Freire da S. Júnior

Prof. Dr. Aluízio Freire da Silva Júnior
Orientador
Universidade Federal de Campina Grande (UFCG)

Maria de Jesus Rodrigues da Silva

Prof. Me. Maria de Jesus Rodrigues da Silva
Universidade Federal de Campina Grande (UFCG)

Glageane da Silva Souza

Prof. Dr. Glageane da Silva Souza
Universidade Federal de Campina Grande (UFCG)

CUITÉ – PB

2019

DEDICATÓRIA

Aos meus pais e meu irmão, por acreditarem e terem investido em mim e aqueles que contribuíram de alguma forma para realização deste sonho.

AGRADECIMENTOS

A Deus e ao senhor e salvador Jesus cristo, responsáveis por todas as minhas conquistas.

EPÍGRAFE

“O céu deve ser necessariamente esférico, pois a esfera, sendo gerada pela rotação do círculo, é, de todos os corpos, o mais perfeito.”.

(Aristóteles)

RESUMO

Este trabalho aborda a história de Leonard Euler, o qual foi responsável pelo surgimento da teoria dos grafos, quando resolveu o problema das sete pontes, dando início ao estudo da topologia. É importante frisar que o conceito de grafo é moderno e não existia na época de Euler. São apresentados alguns dos principais conceitos dessa teoria dos e, além disso, um teorema importante na matemática, frequentemente utilizado nas escolas, que é bastante útil na matemática discreta. Esse trabalho é caracterizado como uma pesquisa bibliográfica cujo objetivo édemostrar o teorema de Euler utilizando a teoria dos grafos. Para tanto, assume-se conceitos de árvores e de grafos conexos e alguns coroláriosimportantes. Conclui-se que, apesar de não ser conhecida,a ideia de grafo é muito geral e útil, podendo ser usada para uma enorme quantidade de problemas práticos.

Palavras-chave: Leonard Euler. Grafos. Árvores. Teorema de Euler.

ABSTRACT

In this work we approach the history of Leonard Euler, because he was responsible for the emergence of graph theory when he solved the problem of the seven bridges starting the study of topology. It is important to emphasize that the concept of graph is modern and did not exist in the time of Euler. We will present some of the main concepts of graph theory. In addition, we will see an important mathematical theorem, often used in schools, which is very useful in discrete mathematics. This work is characterized as a bibliographical research whose objective is to prove Euler's theorem if using the graph theory. For this we will assume concepts of trees and related graphs and we will see some important corollaries. We will conclude that although the idea of a graph is not known, it is a very general and useful one, and can be used for a great deal of practical problems.

Keywords: Leonard Euler. Graph. Trees. Euler'stheorem.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Os primeiros estudos sobre teoria dos grafos tiveram origem com o problema das sete pontes de Konigsberg. Esse problema perdurou por um tempo sem solução até que Euler notou que esse poderia ser descrito por meio de representações, que posteriormente recebeu o nome teoria dos grafos. A teoria dos grafos é utilizada em várias áreas do conhecimento, tais como a genética, fluxo de redes, telecomunicações, conexão de voos aéreos dentre outros. A finalidade desse trabalho é fazer uma introdução a teoria dos grafos e aplicá-la na prova do teorema de Euler. A pesquisa está dividida em três capítulos, como dispostos a seguir

No capítulo 1 apresentaremos um pouco da vida e trajetória de Leonard Euler, tendo em vista sua grande importância para a teoria dos grafos.

No capítulo 2 veremos alguns conceitos importantes sobre grafos e para facilitar na compreensão desses conceitos serão apresentadas as definições e exemplos ilustrativos,buscando uma melhor apreensão do leitor.

No capítulo 3, tendo feito uma boa explanação sobre grafos, apresentaremos um conceito da teoria dos grafos que será de grande importância para o objetivo desse trabalho, concluiremos com a apresentação da demonstração do teorema de Euler e algumas consequências.

Capítulo 1

1 UM POUCO DA HISTÓRIA DE LEONARD PAUL EULER

Leonard Euler foi um importante matemático e cientista suíço, considerado um dos maiores estudiosos do século XVII, nascido no dia 15 de abril de 1707 na cidade de Basileia Suíça, filho de Paul Euler e Margaret Brucker. Euler passou grande parte de sua infância na cidade de Riechen, onde foi educado por seu pai que lhe ensinou os primeiros conceitos matemáticos, aos 7anos começou a ter aulas particulares e ler textos diversos.

Em 1720, aos 13 anos retornou a Basileia para estudar e se preparar para um curso de teologia, ainda jovem passou a estudar além de teologia, física, astronomia, medicina e línguas orientais. Graças a amizade que seu pai tinha com Jacob Bernoulli, conseguiu fazer com que seu filho tivesse como tutor o maior matemático da época, que o incentivou a seguir a carreira de matemático.

Euler começou a impactar a sociedade física e matemática ainda muito novo com sua tesesegundo Justino (2013, pág. 6):

> Quando muito jovem apenas 19 anos, ainda estudante de Johann, apresenta como tese para a cadeira de física uma memória denominada dissertação física para o som. Esse texto serviu de guia à pesquisa em acústica por vários séculos. Ele contribuiu demais para a acústica que temos hoje.

Pouco tempo depois, agora aos 20 anos Euler mudou-se para São Petersburgo, cidade onde se casou e teve 13 filhos, e foi diretor da classe de matemática na academia.

