UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE

CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE

UNIDADE ACADÊMICA DE EDUCAÇÃO

Josevandro Barros Nascimento

OS PENTAMINÓS: UM RECURSO DIDÁTICO NO ENSINO DE ÁREA, PERÍMETRO E OUTROS CONCEITOS GEOMÉTRICOS.

Cuité-PB

2015

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE
UNIDADE ACADÊMICA DE EDUCAÇÃO

OS PENTAMINÓS: UM RECURSO DIDÁTICO NO ENSINO DE ÁREA, PERÍMETRO E OUTROS CONCEITOS GEOMÉTRICOS.

Josevandro Barros Nascimento

Cuité - PB

2015

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA NA FONTE
Responsabilidade Msc. Jesiel Ferreira Gomes – CRB 15 – 256

N244p Nascimento, Josevandro Barros.

Os pentaminós: um recurso didático no ensino de área, perímetro e outros conceitos geométricos. / Josevandro Barros Nascimento. – Cuité: CES, 2015.

72 fl.

Monografia (Curso de Licenciatura em Matemática) – Centro de Educação e Saúde / UFCG, 2015.

Orientadora: Drº. Jaqueline Aparecida Faratto L. Santos.
Coorientador: Drº. Aluíso Ferreira da Silva Júnior.

1. Pentaminó. 2. Material concreto. 3. Área e perímetro 4. Poliminós. I. Título.

Biblioteca do CES - UFCG CDU 51:37

Josevandro Barros Nascimento

Os Pentaminós: Um recurso didático no ensino de área, perímetro e outros conceitos geométricos

TCC apresentado ao curso de Matemática do Centro de Educação e Saúde da Universidade Federal de Campina Grande em cumprimento às exigências do componente curricular Trabalho Acadêmico Orientado, para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Comissão Examinadora:

Profª. Dra. Jaqueline Aparecida Foratto Lixandrão Santos

Orientadora

Prof. Dr. Aluízio Freire da Silva Júnior

Examinador

Profª. Ms. Aluska Dias Ramos de Macêdo

Examinadora

Agradecimentos

Obrigado! Deus, pelas grandes maravilhas e conquistas que tu fizeste nesta minha caminhada na graduação, por várias vezes não me deixar desistir. Obrigado pelas palavras de conselho nos momentos difíceis e por ter me guiar pelo melhor caminho dessa minha vida.

Aos meus familiares, a minha gratidão. A minha amiga, irmã e companheira de todas as horas, Ysmênia Karla, que nos momentos de angustia, tristeza, raiva e alegria esteve sempre presente com seu amor e carinho que pode contar sempre para minha formação acadêmica. A sua mãe, Dona Albertina, e sua irmã, Betânia, grato por contribuírem no que sou hoje nesta minha formação acadêmica e profissional; obrigado também por acolher-me em sua residência com amor e carinho.

Aos meus amigos e professores Alecxandro Alves Vieira, Célia Maria fraco Rufino, Glageane Silva Souza, Aluízio Freire, Jorge, Anselmo Lopes, Luciano Barros, Júsier, Márcia Cristina Silva Brito, Maria Gisélia Vasconcelos, André Martins, Lauro Xavier por acreditar e confiar no meu potencial por condescender na minha formação acadêmica às oportunidades que sou eternamente grato.

Aos funcionários da UFCG-CES. Em especial, ao meus amigos Vital, Airton e Jardel que sempre me atenderam com amor e dedicação.

Não posso esquecer de agradecer as coordenações dos cursos que sempre me atenderam com tanta dedicação. Em especial, a Mackson e Fenanda Lopes meus sinceros agradecimentos.

Aos meus amigos de todas as horas que contribuíram de forma direta e indireta nesta caminhada, muito obrigado!

Dedico este trabalho de conclusão de curso aos meus professores Alecxandro Alves Vieira, Célia Maria Franco Ruffino, Glageane Silva Souza a quem sou eternamente grato e meus amigos Gerivaldo Bezerra e Ysmênia Karla.

"Tudo cresce gradativamente, nada aos saltos; assim como aprendizagem se faz por uma sucessão gradativa de estudos, e não de uma só vez"

Resumo

O presente trabalho baseia-se no o uso do material concreto pentaminós como estratégia didática no processo de ensino e aprendizagem dos conceitos de áreas e perímetros e outros conceitos da geometria. A metodologia desenvolvida para dar suporte e enfoque teórico tem fundamentação em analise de revisão bibliográfica sobre o ensino e aprendizagem com uso dos pentaminós e do material didático com facilitador no ensino de conceitos matemáticos direcionados a temas que compõem a geometria e a álgebra. Nosso objetivo é a partir dos estudos realizados, elaborar uma sequência de ensino em que os pentaminós sejam utilizados como recurso para o ensino de conceitos geométricos nas salas de Matemática. Analisar a possibilidade do uso dos pentaminós no ensino de área e perímetro. Assim propomos ao professor sugestões de atividades no desenvolva do trabalho como estratégias de

Keywords: Pentaminó, Material Concreto, Área e Perímetro, Poliminós.

Abstract

This work is based on the use of pentominoes concrete material as a didactic strategy in teaching and learning process of concepts about area and perimeters and other concepts about geometry. The methodology was developed to support and theoretical approach, it has a foundation in analysis of literature review on teaching and learning with the use of pentominoes and teaching materials with facilitator in teaching mathematical concepts directed at themes that make up the geometry and algebra. Our goal is from the studies carried out preparing a teaching sequence in which the pentominoes are used as a resource for teaching geometric concepts in mathematics rooms. Examine the possibility of using pentominoes in the area and perimeter of education. So we suggest to the teacher that develops activities in the job as learning strategies.

Keywords: Pentamino, Concrete Material, area and perimeter.

Sumário

Introdução

O processo de ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos por muitas vezes não se faz bem sucedido, os alunos não apresentam conhecimentos satisfatório e tão pouco compreensão e gosto pelo estudo da disciplina de matemática. Em razão dessa problemática, realizamos um estudo sobre a possibilidade de desenvolvimento de conceitos de área e perímetro, assim como outros da geometria como congruência e simetria, por meio do pentaminó, uma peça dos poliminós. Para tanto, organizamos nosso trabalho em cinco capítulos e ao longo desses, serão abordados conceitos e atividades que visam fundamentar a prática de ensino que compõem a geometria, mais particularmente conceitos de área e perímetro, e de outros da geometria, por meio dos pentaminós.

No primeiro capítulo abordamos os aspectos históricos, ressaltando a importância do material concreto no ensino de matemática e o seu uso em sala de aula para a compressão de alguns conteúdos de matemática. Apresentamos também a origem dos poliminós, explanando a sua criação, seu desenvolvimento e suas implicações no ensino do conteúdo de perímetro e área.

No segundo capítulo apresentamos os poliminós que com suas subdivisões que podem ser classificados como: monominó, dominó, triminó, tetraminó, pentaminós e hexaminós.

No terceiro capítulo apresentamos algumas de atividades com o uso dos pentaminós como sugestão de trabalho. São quatro atividades abordando o uso das peças dos pentaminós com intuito de auxiliar o professor no desenvolvimento de conceitos geométricos, de forma lúdica.

A confecção dos pentaminós é apresentada no quarto capítulo, onde apresentaremos o *software Geogebra* e um tutorial para a criação de pentaminós por meio dessa ferramenta.

Finalizando, no quinto capítulo destacamos os conceitos matemáticos e suas definições, com o conceito de área, perímetro, semelhança, congruência, isometria e simetria.

As considerações finais nos possibilitou acreditar que o uso dos pentaminós, assim como de outros materias concretos, no ensino de conceitos geométricos favorece o desenvolvimento do pensamento geométrico.

Capítulo 1

Aspectos Históricos

1.1 O material concreto no ensino de Matemática

Estudos e trabalhos em educação matemática defendem o uso dos materiais concreto no processo de ensino e aprendizagem como uma metodologia interativa, um recurso didático para o ensino dos conteúdos de matemática. Utilizando materias manipulaveis no desenvolvimento de alguns conteúdos da matemática o aluno é inserido num processo de ensino atrativo e dinâmico.

O uso do material concreto de matemática possibilita que o professor desenvolva estratégias de aprendizagem com raciocino lógico-matemático que favorece a compreensão de situações-problemas até mesmo do dia-a-dia.

Lorenzato (2006) define material didático concreto, como "qualquer instrumento útil ao processo de ensino e aprendizagem" (LORENZATO, 2006, p. 18). Além disso, o autor acrescenta que facilita a percepção das aplicações nos conteúdos ministrados pelos professor. Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's), expõe que:

> "[...] constituem uma forma interessante de propor problemas, pois permitem que estes sejam apresentados de modo atrativo e, favorecem a criatividade na elaboração de estratégias de resolução e busca de soluções. Propiciam a simulação de situações-problema que exigem soluções vivas e imediatas, o que estimula o planejamento das ações." (BRASIL, 1998: p.46).

Utilizando com materiais manipulativos no ensino da matemática podemos quebrar alguns paradigmas em relações a matemática e o desenvolvimento de conceitos matemáticos. Consideramos utilizarmos uma metodologia em que o aluno possa aprender matemática de forma lúdica, por meio de estratégias diversificados e com o uso de material manipulável possa resolver situações-problemas que modelam seu cotidiano, o aluno pode ser motivado a desenvolver conceitos.

Consideramos que a utilização de materiais manipulativos nas aulas sugere uma abordagem no procedimento da aprendizagem de forma contextualizada para conceitualizar os conteúdos Matemáticos escolares. Segundo Souza (1996): "Na intervenção, o procedimento adotado interfere no processo, com o objetivo de compreendê-lo, explicitá-lo ou corrigi-lo".

Diante do exposto, consideramos os poliminós como material manipulável, dessa forma, apresentamos algumas informações que consideramos relevantes sobre sua a origem, a de área e perímentro.

1.2 A origem dos poliminós

Os poliminós são figuras conexa, constituída por justaposição de quadrados iguais, de modo que cada quadrado possui pelo menos uma aresta coincidindo com uma aresta de outro quadrado. Adiante exploraremos mais essa a temática.

O estudo dos Poliminós foi discutido pelo Russo Solomon W. Golomb – matemático chefe do laboratório de Jato Propulsão do Instituto de Tecnologia da Califórnia,– em que fazia parte do Clube de Matemática da Universidade de Hardvard. No ano de 1907, Hery Ernest Dudeney fez sua primeira publicação sobre os Pentaminós. Ele foi um dos maiores inventores do quebra-cabeça e publicou a obra Canterbury Puzzles. Nos anos de 1930 e 1940 os poliminós foram apresentado nas literaturas sobre o título "Problemas de Dissecação", ao invés de "Poliminós" que foi destaque na revista britânica de quebra-cabeças Fairy Chess Review . Na coluna de Martin Gardner, no Jornal Scientific American, do ano de 1957 os poliminós foram divulgado, surgindo assim grupos de estudos.

1.3 Área e perímetro

As primeiras noções intuitivas que o homem fez sobre a Geometria partiu dos povos antigos. De acordo com Eves (1992) provavelmente a Geometria originou-se de observações simples que possibilitaram reconhecer configurações físicas, comparar formas e tamanhos. Entre as civilizações antigas já existia percepções da Geometria com as figuras (formas) e tamanhos de terrenos.

Boyer (1996), relata que Heródoto subestimava a idade da geometria e acreditava que ela tenha surgido da necessidade prática de fazer novas medidas de terra após as inundações no vale do rio Nilo. Assim, a necessidade de fazer novas demarcações de terras após as cheias do Nilo fez com que aparecessem os "mensuradores": povos que se dedicavam ao estudo de técnicas para remarcar os terrenos de modo igual como eram demarcados antes de uma cheia.

Assim, a partir da divisão de terras feitas pelos povos antigos e as delimitações de lotes acabou surgindo a noção intuitiva de Geometria Plana. Segundo Eves (1992), a necessidade de delimitar a terra levou à noção de algumas figuras geométricas, tais como retângulos, quadrados e triângulos, mas a geometria no sentido mais amplo surgiu em tempos mais antigos que a arte de escrever.

Partindo dessas ideais, podemos concluir que o conceito de área e perímetro tem surgimento relacionado com as divisões das medidas de terra dos povos antigos com o desejo de aproximações exatas.

Dessa forma, e diante da importância desses conceitos faz-se necessário que os alunos da Educação Básica desenvolvam conceitos de área e perímetro com compreensão.

1.4 O uso dos poliminós no ensino de perímetro e área

O desafio para o aluno o desenvolver o pensamento geométrico, e grande diante da complexidade dos conceitos e propriedades da geométricas, como por exemplo, os de perímetro e área. Muitos dos conteúdos da geometria presentes nos livros didáticos de matemática, acabam não sendo trabalhados em sala de aula. Alguns professores preferem abordar aritmética e álgebra, deixando geometria para depois. Por isso, muitas vezes, os alunos assimilam mais as técnicas de aritmética e desenvolvem o pensamento algébrico, mas não conseguem relacionar-los à problemas de geometria.

O uso dos poliminós, como recurso contextualizador e lúdico no ensino e aprendizagem da matemática, pode ser um recurso importante para resolver tal problemática. Acreditamos assim que por meio da construção de figuras e situações problemas com poliminós é possível explorar os conceitos de área e perímetro, a partir de uma metodologia investigativa de problematizações.

Diante do exposto, queremos enfatizar que a possibilidade de introduzir conceitos de área e perímetro usando os poliminós favorece o desenvolvimento do pensamento geométrico. Além disso, que a aprendizagem é facilitada quando o aluno está inserido em um ambiente concreto-manipulável, pois ele pode observar e entender conceitos visíveis em num primeiro momento para que depois, possa fazer comparações e silogismos; e por fim, possa fazer conclusões em ambientes mais complexos como os algébricos, tomando por base o que aprendeu em um ambiente concreto-manipulável.

Capítulo 2

Os Poliminós

2.1 Poliminós

Um poliminó é uma figura geométrica conexa, formada por justaposição de quadrados iguais, de modo que cada quadrado possui pelo menos uma aresta coincidindo com uma aresta de outro quadrado.

Uma rotação não transforma um poliminó em outro e a forma como classificamos um poliminó depende do número de quadrados que o formam, como:

Monominó (1):

É formado por apenas um quadrado. Dessa forma, existe apenas um monominó.

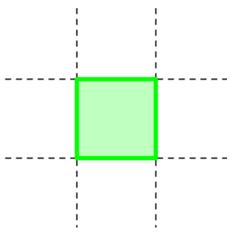

Figura 2.1: Elaborada pelo autor

Dominó (2):

É formado por dois quadrados dispostos lado a lado. Como não contamos a rotação como sendo outra forma, temos apenas uma forma de dominó.

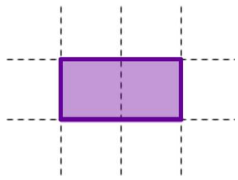

Figura 2.2: Elaborada pelo autor

Triminó (3):

É formando por três quadrados. Neste caso, podemos ter dois triminós distintos.

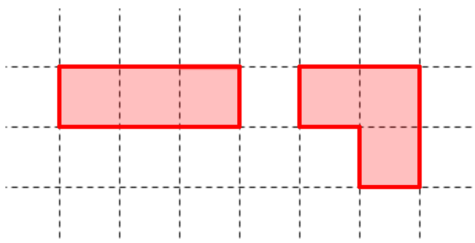

Figura 2.3: Elaborada pelo autor

Tetraminó (4):

É formado por quatro quadrados. Há cinco tetraminós distintos.

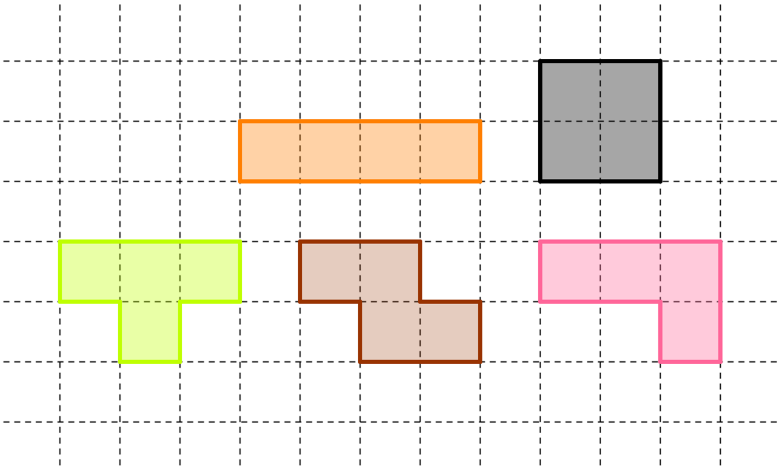

Figura 2.4: Elaborada pelo autor

Pentaminó (5):

É formando por cinco quadrados, totalizando doze possibilidades de pentaminós.

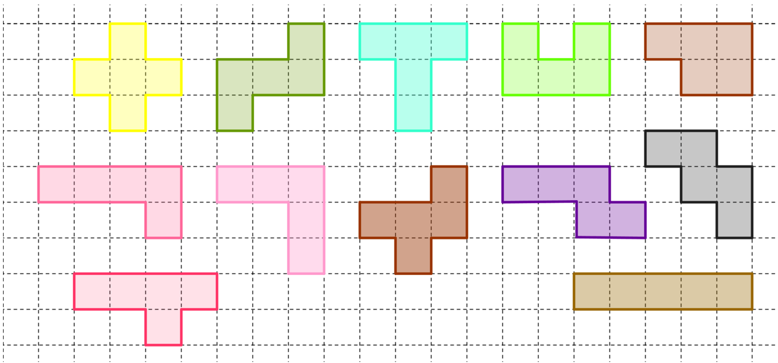

Figura 2.5: Elaborada pelo autor

Hexaminó (6):

É formando por seis quadrados. Existem trinta e cinco hexaminós distintos.

