UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE

CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE

UNIDADE ACADÊMICA DE EDUCAÇÃO

Curso de Graduação em Licenciatura em Matemática

Maciel Araújo da Silva

Uma Aplicação das Equações Diferenciais Parciais no Fluxo de Tráfego ao Longo de uma Rodovia

Cuité-PB

2015

Maciel Araújo da Silva

Uma Aplicação das Equações Diferenciais Parciais no Fluxo de Tráfego ao Longo de uma Rodovia

TCC apresentado ao curso Graduação em Licenciatura em Matemática do Centro de Educação e Saúde da Universidade Federal de Campina Grande em cumprimento às exigências do Componente Curricular Trabalho Acadêmico Orientado, para obtenção do grau de Graduado em Licenciatura em Matemática.

Orientadora: Edna Cordeiro de Souza
Coorientador: Luciano Martins Barros

Cuité-PB

2015

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA NA FONTE
Responsabilidade Jesiel Ferreira Gomes – CRB 15 – 256

S586a Silva, Maciel Araújo da.

Uma aplicação das equações diferenciais parciais no fluxo de tráfego ao longo de uma rodovia . / Maciel Araújo da Silva. – Cuité: CES, 2015.

44 fl.

Monografia (Curso de Licenciatura em Matemática) – Centro de Educação e Saúde / UFCG, 2015.

Orientadora: Edna Cordeiro de Souza.
Coorientador: Luciano Martins Barros.

1. Equações diferenciais parciais. 2. Fluxo de tráfego - rodovia. 3. Cauchy. I. Título.

CDU 514.745.8

Maciel Araújo da Silva

Uma Aplicação das Equações Diferenciais Parciais no Fluxo de Tráfego ao Longo de uma Rodovia

Monografia de Trabalho de Conclusão de Curso submetida à banca examinadora como parte dos requisitos necessários a obtenção do grau de Graduação em Licenciatura em Matemática.

A citação de qualquer trecho deste trabalho é permitida, desde que seja feita de conformidade com as normas de ética científica.

Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) aprovado em 27 de novembro de 2015.

BANCA EXAMINADORA

Edna Cordeiro de Souza - UFCG
(Orientadora)

Luciano Martins Barros - UFCG
(Coorientador)

Maria de Jesus Rodrigues da Silva - UFCG
(Membro da Banca)

Dedico este trabalho a toda minha família e amigos.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, por ter me dado a oportunidade de crescer e evoluir até aqui.

Agradeço a toda minha família, principalmente meus pais e irmãos, pelo amor e carinho que sempre tiveram por mim.

Agradeço a todos os professores do CES, que contribuiram para minha formação acadêmica. Em especial, agradeço aos professores Luciano Martins Barros e Edna Cordeiro de Souza pela força e ajuda que me deram para a conclusão deste trabalho.

Agradeço também ao meu amigo João Carlos Rocha de Araújo, pela força nos momentos difíceis que passei; e a todos os meus amigos e colegas que conquistei durante o meu tempo de curso.

Por fim, agradeço a uma pessoa que foi muito especial para mim, e que sempre me deu força, me ajudou e me insentivou bastante. Obrigado Gerlândia Estevam do Nascimento pelo seu amor, dedicação e carinho durante todos os anos que estivemos juntos.

" A matemática é o alfabeto com o qual DEUS escreveu o universo."

Pitágoras.

Resumo

Neste trabalho apresentamos uma aplicação das equações diferenciais Parciais no modelo de fluxo de tráfego ao longo de uma rodovia modelado pela equação diferencial quasi-linear de primeira ordem

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\,(1-2u)\,\frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

onde u é a densidade de carros por unidade de comprimento. A técnica utilizada para obtenção de solução foi o método das características.

Palavras-chave: Cauchy. características. choque.

Abstract

We present an application of partial differential equations in the traffic flow model along a highway modeled by quasi-linear differential equation of first order

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\,(1 - 2u)\,\frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

where u is the car density per unit length. The technique used to obtain solution was the method of characteristics.

Keywords: Cauchy. characteristics. shock.

Sumário

Introdução

A matemática sempre esteve presente na vida humana, seja num simples ato de contar até coisas mais complexas como modelar fenômenos naturais. Ela evoluiu muito no decorrer dos séculos e com isso muitas de suas áreas vieram tomando grande destaque ao longo dos tempos. Dentre elas o estudo das equações diferenciais parciais (EDP), que vem despertando grande interesse nos estudantes de matemática.

As equações diferenciais parciais são responsáveis por modelar muitos fenômenos que ocorrem na Ótica, Eletricidade, Ondulatória, Magnetismo, Mecânica, Fluídos, Biologia, dentre outros. Mais do que isso, muitas leis famosas como: Leis de Newton para o resfriamento dos corpos, Equações de Maxwell, Equações de Navier-Stokes e Equações da Mecânica Quântica de Schrodinger, também são escritas por equações diferenciais parciais.

Modelar um fenômeno é o mesmo que descrevê-lo matematicamente, frequentemente por meio de uma função ou uma equação, para que possamos entendê-lo e fazermos jugamento sobre o mesmo. Apesar de que nem todos os exemplos de equações diferenciais parciais supracitados venham da modelagem de fenômenos reais, mas essa ainda vem sendo a grande importância das Equações Diferenciais nos últimos tempos.

Apresentaremos aqui uma modelagem matemática para o fluxo do tráfego de carros ao longo de uma rodovia, onde tal fenômeno será modelado por uma equação diferencial parcial de primeira ordem quasi-linear. Uma solução para este modelo físico é chamado na literatura por ondas de choques.

Para cumprir os objetivos, descritos acima, dividimos este trabalho em três capítulos: No primeiro capítulo faremos uma breve introdução das equações diferenciais ordinárias (EDO), classificando-as quanto ao tipo, ordem e linearidade. No segundo capítulo abordaremos as equações diferenciais parciais de primeira ordem classificando-as da mesma forma como foi feita para EDO's. Estudamos um método de resolução tanto para algumas equações lineares e quasi-lineares. Este método é chamado na literatura como o método das características. No terceiro capítulo, estudamos a formação de choques atráves das EDP's quasi-lineares e por último modelamos o problema do fluxo de tráfego ao longo de uma rodovia. Esta modelagem consiste de uma EDP quasi-linear sujeita uma condição inicial contínua.

Capítulo 1

Equações Diferenciais Ordinárias

1.1 Conceitos Básicos

Revisaremos aqui alguns conceitos de equações diferenciais ordinárias. Tais conceitos terão grande importância na hora de resolvemos algumas equações diferenciais parciais de primeira ordem. Para um estudo mais aprofundado consulte [1], [2] e [6].

Aprendemos ao longo dos cursos de cálculo que se tivermos uma função $y = f(x)$, definida em um certo intevalo, poderíamos calcular sua derivada

$$\frac{dy}{dx} = f'(x),$$

onde x é a variável independente e y a variável que dependendo de x. Funções como essas podem ter sua derivada calculada usando uma regra apropiada para derivadas. Temos como exemplo, a função $y = e^{x^2}$, onde sua derivada no intervalo $(-\infty, \infty)$ é

$$\tfrac{dy}{dx} = 2xe^{x^2} \text{ ou } \tfrac{dy}{dx} = 2xy.$$

Equações como essas e outras, que envolvem diferenciais ou derivadas de uma ou mais variáveis dependentes em relação a uma ou mais variáveis independentes, são chamadas de **equação diferencial (ED)**.