> Euler mudou-se para são Petersburgo, Rússia, em 1727, onde conseguiu uma posição na academia de ciências de são Petersburgo. Casou-se em 1734 e teve 13 filhos, dos quais apenas 5 sobreviveram. A literatura conta que Euler certa vez falou que suas principais criações matemáticas ocorreram quando tinha um bebe no colo e crianças ao seu redor brincando. Foi diretor da classe de

> matemática na academia de ciências e belas artes de Berlin onde permaneceu ate 1766. (Justino, 2013, pág. 6)

Desde criança Euler sofria de uma doença cutânea (tuberculose que afetava os gânglios linfáticos) a qual o levou a perder o olho direito e prejudicou a visão do esquerdo, pouco tempo depois em 1771 perdeu o olho esquerdo ficando totalmente cego, mas isso não o impediu de ser considerado o matemático mais produtivo da época, de acordo com D`Ambrosio (2009, pág.24):

> Sua extraordinária memória permitia a ele ditar seus textos para alguns assistentes. Destacam-se seus filhos Johann Albrecht (1734-1800) e Christoph (1743–1808), bem como Anders Johan Lexell (1740–1784), Wolfgang Ludwig Krafft (1743–1814), Mikhail EvseyevichGolovin (1756–1790) e NikolausFuss (1755- 1826), talvez o mais ativo de todos, tendo redigido cerca de 200 trabalhos de Euler, feitos enquanto era totalmente cego.

Segundos relatos, Euler veio a óbito no dia sete de setembro de 1783, possivelmente um acidente vascular que o levou a perde a consciência e falecer, de acordo com D`Ambrosio (2009 pág.25)

> Euler faleceu, possivelmente vítima de um acidente vascular cerebral, em 7 de setembro de 1783. Segundo seu assistente, NikolausFuss, ele estava jantando com seu jovem colaborador, Anders Johan Lexell, matemático e astrônomo, cometólogo. Falavam sobre a órbita de um novo planeta, descoberto por Herschel em 1781 (depois viria a ser denominado Urano). Depois do jantar, enquanto brincava com seu neto, Euler foi acometido de um mal súbito. Teria dito ao neto “Estou morrendo”. Perdeu a consciência e faleceu.

Euler, juntamente com Bernoulli, desenvolveu o modelo da viga de Euler-Bernoulli que se tornou uma marca da engenharia. Euler também conseguiu aplicar com sucesso ferramentas analíticas para problemas de mecânica clássica e problemas celestes, e segundo Justino (2013) seus trabalhos sobre astronomia foram reconhecidos e o levaram a conquistar diversos prêmios durante a sua carreira. Além disso, ele tem contribuições importantes na óptica, e garantiu que a teoria ondulatória da luz fosse usada como modelo dominante do pensamento até o desenvolvimento da teoria quântica da luz.

Apesar de ter várias contribuições na física, Euler é considerado um dos maiores matemáticos da história, pois suas obras são muito importantes para todas as áreas da matemática, de acordo com D`Ambrosio(2009, pág. 15):

> Suas Obras Completas, cuja publicação foi iniciada em 1911 e encontra-se em fase final, consistem em 84 volumes, e ainda está

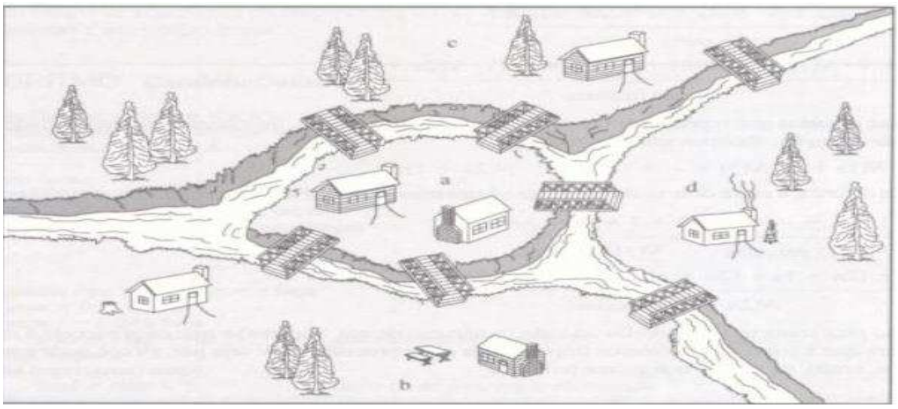
> sendo planejado um volume adicional, com os manuscritos não publicados, cadernos e diários. Seus trabalhos são muito bem escritos, com interessantes exemplos, fundamentais em todas as áreas da matemática.

No século XVIII Euler foi sem dúvida um dos maiores matemáticos, suas produções e construções alavancaram um grande desenvolvimento matemático.

Sendo assim, contartoda sua história não será possível nesse trabalho, tendo em vista seu vasto acervo de obras, o foco desta pesquisa é o problema que deu origem à teoria dos grafos, que será detalhado a seguir.

O problema citado ocorreu na cidade de Konigsberg a qual era construída ás margens do rio Pregel. A cidade era dividida em bairros separados pelo rio, os quais eram interligados por sete pontes, como vemos na figura 1.1.

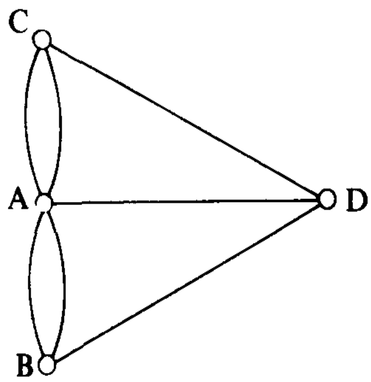
Figura 1.1: Ilustração da Cidade de Konigsberg.



Fonte: CAVALCANTE; SILVA, São Paulo, 2009.

O problema consistia em saber se era possível dar uma volta pela cidade passando uma única vez por cada ponte. Para tentar resolver o problema foram traçados vários caminhos, mas sem êxito. Atéque em 1736, Leonhard Euler apresentou àAcademia de Ciências Russa de São Petersburgo um diagrama que facilitava a análise do problema. Ele percebeu que é necessário passar por uma ponte para chegar ao outro lado da cidade, edeve-se sair por uma ponte diferente para voltar ao ponto inicial, e para que esse percurso fosse possível seria necessário que existisse um numero par de pontes ligando cada parte da cidade (exceto para a região de partida e de chegada). Com isso Euler representou o problema de forma bastante simples como se pode ver na figura 1.2 a seguir.