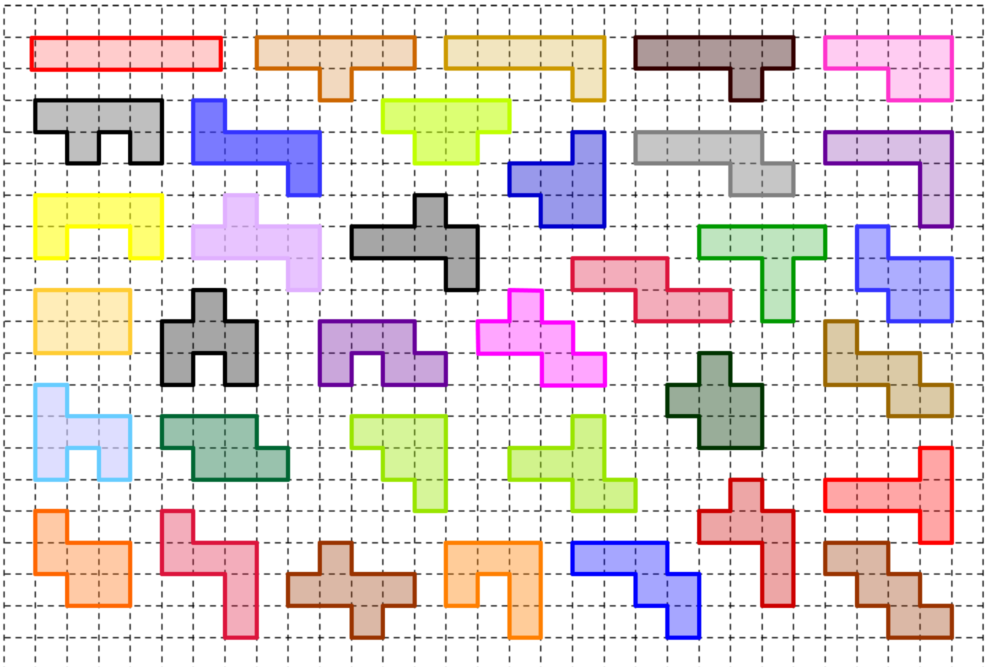

Figura 2.6: Elaborada pelo autor

E assim, sucessivamente, podemos compor os heptaminós, octominós, eneaminós, decaminós ...

2.2 Pentaminós

Sendo a proposta deste trabalho usar os pentaminós como material facilitador no ensino dos conceitos matemáticos de perímetro e área apresentamos aqui uma proposta de nomeção dos pentaminós visando facilitar a comunicação no momento das atividades, estabelecemos uma nomenclatura específica para cada uma das doze peças do pentaminó de acordo com a semelhança com as letras do alfabeto:

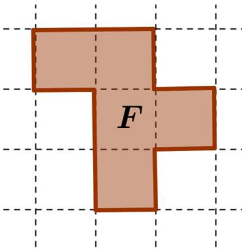

Figura 2.7: F-Pentaminó

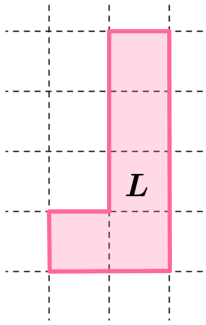

Figura 2.8: L- Pentaminó.

[1]

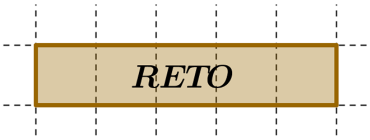

Figura 2.9: Pentaminó Reto

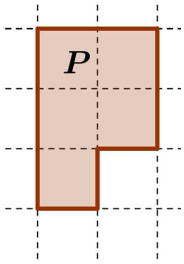

Figura 2.10: P- Pentaminó.

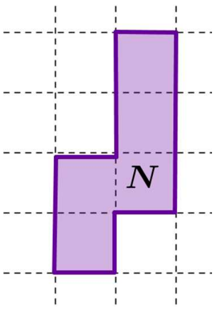

Figura 2.11: N- Pentaminó

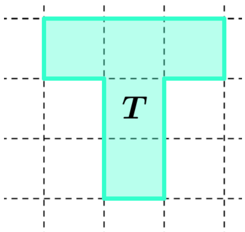

Figura 2.12: T- Pentaminó.

[1]Toda as figuras dessa página foram elaboradas pelo autor desse trabalho

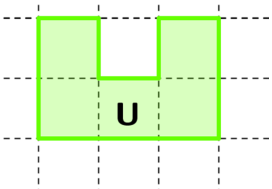

Figura 2.13: U- Pentaminó

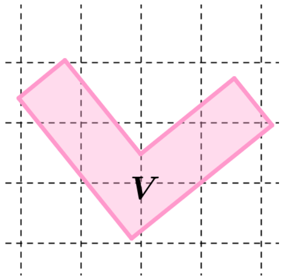

Figura 2.14: V- Pentaminó.

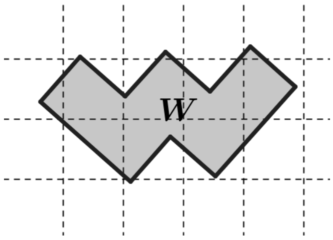

Figura 2.15: W- Pentaminó.

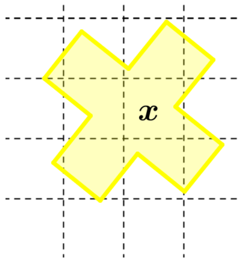

Figura 2.16: X- Pentaminó.

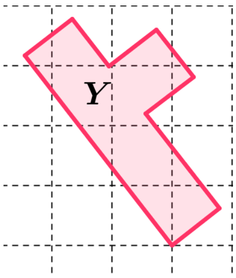

Figura 2.17: Y- Pentaminó.

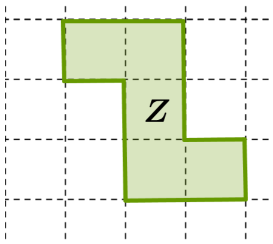

Figura 2.18: Z- Pentaminó.

[2]

[2]Toda as figuras dessa página foram elaboradas pelo autor desse trabalho

Capítulo 3

Atividades com os polimonós

Conforme mencionamos podemos trabalharmos com os poliminós no ambiente escolar como ferramenta didática no ensino e aprendizagem de Matemática com alunos do Ensino Fundamental, e também com os do Ensino Médio, caso o professor considere. O trabalho pertinente algumas considerações com os poliminós são destacados pelo professor Lorenzato, o qual cita que:

> Os Poliminós possibilitam o estudo de questões relacionadas à Geometria, à Aritmética,e à Análise Combinatória. Também desenvolve a percepção espacial, o raciocínio lógico, a generalização e o senso estético. Seu emprego é eficiente na compreensão e na exploração de conceitos de semelhança, simetria, perímetro e área. O material favorece ainda o desenvolvimento dos processos de classificação, ordenação e descoberta de padrões. A construção das diversas formas possíveis para cada tipo de poliminós conduz o aluno de um critério inicial de tentativas aleatórias para um critério. [LORENZATO, 1998 p.53]

Lembremos que o planejamento sempre precede a execução de uma boa aula de Matemática. Assim, antes de executar uma aula usando os poliminós, é indispensável a realização de um planejamento no qual o professor possa:

1– Organizar as etapas das atividade;

2– Verificar o tempo necessário para que o aluno possa pensar e executar os passos da atividade;

3– Identificar e inserir os conceitos matemáticos na atividade obedecendo ao nível cognitivo dos alunos envolvidos;

4– Confeccionar possíveis materiais (impressões e outros);

5– Pensar nas possíveis discurssões com os alunos sobre o conceito de área e perímetro,

dentre outros procedimentos.

O professor também pode, no desenvolvimento das atividades com os poliminós, contemplar outros conceitos matemáticos, com ressaltado por Lorenzato (1998). Ele também não pode esquecer que cada sala de aula tem uma identidade única, assim uma atividade pode ser bem executada numa sala de aula A e não ocorrer tão bem numa sala de aula B. Isso faz parte do processo de ensino.

Diante dessas considerações elaboramos algumas atividades que podem ser desenvolvidas em sala de aula. Essas atividades foram desenvolvidas pelo autor principal deste trabalho a partir de reflexões e estudos realizados e vivenciados no Programa de Bolsa de Iniciação a Docência (PIBID).

3.1 Atividade 1: Confecção e análise dos pentaminós

Tempo sugerido: 90 minutos.

Material: Projetor de multimídia, slides, papel quadriculado, régua, canetas.

Conteúdos a serem explorados: Rotações de figuras; Simetria; Congruência.

Objetivos:

- Confeccionar os petaminós no geogebra;

∘ Analisar se os pentaminó são congruentes a figura obtida após uma rotação de 180º em torno de uma reta;

∘ Analisar as peças dos pentaminós que possuem eixos de simetria.

Roteiro: Com o auxílio de projetor de multimídia e slides, o professor poder iniciar a aula explicando o que são poliminós, detalhando algumas peças como monominó, dominó, triminó e tetraminó. Além disso, questionar se quando uma peça é rotacionado em torno de um ponto ou de uma reta ela gera outra peças? por exemplo: na figura 3.1 e 3.2, as peças A e A' são na verdade uma única?. E as B e B'.

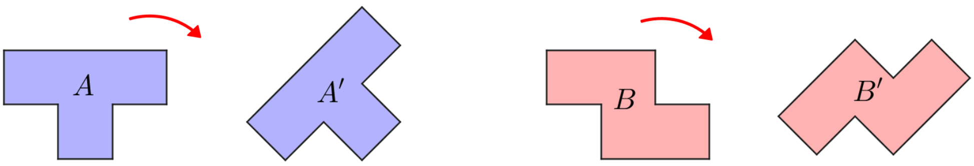

Figura 3.1: Elaborado pelo autor

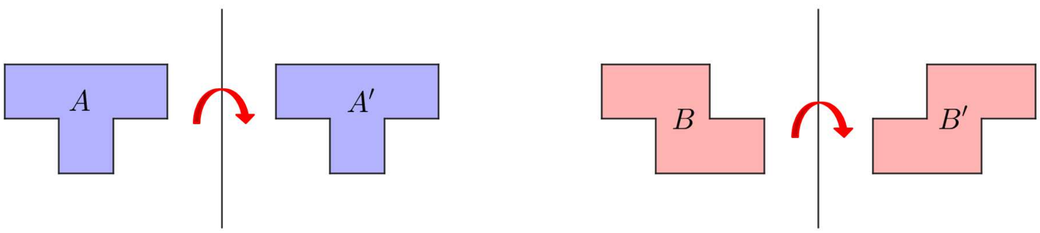

Figura 3.2: Elaborado pelo autor

Vale ressaltar que A e A' são congruentes, independente da rotação feita. Já B e B' são congruentes quando a rotação é em torno de um ponto, mas não são congruentes quando a rotação é feita em torno de uma reta como podemos ver na figura 3.1.

Após as explicações do professor, cada aluno tem o desafio de confeccionar em papel quadriculado ou no geogebra as peças que compõem os pentaminós. É importante que os alunos concluiam quantas são as peças dos pentaminós. Nesse processo, analisar as possíveis variações do formato das peças e as rotações. Assim, o aluno deve apresentar como produto final as doze peças dos pentaminós desenhadas.

Após esta etapa de confecção, o professor pode fazer questionamentos aos alunos quanto a congruência como a figura obtida a partir da rotação de 180º dos pentaminós em torno de uma reta.

O professor pode propor discussões apresentando o conceito de simetria. Ele pode sugerir que os alunos identifiquem os pentaminós que possuem eixo de simetria e trace estas retas.

Como sugestão para melhor organização no processo de aprendizagem, o professor pode fazer uso do quadrado a seguir

Pentaminó	Pentaminó Rotacionado em torno de uma reta	As duas figuras à esquerda são congruentes?	Quantos eixos de simetria este Pentaminó apresenta?
		( ) Sim ( ) Não	( ) 0 ( ) 1 ( ) 2 ( ) 3 ( ) 4
		( ) Sim ( ) Não	( ) 0 ( ) 1 ( ) 2 ( ) 3 ( ) 4
		( ) Sim ( ) Não	( ) 0 ( ) 1 ( ) 2 ( ) 3 ( ) 4
		( ) Sim ( ) Não	( ) 0 ( ) 1 ( ) 2 ( ) 3 ( ) 4

Figura 3.3: Elaborado pelo autor

3.2 Atividade 2: Conceituando perímetro com pentaminós

Tempo sugerido: 45 minutos.

Material: Peças dos Pentaminós, papel quadriculado.

Conteúdos a serem explorados: Perímetro (definição e contagem).

Objetivos:

◦ Conceituar perímetro de figuras planas;

◦ Exemplificar o cálculo de perímetro usando os Pentaminós;

◦ Analisar a variação do perímetro em relação à variação da medida do lado dos quadrados que compõem os Pentaminós;

Roteiro: O professor pode iniciar a aula conversando com os alunos sobre o conceito de perímetro e apresentando a definição de perímetro usando a figura 3.2, onde a região poligonal azul esta traçada sobre uma malha quadricular medindo 1. (considere cada quadrado dessa malha com lado)

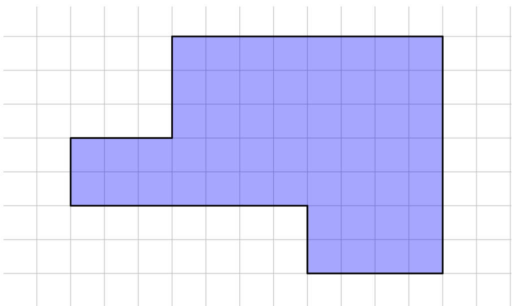

Figura 3.4: Elaborado pelo autor

Contando os lados dos quadrados unitários que formam o contorno da região poligonal azul, obteremos o seu perímetro, que é igual á 36 unidades de comprimento. Para reforçar a ideia inicial de perímetro, pode ser sugerido aos alunos contar o perímetro de cada uma das 12 figuras dos pentaminós, considerando que cada quadrado que compõem os pentaminós tem lado unitário. Para organizar esse processo e possibilitar que os alunos desenvolvam conceitos sobre perímetro, a tabela a seguir pode auxilia-lo:

Pentaminó	Perímetro	Pentaminó	Perímetro
F - Pentaminó		U - Pentaminó	
L - Pentaminó		V - Pentaminó	
Pentaminó Reto		W - Pentaminó	
P - Pentaminó		X - Pentaminó	
N - Pentaminó		Y - Pentaminó	
T - Pentaminó		Z - Pentaminó	

Tabela 3.1: Elaborado pelo autor

Em seguida, o professor pode sugerir aos alunos que construam figuras usando várias peças dos pentaminós e calculem o perímetro de cada uma. Além disso, é interessante que eles façam o esboço dessas figuras em papel quadriculado. O aluno pode compreender que o perímetro é o comprimento do contorno da figura. Como, o exemplo, a figura abaixo:

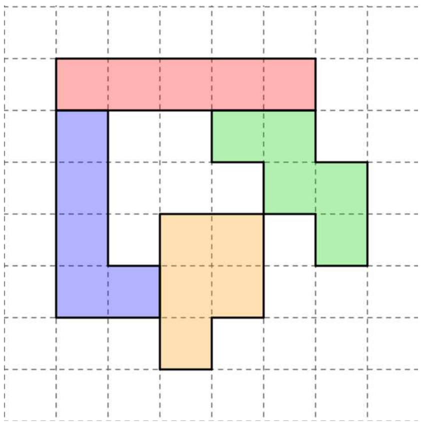

Figura 3.5: Elaborado pelo autor

Neste ponto, o professor pode observar se cada aluno calcula o perímetro corretamente, neste caso sendo 26 unidades de comprimento, ou se ele conta o perímetro como 38 unidades de comprimento. Este segundo resultado pode ser um indicativo de que o aluno está adicionando os lados que formam o espaço no meio da figura ao contorno; assim ele não compreendeu bem o conceito de perímetro. Neste momento o professor deve intervir para que esse equívoco seja superado.

O professor também pode sugerir aos que alunos construam outras figuras formadas com várias peças de pentaminós e calculem o perímetro destas figuras, desta vez, considerando que cada quadrado que compõe os pentaminós tenha lados diferentes de um, por exemplo quatro unidades de comprimento. A sugestão de registrar na tabela as medida dos perímetros mudando o comprimento do quadrado da malha possibilita ao aluno observar que comparando com o pentaminó de quadrados unitários, o perímetro do pentaminó formado por quadrados de lado k é igual ao produto do perímetro do pentaminó de quadrados unitários com p, isto é, neste exemplo $P = 4 \cdot p$.

Pentaminó	Se cada quadrado da malha tem lado igual a 1, qual o perímetro do Pentaminó?	Se cada quadrado da malha tem lado igual a 2, qual o perímetro do Pentaminó?	Se cada quadrado da malha tem lado igual a 3, qual o perímetro do Pentaminó?