1.2 Classificação das Equações Diferenciais

As ED's podem ser classificadas quanto ao seu **tipo**, **ordem** e **linearidade**.

Classificação de uma equação diferencial por tipo

Quanto ao tipo, se uma equação contém somente derivadas ordinárias de uma ou mais variáveis dependente com relação a uma única variável independente ela será classificada como **equação diferencial ordinária (EDO)**. Caso contrário, ela será chamada de **equação diferencial parcial (EDP)**.
São exemplos de equações diferenciais *ED's*:

1) $\frac{dy}{dx} + 5y = e^x$

2) $\frac{d^2y}{dx^2} + siny = 0$

3) $\frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx} = x$

4) $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

5) $x\frac{\partial u}{\partial y} + y\frac{\partial u}{\partial y} = u$

6) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\frac{\partial u}{\partial t}$

As equações 1, 2 e 3 são exemplos de equações diferenciais ordinárias, e as equações 4, 5 e 6 são exemplos de equações diferenciais parciais.

Classificação de uma equacão diferencial por ordem

Uma equação diferencial, seja ela uma EDO ou uma EDP, terá como sua ordem a ordem da sua maior derivada.
Exemplos:

1) $4x\frac{dy}{dx} + y = x$ (EDO de primeira ordem.)

2) $\frac{d^2y}{dx^2} + 5(\frac{dy}{dx})^3 - 4y = x$ (EDO de segunda ordem.)

3) $x\frac{d^3y}{dx^3} - 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 + y = 0$ (EDO de terceira ordem.)

Uma equação diferencial ordinária é uma equação que envolve as derivadas ordinárias de uma função incógnita com relação a uma única variável independente x. Dessa forma, uma EDO de n-ésima ordem pode ser representada simbolicamente por

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \cdots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0,$$

onde $F : \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$ é uma função arbitrária.

Classificação de uma equação diferencial como sendo Linear ou Não-Linear:

Se uma equação diferencial pode ser escrita na forma

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x);$$

isto é, a variável dependente y e todas as suas derivadas são do primeiro grau e cada coeficiente depende apenas da variável independente x, ela é dita **linear**. Caso contrário, é classificada como **não-linear**.

Exemplo de equações lineares e não-lineares

1) $(y - x)dx + 4xdy = 0$ (EDO **linear** de primeira ordem.)

2) $y'' - 2y' + y = 0$ (EDO **linear** de segunda ordem.)

3) $\frac{d^3y}{dx^3} + x\frac{dy}{dx} - 5y = e^x$ (Edo **linear** de terceira ordem.)

4) $(1 - y)y' + 2y = e^x$ (EDO **não-linear** de primeira ordem.)

5) $\frac{d^4y}{dx^4} + y^2 = 0$ (EDO **não-linear** de quarta ordem.)

1.3 Solução de uma Equação Diferencial

Por definição, qualquer função f definida em algum intervalo talque quando substituída na equação diferencial reduza a uma identidade será considerada **solução** da equação neste intervalo. Logo, uma solução para a EDO

$$F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0$$

é uma função f, com pelo menos n derivadas, que à satisfaz em todo x pertecente a algum intervalo.

Assim como as integrais que possuem uma família de anti-derivadas, as equações diferenciais ordinárias podem possuir uma família de soluções. Se $f(x)$ for uma solução de uma EDO em um certo intervalo I, qualquer função que diferenciar de $f(x)$ apenas por uma constante arbitrária também será solução, e essas soluções são chamadas de

solução geral da equação diferencial ordinária. Para cada constante arbitrária teremos uma **solução particular** da equação diferencial ordinária no intervalo I.

Veja os exemplos:

1. A equação $f(x) = e^{-x}$ é uma solução particular de $y' + y = 0$. De fato, pois como $f'(x) = -e^{-x}$, temos:

$$y' + y = 0$$

$$-e^{-x} + e^{-x} = 0$$

$$0 = 0$$

2. $f(x) = Asenx + Bcosx$ é uma solução geral para $y'' + y = 0$, onde A e B são constantes arbitrárias. Verdade, pois como $f'(x) = Acosx - Bsenx$, então $f''(x) = -Asenx - Bcosx$, temos:

$$y'' + y = 0$$

$$(-Asenx - Bcosx) + (Asenx + Bcosx) = 0$$

$$-(Asenx + Bcosx) + (Asenx + Bcosx) = 0$$

$$0 = 0$$

Problema de Valor Inicial

Uma equação diferencial pode estar sujeita a uma condição inicial para que possamos determinar sua solução, como por exemplo: encontrar a solução da equação $y' = f(x, y)$, sendo que $y(x_0) = y_0$, ou seja,

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

O problema anterior e denominado **problema de valor inicial** e sua **solução** é qualquer função $\phi(x)$, tal que $\phi'(x) = f(x, \phi(x))$ ao mesmo tempo em que $\phi(x_0) = y_0$.

Para uma equação diferencial de ordem n, o problema de valor incial consiste no seguinte

- Resolva: $a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$

- Sujeito a: $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$,

onde $y_0, y'_0, ..., y_0^{(n-1)}$ são constantes arbitrárias, é chamado de **problema de valor inicial**. Os valores $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$ são as **condições iniciais**.

Teorema 1 (Existência e Unicidade)**.** *Sejam* $a_n(x), a_{n-1}(x), ..., a_1(x), a_0(x)$ *e* $g(x)$ *contínuas em um intervalo* I *com* $a_n(x) \neq 0\ \forall x \in I$. *Se* $x = x_0$ *é algum ponto de* I*, então existe uma única solução* $y(x)$ *neste intervalo para o problema de valor inicial descrito acima.*

Demosntração: veja [6].

1.4 EDO Linear de Primeira Ordem

Vimos que uma equação linear de ordem n pode ser representada pela fórmula geral

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x).$$

Quando $n = 1$, obtemos a equação

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x), \tag{1.1}$$

a qual é denominada, por definição, **equação linear de primeira ordem**.

A equação (1.1) pode ser simplificada e escrita na forma

$$\frac{dy}{dx} + \rho(x)y = f(x), \tag{1.2}$$

se a dividimos por $a_1(x)$ e, em seguida, fazemos $\frac{a_0(x)}{a_1(x)} = \rho(x)$ e $\frac{g(x)}{a_1(x)} = f(x)$. Veremos, mais adiante, um método de resolução da equação do tipo escrita em (1.1). Este método nos possibilitará encontrar uma solução para (1.2) em um intervalo I onde as funções $\rho(x)$ e $f(x)$ sejam contínuas.

Variáveis Separáveis

Antes de mostrarmos o método, observe que se na equação $\frac{dy}{dx} + \rho(x)y = f(x)$ tivermos $\rho(x) = 0$, obteremos a equação

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \tag{1.3}$$

que com o auxílio da diferencial podemos escrevê-la como sendo

$$dy = f(x)dx.$$

Como $f(x)$ é contínua, podemos resolver a EDO integrando ambos os lados da equação; encontrando assim sua solução

$$y = \int f(x)dx = F(x) + c,$$

onde $F(x)$ é uma antiderivada de $f(x)$ em algum intevalo I.
Uma equação diferencial de primeira ordem que pode ser escrita na forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x)h(y)$$

é chamada de **separável** ou de **variáveis separáveis** e pode ser resolvida por integração direta, como foi feito no caso anterior. Note que a equação escrita como (1.3) também é uma equação separável, onde $h(y) = 1$.