Figura: Grafo que representa o Problema das Pontes de Konigsberg.



Fonte: Wilson (2009)

Portanto seria impossível fazer tal percurso passando uma única vez por cada ponte. O que Euler mostrou foi uma solução negativa do problema, e assim surgiu um novo campo de estudos matemáticos, é este campo que será focado no decorrer desse trabalho.

Capítulo 2

2 INTRODUÇÃO A TEORIA DOS GRAFOS

Nesse capítulo veremos alguns conceitos da teoria dos grafos, ramo da matemática que surgiu a partir do problema das pontes de Konigsberg, e as indagações de Leonhard Euler. A teoria dos grafos teve origem no século XVIII, quando Euler resolveu o primeiro problema utilizando da representação que hoje é chamada de grafo, palavra de origem grega que representa um conjunto de pontos que podem ou não serem ligados por uma linha. Nessa perspectiva CAVALCANTE; SILVA diz que:

> Grafos são estruturas muito usadas para representar a existência ou não de relações entre elementos de um dado conjunto. Assim, redes de comunicação, fluxos em rede de transporte, mapas geográficos e relações binárias em geral podem ser representadas por grafos, e nesse caso várias questões de interesse podem ser investigadas. (CAVALCANTE; SILVA, 2009 p. 19)

Segundo LOVÁSZ e VESZTERGOMBI (2003), os grafos são utilizados na representação de várias situações. E para que possa ser utilizado, basta que haja certa relação definida entres os objetos, com isso pode-se definir os grafos de maneira formal ou por meio de uma representação geométrica. É importante lembrar que a teoria dos grafos é fonte de uma vasta quantidade problemas encantadores e difíceis, mas com enunciados simples.

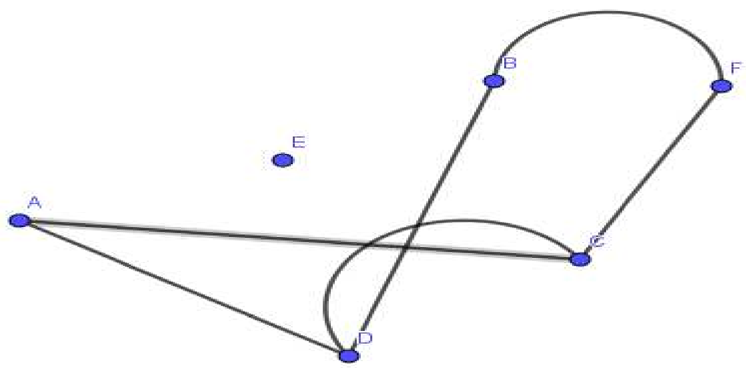
2.1 DEFINIÇÃO DE GRAFO

Definição 2.1.1: Define-se como grafo um par *(V(G), E(G)),* onde *V(G)* é um conjunto finito não vazio de elementos chamados **vértices** e *E(G)* é uma família finita de pares não ordenados de elementos de *V(G)* chamados de **arestas.**

Note que o uso da palavra “família” permite a existência de múltiplas arestas. Chamaremos *V(G)* de conjunto de vértices e o *E(G)* de família de arestas de G.

Exemplo 2.1.1. Considere a Figura 2.1. Note que *V(G)* é o conjunto {A, B, C, E, D, F} e *E(G)* é formada pela família das arestas {A, C}, {C, F}, {F, B}, {B, D},{A, D} e {D, C}.

Figura 2.1: Grafo de seis arestas e seis vértices.



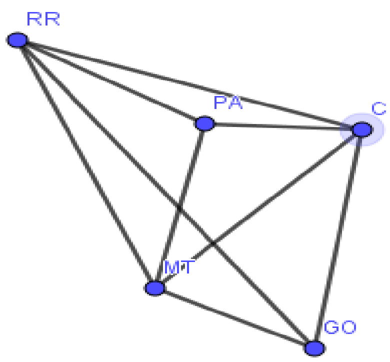
Fonte: Autoria própria.

2.2 DEFINIÇÃO GEOMÉTRICA DE GRAFOS

Definição 2.2.1: Uma definição direta sobre grafo é a seguinte: um grafo é um conjunto não vazio de pontos (nós, vértices), e um conjunto de arestas (arcos), sendo que cada aresta deve estar ligada a dois vértices.

Exemplo 2.2.1: O grafo da Figura 2.2, representa de uma forma simplificada alguns estados do Brasil: Ceará, Mato Grosso, Roraima, Pará e Goiás, onde foi feito um trajeto que liga esses estados. Esse grafo tem cinco vértices e nove arestas.

Figura 2.2: grafo de nove arestas e cinco vértices.

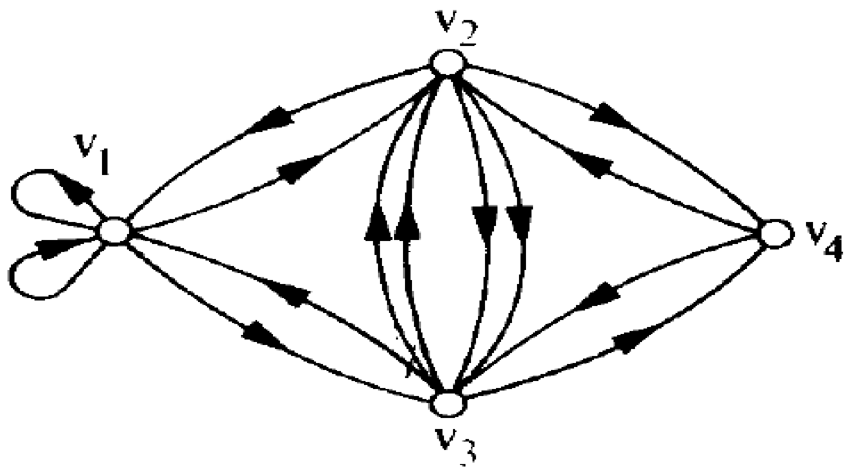


Fonte: Autoria Própria.