Figura 3.6: Elaborado pelo autor

Essa atividade nos remete as consideração de Lorenzato (1998) de que os estudos de poliminós possibilitam o estudo de diversos conceitos matemáticos, como os de álgebra, por exemplo

3.3 Atividade 3: Pentaminós e área de retângulos

Tempo sugerido: 90 minutos.

Material: Peças dos pentaminós.

Conteúdos a serem explorados: Área de figuras formadas por quadrados iguais, área de retângulos.

Objetivos:

- ◦ Conceituar área do retângulo;
- ◦ Exemplificar a contagem de área usando os pentaminós;
- ◦ Analisar a variação da área de uma figura em relação à variação da medida do lado dos quadrados que compõem os Pentaminós.

Roteiro: O professor pode iniciar com uma conversa sobre o conceito de área e na sequência apresentar a definição de unidade de área (quadrado unitário) e apresentar a contagem da área de algumas figuras, como por exemplo:

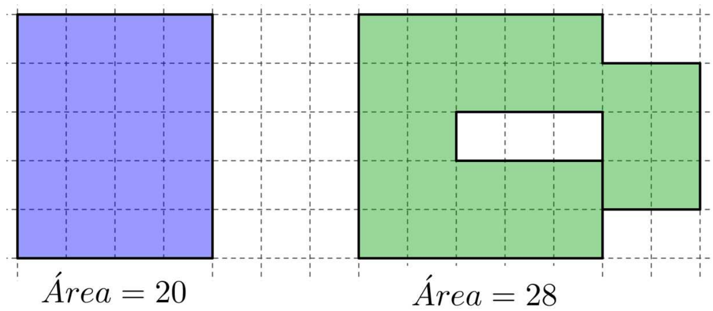

Figura 3.7: Elaborado pelo autor

Para ampliar a ideia do calculo de área de uma figura por contagem de quadrados unitários, apresentamos alguns desafios envolvendo área e pentaminós.O professor pode pedir que cada aluno forme uma figura usando os doze pentaminós e diga qual a área desta figura, em seguida, perguntar se a área muda caso ele forme outra figura usando as mesmas peças.

Para generalizarmos a área de um retângulo como o produto da base pela altura,a sugestão é que professor peça aos alunos que construam os três retângulos 3.8 e preencham a tabela, 3.9: dimensões do retângulo seria interessante se os alunos percebessem a generalização, antes mesmo do professor apresenta a fórmula.

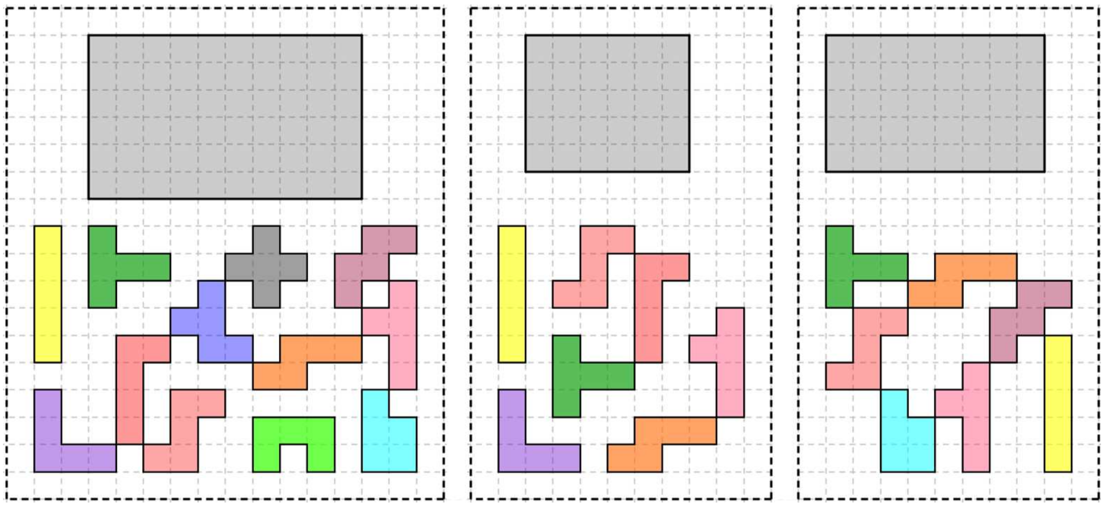

Figura 3.8: Elaborado pelo autor

Dimensões do retângulo		Área
Comprimento	Largura	
10	6	
6	5	
8	5	

Figura 3.9: Elaborado pelo autor

Nessa atividade também, pode-se trabalhar situações de calcular a área de figuras em malha quadriculada, mas onde os quadrados não sejam unitários. Por exemplo, pedir ao aluno para analisar os casos abaixo e intervir, para que ele faça algumas generalização.

Situação 1: Qual a área de das peças dos pentaminós se considerarmos que cada quadrado da malha tem lado igual a 2? E se for igual a 3? E se o lado for igual a $\frac{1}{2}$? (veja figura 3.10)

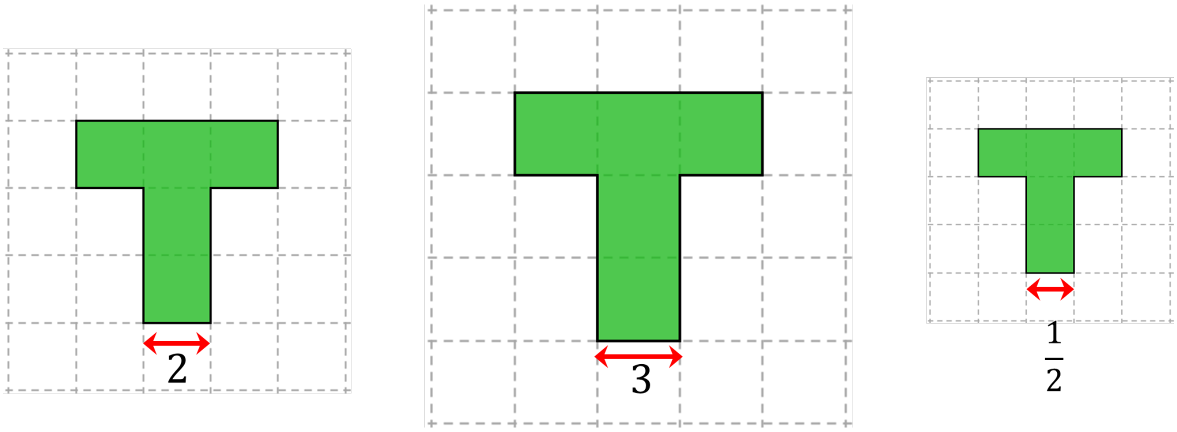

Figura 3.10: Elaborado pelo autor

Situação 2: Monte uma figura usando as peças dos pentaminós 3.11 e diga qual a sua área, considerando que cada lado do quadrado da malha tem lado igual a 4.

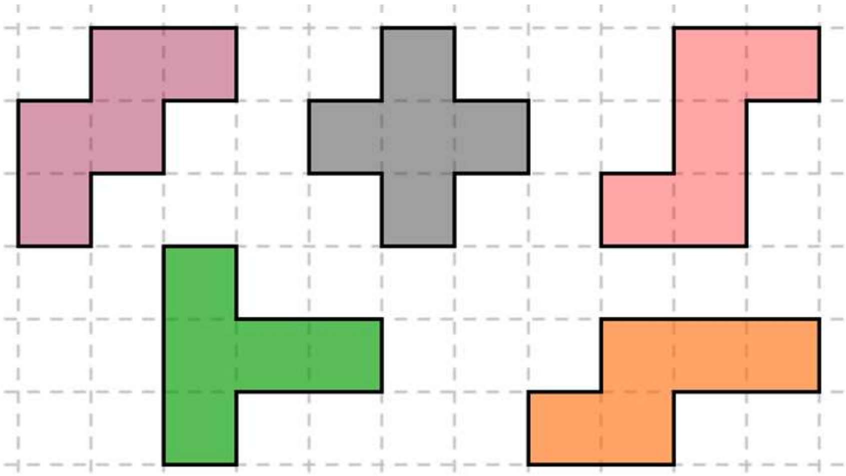

Figura 3.11: Elaborado pelo autor

Um observação interessante é a relação entre a medida do lado dos quadrados na malha e área de um pentaminó quando comparamos área do pentaminó de quadrados unitários e a área do pentaminó formado por quadrados de lados K .Um fato interessante que o professor deve observar é se o aluno não esta compreendendo de maneira equivocada essa relação, isto é, entendendo que a área de lado k é igual ao produto da área do pentaminó de quadrados unitários.

Para promover uma aula mais dinâmica pode-se também propor a interação entre os alunos quem consegue preencher os quadrados brancos de cada plataforma abaixo, usando as doze peças dos pentaminós e sem sobrepô-las:

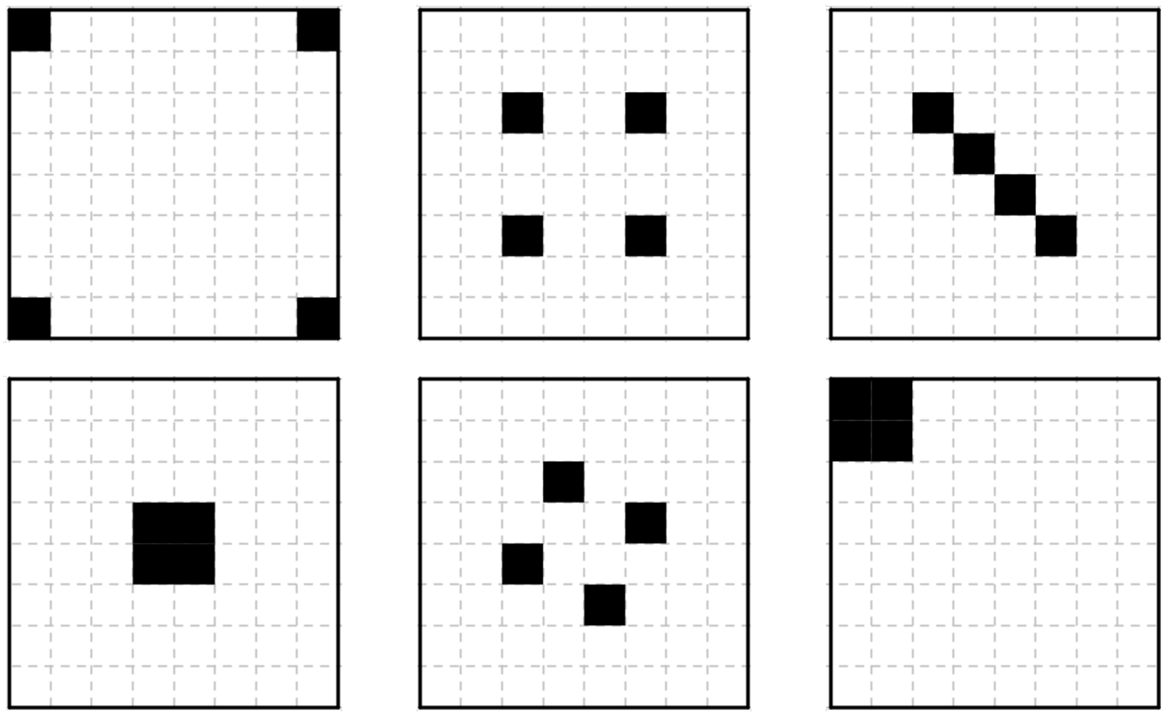

Figura 3.12: Elaborado pelo autor

3.4 Atividade 4: Semelhança

Tempo sugerido: 90 minutos.

Material: Peças dos Pentaminós.

Conteúdos a serem explorados: Semelhança de figuras planas, ampliação e redução de figuras.

Objetivos:

- ∘ Definir e exemplificar semelhança de figuras;
- ∘ Ampliar e reduzir figuras com os pentaminós (duplicação e triplicação).

Roteiro: Essa atividade é apenas uma introdução à ideia de ampliação e redução de figuras e por envolver a resolução de quebra-cabeças pode ser considerada lúdica.

Para explorar o conceito de semelhança, o professor pode apresentar a ideia de ampliar e reduzir uma figura proporcionalmente. Além disso, o significado da constante de proporcionalidade (dobrar, triplicar, etc.). Os exemplos abaixo figura 3.13 onde expresso uma ampliação (ou redução) com constante de proporcionalidade igual a 2 (ou $\frac{1}{2}$, no caso da redução).

Na figura 3.14, as imagens não são semelhantes, pois a razão entre os lados correspondentes não é constante. Esta ideia é a principal que o aluno precisa compreender sobre semelhança, ou seja, só há semelhança quando se mantém de proporcionalidade entre os lados correspondentes é constante; caso contrário, não há semelhança.

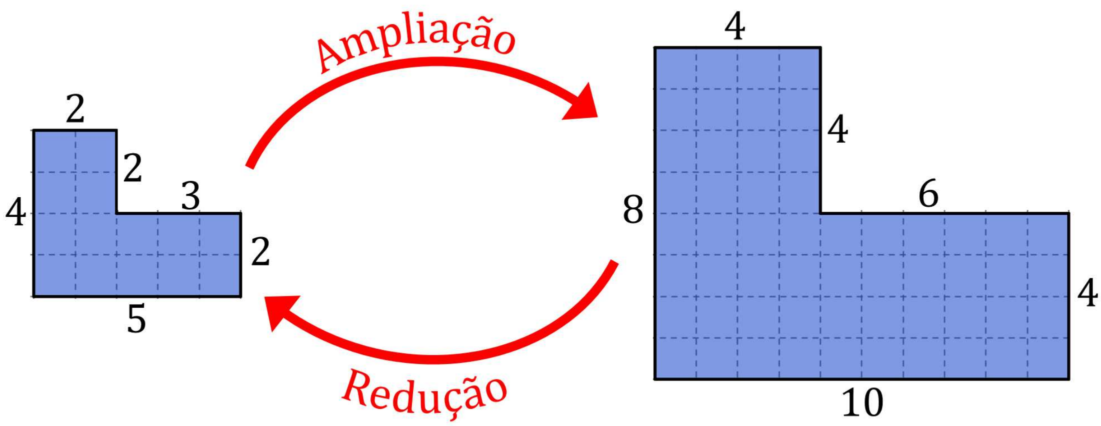

Figura 3.13: Elaborado pelo autor

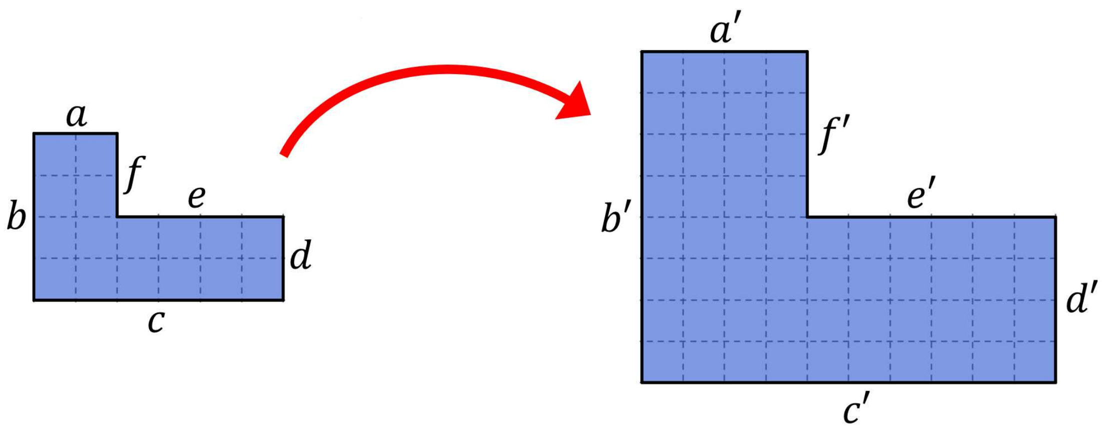

Figura 3.14: Elaborado pelo autor

As imagens da figura 3.14 não são semelhantes, pois $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{d}{d'} = \frac{f}{f'} = \frac{1}{2}$, $\frac{c}{c'} = \frac{3}{5}$ e $\frac{e}{e'} = \frac{2}{3}$, isto é, a razão entre os lados correspondentes não é constante.

A partir disso, o professor pode sugerir aos alunos que resolvam os desafios lúdicos apresentado a seguir onde há duplicação e triplicação de figuras:

Desafio 1: Construir o T usando os Pentaminós Z, V, P, *Reto*.

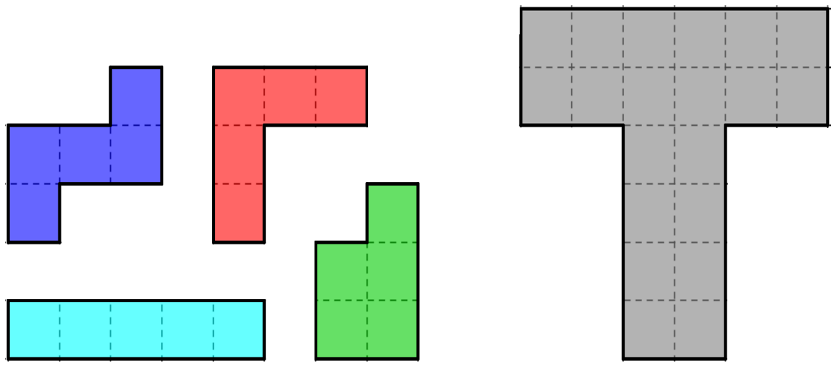

Figura 3.15: Elaborado pelo autor

Desafio 2: Construir o T usando os Pentaminós W, U, N, X, L, Y, V, P, *Reto*.