Método do Fator Integrante para Equação Linear de Primeira Ordem

Anuciaremos um teorema que nos ajudará a encontrar a função desconhecida μ de uma EDO linear de primeira ordem. A demonstração do mesmo poderá ser visto em [1].

Teorema 2. *Suponha que $M(x, y)$ e $N(x, y)$ sejam funções contínuas e que suas derivada parciais são contínuas em um retângulo $R : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha < x < \beta, \gamma < y < \theta\}$. Então, a equação $M(x, y) + N(x, y)y' = 0$, é uma equação diferencial exata em R se, e somente se,*

$$M_y(x, y) = N_x(x, y), \quad \forall (x, y) \in R. \tag{1.4}$$

Isto é, existe uma função $\psi(x, y)$ satisfazendo as equações, $\psi_x(x, y) = M(x, y)$ e $\psi_y(x, y) = N(x, y)$,
se, e somente se, $M(x, y)$ e $N(x, y)$ satisfazem a equação (1.5).

Voltando para o caso da equação escrita em (1.2), ou seja, a equação

$$\frac{dy}{dx} + \rho(x)y = f(x), \tag{1.5}$$

para encontrarmos sua solução devemos usar o método do **fator integrante**. Tal método consiste em encontrarmos uma função $\mu(x)$ que quando multiplicamos a equação (1.5) por ela a tornará uma equação exata.

Voltando ao método do Fator Integrante, primeiro, multiplicando (1.5) por $\mu(x)$, obtemos

$$\mu(x)\frac{dy}{dx} + \mu(x)\rho(x)y = \mu(x)f(x), \tag{1.6}$$

que com o auxílio da diferencial pode ser escrita como

$$\mu(x)dy + \mu(x)\rho(x)ydx = \mu(x)f(x)dx \tag{1.7}$$

ou

$$\mu(x)dy + \mu(x)[\rho(x)y - f(x)]dx = 0. \tag{1.8}$$

Pelo **Teorema 2**, o lado esquerdo da equação (1.8) será uma equação exata se

$$\frac{\partial}{\partial y}\mu(x)[\rho(x)y - f(x)] = \frac{\partial}{\partial x}\mu(x) \tag{1.9}$$

ou

$$\mu(x)\rho(x) - 0 = \mu'(x)$$
$$\frac{d\mu}{dx} = \mu\rho(x).$$

Esta última equação é separável e podemos encontrar $\mu(x)$ integrando ambos os lados da igualdade, ou seja,

$$\int \frac{d\mu}{\mu} = \int \rho(x)dx$$
$$ln|\mu| = \int \rho(x)dx + C.$$

Aplicando-se a exponencial a ambos os membros da igualdade acima, obtemos

$$\mu(x) = \pm e^{\int \rho(x)dx + C}$$

$$\mu(x) = e^C e^{\int \rho(x)dx}$$

e assim,

$$\mu(x) = C_1 e^{\int \rho(x)dx}, \tag{1.10}$$

pois e^C é uma constante.

Como a equação (1.6) não se altera se à multiplicarmos por uma constante, então, podemos tomar $C_1 = 1$ e obtemos

$$\mu(x) = e^{\int \rho(x)dx}. \tag{1.11}$$

Observe que a função $\mu(x)$, a qual é o nosso fator integrante para a equação linear, é contínua, diferenciável e diferente de 0 para todo x pertencente a I. Agora, substituindo $\mu(x)$ por $e^{\int \rho(x)dx}$ na equação (1.7), obtemos

$$e^{\int \rho(x)dx}dy + e^{\int \rho(x)dx}\rho(x)ydx = e^{\int \rho(x)dx}f(x)dx,$$

a qual é uma equação exata.

O lado esquerdo da equação anterior é a derivada do produto de duas funções, sendo assim, ela pode ser escrita como

$$d[e^{\int \rho(x)dx}y] = e^{\int \rho(x)dx}f(x)dx. \tag{1.12}$$

Podemos determinar a solução da equação linear de primeira ordem $dy/dx + \rho(x)y = f(x)$ integrando (1.12). Isto é,

$$\int d[e^{\int \rho(x)dx}y] = \int e^{\int \rho(x)dx}f(x)dx$$

$$[e^{\int \rho(x)dx}y] = e^{\int \rho(x)dx}f(x)dx + c.$$

Assim,

$$y = \frac{\int e^{\int \rho(x)dx}f(x)dx}{e^{\int \rho(x)dx}} + c,$$

ou

$$y = e^{-\int \rho(x)dx}\int e^{\int \rho(x)dx}f(x)dx + Ce^{-\int \rho(x)dx}.$$

1.5 Sistemas de Equações Diferenciais

Sendo Ω um aberto pertecente ao $\mathbb{R}^n$, com I um intervalo de $\mathbb{R}$ e $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ uma função contínua, a forma geral de um sistema de equações diferenciais é

$$y'(x) = A(x)y(x) + b(x) \tag{1.13}$$

sendo

$$y(x) = \begin{bmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{bmatrix}, \quad A(x) = \begin{bmatrix} a_{11}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{bmatrix}, \quad b(x) = \begin{bmatrix} b_1(x) \\ \vdots \\ b_n(x) \end{bmatrix}$$

onde $y'(x)$ denota a derivada do vetor coluna $y(x)$ em relação a variável x e com $A(x)$ e $b(x)$ definidas para todo x no intervalo $I = (a, b)$.

A solução do sistema (1.13) é uma função $x : I \to \mathbb{R}^n$, derivável e que o satisfaz.

As equações lineares da forma

$$y^n(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = f(x)$$

são casos particulares de sistemas. Assim fazendo $y_1(x) = y(x)$, e

$y_1' = y_2$

$y_2' = y_3$

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$

$y_n' = -a_{n-1}y_n - \dots - a_1y_2 - a_0y_1 + f(x)$

obtendo assim, um sistema da forma (1.13) onde

$$A(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}; \quad b(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f(x) \end{bmatrix}$$

Para obter a solução geral do problema (1.13) basta encontrar a solução para o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = A(x)y(x) + b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad y_0 \in \mathbb{R}^n \tag{1.14}$$

Supondo que as funções que compõem as matrizes $A(x)$ e $b(x)$ sejam contínuas de x no intervalo I, conseguimos a existência e unicidade para o problema (1.14).

- Quando $b(x) \equiv 0$, o sistema (1.13) é homogêneo

$$y'(x) = A(x)y(x).$$

- Quando $A(x) \equiv A$, não depende de x, temos um sistema de coeficientes constantes

$$y'(x) = Ay(x) + b(x).$$

Capítulo 2

Equações Diferenciais Parciais

Neste capítulo estudaremos conceitos básicos das equações diferenciais parciais de primeira ordem. Este estudo é de fundamental importância na resolução do problema de tráfego de fluxo ao longo de uma rodovia modelado por uma equação diferencial parcial de primeira ordem (E.D.P.P.O.). Para um estudo mais detalhado ver [5] e [7].

Equações Diferenciais Parciais de Primeira Ordem

Seja $u = u(x, y)$ uma função de duas variáveis independentes. Uma E.D.P.P.O. é uma equação que contém as variáveis independentes x, y a variável dependente ou função desconhecida u e suas derivadas $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, $u_y = \frac{\partial u}{\partial y}$

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = 0, \tag{2.1}$$

onde F é uma função dada.

Um conjunto Ω do espaço euclidiano $\mathbb{R}^2$ é chamado um domínio se é aberto e conexo. Denotemos por $C(\Omega)$ o espaço das funções contínuas em Ω e $C^1(\Omega)$ o espaço das funções cujas a derivadas de primeira ordem são funções contínuas.