O que diferencia grafo de grafo direcionado é o fato de que nos grafos direcionados as arestas são pares ordenados. Chama-se *V(D)* o conjunto de vértices e *A(D)* a família de arestas de D. Uma aresta cujo primeiro elemento é x e o segundo elemento é y é chamado de aresta de x à y e é escrito (x, y), ou simplesmente xy. É importante notar que xy e yx são arestas diferentes.

Exemplo 2.3.1: Na figura 2.3, podemos ver um grafo, onde V(D) é o conjunto {v_1, v_2, v_3, v_4} e A(D) consiste as arestas, v_1v_1, v_1v_1, v_1 v_2, v_2 v_4, v_4 v_3, v_3 v_2,v_2 v_3, v_3 v_2, v_2 v_3, v_3 v_1, v_1 v_3, v_3 v_4, v_4 v_2 e v_2 v_1. A ordenação dos vértices em um arco está sendo indicado por uma seta.

Figura 2.3: Grafo direcionado



Fonte: WILSON, (1996).

2.3 VÉRTICES ADJACENTES E VÉRTICES ISOLADOS

Definição 2.3.2: Define-se vértice isolado, quando esse vértice não é adjacente a nenhum outro.

Exemplo 2.3.2: De acordo com a Figura 2.1, pode-se verificar que o vértice E, é um vértice isolado.

2.4 LAÇO

Definição 2.4.1: Define-se*laço* de grafo como um arco vw tal que v=w. Assim na figura 2.3, v_1 é um laço com extremidades $v_1=v_1$.

2.5 ARESTAS PARALELAS

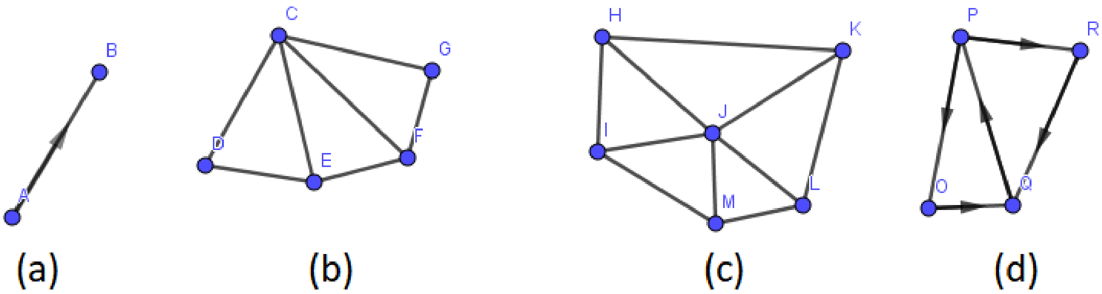
Definição 2.5.1: Definem-searestasparalelasduasarestas que tem as mesmas extremidades. Como vemos na figura 2.3 em que as arestas, v_3 v_2,v_2 v_3, v_3 v_2, v_2 v_3 são paralelas.

2.6 GRAFOS SIMPLES

Definição 2.6.1: Um grafo é dito simples quando este não tiver laços e nem arestas paralelas.

Exemplo 2.6.3: Observe a Figura 2.4 todos os grafos dessa Figura são simples, já que satisfazem a definição anterior.

Figura 2.4: Grafos simples.



Fonte: Autoria própria.

Como pode ser observado a partir da figura 2.4/(a e d), um grafo simples pode ser direcionado porém nem todo grafo direcionado, é simples, como na figura 2.3, na qual temos um grafo direcionado que não é simples pois possui laços e arestas paralelas.

Um teorema importante sobre grafo simples e o seguinte.

TEOREMA 2.1: Seja G um grafo simples com n vértices. Se G tiver k componentes, então o número m de arestas de G satisfaz;

$$n - k \leq m \leq \frac{1}{2}(n-k)(n-k+1).$$

2.7 GRAU DE UM VÉRTICE

Definição 2.7.3: Definimos grau de um vérticeo número de arestas que tem extremidade naquele vértice. Considere o vértice v, desta forma denota-se o grau de v o como: *ρ(V)*

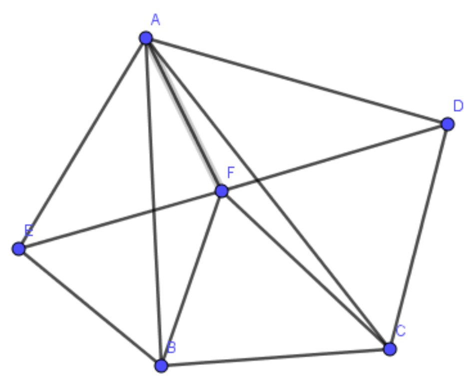
Exemplo 2.7.1: Na Figura 2.3, os vértices v_1 têm grau seis, v_2 e v_3 têm grau oito e v_4 têm grau quatro.

2.8 GRAFO COMPLETO

Definição 2.8.1: Um grafoé ditocompleto quandotodo par de vértices (ou nós) é ligado por uma aresta. A notação usada para um grafo completo com n vértices é K_n.

Exemplo 2.8.1: Note que o grafo da figura 2.5**,** é completo, pois todos os pares de vértices estão ligados por uma aresta, o grafo possui 6 vértices, logo é denotado por k_6.

Figura 2.5: Grafo completo.



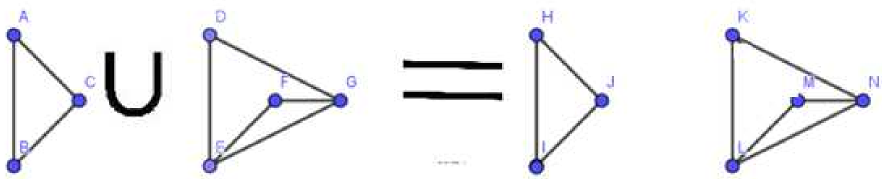
Fonte: Autoria própria.