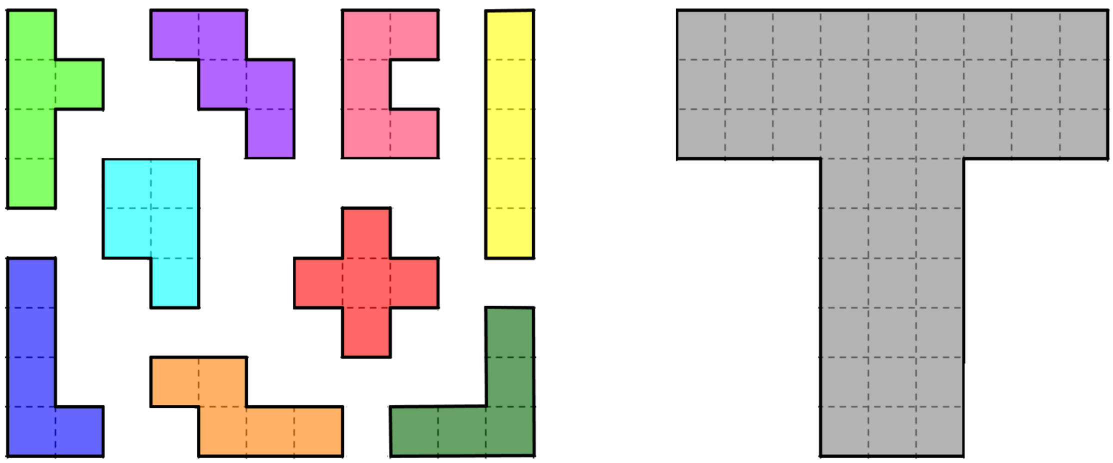

Figura 3.16: Elaborado pelo autor

Desafio 3: Construir o U usando os Pentaminós L, N, P, V.

Desafio 4: Construir o P usando os Pentaminós Z, W, U, L, T, F, Y, N *Reto*.

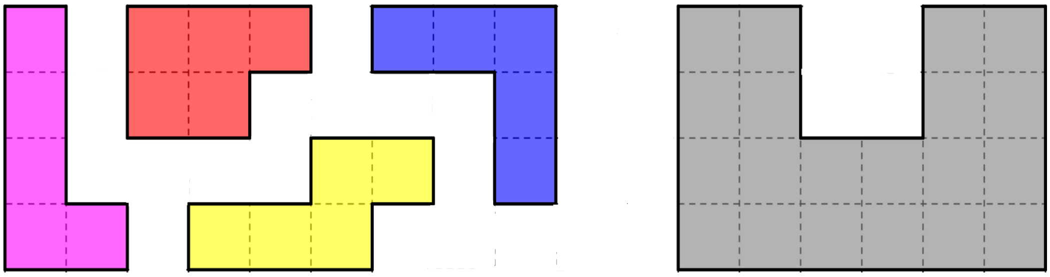

Figura 3.17: Elaborado pelo autor

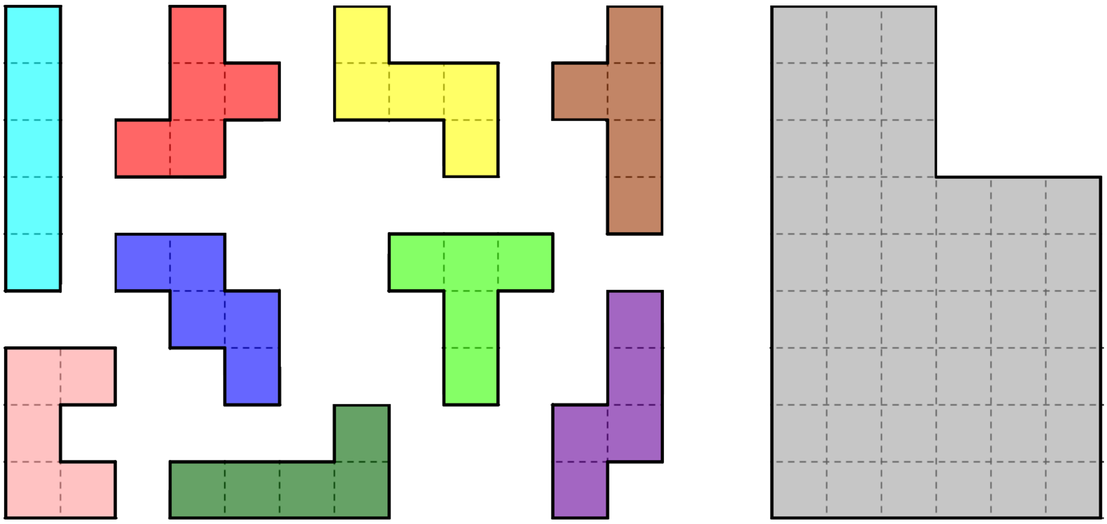

Figura 3.18: Elaborado pelo autor

Outra possibilidade a partir desses desafios é sugerir que os alunos investiguem se é possível duplicar ou triplicar outras peças dos pentaminós.

Capítulo 4

A Confecção dos Pentaminós no Geogebra

4.1 O Geogebra

Todas as atividades apresentadas anteriormente podem ser desenvolvido com o software Geogebra que é um programa livre e de fácil acesso, desenvolvido por *Markus Hohenwarter*, docente da Universidade de Salzburg, disponível gratuitamente no site www.geogebra.at. Este software reuni os conteúdos e conceitos da Geometria, Álgebra e Cálculo e dinamizando o ensino de Matemática nos diferentes anos e níveis de ensino e pode ser utilizado para a confecção dos poliminós.

4.2 A Confecção dos Pentaminós

Na sequência apresentamos um tutorial para confecção dos pentaminós no geogebra. Destacamos que todas as figuras apresentadas foram elaborada pelo autor desse trabalho.

1 - Etapa

Abrir o programa Geogebra.

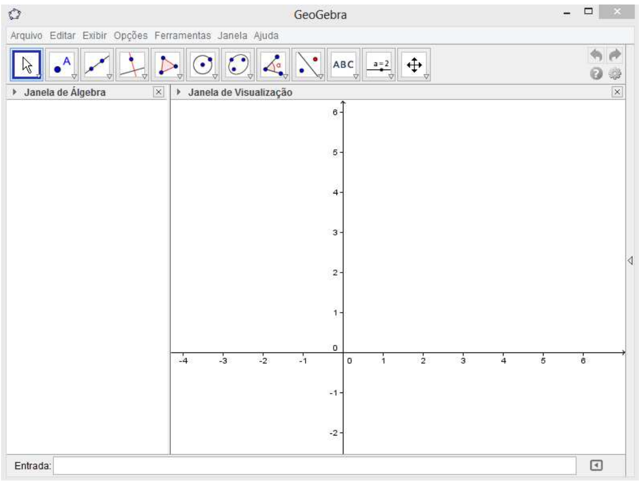

Figura 4.1: Elaborado pelo autor

2 - Etapa

Feche a janela algébrica como na figura 2.

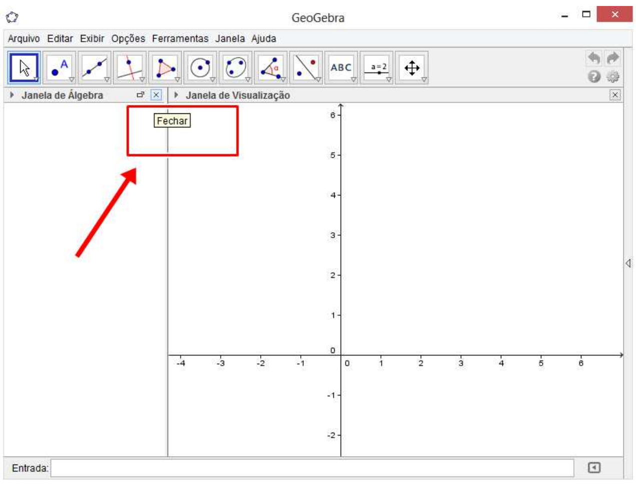

Figura 4.2: Elaborado pelo autor

3 - Etapa

Com o cursor vá em exibir ou esconder os eixos, de acordo com as figuras 4.3 e 4.4, clique esconder os eixos.

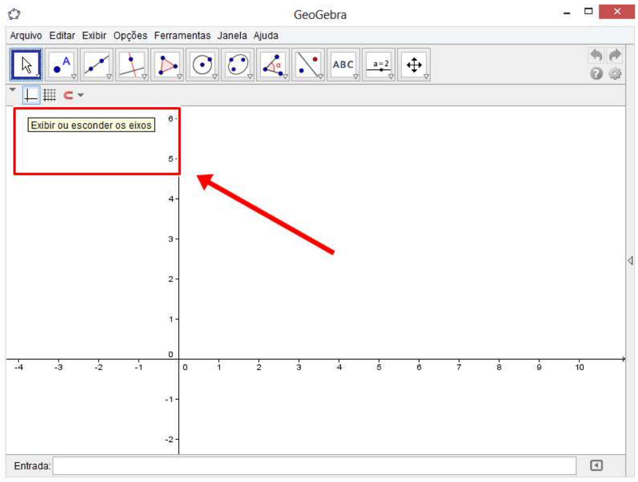

Figura 4.3: Elaborado pelo autor

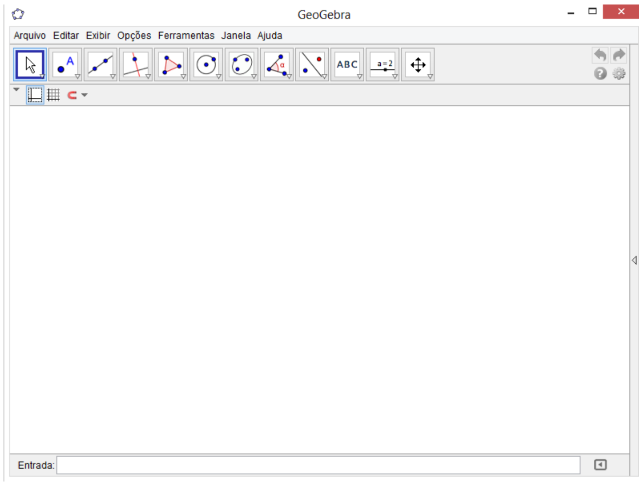

Figura 4.4: Elaborado pelo autor

4 - Etapa

Coloque em exibir malha de acordo com as figuras 4.5 e 4.6.

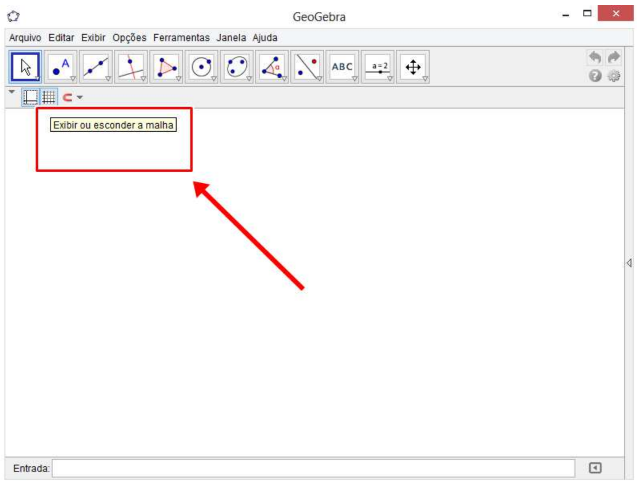

Figura 4.5: Elaborado pelo autor

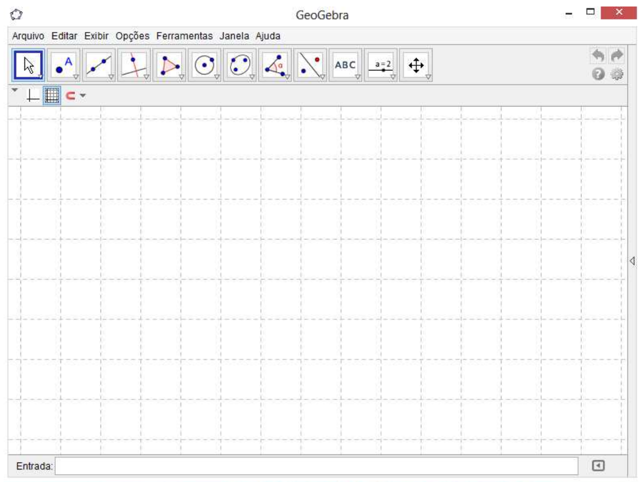

Figura 4.6: Elaborado pelo autor

5 - Etapa

Em opções, vá em pontos sobre a malha e fixe a malha de acordo com a figura 4.7.

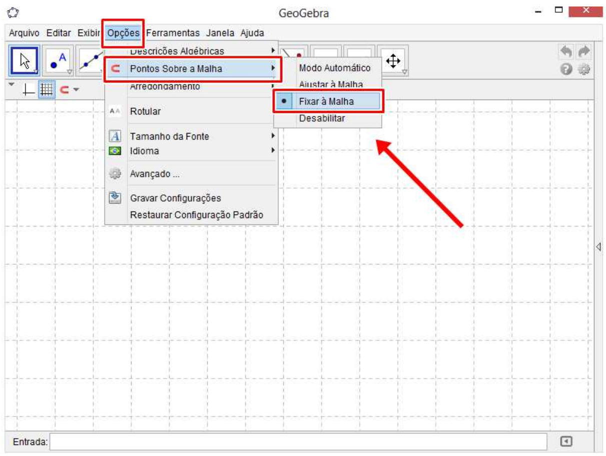

Figura 4.7: Elaborado pelo autor

6 - Etapa

Escolha opção, rotular e click em modo automático, de acordo com a imagem 4.8.

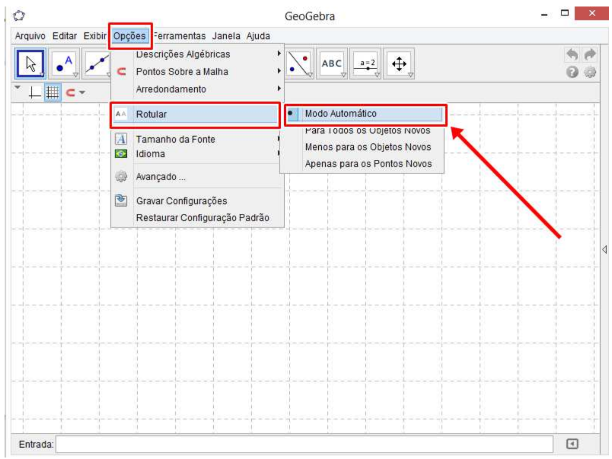

Figura 4.8: Elaborado pelo autor

7 - Etapa

Em polígono, selecione o polígono rígido e crie as peças dos pentaminós, como nas figuras 4.9 e 4.10. Depois das peças criadas, coloque em exibir malha de acordo com as figuras 4.5 e 4.6.

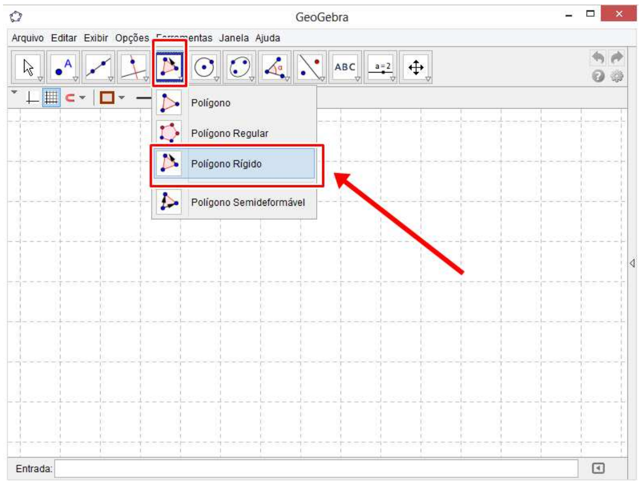

Figura 4.9: Elaborado pelo autor

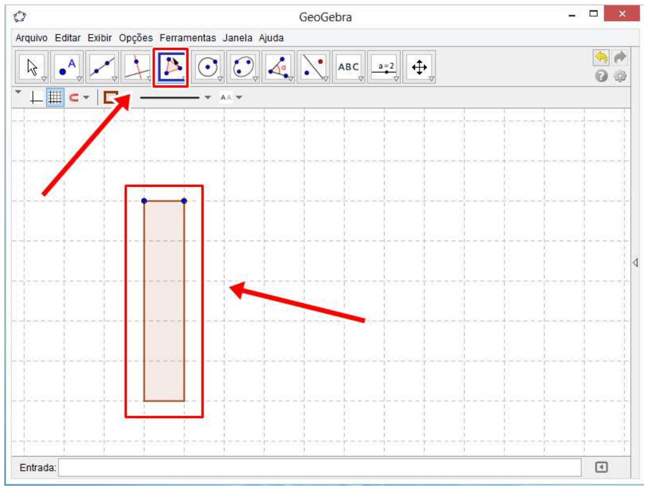

Figura 4.10: Elaborado pelo autor

8 - Etapa

Como o mouse, click em cima da peças criadas e em propriedades da imagem.