Uma solução da equação (2.1) no domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é uma função $u = u(x, y)$ pertencente $C^1(\Omega)$ tal que satisfaz duas condições:

- Para todo ponto $(x, y) \in \Omega$ o ponto (x, y, u, u_x, u_y) está no domínio da função F;
- Quando $u = u(x, y)$ é substituída em (2.1) o resultado da equação é uma identi-

dade em x, y para todo $(x, y) \in \Omega$.

Alguns exemplos:

1) $u_x + u_y = 0$ (**Equação do transporte**)

2) $xu_x + yu_y = u^2$

3) $u_x + uu_y = 0$ (**Equação de onda de choque**)

4) $u_x^2 + u_y^2 = 1$ (**Equação eikonal**)

2.1 Classificação das EDP de Primeira Ordem

A classificação das E.D.P.P.O. está de acordo com a função F. Uma equação da forma

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = d(x,y) \tag{2.2}$$

é chamada linear. Aqui a função F é linear em u com todos os coeficientes dependendo somente das variáveis x e y independentes. A equação (1) do exemplo acima é uma equação linear. Uma equação da forma

$$A(x,y)u_x + B(x,y)u_y = C(x,y,u) \tag{2.3}$$

é chamada semi-linear. Note que os coeficientes de u_x e u_y são unicamente funções das variáveis independentes. A equação (2) é uma equação semi-linear. Uma equação da forma

$$A(x,y,u)u_x + B(x,y,u)u_y = C(x,y,u) \tag{2.4}$$

é chamada quasi-linear. Aqui a função F é uma função linear nas derivadas u_x e u_y com os coeficientes A, B, C dependendo das variáveis independentes x e y, bem como de u desconhecida. A equação (3) é uma equação quasi-linear. Por fim, uma equação que não cabe nenhuma das classificações acima é chamada de não-linear, por exemplo a equação (4). Nas E.D.P.P.O. lineares (2.2) dizemos que é homogênea quando $d(x,y) = 0$, caso contrário é dita não homogênea.

2.2 Condições de Contorno e Iniciais

A equação diferencial parcial sujeita a determinadas condições, sob a forma de condições iniciais ou de contorno é conhecido como um problema de valor inicial (PVI) ou problema do valor contorno (PVC). As condições iniciais, também conhecidos como condições de Cauchy, são os valores da função desconhecida u e de um número apropriado de suas derivadas no ponto inicial, enquanto que as condições de contorno são os valores na fronteira $\partial\Omega$ do domínio Ω. Os três tipos mais importantes de condições de contorno são:

- Condições de Dirichlet são os valores de u em cada ponto da fronteira $\partial\Omega$;
- Condições Neumann são os valores da derivada normal de u em cada ponto da fronteira $\partial\Omega$;
- Condições de contorno mistos são os valores de uma combinação linear de u e sua derivada normal em cada ponto da fronteira $\partial\Omega$.

2.3 O Problema de Cauchy: Equações Lineares

Considere o seguinte problema

$$\begin{cases} a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = 0, & (x,y) \in \Omega, \\ u(\sigma(t),\rho(t)) = f(t), & t \in I \end{cases} \tag{2.5}$$

onde Ω um domínio e $\gamma(t) = (\sigma(t),\rho(t))$ é uma parametrização de uma curva qualquer em Ω, chamada curva inicial do problema. Este tipo de problema é chamado um problema de **Cauchy**.

Definição 2.1: As curvas características da equação de primeira ordem linear homogênea

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = 0,$$

com coeficientes a, $b \in C^1(\Omega)$ são as curvas $C(s) = (x(s),y(s))$, soluções do sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} x'(s) = a(x(s),y(s)), \\ y'(s) = b(x(s),y(s)). \end{cases} \tag{2.6}$$

Proposição 2.1: *Uma solução u para a equação de primeira ordem linear homogênea*

$$a(x, y)u_x + b(x, y)u_y = 0,$$

é constante ao longo de uma curva se e somente se ela é uma curva característica da equação.

Demonstração: De fato, se $C(s) = (x(s), y(s))$ é uma solução do sistema de equações diferenciais acima, então, pela regra da cadeia (Apêndice),

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d}{ds}u(C(s)) &= \frac{d}{ds}u(x(s), y(s)) = x'(s)u_x(x(s), y(s)) + y'(s)u_y(x(s), y(s)) \\ &= a(x(s), y(s))u_x(x(s), y(s)) + b(x(s), y(s))u_y(x(s), y(s)) = 0. \end{aligned} \right. \tag{2.7}$$

e portanto u é constante ao longo da curva C.

Reciprocamente, seja $C(s) = (x(s), y(s))$ uma curva parametrizada em Ω e suponha que ela seja uma curva de nível de u. Então ao longo desta curva temos

$$\frac{d}{ds}u(C(s)) = 0.$$

Pela regra da cadeia,

$$\frac{d}{ds}u(C(s)) = x'(s)u_x(x(s), y(s)) + y'(s)u_y(x(s), y(s)) = (x'(s), y'(s)) \cdot \nabla u(x(s), y(s)) = 0,$$

ou seja, o vetor gradiente $\nabla u(x(s), y(s))$ é perpendicular à curva C em cada ponto $(x(s), y(s))$. Mas u ser solução da equação de primeira ordem homogênea é equivalente a dizer que o vetor $(a(x, y), b(x, y))$ também é perpendicular ao vetor $\nabla u(x, y)$

$$a(x, y)u_x(x, y) + b(x, y)u_y(x, y) = (a(x, y), b(x, y)) \cdot \nabla u(x, y) = 0.$$

Assim, se u é uma solução da equação homogênea, os vetores $(x'(s), y'(s))$ e $(a(x(s), y(s)), b(x(s), y(s)))$ são paralelos, logo existe uma função real $\lambda(s)$ tal que

$$\left\{ \begin{aligned} x'(s) &= \lambda(s)a(x(s), y(s)), \\ y'(s) &= \lambda(s)b(x(s), y(s)). \end{aligned} \right.$$

Por uma mudança da parametrização das curvas características (mudando o vetor tangente $(x'(s), y'(s))$, podemos tomar $\lambda(s) \equiv 1$.

Exemplo 2.1: Vamos obter as curvas características planas do problema de Cauchy

$$\begin{cases} 3u_x - 4u_y = x^2, \\ u(x, \frac{3}{4}x) = \frac{1}{9}x^3, \ x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

As curvas características são dadas pelo sistema de EDO's

$$\begin{cases} x'(s) = 3, \\ y'(s) = -4. \end{cases}$$

Logo, as curvas características deste problema é dada por $4x + 3y = c$, onde $c \in \mathbb{R}$.

Dado que o comportamento das curvas características longe da curva inicial pode ser complexo, não esperamos estabelecer resultados globais de existência de soluções (ou seja, uma solução definida em todo o domínio); a existência de uma solução global dependerá tanto da organização das curvas características, como da escolha de uma curva inicial adequada. Assim, o teorema a seguir estabelece a existência de uma solução apenas localmente.