2.9UNIÃO DE DOIS GRAFOS

Definição 2.9.1: Considere dois grafos $G_1=(V(G_1), E(G_1\ ))$ e $G_2=(V(G_2), E(G_2))$, onde $V(G_1)$ e $V(G_2)$ são assumidos como sendo disjuntos. Então suaunião$G_1\ \cup G_2$é definida como o grafo com o conjunto de vértices $V(G_1)\ V(G_2)$ e a família de arestas $E(G_1) \cup E(G_2)$.

Exemplo 2.9.1: Considere a Figura 2.6, onde foi feito a união dos grafos G_1 *e* G_2, ou seja, $G_1 \cup G_2$.

Figura 2.6: A União de Dois Grafos.



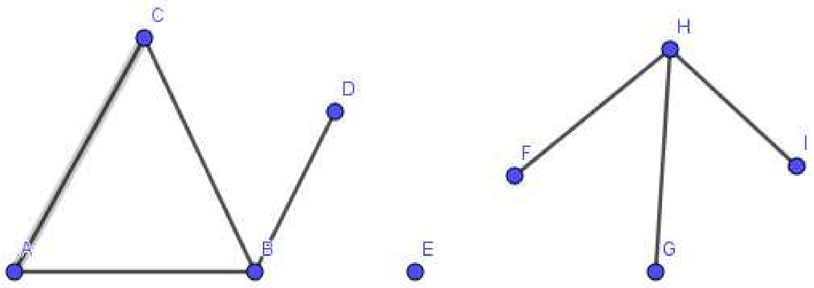
Fonte: Autoria própria.

2.10 GRAFOS CONEXOS

Definição 2.10.1: Diz-se que um grafo é conexo se não puder ser expresso como a união de dois grafos; caso contrário, ele é desconexo.

Exemplo 2.10.1: Considere a figura 2.6, nela podemos considerar três grafos, o grafo ABCD, que é um grafo conexo, porém é desconexo dos grafos E e FGHI.

Figura 2.6: grafos conexos.



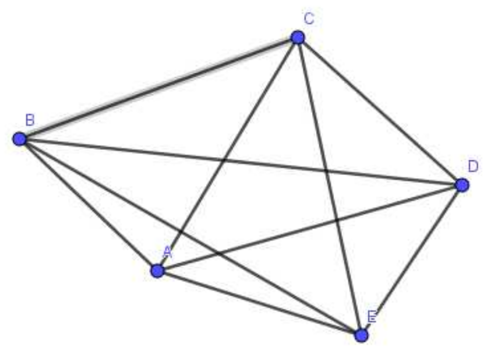
Fonte: Autoria própria.

2.11GRAFO REGULAR

Definição 2.11.1: Diz-se que um grafo éregular se cada vértice possui o mesmo grau.

Exemplo 2.11.1 Considerando o grafo a seguir note que todos os seus vértices tem grau 4, logo e um grafo regular.

Figura 2.7: grafo regular.



Fonte: Autoria própria.

2.12 GRAFOS DE BIPARTIDO

Definição 2.12.1: Dizemos que um grafo é bipartidose o vértice de um grafo G pode ser dividido em dois conjuntos disjuntos V_1 e V_2, de tal forma que cada extremidade de G une um vértice de V_1 a um vértice deV_2.

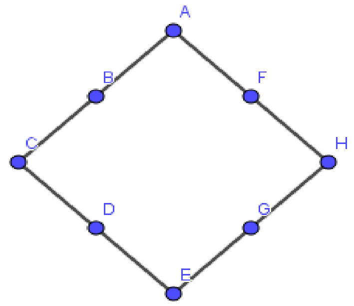
2.13 GRAFOS DE CIRCUITOS

Definição 2.13.1: Define-se grafo de circuito quando ele é conexo e é regular de grau dois.

Notação: Um circuito de n vértices é denotado por C_n.

Exemplo 2.13.1: Na figura abaixo temos um grafo de circuitos denotado por C_8.

Figura 2.8: grafo de circuito.



Fonte: Autoria própria

2.14CAMINHOS E TRILHA

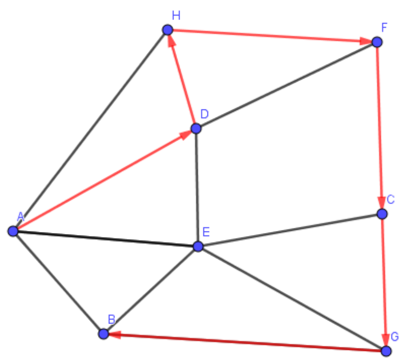
Definição 2.14.1: Define-se um caminho como um grafo com uma sequência de arestas distintas, além disso, os vértices V_0, V_1, V_2,..., V_m, são distintos (exceto possivelmente $V_0 = V_m$).

O número de arestas que um caminho tem é justamente seu comprimento.

Definição 2.14.2: Define-setrilha como uma sequência de arestas, onde não há repetição de arestas.

Exemplo 2.14.1: Considere a figura 2.8, a partir dela pode-se percorrer um caminho que vai do vértice A ao vértice B, assim temos uma sequência que inicia no vértice A e tem fim no vértice B. Se esse caminho for percorrido seguindo a sequência A→D→H→F→C→G→B, teremos um caminho de comprimento 6.

Figura 2.8: grafo de oito vértices.



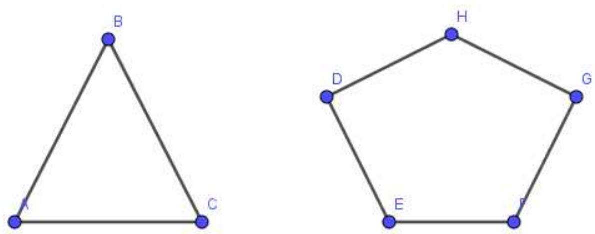
Fonte: Autoria própria.