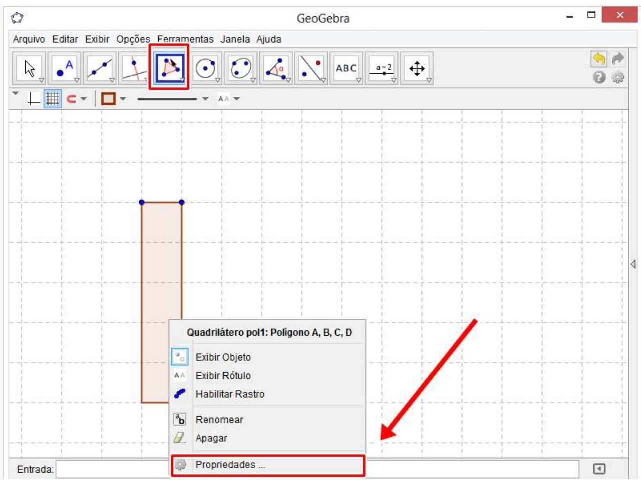

Figura 4.11: Elaborado pelo autor

9 - Etapa

Em propriedades básicas desmarque a opção **exibir objeto**.

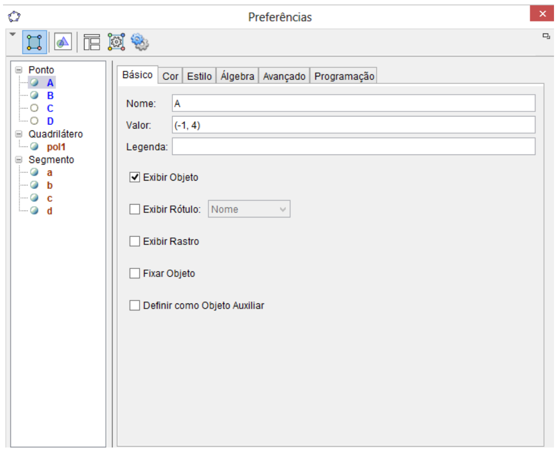

Figura 4.12: Elaborado pelo autor

10 - Etapa

Com curso do mouse marque o ponto de Rotação em torno de um ponto.

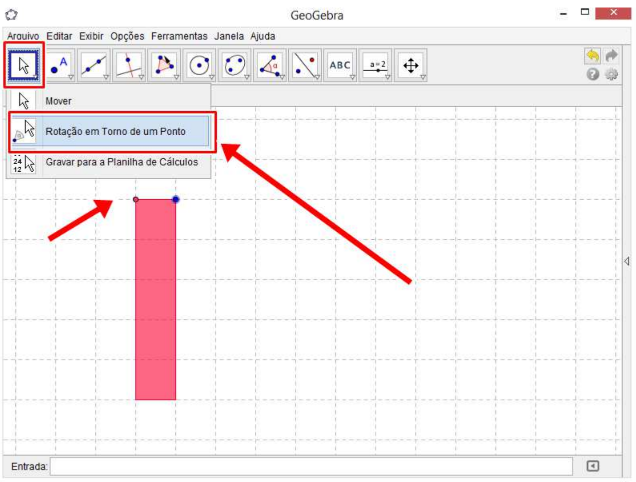

Figura 4.13: Elaborado pelo autor

11 - Etapa

Ao selecionar **mover** clique em cima do ponto e é só rotacionar.

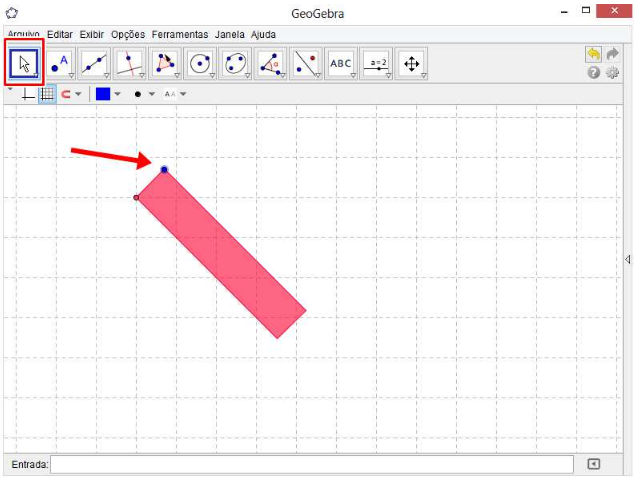

Figura 4.14: Elaborado pelo autor

12 - Etapa

Em **Estilo dos pontos** podemos escolher os melhores pontos para as peças dos pentaminós.

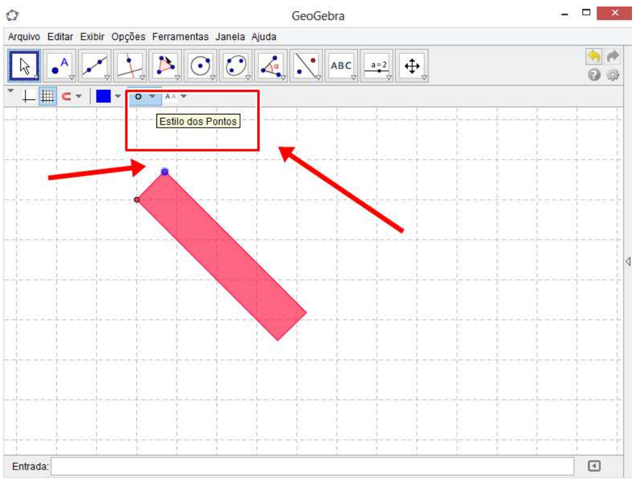

Figura 4.15: Elaborado pelo autor

Capítulo 5

Definições e Conceitos Matemáticos

Levando em conta que o ensino da matemática não é tarefa fácil, pois mesmo dinamizando o processo o professor não pode deixar de lado o rigor dos conceitos matemáticos. Dessas forma apresentamos aqui alguns conceitos e definições abordados no decorrer deste trabalho baseando-se em Dolce e Pompeo (2005), Lima(2009) e Rezendes (2008),

5.1 Área

A unidade de área

Adotamos como **unidade de área** o quadrado cujo lado mede uma unidade de comprimento, que chamaremos de quadrado unitário.

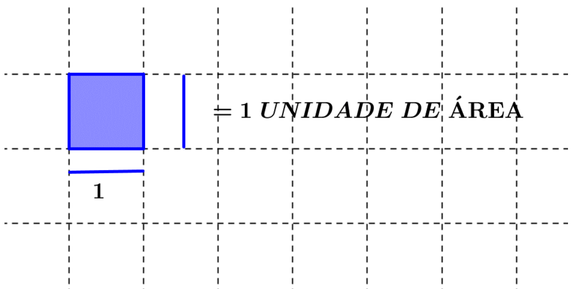

Figura 5.1: Elaborado pelo autor

Se o lado do quadrado for $1cm$, então, a unidade de área será chamada de **centímetro quadrado** e representada por cm^2. Naturalmente que para cada unidade de comprimento existe uma unidade de área correspondente. Assim, o metro quadrado (m^2), o milímetro quadrado (mm^2) e o quilômetro quadrado (km^2) que são unidades de área utilizadas quando forem conveniente para figuras que se deseja medir.

Podemos dizer assim, que área de uma figura exprime quantas vezes essa figura contém a unidade de área. Isto é possível de perceber, por exemplo, quando desejamos conhecer a área de uma retângulo cujos lados medem $5cm$ e $3cm$, por exemplo

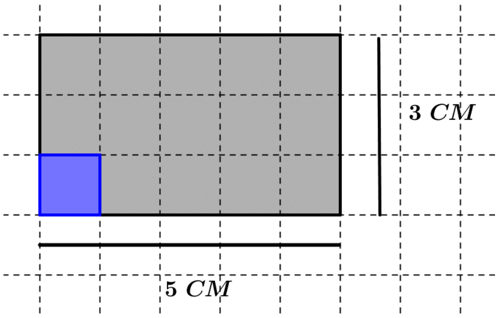

Figura 5.2: Elaborado pelo autor

Neste caso, medindo $5cm$ e $3cm$ os lados do retângulo, a unidade de área cabe 15 vezes no retângulo e, por isso, sua área é de 15 centímetros quadrados ($15cm^2$). Dessa forma, é possível observar que se as medidas dos lados de um retângulo são números inteiros a e b, a sua área, denotada por S, é o produto desses números:

$$S = ab$$

Em particular – sendo o quadrado um retângulo de lados iguais – se a medida do lado de um quadrado é um número inteiro n, então sua área é igual a n^2.

$$Area = n^2$$

Área de superfícies planas

Definição 5.1. *Área de uma superfície limitada é um número real positivo associado à superfície de forma tal que:*

1. *Às superfícies equivalentes estão associada áreas iguais (números iguais) e reciprocamente:*

$$A \approx B \Leftrightarrow (\text{Área de } A = \text{Área de } B)$$

2. A uma soma de superfícies está associada uma área (número) que é a soma das áreas das superfícies parcelas:

$$(C = A + B) \Rightarrow (\acute{A}rea\ de\ C = \acute{A}rea\ de\ A + \acute{A}rea\ de\ B)$$

3. Se uma soma superfície está contida em outra, então sua área é menor (ou igual) que a área da outra:

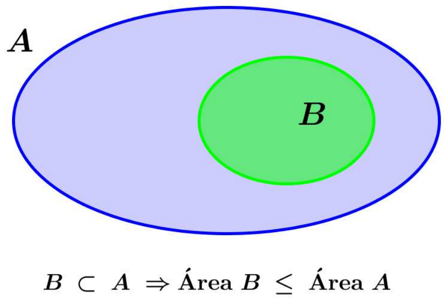

Figura 5.3: Elaborado pelo autor

Razão entre retângulos

Teorema 5.1. *A razão entre dois retângulos de bases congruentes (ou alturas congruentes) é igual à razão entre suas alturas (ou bases).*

Demonstração: *O teorema consiste em mostrar que:*

$$\begin{array}{ccc} \textit{Hipótese} & & \textit{Tese} \\ \begin{cases} R_1(b, h_1) \\ R_2(b, h_2) \end{cases} & \Longrightarrow & \dfrac{R_1}{R_2} = \dfrac{h_1}{h_2}. \end{array}$$

1º caso: h_1 e h_2 são comensuráveis

Sendo h_1 e h_2 comensuráveis, então existe um submúltiplo de h_1 e de h_2, isto é,

$$\begin{cases} h_1 = p.x \\ h_2 = q.x \end{cases} \overset{\div}{\Longrightarrow} \frac{h_1}{h_2} = \frac{p}{q} \tag{5.1}$$

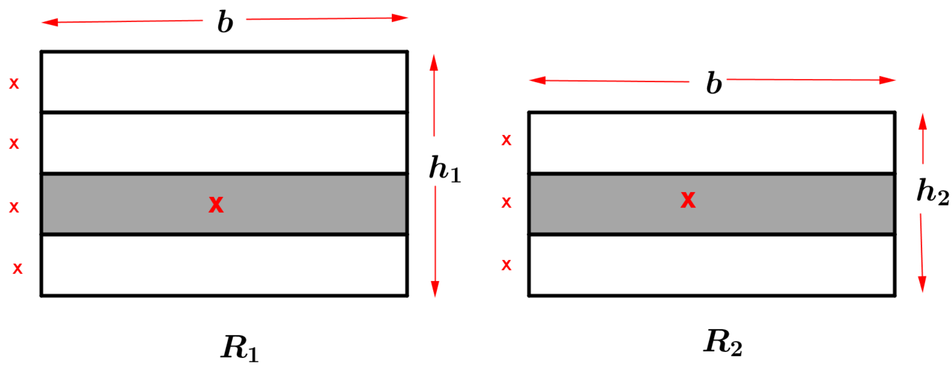

Figura 5.4: Elaborado pelo autor

Construindo os retângulos $X(b,x)$

$$\begin{cases} R_1 = p.X \\ R_2 = q.X \end{cases} \overset{\div}{\Longrightarrow} \frac{R_1}{R_2} = \frac{p}{q} \tag{5.2}$$

Pelas igualdades em 5.1 e 5.2, concluímos que

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{h_1}{h_2}\ .$$

2º caso: h_1 e h_2 são incomensuráveis

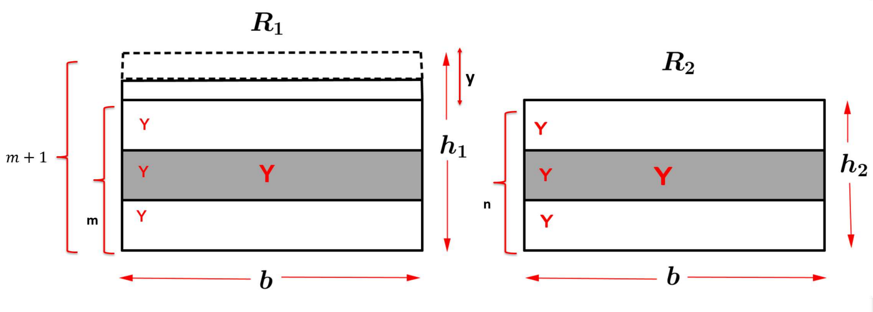

Figura 5.5: Elaborado pelo autor

Sendo h_1 e h_2 incomensuráveis, então não existe segmento submúltiplo comum de h_1 e h_2.

Tomemos um segmento y submúltiplo de h_2 (y "cabe" um certo número inteiro n de vezes em h_2, isto é, $h_2 = ny$).

Por serem h_1 e h_2 incomensuráveis, marcando sucessivamente y em h_1, temos que, para um certo número inteiro m de vezes:

$$m \; < \; h_1 \; < \; (m+1)\; y$$

Operando com as relações acima, vem:

$$\begin{cases} m.y < h_1 < (m+1).y \\ \qquad n.y = h_2 = n.y \end{cases} \overset{\div}{\Longrightarrow} \frac{m}{n} < = \frac{h_1}{h_2} < \frac{m+1}{n} \tag{5.3}$$

Construindo os retângulos $Y(b, y)$ temos:

$$\begin{cases} m.Y < R_1 < (m+1).Y \\ \qquad n.Y = R_2 = n.Y \end{cases} \overset{\div}{\Longrightarrow} \frac{m}{n} < = \frac{R_1}{R_2} < \frac{m+1}{n} \tag{5.4}$$

Ora, sendo y submúltiplo de h_2, pode variar; dividindo y aumentamos n e nestas condições:

$$\frac{m}{n} \; e \; \frac{m+1}{n}$$

formam um par de classe contíguas que definem um único número real que é $\frac{h_1}{h_2}$ pela expressão 5.3 e é $\frac{R_1}{R_2}$ pela expressão 5.4.

Como esse número é único, então:

$$\frac{R_1}{R_2} \; = \; \frac{h_1}{h_2}$$

□

Teorema 5.2. *A razão entre dois retângulos quaisquer é igual ao produto da razão entre bases pela razão entre alturas.*

Demonstração: Queremos mostrar que

$$\begin{array}{ccc} \textit{Hipótese} & & \textit{Tese} \\ \begin{cases} R_1(b_1, h_1) \\ R_2(b_2, h_2) \end{cases} & \Longrightarrow & \left\{ \frac{R_1}{R_2} = \frac{b_1}{b_2} \cdot \frac{h_1}{h_2} \right. \end{array}$$

Construamos um retângulo auxiliar $R(b_1, h_2)$. Aplicando duas vezes o teorema 5.1, vem

$$\begin{cases} \frac{R_1}{R} = \frac{h_1}{h_2} \\ \frac{R}{R_2} = \frac{b_1}{b_2} \end{cases} \overset{multiplicando}{\Longrightarrow} \frac{R_1}{R_2} = \frac{b_1}{b_2} \; \cdot \; \frac{h_1}{h_2}.$$

□

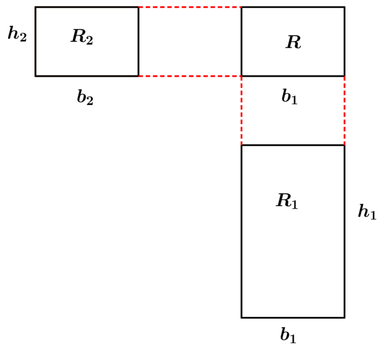

Figura 5.6: Elaborado pelo autor

Áreas de Polígonos

A palavra Polígono é oriunda do grego e significa: Polígono = Poli (muitos) + gono (ângulos). Os Polígonos são figuras em que sua região plana é fechada por segmentos de retas não colineares, o número de lados de um polígono coincide com o número de ângulos.

Retângulo

Dado o retângulo $R(b,h)$ e fixado o quadrado $Q(1,1)$ como unitário, temos:

Área do retângulo:

$$R(b,h) = A_R = \frac{R(B,h)}{Q(1,1)}$$

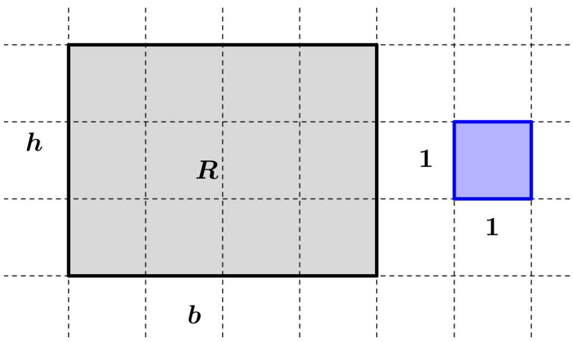

Figura 5.7: Elaborado pelo autor

Pelo teorema 5.1 temos,

$$R(b,h) = A_R = \frac{R(b,h)}{Q(1,1)} = \frac{b}{1}.\frac{h}{1} \Rightarrow A_R = (medida\ de\ b)\ \cdot (medida\ de\ h)$$

que será representado simplesmente por

$$A_R = b \cdot h$$

Quadrado

Dado um quadrado de lado a $Q(a, a)$, temos que:

$$A_Q = a.a \Rightarrow A_Q = a^2$$

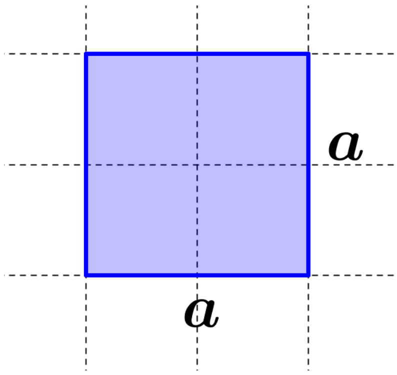

Figura 5.8: Elaborado pelo autor

O quadrado é um retângulo de lados iguais.