Teorema 3 (Existência e Unicidade)**.** Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ aberto, $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto, γ uma curva suave em Ω parametrizada por $\gamma(t) = (\sigma(t), \rho(t))$, $t \in I$, $f \in C^1(\Omega)$ e $a, b, c \in C^1(\Omega)$. Suponha que $a(x,y)^2 + b(x,y)^2 \neq 0$, $\forall (x,y) \in \Omega$, e

$$\begin{vmatrix} a(\sigma(t), \rho(t)) & b(\sigma(t), \rho(t)) \\ \sigma'(t) & \rho'(t) \end{vmatrix} \neq 0, \ \forall t \in I.$$

Então o problema (2.5) tem uma única solução de classe C^1 em uma vizinhança da curva $\gamma(t)$ em Ω.

Demonstração: ver [5].

Exemplo 2.2: Vamos resolver o problema de Cauchy

$$\begin{cases} 3u_x - 4u_y = x^2, \\ u(x, \frac{3}{4}x) = \frac{1}{9}x^3, \ x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Pelo exemplo anterior temos

$$\begin{cases} x(s,t) = 3s + t, & x(0,t) = t \\ y(s,t) = -4s + \frac{3}{4}t, & y(0,t) = \frac{3}{4}t \end{cases}$$

Vamos analisar a transversalidade

$$\begin{vmatrix} x_s & x_t \\ y_s & y_t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -4 & \frac{3}{4} \end{vmatrix} = \frac{25}{4} \neq 0.$$

Assim obter uma solução para o problema é resolver o problema de valor inicial

$$\begin{cases} v_s(s,t) = (3s+t)^2 \\ v(0,t) = \frac{1}{9}t^3. \end{cases}$$

Desta forma temos que $v(s,t) = \frac{1}{9}(3s+t)^3$, ou seja, a solução do problema de Cauchy é dada por $u(x,y) = \frac{1}{9}x^3$.

Exemplo 2.3: Encontre a solução do problema de Cauchy

$$\begin{cases} 2yu_x + u_y = ye^x \\ u(x,0) = e^x. \end{cases}$$

Vamos resolver o sistema de EDO's associado ao problema

$$\begin{cases} x_s(s,t) = 2y, & x(0,t) = t \\ y_s(s,t) = 1, & y(0,t) = 0. \end{cases}$$

Obtemos,

$$\begin{cases} x(s,t) = s^2 + t \\ y(s,t) = s. \end{cases}$$

Calculando,

$$\begin{vmatrix} x_s & x_t \\ y_s & y_t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2s & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Desta forma podemos inverter as variáveis e resolver o problema e valor inicial

$$\begin{cases} v_s(s,t) = se^{s^2+t} \\ v_s(0,t) = e^t. \end{cases}$$

A solução do PVI é dado por $v(s,t) = \dfrac{1}{2}e^{s^2+t} + e^t$ como podemos inverter as variáveis, isto é, $v(s,t) = u(x,y)$ então a solução do problema de Cauchy é $u(x,y) = \dfrac{1}{2}e^x + e^{x-y^2}$.

2.4 O Problema de Cauchy: Equações Quasi-lineares

A resolução de problemas de Cauchy para equações quasi-lineares é bastante semelhante ao caso linear; a diferença é que no caso linear precisamos trabalhar com curvas em $\mathbb{R}^3$.

Definição 2.2: As curvas características da equação de primeira ordem quasi-linear

$$a(x,y,u)u_x + b(x,y,u)u_y = c(x,y,u),$$

é uma curva suave que admite a parametrização

$$C : t \in I \mapsto (\alpha(s), \beta(s), \eta(s)) \in \mathbb{R}^3,$$

I um intervalo aberto, tal que

$$\begin{cases} \alpha'(s) = a(\alpha(s), \beta(s), \eta(s)) \\ \beta'(s) = b(\alpha(s), \beta(s), \eta(s)) \\ \eta'(s) = c(\alpha(s), \beta(s), \eta(s)). \end{cases} \tag{2.8}$$

Uma curva suave $\Gamma : t \in I \mapsto (\sigma(t), \rho(t), \xi(t)) \in \mathbb{R}^3$ é dita regular se os vetores $(\sigma(t), \rho(t))$ e

$$(a(\sigma(t), \rho(t), \xi(t)), a(\sigma(t), \rho(t), \xi(t)))$$

nunca são paralelos qualquer que seja $t \in I$. Como no caso linear, é possível mostrar que, se Γ é uma curva regular, existe uma única solução clássica para o problema de Cauchy para a condição inicial $u(\sigma(t), \rho(t)) = \xi(t)$, $t \in I$, em uma região aberta do plano contendo a curva inicial $\gamma(t) = (\sigma(t), \rho(t))$, $t \in I$. A solução é obtida integrando-se ao longo das curvas características que intersectam a curva Γ; isso corresponde a resolver o sistema

$$\begin{cases} x_s(s,t) = a(x(s,t)), y(s,t)), z(s,t))), & x(0,t) = \sigma(t), \\ y_s(s,t) = b(x(s,t)), y(s,t)), z(s,t))), & y(0,t) = \rho(t), \\ v_s(s,t) = c(x(s,t)), y(s,t)), z(s,t))), & v(0,t) = \xi(t), \end{cases}$$

e tomar $u(x,y) = v(s,t)$.

Exemplo 2.4: Encontre a solução do seguinte problema de Cauchy

$$\begin{cases} -yu_x + xu_y = u^2 + 1 \\ u(x,0) = -x^2, \; x > 0 \end{cases}$$

O sistema de EDO's para o problema é

$$\begin{cases} x_s = -y, & x(0,t) = t, \\ y_s = x, & y(0,t) = 0, \\ v_s = v^2 + 1, & v(0,t) = -t^2, \; t > 0. \end{cases}$$

As duas primeiras equações nos dá $x^2 + y^2 = k$, $k \in \mathbb{R}$. Utilizando suas condições iniciais obtemos $x^2 + y^2 = t$. Da última EDO temos $\operatorname{arctg} v(s,t) = s + c$, ou ainda, $v(s,t) = \operatorname{tg}(s + c)$. Utilizando a condição inicial obtemos que $c = \operatorname{arctg}(-t^2)$. Assim

$$v(s,t) = \frac{\operatorname{tg}(s) - t^2}{1 - \operatorname{tg}(s)t^2}.$$

Sabendo que $v(s,t) = u(x,y)$ e $t = x^2 + y^2$ obtemos

$$s = \operatorname{arctg}\Big(\frac{(x^2+y^2)^2 + u(x,y)}{1 - u(x,y)(x^2+y^2)^2}\Big).$$

Donde segue,

$$u(x,y) = \frac{\dfrac{(x^2+y^2)^2 + u(x,y)}{1 - u(x,y)(x^2+y^2)^2} - (x^2+y^2)^2}{1 + \dfrac{(x^2+y^2)^2 + u(x,y)}{1 - u(x,y)(x^2+y^2)^2}(x^2+y^2)^2},$$

realizando manipulações algébricas tem-se

$$u(x,y) = \frac{(x^2+y^2)^2}{1 - (x^2+y^2)^2}.$$

Exemplo 2.5: Encontre a solução do problema de Cauchy

$$\begin{cases} xu_x - yu_y = u^2 \\ u(x,1) = 1, \; x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

O sistema de EDO's para o problema é

$$\begin{cases} x_s = x, & x(0,t) = t, \\ y_s = -y, & y(0,t) = 1, \\ v_s = v^2, & v(0,t) = 1. \end{cases}$$

A resolução deste sistema é dado por

$$\begin{cases} x(s,t) = e^s t, \\ y(s,t) = e^{-s}, \\ v(s,t) = \dfrac{1}{-s+1}. \end{cases}$$

Calculando,

$$\begin{vmatrix} x_s & x_t \\ y_s & y_t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^s t & e^s \\ -e^{-s} & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Logo podemos fazer uma mudança de variável

$$\begin{cases} t = xy, \\ s = -\ln y, \end{cases}$$

donde segue que a solução do problema de Cauchy $u(x,y) = \dfrac{1}{\ln y + 1}$, com $\ln y \neq -1$, pois $v(s,t) = \dfrac{1}{-s+1}$.