2.15 GRAFO PLANO

Definição 2.15.1: Define-se grafo plano como sendo um grafo desenhado no plano de tal maneira que duas arestas não se interceptam exceto em um vértice no qual elas são incidentes.

Exemplo 2.15.1: Os grafos da figura 2.9 são planos, pois suas arestas não se interceptam.

Figura 2.9: Grafos planos.



Fonte: Autoria própria.

2.16GRAFOS ISOMORFOS E SUBGRAFO

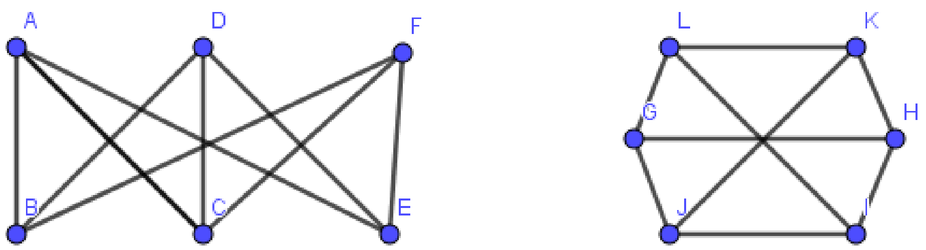
Definição 2.16.1: Dois grafos G_1 e G_2 são definidos *isomorfos*se existe uma correspondência um a um entre os vértices de G_1 e os de G_2 com a propriedade de que o número de arestas que unem dois vértices de G_1 é igual ao número de arestas que unem os vértices correspondentes de G_2.

Definição 2.16.2: Define-se como subgrafode um grafo, um conjunto de vértices e um conjunto de arestas que são subconjuntos do conjunto original de vértices e arestas, respectivamente, nos quais as extremidades de um arco têm que ser os mesmos vértices que o grafo original.

Assim, um subgrafo é obtido quando se apaga uma parte do grafo original, logo um subgrafo não deixa de ser grafo.

Exemplo 2.16.1 Considere a Figura 2.10. Os dois grafos mostrados são isomorfos sob a correspondência A↔L, D↔H, F↔J, C↔K, D↔I, F↔G. Note que existem apenas seis vértices e os outros pontos em que as arestas se tocam não são vértices.

Figura 2.10: Grafos isomorfos.



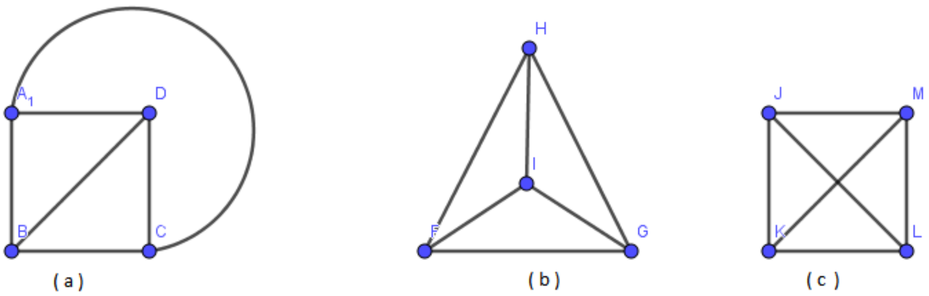
Fonte: Autoria própria.

2.17 GRAFO PLANAR

Definição 2.17.1: Um grafo planar é um grafo que é isomorfo a um grafo plano.

Exemplo 2.17.1 Na figura 2.11 os grafos a e b são grafos planos e, portanto são planares, o grafo c não é um grafo plano, mas é isomorfo ao grafo plano a, logo é planar.

Figura 2.11: grafos planares.



Fonte: Autoria própria.

Capítulo 3

3 FÓRMULA DE EULER

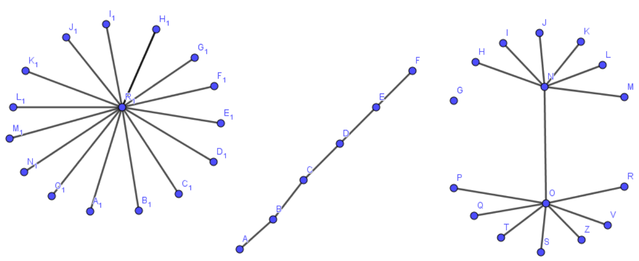
Neste capítulo estudaremos um pouco sobre um importante resultado da teoria dos grafos, que de acordo com Brito (2014, p.21) surgiu durante estudos de Euler, onde se percebeu que todo grafo planar, conexo e simples, pode ser expresso no plano de maneira que o mesmo divide-se em certa quantidade de partes (regiões), e que essa quantidade tem relação direta com o número de vértices e arestas do grafo. Mas adiante daremos ênfase a esse fato, mais antes precisamos apresentar algumas definições e teoremas importantes sobre arvores.

3.1 ÁRVORES

Definição 3.1.1: Define-se árvore um grafo conexo que não contém qualquer ciclo como um subgrafo.

Uma floresta é uma união de árvores, e uma floresta conexa é uma árvore. Uma árvore é um dos grafos mais simples de serem compreendidos, na figura 3.3.1 temos alguns exemplos de árvores.

Figuras 3.1: Árvores



Fonte: Autoria própria

Teorema 3.3.2: Seja G um grafo com n vértices. Em seguida, as seguintes declarações são equivalentes:

(i) G é uma árvore;

(ii) G não contém ciclos e possui arestas n-1;

(iii) G é conexo e possui arestas n-1;

(iv) G é conexo, e cada uma das arestas é uma ponte;

(v) Dois vértices de G estão conectados exatamente por um caminho;

(vi) G não contém ciclos, mas a adição de qualquer nova aresta cria exatamente um ciclo.