5.2 Perímetro

Perímetro é o tamanho do contorno de uma figura plana para obtermos o número real como sendo a soma dos comprimentos das medidas dos lados que formam o contorno desta figura.

Exemplo 5.1. *O perímetro deste pentágono é:*

$$3cm + 3cm + 2cm + 2cm + 2cm = 12cm$$

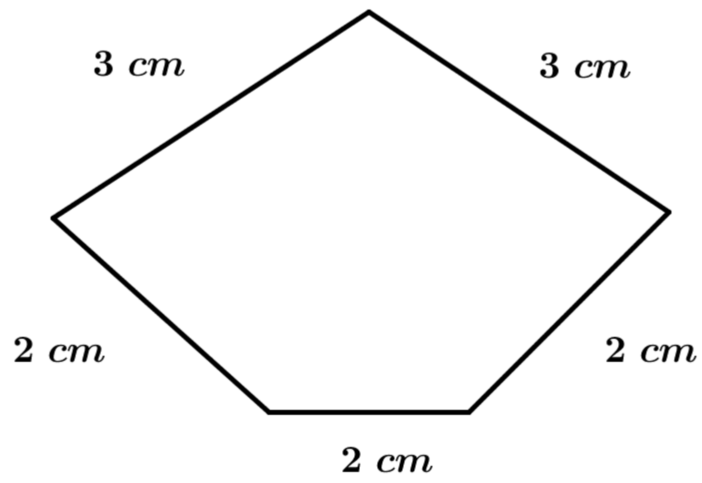

Figura 5.9: Elaborado pelo autor

5.3 Semelhança

Seja F e F' figuras, do plano ou do espaço, e r um número real positivo. Diz-se que F e F' são semelhantes, com razão de semelhança r, quando existe uma correspondência biunívoca $\sigma : F \to F'$, entre os pontos de F e os pontos de F', com a seguinte propriedades:

Se X, Y são pontos quaisquer de F e $X' = \sigma(X),\ Y' = \sigma(Y)$ são seus correspondestes em F' então $\overline{X'Y'} = r\ .\ \overline{XY}$.

A correspondência biunívoca $\sigma : F \to F'$, com esta propriedade de multiplicar as distância pelo fator constante r, chama-se uma semelhança de razão r entre F e F'. Se $X' = \sigma(X)$ diz-se que os pontos X e X' são homólogos.

Evidentemente, toda figura é semelhante a si própria, pois a função identidade $\sigma : F \to F'$ é uma semelhança de razão 1. Isto é, semelhança entre figuras possui a propriedade reflexiva.

Também, se F é semelhante a F', então F é semelhante a F pois, dada uma semelhança $\sigma : F \to F'$ de razão r, a função inversa $\sigma^{-1} : F \to F'$ é uma semelhança de razão $1/r$

Tem-se ainda a propriedade da transitividade: se F é semelhante a F' e F' é

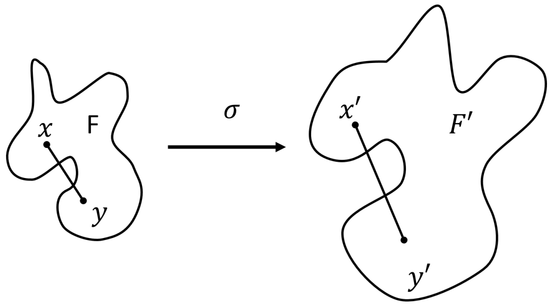

Figura 5.10: Elaborado pelo autor

semelhante a F'', então F é semelhante a F''. Com efeito, se $\sigma : F \to F'$ e $\sigma : F' \to F'$ são semelhanças de razões r e r' respectivamente, então a função composta $\sigma \cdot \sigma : F' \to F''$ é uma semelhança de razão $r.r'$.

Uma semelhança de razão 1 chama-se uma isometria. Portanto, uma isometria $\sigma : F' \to F'$ é uma correspondência biunívoca tal que para quaisquer pontos X, Y, a distância de $X' = \sigma(X)$ a $Y' = \sigma(Y)$ é igual à distância de XaY.

Quando existe uma isometria entre as figuras F e F', dizemos que F e F' são **congruentes**.

Exemplo 5.2. *Um exemplo simples de figuras semelhantes é dado por dois segmentos de retas arbitrárias AB e CD. Se $\overline{CD} = r \cdot \overline{AB}$, podemos definir uma semelhança $\sigma : AB \to CD$ de razão r. Fazendo corresponder a cada ponto X do segmento AB o ponto A' de CD tal que $\overline{CX'} = r \cdot \overline{AX}$.*

Para mostrar que σ é realmente uma semelhança, tomemos arbitrariamente os pontos X, Y em AB. Suponhamos a notação escolhida de modo que X esteja A e Y. Então, pela definição de σ, segue-se que X' está entre C e Y'. Logo,

$$\overline{X'Y'} = \overline{CY'} - \overline{CX'} = r \cdot \overline{AY} - r \cdot \overline{AX} = r \cdot (\overline{AY} - \overline{AX}) = r \cdot \overline{XY}$$

Exemplo 5.3. *Outro exemplo simples de semelhança pode ser dado mostrando-se que duas semi-retas quaisquer S e S' são figuras semelhantes. Como efeito, seja O e O' as origens de S e S' respectivamente. Dado qualquer número positivo r, definiremos uma semelhança $\sigma : S \to S'$, de razão r, fazendo corresponder a cada pontos X em S o ponto $X' = \sigma(X) em S'$ tal que $\overline{O'X'} = r \cdot \overline{OX}$. A verificação de que σ é uma semelhança se faz como acima. Analogamente, duas restas quaisquer são semelhantes.*

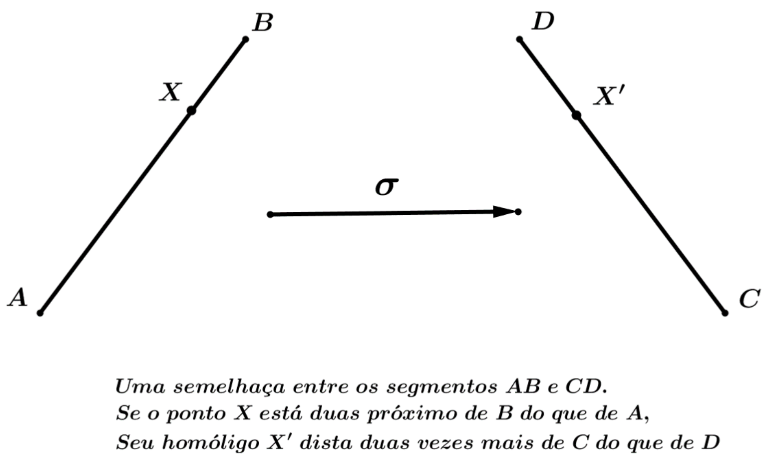

Figura 5.11: Elaborado pelo autor

Propriedades das Semelhanças.

Lema 5.1. *Toda semelhança transforma pontos colineares em pontos colineares.*

Demonstração:

Seja $\sigma : F \to F'$ uma semelhança de razão r. Dados três pontos A, B, C em F tais que C pertence ao segmento de reta AB, mostraremos que $C' = \sigma(C)$ pertence ao segmento $A'B'$, onde $A' = \sigma(A) e B' = \sigma(B)$. Com efeito, temos $\overline{AC} + \overline{CB} = \overline{AB}$. Logo,

$$\overline{A'C'} + \overline{C'B'} = r \cdot \overline{CB} = r \cdot (\overline{AC} + \overline{CB}) = r \cdot \overline{AB} = \overline{A'B'}$$

e daí concluímos que C' pertence a $A'B'$.

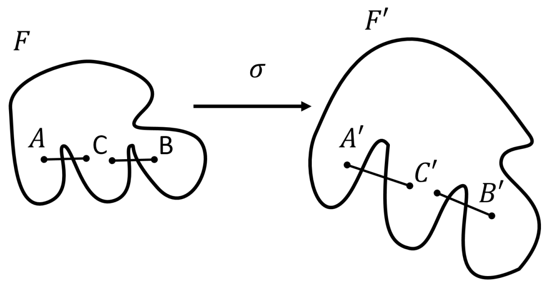

Figura 5.12: Elaborado pelo autor

□

Teorema 5.3. *Uma semelhança $\sigma : F \to F'$, de razão r, transforma:*

1)Todo segmento de reta contido em F num segmento de reta contido em F'

2) Um círculo de raio α contido em F num círculo de raio $r \cdot \alpha$ contido em F'

3) Pontos interiores de F em pontos interiores de F'

4) Pontos do contorno de F em pontos do contorno de F'.

5) Vértices de F em vértices de F' (se F e F' forem polígonos).

Demonstração:

1) Dado o segmento de reta AB contido em F, seja $A' = \sigma(A)$ e $B' = \sigma(B)$. Para todo ponto C em AB, seu homólogo $C' = \sigma(C)$ pertence a $A'B'$ em virtude do lema 5.1. Reciprocamente, dado qualquer ponto C' em $A'B'$, temos $C' = \sigma(C)$, onde $C = \sigma^-1(C')$. Como σ^{-1} é uma semelhança, segue-se do lema 5.1 que C pertence a AB. Assim, a semelhança σ estabelece uma correspondência biunívoca entre os pontos dos segmentos de reta AB e $A'B'$.

2) O círculo de centro O e raio α, suposto contido em F, é a reunião dos segmentos de reta OX tais que $\overline{OX} = \alpha$. Sua imagem por σ é a reunião dos segmentos $O'X'$, como $O'X'$, com $O' = \sigma(O)$, tais que $\overline{O'X'} = r \cdot \alpha$, portanto é o círculo de centro O' e raio $r \cdot \alpha$.

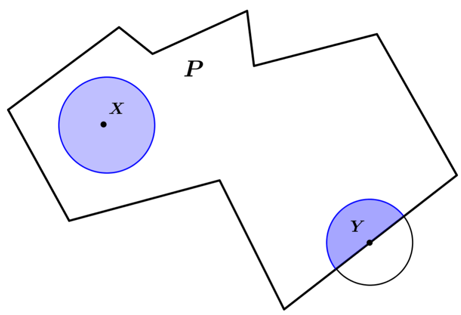

Figura 5.13: Elaborado pelo autor

3) Um ponto X dize-se interior à figura F quando é centro de algum círculo inteiramente contido em F. Seu homólogo $X' = \sigma(X)$ é, pelo que vimos acima, o centro de um círculo de raio $r \cdot \alpha$ contido em F'. Portanto, X' é ponto interior a F'.

4) Diz-se que um ponto X pertence ao contorno da figura F quando X pertence a F mas não é ponto interior de F, ou seja, nenhum círculo de centro X pode estar inteiramente contido em F. Neste caso, $X' = \sigma(X)$ deve pertencer ao contorno de

F'; pois, se X' estivesse no interior de F' então, em virtude de 3), $X\sigma^{-1}(X')$ também estaria no interior de F.

5) Suponhamos agora que F e F' sejam polígonos e que X seja um vértice de F. Em particular, X está no contorno de F logo, por 4), seu homólogo $X' = \sigma(X)$ está no contorno de F'. Se não fosse vértice, o ponto X' pertenceria ao lado $A'B'$ de F', sendo diferente de $A' = \sigma(A)$ e de $B' = \sigma(B)$. Então X não seria vértice do lado AB de F, como $X \neq A$ e $X \neq B$, logo X não seria vértice de F.

Se $\sigma : F \longrightarrow F'$ é uma semelhança que transforma o segmento de reta AB, contido em F, no segmento $A'B'$, contido em F', então estes segmentos se dizem homólogos.

□

5.4 Congruência

Definição 5.2.

1. Dois **segmentos** *são* **congruentes** *se possuem a mesma medida ou comprimento.*

2. Dois **ângulos** *são* **congruentes** *quando possuem a mesma medida.*

3. De modo intuitivo, duas **figuras planas** *são* **congruentes** *se uma delas puder ser deslocada, sem que sejam modificadas sua forma e suas medidas, até que passe a coincidir com a outra. Se duas figuras F_1 e F_2 forem congruentes, isso será denotado por $F_1 \cong F_2$.*

As duas figuras abaixo são exemplos de figuras congruentes.

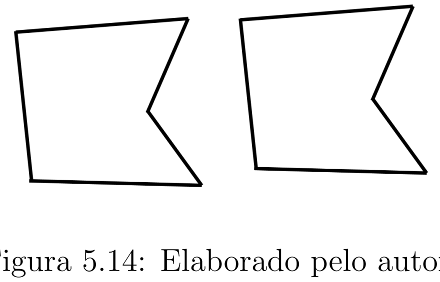

Figura 5.14: Elaborado pelo autor

Duas circunferências que possuem raios diferentes são exemplos de figuras não congruentes

Pode-se observar, dessa forma, que a congruência entre figuras planas satisfaz as propriedades: reflexiva, simétrica e transitiva.

5.5 Isometrias

No estudo dos conceitos de isometria abordaremos alguns conceitos sobre transformação no plano no qual desenvolveremos soluções para determinadas situações geométricas. Consideremos o problema a seguir.

Problema A: O retângulo $ABCD$ representa uma mesa de bilhar, e os pontos P e Q ,representam duas bolas. Desenhar a trajetória da bola P, que deve atingir a bola Q depois de choca-se sucessivamente e ordenadamente com os lados $\overline{AD}, \overline{AB}, \overline{CD}$ e $\overline{BC}$. Lembrando que essa trajetória é o menor caminho por ela percorrido.

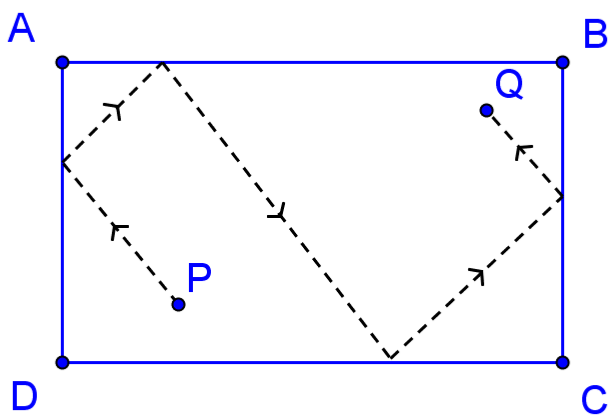

Figura 5.15: Elaborado pelo autor

Podemos resolver este problema com os conceitos e definições de isometria.

Transformações no Plano

Definição 5.3. *Definimos uma Transformação* T *no plano* Π *como uma função bijetora* $T : \Pi \to \Pi$*, isto é, um função tal que:*

a) A ponto distintos P *e* Q *de* Π*,* T *associa imagens* $T(P)$ *e* $T(Q)$ *de* Π*;*

b) Para cada ponto Y *de* Π*, existe um único ponto* X *em* Π *tal que* $Y = T(X)$*.*

Seja F *uma figura contida em* Π*. A imagem de* F *pela transformação* T *é definida como* $T(F) = \{T(P)|P \in F\}$*.*

Definição 5.4. Isometrias *são transformações no plano que preservam distâncias. Isto é, se* $T : \Pi \to \Pi$ *é uma isometria, para qualquer par de pontos* A *e* B *de* Π *vale a relação* $d(T(A), T(B)) = d(A, B)$*, ou simplesmente ,* $T(A)T(B) = AB$*.*

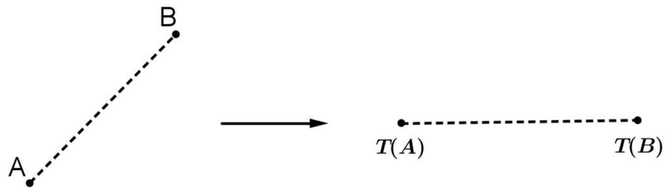

Figura 5.16: Elaborado pelo autor

Teorema 5.4. *Uma isometria* $T : \alpha \to \alpha$ *possui as seguintes propriedades:*

a) T *leva pontos colineares em pontos colineares. Além disso, se* A, B *e* C *são pontos tais que* B *está entre* A *e* C*, então* $T(B)$ *está entre* $T(A)$ *e* $T(C)$*.*

Como consequência, temos que T *leva retas em retas e leva ângulos em ângulos.*

b) T *preserva medidas de ângulos, ou seja, para qualquer ângulo* θ*,* $m\widehat{T(\theta)} = m\widehat{\theta}$*.*

Em particular, T *leva retas perpendiculares em retas perpendiculares.*

c) T *preserva paralelismo entre retas, isto é, se* r *e* s *são retas paralelas, então* $T(r)$ *e* $T(s)$ *também são retas paralelas.*

Demonstracção:

a) Consideremos os pontos colineares A*,* B *e* C*, tais que* $A - B - C$ *e sejam* A', B' *e* C' *suas imagens pela isometria* T*:*

Se A', B' *e* C' *não fossem colineares, então determinariamos um triângulo, o triângulo* $A'B'C'$*. Pelo teorema da desigualdade triangular, obteríamos a relação* $A'C' < A'B' + B'C'$*. O que contradiria a hipótese* $A - B - C$*, que é equivalente* $AC = AB + BC$*.*

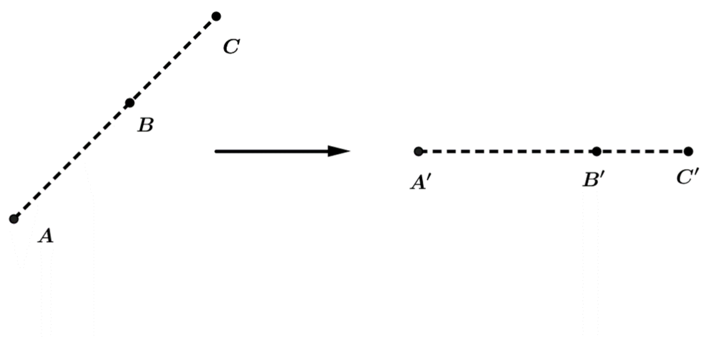

Figura 5.17: Elaborado pelo autor

Logo, temos

$$A'B' + B'C' = A'C' \tag{5.5}$$

Portanto A', B' *e* C' *são colineares.*

Vamos provar que A', B' *e* C' *são tais que* $A' - B' - C'$.