O método de resolução dos exemplos é conhecido como o Método das Características. Consiste em transformar uma EDP em uma EDO e como sabemos que ao longo das curvas características a EDP é constante então integramos ao longo de uma curva característica. Mas, nem sempre isto é possível, às vezes o determinante jacobiano da mudança de variáveis é nulo impossibilitando a mudança de variável. E, até mesmo o determinante é não nulo o Teorema garante a existência, mas a solução não é dada explicitamente.

Capítulo 3

Ondas de Choque

Iniciamos este capítulo fazendo uma observação sobre a notação que iremos adotar. No capítulo anterior utilizamos a variável t para indicar o parâmetro da curva inicial, agora utilizaremos como a variável temporal, pois, faremos uma aplicação física sobre o fluxo de tráfego ao longo de uma rodovia.

Considere o Problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_t + f(u)u_x = 0, \ (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) = u_0(x), \end{cases} \tag{3.1}$$

onde $u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função dada. Para obtermos uma solução deste problema faremos o mesmo tratamento que foi feito na capítulo anterior. Para isso, consideremos $f(u) = k$ onde k é uma constante real. O sistema de EDO's fica

$$\begin{cases} x_s = k, & x(0,z) = z \\ t_s = 1, & t(0,z) = 0. \end{cases}$$

Logo a solução deste sistema é dado por

$$\begin{cases} x(s,z) = ks + z \\ t(s,z) = s. \end{cases}$$

Calculando o jacobiano da mudança de variáveis

$$\begin{vmatrix} x_s & x_z \\ t_s & t_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Portanto, a transformação possui inversa, isto é,

$$\begin{cases} z(x,t) = x - kt \\ s(x,t) = t. \end{cases}$$

Assim, a curva característica passando por $(z, 0)$ é a reta $x - kt = z$ ou $x = kt + z$ de inclinação k com relação ao eixo $\overrightarrow{ot}$.

Agora suponha $u(x, t)$ uma solução clássica do problema de Cauchy. Considere $u(x, t)$ sobre a reta característica por $(z, 0)$, isto é,

$$u(x,t) = u(x(s), t(s)).$$

Derivando com relação ao parâmetro s da reta característica obtemos

$$\frac{d}{ds}[u(x(s), t(s))] = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{dt}{ds} = ku_x + u_t = 0.$$

Isto implica que $u(x(s), t(s))$ é constante ao longo da curva característica. Logo,

$$u(x(s), t(s)) = u(x(0), t(0)) = u(z, 0) = u_0(z).$$

Portanto, nas variáveis (x, t) temos que a solução do problema de Cauchy

$$u(x,t) = u_0(x - kt).$$

3.1 Formação de Choques

Vamos considerar o problema de Cauchy para a equação de Burger

$$\begin{cases} u_t + \left(\dfrac{u^2}{2}\right)_x = 0, \ (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) = u_0(x), \end{cases} \tag{3.2}$$

onde $u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $C^1(\mathbb{R})$.

Suponha que $u(x, y)$ é uma solução clássica deste problema de valor inicial. Determinamos uma fórmula para ela. Como $u \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ então escrevemos a EDP da seguinte forma

$$u_t + uu_x = 0. \tag{3.3}$$

Vamos encontrar as curvas características planas passando pelo ponto

$$\begin{cases} x_s = u(x(s)t(s)), & x(0,z) = z \\ t_s = 1, & t(0,z) = 0. \end{cases}$$

Como vimos anteriormente $u(x,t)$ ao longo das características é constante então

$$u(x(s), y(s)) = u_0(z).$$

Assim, o sistema de EDO's que define as características por $(z, 0)$ é dado por

$$\begin{cases} x_s = u_0(z), & x(0,z) = z \\ t_s = 1, & t(0,z) = 0. \end{cases}$$

A solução para o sistema é

$$\begin{cases} x(s) = u_0(z)s + c_1 \\ t(s) = s + c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(s,z) = u_0(z)s + z \\ t(s,z) = s \end{cases}$$

Calculando o jacobiano da mudança de variáveis

$$\frac{\partial(x,t)}{\partial(s,z)} = \begin{vmatrix} x_s & x_z \\ t_s & t_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_0(z) & u_0'(z)s + 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -(u_0'(z)s + 1).$$

Isto implica

$$\frac{\partial(x,t)}{\partial(s,z)} \neq 0 \Leftrightarrow u_0'(z)s + 1 \neq 0.$$

Sendo $s \geq 0$, há duas possibilidades:

- Se $u_0'(z) > 0$ então $\dfrac{\partial(x,t)}{\partial(s,z)} \neq 0$. Logo é possível encontrar a inversa;
- Se $u_0'(z) < 0$, então existe $s = \dfrac{1}{-u_0'(z)}$ tal que $\dfrac{\partial(x,t)}{\partial(s,z)} = 0$. Dessa forma não é possível encontrar a inversa da mudança de variável.

Observação: De qualquer forma as curvas características são retas de inclinação $u_0(z)$ em relação ao eixo $\overrightarrow{ot}$

Então se existir $z_1 < z_2$ com $u_0(z_1) > u_0(z_2)$ então as retas características por $(z_1, 0)$ e $(z_2, 0)$ se encontrarão em qualquer ponto $t_1 > 0$.

Portanto, $u(x_1, t_1)$ não está bem definido, pois $u(x_1, t_1) = u_0(z_1)$ e $u(x_1, t_1) = u_0(z_2)$, mas

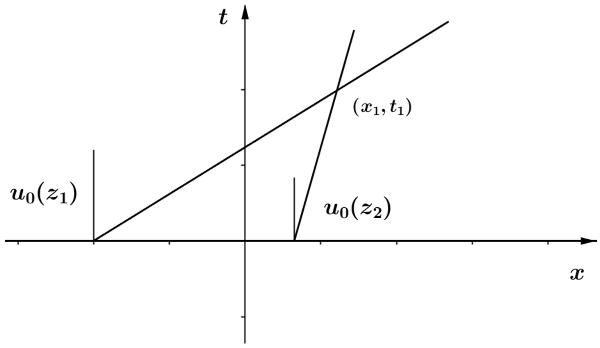

Figura 3.1: Inclinação das curvas características.

$$u_0(z_1) \neq u_0(z_2).$$

Dizemos que a solução tem um "choque"no ponto (x_1, t_1) ou dizemos que a solução é uma onda de choque em (x_1, t_1). No entanto, se $u_0'(z) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ o método das características funciona e a solução é dada implicitamente por

$$u(x,t) = u_0(z) = u_0(x - u_0(z)t) = u_0(x - u(x,t)t).$$

Exemplo: 3.1 Considere o problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0, \ (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) = u_0(x), \end{cases}$$

onde

$$u_0(z) = \begin{cases} 1, & z \leq 0 \\ 1 - z, & 0 \leq z \leq 1 \\ 0, & z > 1 \end{cases}$$

Claramente u_0 é contínua.