Prova: Se n = 1, os seis resultados são triviais; portanto, assumimos que .
Seja G uma árvore. Então, por definição, G não possui ciclos. Deste modo, temos que:
(i) => (ii). A remoção de qualquer aresta deve desconectar G em dois grafos, cada um dos quais é uma árvore. Segue por indução que o número de arestas em cada uma dessas duas árvores é menor do que o número de vértices. Deduzimos que o número total de arestas de G é n - 1.
(ii) => (iii). Se G é desconexo, cada componente de G é um grafo conexo sem ciclos, portanto, como na parte anterior, o número de vértices em cada componente excede o número de aresta em 1. Segue que o número total de vértices de G excede o número total de arestas em pelo menos 2, o que contradiz o fato de que G possui n-1 arestas.
(iii) => (iv). A remoção de qualquer aresta resulta em um grafo com n vértices e n-2 arestas. Pelo teorema 2.1, os vértices são desconexos.
(iv) => (v). Como G é conexo, cada par de vértices está conectado por pelo menos um caminho. Se um dado par de vértices estiver conectado por dois caminhos, eles determinam um ciclo, contradizendo o fato de cada aresta ser uma ponte.

(v) => (vi). Se G contém um circuito, então, dois vértices no circuito estariam conectados por pelo menos dois caminhos, o que é uma contradição. Logo G não contém circuitos. Se uma aresta for adicionada a G, então, uma vez que os vértices incidentes já estão conectados em G, um circuito é criado.

(vi) => (i). Note que para G ser uma árvore, falta mostrar que ele é conexo. Suponha que G seja desconexo. Se adicionar a G qualquer aresta juntando um vértice de um componente para um vértice em outro, então nenhum ciclo é criado, o que é uma contradição. Logo G é conexo e, portanto, é uma árvore.

3.2 RESULTADOS IMPORTANTES

No capítulo anterior ver-se o que são grafos planares, mas será que existem grafos que não são planares?

Segundo LOVÁSZ; PELIKÁN e VESZTERGOMBI (2003):

> Um grafo é chamado de planar, se ele pode ser desenhado como um mapa no plano, i.e., podemos representar seus nós por pontos diferentes no plano, e suas arestas por curvas conectando os pontos apropriados, de modo que suas curvas não se intersectam. (LOVÁSZ; PELIKÁN e VESZTERGOMBI, 2003, pág. 188).

Assim podemos dizer que existem grafos que não são planares, como exemplo os teoremas a seguir:

Teorema 3.2.1: O grafo completo k_5 (cinco vértices) não é um grafo planar.

A demonstração desse teorema será apresentada na próxima seção.

Teorema 3.2.2: Um grafo planar sobre n vértices tem no máximo 3n-6 arestas.Prova: suponha que o grafo tenha n vértices, a arestas, e f faces.

A prova deste teorema será apresentada na próxima seção, pois é necessárioo resultado do próximo teorema.

3.3 TEOREMA DE EULER

De acordo com Elon Lages(1985), esse teorema foi descoberto em 1758 o qual afirmava que se um poliedro tem V vértices, A arestas e F faces, então $V - A + F = 2$. Por volta dos anos 1639, Descartes produziu um manuscrito contendo resultado pelos quais a fórmula acima poderia ser obtida como consequência imediata. Há vários relatos de que esses manuscritos foram perdidos, tendo sido encontrado 221 anos depois, e com isso o teorema de Euler ficou conhecido e é ensinado há décadas nas escolas e em cursos de geometria onde são apresentadas algumas demonstrações desse teorema. Segundo Elon Lages:

> A demonstração mais divulgada desse teorema no caso de poliedros homeomorfos à esferas é basicamente devida a Couchy [1813]. Ela pode ser encontrada por exemplo, em Courant-Robbins [1951] e Hilbert-Cohn Vossen [1956]. (ELON; LIMA, 1985 p. 58)

Agora se apresenta a demonstração do teorema de Euler, e para tanto se utiliza a teoria dos grafos.

Teorema: Seja G um grafo conexo plano e seja n, m e f indicando respectivamente o número de vértices, arestas e faces de G. Então:

$$n - m + f = 2.$$

Prova;

A prova é por indução sobre o número de arestas de G. considere m = 0, como g é um grafo conexo, então, n = 1, ef = 1, pois a face desse grafo compreende todo o plano (a face infinita), de fato se n ≥ 2 , então o grafo é desconexo, como no caso a seguir:

Figuras 3.2: grafo desconexo

Fonte: Autoria própria.

Mas isso contradiz a hipótese. Daí

$$n - m + f = 1 - 0 + 1 = 2$$

Agora suponha que o teorema seja verdadeiro para todos os grafos com no máximo m– 1 aresta, e seja G um grafo com m arestas. Se G é uma árvore, então do teorema 3.3.2, temos que o numero de arestas de G é m = n - 1 e f = 1 logo,

$$\begin{aligned} n - m + f &= n - (n - 1) + 1 \\ &= 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

Se G não é uma árvore, então existe uma sequência distinta dearesta contida em um circuito de G, ou seja, G é um grafo conexo regular de grau dois. Então G - e é um grafo plano conexo com n vértice, m-1 arestas e f-1 faces, de modo que:

$$n- (m-1) + (f-1) = 2$$

$$n - m + f = 2$$

Pela hipótese de indução. Segue que $n - m + f = 2$.

Prova do teorema 3.2.2

Sabemos pela fórmula de Euler que

$n + f = a + 2$.

Obtemos outra relação entre esses números se contarmos arestas face - por - face. Cada face tem pelo menos três arestas sobre sua fronteira, portanto contamos pelo menos 3f arestas. Toda aresta é contada duas vezes, portanto, o número de aresta é pelo menos *3f/2*. Em outras palavras$f \leq \frac{3}{2}$ *e*, usando isso com a fórmula de Euler, obtém-se:

$e + 2 = n + f \leq \frac{3}{2}\, e$

Que após a reagrupação chega-se a e ≤ 3n – 6.