Suponhamos que B' *não estivesse entre* A' *e* C'. *Então teríamos* $B' - A' - C'$ *ou* $A' - C' - B'$.

Se valesse $B' - A' - C'$, *então teríamos* $B'A' + A'C' = B'C'$. *Mas, por 5.5 temos* $A'B' + B'C' = A'C'$. *Disso resulta* $A'B' + (A'B' + A'C') = B'C'$, *ou seja,* $2A'B' = 0$, *e portanto* A' *e* B' *coincidiram, contrariando a hipótese.*

Para o caso $A - C' - B'$ *a demonstração é análoga. Portanto* B' *está entre* A' *e* C'.

b) Consideremos o ângulo θ *com vértice* O *e sua imagem* $\theta = T(\theta)$ *um ângulo com vértice* O'

Escolhemos pontos A *e* B, *um cada lado de* θ, *tal que* $OA = OB$. *É claro que: se* A' *e* B' *são as imagens de* A *e* B *pela isometria* T, *temos* $OA' = OB'$. *Ainda pela definição, temos* $A'B' = AB$. *Logo, pelo caso L.L.L, os triângulos* AOB *e* $A'O'B'$ *são congruentes, sendo congruentes portanto os ângulos* θ *e* θ'.

c) Consideremos as retas paralelas r *e* s *e suas imagens* $r' = T(r)$ *e* $s' = T(s)$

Suponhamos por absurdo, que as retas r' *e* s' *sejam concorrentes no ponto* O, *com* $O = T(A) = T(B)$, *onde* A *e* B *são pontos distintos do plano. Logo,* r' *e* s' *são retas paralelas* $\square$

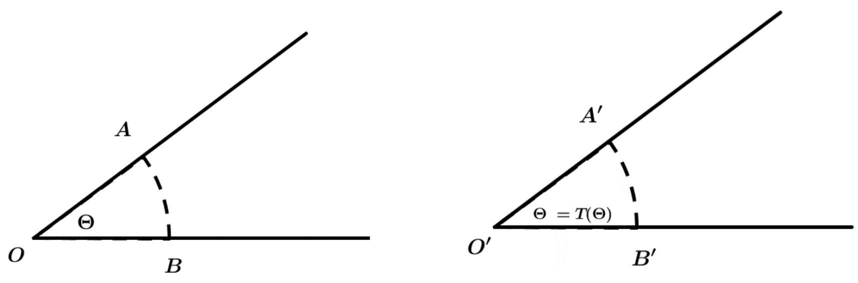

Figura 5.18: Elaborado pelo autor

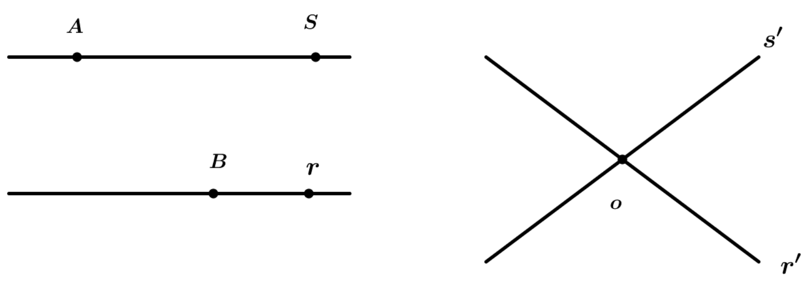

Figura 5.19: Elaborado pelo autor

As propriedades acima nos levam a apresentar a seguinte definição de congruência entre duas figuras planas.

Definição 5.5. *Duas figuras F e G no plano euclidiano Π são congruentes se existe uma isometria $T : \Pi \to \Pi$ tal que G é imagem de F por essa isometria.*

Definição 5.6. *A identidade $I : \Pi \to \Pi$, tal que $I(A) = A$ para qualquer ponto A de Π, é uma isometria.*

Translação

Definição 5.7. *Sejam A e B pontos distintos do plano α. A translação $T : \alpha \to \alpha$ é a isometria no plano α que leva um ponto X de α no ponto $T_{AB}(X) = X'$ tal que $ABX'X$ é um paralelogramo, se A, B e X não são colineares. Se A, B e X são colineares, então T_{AB} é tal que $\overline{XX'}$ está na reta AB e os segmentos AX' e BX têm o mesmo ponto médio.*

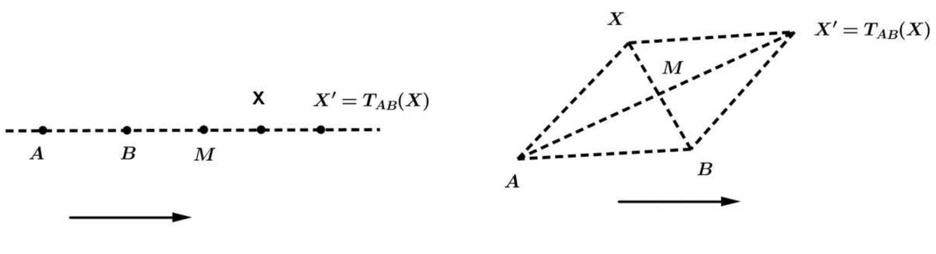

Figura 5.20: Elaborado pelo autor

Observação 5.1. *O sentido de X para X', que é o mesmo que o de A para B; e que também no caso não-colinear, $\overline{AX'}$ e $\overline{BX'}$ têm o mesmo ponto médio M.*

Observação 5.2. *Dados os pontos A e B, podemos considerar também a translação $T_{AB} : \alpha \to \alpha$ definida da mesma maneira que T_{AB}, mas levando em conta o sentido oposto ao sentido de T_{AB}.*

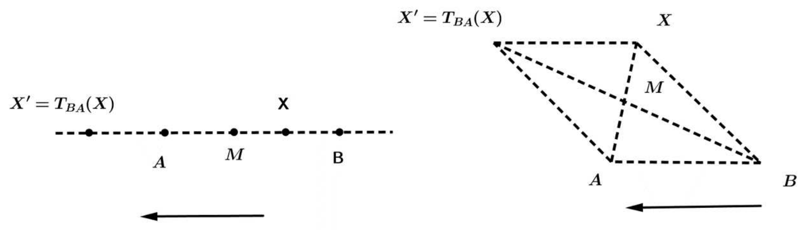

Figura 5.21: Elaborado pelo autor

Neste caso, M é ponto médio dos segmentos BX' e AX; e o paralelogramo é $ABXX'$.

Rotação

Na definição de rotação vamos necessitar da noção de ângulo orientado, isto é, um ângulo no qual estão bem determinado seu lado inicial, que é chamando origem do ângulo, e seu lado final, a extremidade.

Como exemplo, consideremos dado o ângulo BAC, da figura abaixo, onde foi escolhida a semi-reta AB para ser seu lado inicial, e a semi-reta AC, para o lado final. Dizemos que este ângulo está orientado de $\overrightarrow{AB}$ para $\overrightarrow{AC}$ e o denotamos por $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. Este ângulo é agora considerando diferente do ângulo orientado $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$.

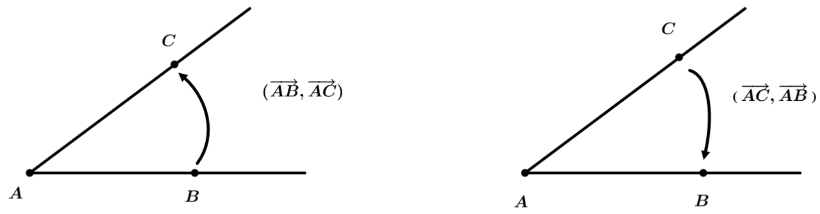

Figura 5.22: Elaborado pelo autor

Consideremos ângulo orientados com medida positiva,ou simplesmente ângulos positivos, aqueles orientados no sentindo anti-horário. E os negativos, aqueles orientados no sentido horário.

Definição 5.8. *Seja O um ponto do plano e θ um número real $-180 < \theta \leqslant 180$. A rotação de centro O e ângulo θ é a isometria $\triangle_{O,\theta} : \alpha \to \alpha$, que deixa fixo o ponto O e leva o ponto X de α, $X \neq O$, no ponto $X' = \triangle_{O,\theta}(X)$, tal que $OX = OX'$ e a medida do ângulo oreintado $(\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OX'})$ é igual a θ, se $\theta \neq 0$ e $\theta \neq 180$. Além disso, $OX' = OX$, sendo O o ponto médio de $\overline{XX'}$, se $\theta = 180$; e $X' = X$ se $\theta = 0$.*

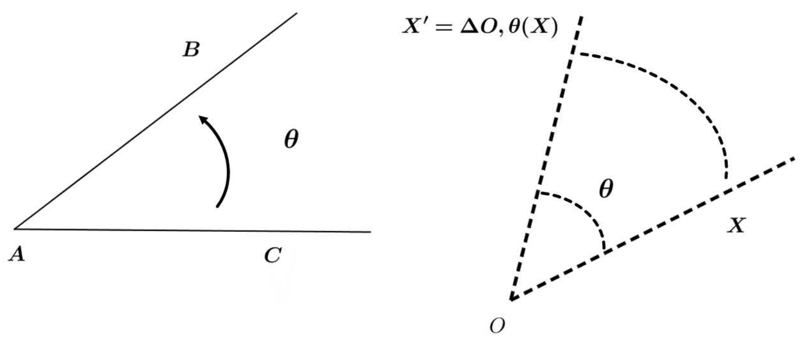

Figura 5.23: Elaborado pelo autor

Vamos executar a rotação $\triangle_{\theta 0,75}$ *do segmento* AB *dado ao redor do ponto* O *dado*

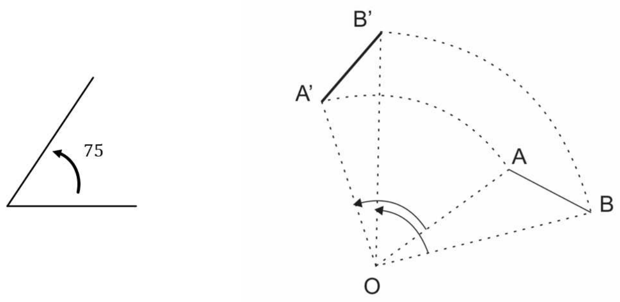

Figura 5.24: Elaborado pelo autor

o segmento $A'B'$ *é a imagem pela rotação* $\triangle_{\theta 0,75}$ *do segmento* AB.

Vamos executar a rotação $\triangle_{\theta 0,-120}$ *da semicircunferência dada ao redor do ponto O dado.*

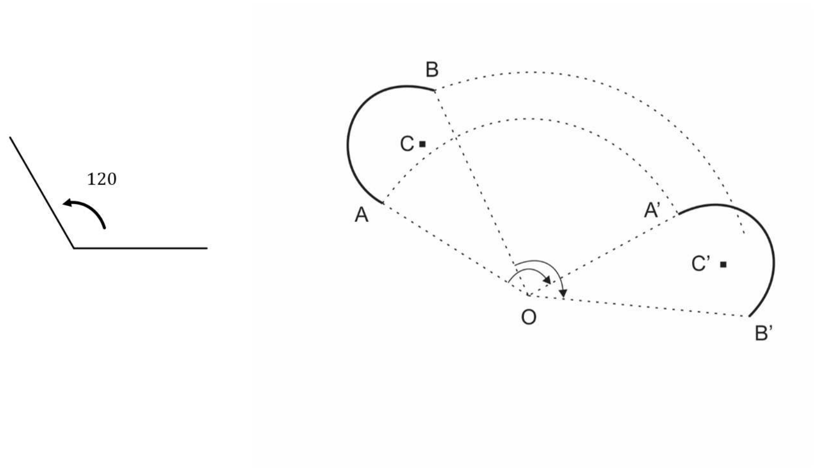

Figura 5.25: Elaborado pelo autor

Em particular, se $\theta = 180$ $\triangle_{0,\theta}$ *é chamado de meio-giro, ou reflexião em relação ao ponto fixo o.c. Ela esta associada a cada ponto* P *do plano* Π *o ponto* $P' = \triangle_{\theta 0,1809(P)}$*, tal que* O *é o ponto médio do segmento* PP'

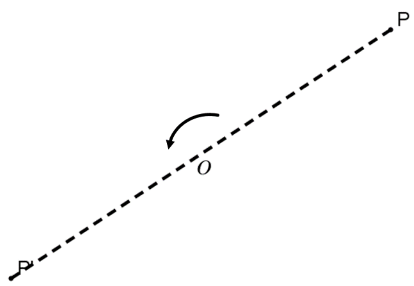

Figura 5.26: Elaborado pelo autor

Vamos executar a rotação do triângulo ABC *ao redor do ponto* A *e no sentido anti-horario*

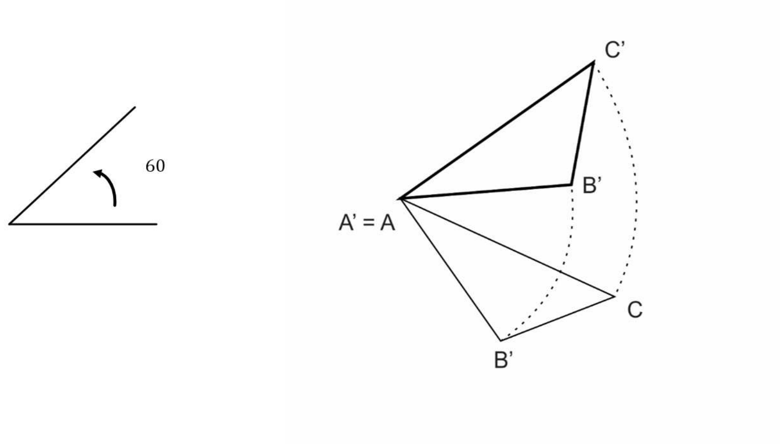

Figura 5.27: Elaborado pelo autor

Se executarmos rotações $\triangle_{A,60}$, $\triangle_{A,120}$, $\triangle_{A,180}$, $\triangle_{A,-120}$ *e* $\triangle_{A,-60}$ *do triângulo* ABC, *obteremos a figura a seguir.*

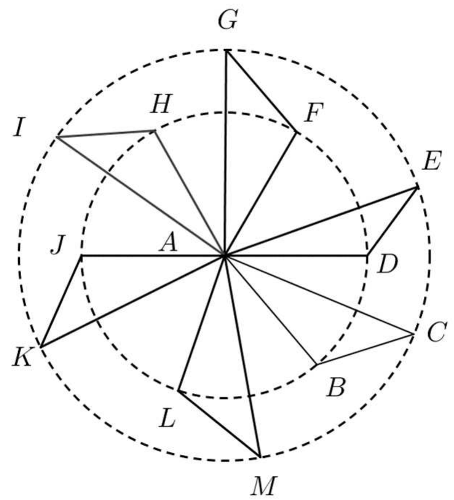

Figura 5.28: Elaborado pelo autor

Podemos observar que B, D, F, H, JeL *são pontos da mesma circunferência* $C(A, AB)$ *e* C, E, G, I, KeM *estão em* $C(A, AC)$

Esta figura final constitui um exemplo de figura que possui simetria $\theta-rotacional$ no caso $\theta = 60$, o que definimos a seguir.

Definição 5.9. *Uma figura tem simetria de rotação de um ângulo θ, ou tem simetria $\theta - rotacional$, quando coinciede com sua imagem pela rotação do ângulo θ ao redor do seu centro.*

Observamos que uma figura possui simetria $\theta - rotacional$ se, e somente se, possui simentria $\theta - rotacional$. Não importando o sentido da rotação, vamos tomar sempre θ em valor absuluto.

Um exemeplo de figura que possui simetria de rotação é o paralelograma, que não possui simetria de reflexão, mas possui simetria 180-rotacional.