Pelo tratamento feito anteriormente as curvas características são dadas pelas expressões

$$(I) \begin{cases} x(s,z) = u_0(z)s + z \\ t(s,z) = s \end{cases}$$

Vamos obter as expressões explícitas das curvas características e logo após esboçaremos em um único gráfico. Para isso dividiremos em três casos:

- $z \leq 0$;

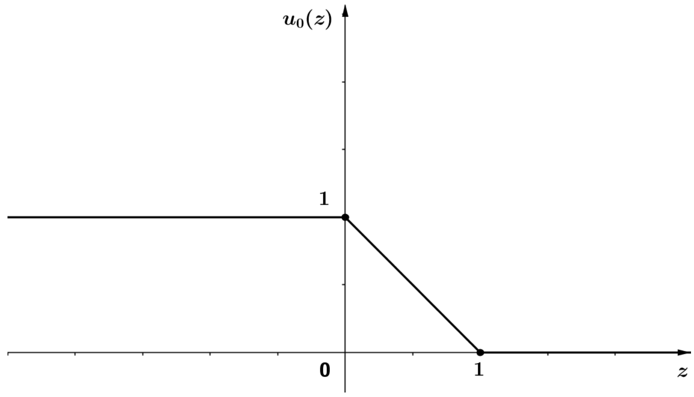

Figura 3.2: Gráfico da função u_0

- $0 \leq z \leq 1$;
- $z > 1$.

Para $z \leq 0$; temos $u_0(z) = 1$. Tomando $z = -1$ temos por (I) a curva $(x,t) = (s-1, s)$ ou ainda, $x = t - 1$. Tomando $z = 0$ temos por (I) a curva $x = t$.

Para $0 \leq z \leq 1$ temos $u_0(z) = 1 - z$. Tomando $z = \frac{1}{2}$ temos por (I) a curva $(x,t) = (\frac{1}{2}s + \frac{1}{2}, s)$ ou ainda, $x = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}$. Tomando $z = 1$ temos por (I) a curva $x = 1$.

Para $z > 1$ temos $u_0(z) = 0$. Tomando $z = \frac{3}{2}$ temos por (I) a curva $(x,t) = (\frac{1}{2}s + \frac{1}{2}, s)$ ou ainda, $x = \frac{3}{2}$. Tomando $z = 2$ temos por (I) a curva $x = 2$.

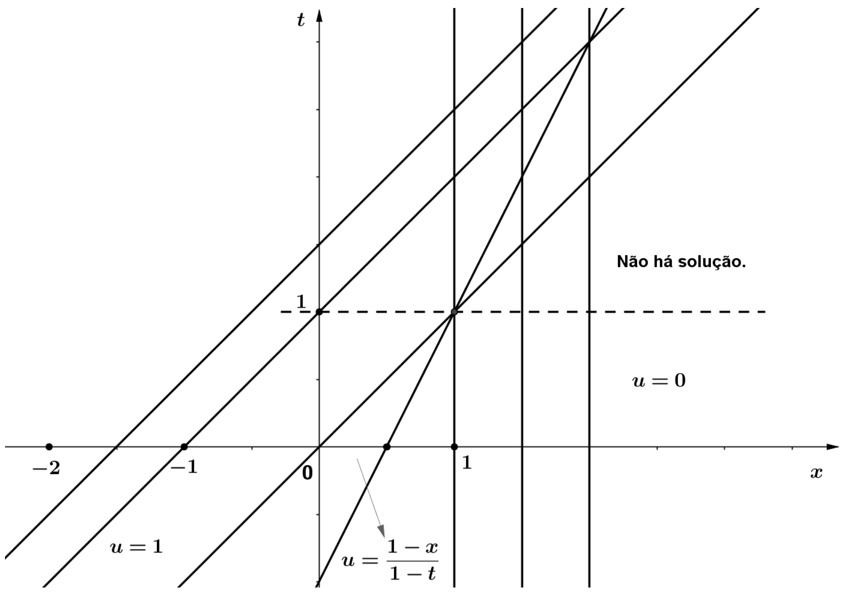

Figura 3.3: Curvas características planas

Portanto, para $t < 1$ (antes do choque) a solução é dada por

$$u(x,t) = \begin{cases} u_0(z) = 1, & z \leq 0 \\ u_0(z) = 1 - z, & 0 \leq z \leq 1 \\ u_0(z) = 0, & z > 1 \end{cases}$$

Invertendo obtemos

$$u(x,t) = \begin{cases} 1, & x \leq t \\ \dfrac{1-x}{1-t}, & 0 \leq \dfrac{x-t}{1-t} \leq 1 \\ 0, & x \geq 1 > t. \end{cases}$$

3.2 Fluxo de Tráfego ao Longo de uma Rodovia

O modelo matemático estudado aqui terá como base a ideia de que o movimento individual dos carros ao longo de uma estrada ou rodovia se comporta de maneira semelhante fluxo de um fluido contínuo. Dessa forma, imaginemos que os carros fluem na direção positiva ao longo do eixo x disposto na rodovia e que a função $p = p(x,t)$ representa no tempo t a densidade do tráfego de automóveis no ponto x da estrada (carros por unidade de comprimento), enquanto a taxa de fluxo em que os carros passam ao lado do ponto x no tempo t e representado por $q = q(x,t)$ (carros por unidade de tempo). Observe a ilustração (Figura 3.3)

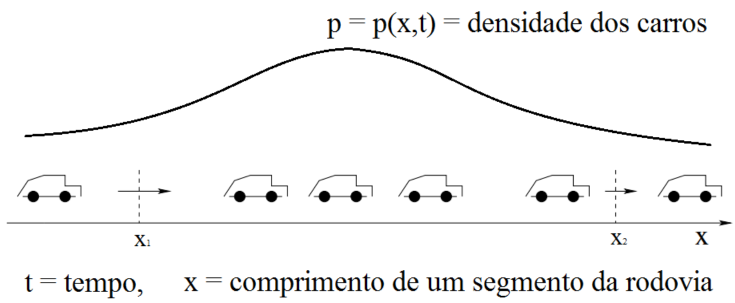

Figura 3.4: Ilustração do modelo

Obtemos uma relação entre p e q sob as condições que os carros não entram ou saem da rodovia em qualquer um dos seus pontos e as funções $p(x,t)$ e $q(x,t)$ são funções de classe C^1 de x e t.

O número total de carros no segmento da rodovia é dado

$$\int_{x_1}^{x_2} p(x,t)dx, \tag{3.4}$$

sendo $[x_1, x_2]$ com $x_2 > x_1$, qualquer segmento da rodovia. Dessa forma a taxa de variação do número de carros no segmento é dada por

$$\frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x_2} p(x,t)dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial p}{\partial t}(x,t)dx.$$

Derivamos sobre o sinal de integral pois a função p é de classe C^1; isto deve-se a *Regra de Leibniz* (Apêndice). Como $q(x_1, t) - q(x_2, t)$ mede a taxa de carros por unidade de tempo que entram no segmento x_1 e a taxa de carros por unidade de tempo que saem do segmento em x_2, temos

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial p}{\partial t}(x,t)dx = q(x_1,t) - q(x_2,t).$$

Usando o *Teorema Fundamental do Cálculo*, o lado esquerdo da equação anterior fica

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial p}{\partial t}(x,t)dx = -\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial q}{\partial x}(x,t)dx$$

ou

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial p}{\partial t}(x,t) + \frac{\partial q}{\partial x}(x,t)\right] dx = 0. \tag{3.5}$$

Como (3.5) é válida para todo segmento e sendo o integrante uma função contínua, tem-se