3.4 CONSEQUÊNCIAS DO TEOREMA

Corolário 3.4.1. Seja G um grafo poliédrico; então, com a notação acima,

$$n\text{-}m + f = 2.$$

A fórmula de Euler pode ser facilmente estendida para grafos desconexos:

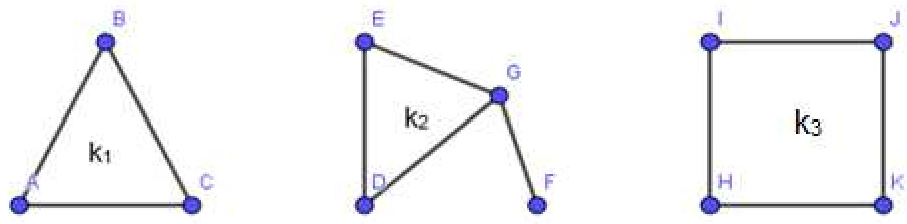
Corolário 3.4.2. Seja G um grafo plano com n vértices, m arestas, f faces e k componentes; então:

$$n - m + f = k + 1$$

Prova.

Considere a figura abaixo.

Figura 3.3: Grafo de k componentes.



Fonte: Autoria própria.

Aplicando o teorema de Euler para cada componente da figura anterior temos,

$$n_1 - m_1 + f_1 = 2$$

$$n_2 - m_2 + f_2 = 2$$

$$n_3 - m_3 + f_3 = 2$$

Somando essas componentes, obtemos,

$$n_k - m_k + f_k = 2k. \qquad (1)$$

Note que o número de vértices e arestas de cada componente ésempre igual, ou seja,

$$n_k = n \text{ e } m_k = m.$$

Então de (1) temos,

$$n - m + f_k = 2k. \qquad (2)$$

Mas isso não vale para o número de faces pois para cada componente ela é contada duas vezes, assim consideremos o número de faces como sendo,

$$f = (f_1 + f_2 + \cdots + f_k) = f + (k - 1).$$

Substituindo f em (2), obtém-se,

$$n - m + (f + (k - 1)) = 2k$$

$$n - m + f + k - 1 = 2$$

$$n - m + f = k + 1.$$

Como espera-se.

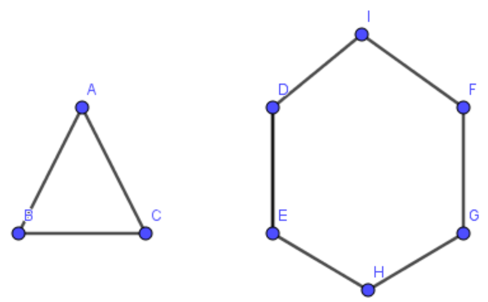
Corolário 3.4.3. Se G é um grafo planar simples conectado com n (≥3) vértices e m arestas, então

$$m \leq 3n - 6.$$

Prova.

Podemos assumir sem perda de generalidade que G é um grafo plano. Como cada face é delimitada por pelo menos três arestas, segue contando as bordas ao redor de cada face que $3f \leq 2m$ (o fato decorre de que cada borda limita no máximo duas faces). Obtemos o resultado desejado combinando essa desigualdade com a fórmula de Euler. Como podemos ver na figura 3.3.

Figura 3.3: grafos planos.



Fonte: Autoria própria.

Corolário 3.4.4. K_5 e $K_{3,3}$ não são planares.

Prova.

Se K_5 é planar então, aplicando o corolário 3.4.3, obtemos $10 \leq 9$, o que é claramente uma contradição. Se $K_{3,3}$ é plano então, aplicandoo corolário 3.4.3, obtemos $9 \leq 8$, que também é uma contradição.

CONSIDERAÇÕESFINAIS

Ao término deste trabalho, pode-se ter uma melhor compreensão sobre a teoria dos grafos, área da matemática que é pouco estudada no Brasil, mas que é muito importante. Esse trabalho me proporcionou uma excelente experiência tanto pessoal quanto de aprendizado, pois a teoria dos grafos era algo novo a se estudar, o que a tornou desafiadora.

Nesse trabalho foi abordado um pouco da vida de Leonard Euler, um dos grandes precursores da matemática. Foram apresentados conceitos sobre grafos, pelos quais notamos a grande importância da teoria dos grafos e que ela esta relacionada a diversos problemas do nosso cotidiano, que apesar de ter definições simples tem um vasto significado matemático.

Este estudo utiliza-se da teoria dos grafos para demonstrar um importante teorema relacionado aos poliedros o qual denomina-se teorema de Euler, tema visto com frequência no ensino básico. Nessa demonstração pode-se notar o quanto a teoria dos grafos e importante na matemática, sendo que por ter um aspecto lúdico os resultados obtidos por meio dela são de fácil compreensão, com isso a teoria dos grafos pode ser muito útil para exemplificar conceitos matemáticos.

REFERÊNCIAS

- Brito, F. ; Tavares, C. **Contando a história da contagem**. FAFISETE/FEMM, 2014.

- CAVALCANTE, Fabiana Nascimento Santos; SILVA, Severino Domigosda.**Grafos e suas Aplicações**. PUCRS, 2009.

- CONTADOR, Paulo Roberto Martins. **Matemática, uma breve história**. Vol. II, São Paulo: editora livraria da Física, 2006.

- D'Ambrosio, Ubiratan. EULER, UM MATEMÁTICO MULTIFACETADO. **Revista Brasileira de História da Matemática.**Vol. 9, no.17, p. 13-31, 2009.

- JUSTINO, Gildeci José. **A Característica de Euler.** UFPB, 2013.

- Lima, E. Lages. O TEOREMA DE EULER SOBRE POLIEDROS. **Revista matemática universitária.**n.2, p. 57-74, dezembro de 1985.

- LOVÁSZ, L.; PELIKÁN, J.; VESZTERGOMBI, K. **Matemática Discreta.** Sociedade Brasileira de Matemática, 2003.

- WILSON, Robin James. **Introductiontographtheory.** 2º ed. LONGMAN, 1996.