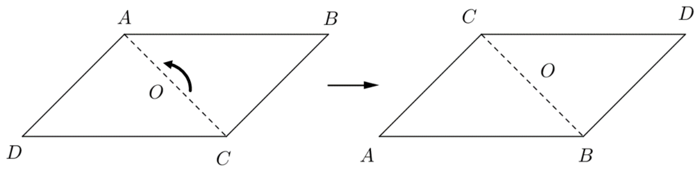

Figura 5.29: Elaborado pelo autor

outro exemplo:

O quadrado, que possui simetria de 90-rotacional (é também180-rotacional)

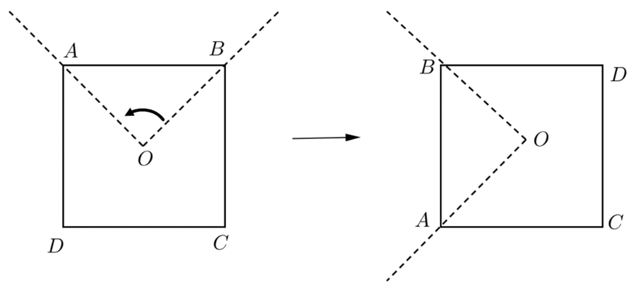

Figura 5.30: Elaborado pelo autor

O pentágono regular possui simetria 72-rotacional e também 144-rotacional.

O triângulo equilátero possui simétria de 120-rotacional

Generalizando, qualquer polígno regular de n-lados possui $\theta - rotacional$ onde $\theta = i\frac{360}{n}$, i um número inteiro positivo, sendo $i = 0 \ldots \frac{n}{2}$ para n par, ou $i = 0 \ldots, \frac{n-1}{2}$

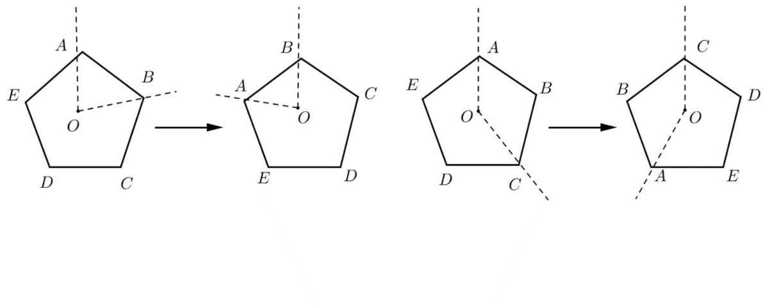

Figura 5.31: Elaborado pelo autor

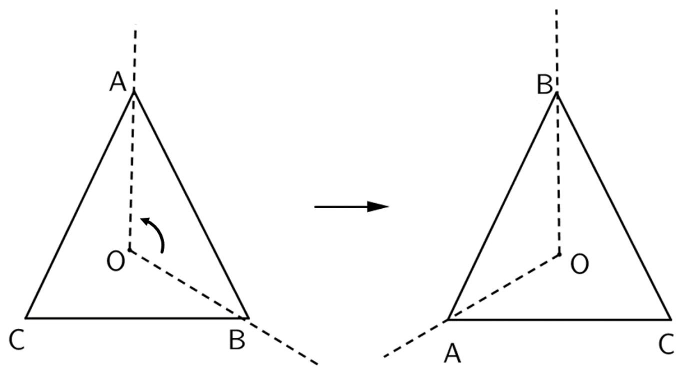

Figura 5.32: Elaborado pelo autor

para n ímpar.

5.6 Simetria

Definição 5.10. *Consideremos uma reta r. A isometria dada pela transformação, que leva cada ponto P do plano em seu simétrico P' em relação à reta r, é chamado reflexão na reta r, ou simetria de reflexão na reta r, a qual vamos indicar por R_r. A reta r é chamada eixo de reflexão de R_r*

Vejamos graficamente o simétrico P' de uma ponto P não pertencente a uma reta r, em relação a essa reta.

Para isso, basta traçamos a reta s, perpendicular à r e passando por P. E tomarmos P' em s tal que $P'Q' = PQ$, onde $Q = proj_r P$.

Observemos que a reta r é a mediatriz $\overline{PP'}$.

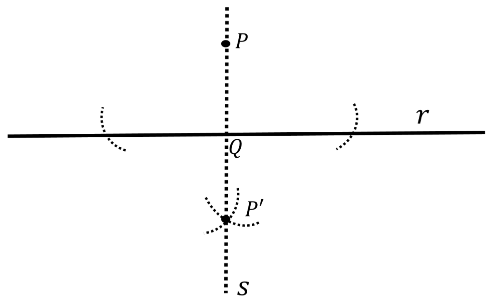

Figura 5.33: Elaborado pelo autor

Propriedade da Reflexão em Reta

Para as propriedades valem:

a) $R_r(P) =$ P se, e somente se, P é ponto de r;

b) Se s é uma reta perpendicular a r, então $R_r(s) = s$;

c) $R_r(R_r(P))= P$ para todo ponto P do plano;

d) A transformação inversa de um reflexão numa reta r é uma reflexão nessa mesma reta.

Existem figuras U que podem ser vistas como a união de uma figura F com sua imagem F', pela reflexão numa reta r que intersecciona essa figura. Dizemos, então que essa figura U $= F \cup F'$ é uma **figura simétrica em relação à reta** r ou também, que U possui simetria de reflexão ou simetria axial. Neste caso, dizemos que a reflexão R_r é uma simetria axial interna e r é o eixo de simetria interna, ou simplesmente eixo de simetria da figura U, o qual é denotado pela letra e.

Exemplo 5.4. *Um exemplo é o triângulo isósceles ABC, cujo eixo de simetria é a mediatriz da base $\overline{BC}$, do triângulo.*

Exemplo 5.5. *Outras figuras geométricas admitem um ou mais eixos de simetria interna:*

a) Segmento de Reta: *Um segmento AB possui sua mediatriz como eixo de simetria interna.*

b) Ângulo: *Um ângulo possui a reta suporte de sua bissetriz como eixo de simetria interna.*

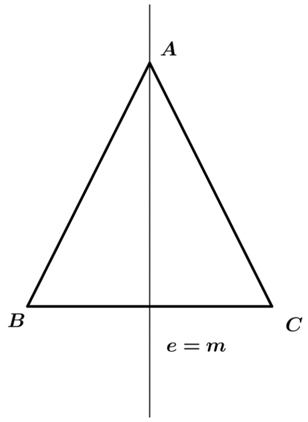

Figura 5.34: Elaborado pelo autor

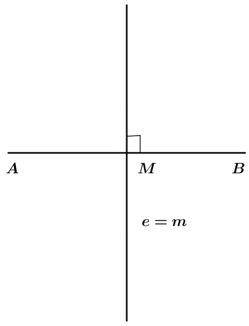

Figura 5.35: Elaborado pelo autor

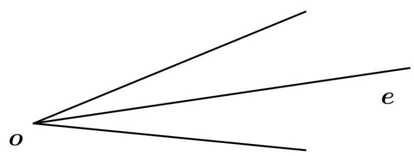

Figura 5.36: Elaborado pelo autor

c) Trapézio Isósceles: *Assim como o triângulo isósceles, o trapézio isósceles também possui como eixo de simetria interna a mediatriz de suas bases.*

d) Losango e Retângulo: *O losango e o retângulo, que são tipos de paralelogramos, possuem dois eixos de simetria:* e_1 *e* e_2*, como pode-se ver nas figuras abaixo:*

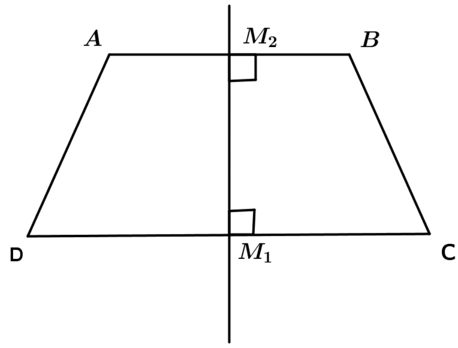

Figura 5.37: Elaborado pelo autor

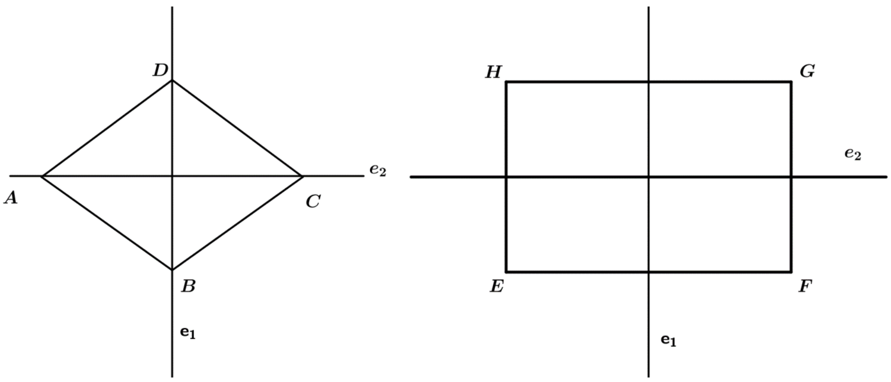

Figura 5.38: Elaborado pelo autor

e) Quadrado: *O quadrado é simétrico em relação a quatro eixos de simetria: as retas suporte de suas diagonais e as mediatrizes de seus lados.*

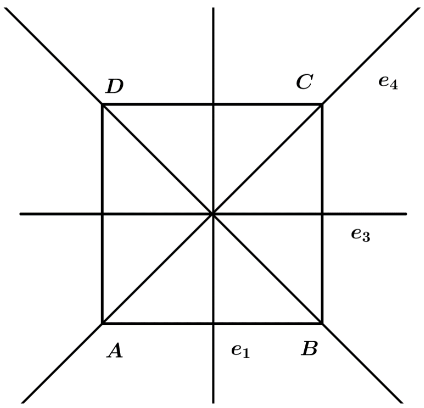

Figura 5.39: Elaborado pelo autor

f) Triângulo Equilátero: *O triângulo equilátero é simétrico em relação a três* *eixos: as retas suporte de suas medianas.*

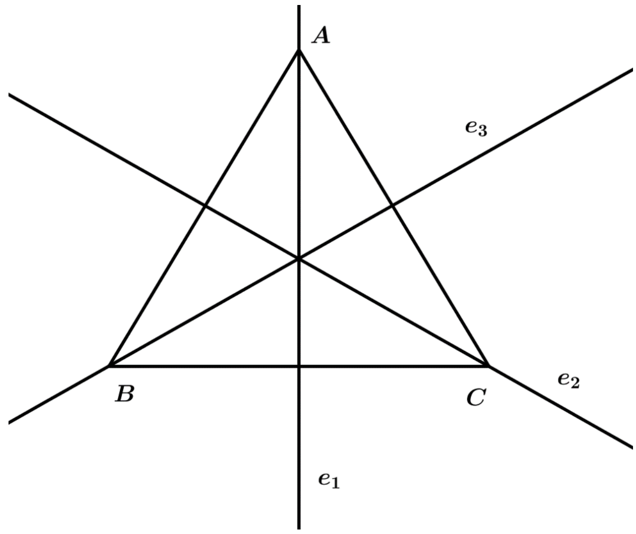

Figura 5.40: Elaborado pelo autor

g) A circunferência: *A circunferência é simétrica em relação à reta suporte de qualquer um dos seus diâmetros, isto é, possui infinitos eixos de simetria.*

Exemplo 5.6. *Um paralelogramo, excluído as possibilidades dele ser retângulo ou losango, não possui eixo de simetria.*

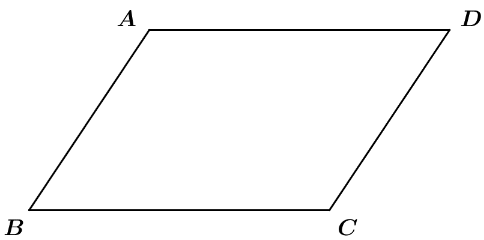

Figura 5.41: Elaborado pelo autor

Observação 5.3. *Podemos generalizar que qualquer polígono regular de $n-$ lados possui n eixos de simetria.*

Capítulo 6

Considerações Finais

Estudos e trabalhos apresentados na Educação Matemática como de PASSOS(2006); LORENZATO(2006); KALEFF(2006); TURRIONI, PEREZ (2006), RÊGO, RÊGO(2006) defendem o uso de materiais didáticos no ensino e na aprendizagem da Matemática como um bom recurso no desenvolvimento de conceitos e conteúdos, uma vez que o aluno se envolve com a construção do próprio conhimento. Dessa forma, consideramos os pentaminós como um material didático que insere o aluno num processo de ensino atrativo e dinâmico.

Enfatizamos que as possibilidades ao introduzir geometricamente e algebricamente conceitos de áreas e perímetro por meio petaminós é bastante produtiva, pois o aluno, em um ambiente no qual se utiliza material manipulável pode aprender conceitos visíveis, num primeiro momento, e depois, possa fazer comparações e silogismos; até passar a elaborar conclusões em ambientes algébricos, tomando como base o que aprendeu em um ambiente manipulável.

Consideremos que o trabalho com os pentaminós pode romper o estereótipo de que a Matemática é apenas um conjunto de fórmulas expostas no quadro. Segundo, Serrazina " [...]a construção de conceitos matemáticos é um processo longo que requer o envolvimento ativo do aluno que vai progredindo do concreto para o abstrato".(SERRAZINA, 1990, p. 1). Diante dessas considerações, que atividades na qual possa ter uma aprendizagem matemática lúdica, desenvolva estratégias para resolver problemas que modelam seu cotidiano.

Defendemos que a utilização desses materiais em sala de aula requer uma abordagem no procedimento da aprendizagem de forma contextualizada para explorar os conteúdos de matemática. Segundo Souza (1996): "Na intervenção, o procedimento adotado interfere no processo, com o objetivo de compreendê-lo, explicitá-lo ou corrigi-lo". (SOUZA, 1996: p.114)

Dessa forma, cabe ao professor desenvolver atividades com os poliminós que contemplem outros conceitos matemáticos além dos conceitos da geometria. A sala de aula pode ser um laboratório de ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos onde o aluno possa experimentar e descobrir com o auxílio de materiais didáticos à aproximações entre a disciplina e o seu cotidiano. Esse fato é destacado por Grossnickle e Bruekner (1965).

> "Se por outro lado, a sala de aula for um laboratório de aprendizagem onde as crianças vão experimentar descobrir significados e processos para essas experiências ou atividade de aprendizagem, materiais adequados são necessários"(ROSSNICKLE; BRUEKNER, 1965: p. 87).

Neste sentido, acreditamos que o uso dos poliminós no processo de ensino de área e perímetro possibilita ao aluno que formalize e construa o conhecimento significativo não apenas desses conteúdos específicos, mas também quanto aos de geometria e aritmética.

Além, disso, que é possível também explorar a história da matemática ao trabalho apresentado.

Por fim, ressaltamos que o desenvolvimento de tais atividade em sala de aula possam confirmar, ou não, as considerações apresentadas neste trabalho, podendo assim, ser objeto de novas investigações.

Referências Bibliográficas

[1] BOYER, C. História da Matemática. São Paulo: Blucher, 1996

[2] DOLCE, Osvaldo, Pompeo José Nicolau. Fundamentos de matemática elementar 9 - 8.ed- São Paulo: Atual 2005

[3] EVES, H. Introdução a História da Matemática. Campinas: Ed UNICAMP, 1992.

[4] GROSSNICKLE, F.E. e BRUECKNER, L.J. (1965). O ensino da aritmética pela compreensão. Rio De Janeiro, Fundo de Cultura.

[5] KALEFF, A. M. M. R. Do fazer concreto ao desenho em geometria: ações e atividades desenvolvidas no laboratório de ensino de geometria da Universidade Federal Fluminense. In: LORENZATO, Sérgio. Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores. Campinas: Autores Associados, 2006.

[6] LORENZATO, Sérgio. Quebra-cabeça só de quadrados. Nova Escola, São Paulo, n.112, p.53, mai.1998.

[7] LORENZATO, S. Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis. In: LORENZATO, Sérgio. Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores. Campinas: Autores Associados, 2006. p. 3-38.

[8] LIMA, E. L. *Medida e Forma em Geometria(Comprimento, Área, Volume e Semelhança)* 4ªed. Rio de Janeiro, S.B.M., 2009.

[9] BRASIL: Ministério da Educação: Secretaria de Educação Fundamental - PCN's Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília: MEC/SEF, 1998.

[10] PASSOS, C. L. B. Materiais manipuláveis como recursos didáticos na formação de professores de matemática. In: LORENZATO, Sérgio. Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores. Campinas: Autores Associados, 2006.

[11] REZENDE, Eliane Quelho Frota; Geometria euclidiana plano e construções geométricas / Eliane Quelho Fronta Rezende e Maria Lúcia Bontorim de Queiroz,- 2ªed - campinas,SP. Editora da Unicamp, 2008.

[12] SERRAZINA, M. L. Os materiais e o ensino da Matemática. Educação e Matemática, n. 13, jan/mar., 1990. (Editorial).

[13] SOUZA, M. T. C. C. Intervenção psicopedagógica: com e o que planejar. In SISTO, F. F. et al (org.). Atuação Psicopedagógica e Aprendizagem Escolar. Petrópolis: Vozes, 1996. Cap. p.113-126.

[14] TURRIONI, A. M. S.; PEREZ, G. Implementando um laboratório de educação matemática para apoio na formação de professores. In: LORENZATO, Sérgio. Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores. Campinas: Autores Associados, 2006.