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0. \tag{3.6}$$

Com base em considerações teóricas e dados experimentais, por hipótese, q depende da densidade de tráfego p, ou seja,

$$q(x,t) = G(p(x,t)),$$

ou

$$q = G(p) \tag{3.7}$$

para alguma função G. A hipótese feita acima parece satisfatória, já que a velocidade de um veículo é controlada pela densidade de veículos que estão em seu intorno. Sabemos que existe uma relação entre p e q. A relação que usaremos aqui é originada de dados experimentais, dada por

$$q = cp\left(1 - \frac{p}{p_1}\right), \tag{3.8}$$

onde p_1 representa a densidade máxima de carros na estrada (carros por unidade de comprimento) e c a velocidade média dos carros; viajando insentos de interferências de outros carros. Observe que se $p = 0$ ou $p = p_1$ teremos $q = 0$. Agora, substituindo a equação (3.8) em (3.6), obtemos

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left[cp\left(1 - \frac{p}{p_1}\right)\right] = 0$$

que é o mesmo que

$$\frac{\partial p}{\partial t} + c\left(1 - \frac{2p}{p_1}\right)\frac{\partial p}{\partial x} = 0. \tag{3.9}$$

Primeiro dividindo a equação anterior por p_1

$$\frac{\partial p}{\partial t p_1} + c\left(1 - \frac{2p}{p_1}\right)\frac{\partial p}{\partial x p_1} = 0$$

agora subtituindo $u = \frac{p}{p_1}$ (densidade normalizada), obteremos

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\,(1 - 2u)\,\frac{\partial u}{\partial x} = 0. \tag{3.10}$$

Se a densidade inicial normalizada é dada por

$$u(x, 0) = f(x), \tag{3.11}$$

então, a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + c\,(1 - 2u)\,\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases} \tag{3.12}$$

é implicitamente definida, para t suficiente pequeno, pela equação

$$u = f(x - ct(1 - 2u)). \tag{3.13}$$

Se $f \in C^1$, a solução existe de classe C^1 e é dada implicitamente como (3.13), desde que

$$1 - 2ctf'(x - ct(1 - 2u)) > 0 \tag{3.14}$$

Se $f'(x) \leqslant 0$ para todo x, a condição (3.14) é satisfeita para todo $t \geqslant 0$. Isso leva a (esperado) conclusão de que se, a densidade inicial do carro é constante ou decrescente na direção do fluxo de tráfego, um choque não acontece e o tráfego continua a fluir sem problemas. No entanto, se a densidade inicial do carro está a aumentar ao longo do qualquer comprimento da estrada, um choque, eventualmente, se desenvolve como o seguinte exemplo ilustra.

Seja a densidade inicial do carro dado pela função

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & \text{se} \quad x \leqslant 0, \\ \frac{1}{3} + (\frac{5}{12})x, & \text{se} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ \frac{3}{4}, & \text{se} \quad x \geqslant 1, \end{cases} \tag{3.15}$$

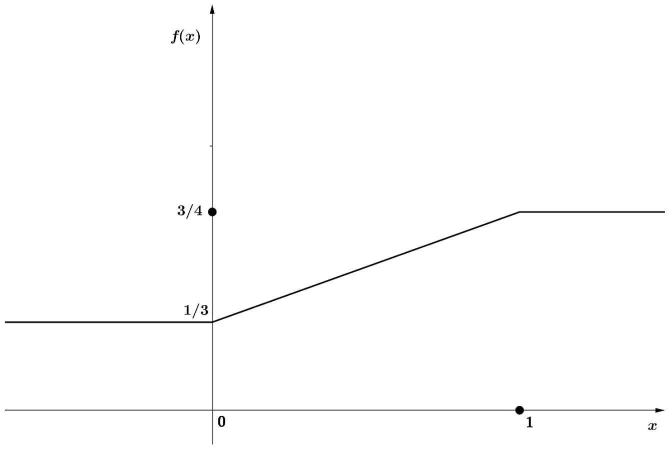

Figura 3.5: Gráfico da função densidade inicial

Note que $f(x)$ não possui derivadas em $x = 0$ e $x = 1$, logo o problema não possui solução clássica, pois para isso $f(x)$ teria que ser uma função de C^1 para todo x. Neste caso, um salto nos dados iniciais do problema tem como consequência um salto na derivada da solução do mesmo através de uma reta em $0(x,t)$. A solução continua sendo definida implicitamente pela equação (3.13). Usaremos o fato de que a solução é constante ao longo de certas retas no plano (x,t) para avaliar a solução. Substituiremos em nossos cálculos t por ct, uma vez que a variável de tempo t sempre vem multiplicada pela velocidade livre c.

Se $x_0 \leqslant 0$, então $u = u_0 = f(x_0) = \frac{1}{3}$ ao longo da reta $x - ct(1-2u_0) = x_0$, ou

$$u = \frac{1}{3} \quad ao \quad longo \quad das \quad retas \quad ct = 3(x - x_0), x_0 \leqslant 0. \tag{3.16}$$

Se $x_0 \geqslant 1$, então $u = u_0 = f(x_0) = \frac{3}{4}$ ao longo da reta $x - ct(1-2u_0)$, ou

$$u = \frac{3}{4} \quad ao \quad longo \quad das \quad retas \quad ct = -2(x - x_0), x_0 \geqslant 1. \tag{3.17}$$

Se $0 \leqslant x_0 \leqslant 1$, então $u = u_0 = f(x_0) = \frac{1}{3} + (\frac{5}{12})x_0$ ao longo da reta $x - ct[1 - 2(\frac{1}{3}) + (\frac{5}{12})x_0] = x_0$, ou

$$u = \frac{1}{3} + (\frac{5}{12})x_0 \quad ao \quad longo \quad das \quad retas \quad ct = \frac{6}{5}\left(\frac{x - x_0}{\frac{2}{5} - x_0}\right), 0 \leqslant x_0 \leqslant 1. \tag{3.18}$$

Observe que para $x_0 = 0$, $u = \frac{1}{3}$ ao longo da reta $ct = 3x$; enquanto para $x_0 = 1$, $u = \frac{3}{4}$ ao longo da reta $ct = -2(x-1)$. Estas duas retas se cruzam no ponto $(x, ct) = (\frac{2}{5}, \frac{6}{5})$ e com isso ocorre o que chamamos de *choque*. Veja a figura (3.6). Como todas as retas (3.18) passam pelo ponto $(x, ct) = (\frac{2}{5}, \frac{6}{5})$ conforme a figura (3.6), as retas $ct = 3x$ e $ct = -2(x-1)$ dividem a parte superior do plano (x, ct) em quatro regiões. Na região da "esquerda"$u = \frac{1}{3}$, e na região da "direita"$u = \frac{3}{4}$; enquanto na região "triangular"de vértices $(0,0)$, $(1,0)$ e $(\frac{2}{5}, \frac{6}{5})$, u é obtido pela equação (3.18), ou seja,

$$u = \frac{1}{3} + \frac{5}{12}\frac{6x - 2ct}{6 - 5ct}, \quad 0 \leqslant \frac{5}{12}\frac{6x - 2ct}{6 - 5ct} \leqslant 1, \quad 0 \leqslant ct \leqslant \frac{6}{5}. \tag{3.19}$$

Assim, na região aonde ocorreu o "choque"a solução possui uma descontinuidade e salto; os valores da solução não podem ser calculados através de análise. Os gráficos abaixo mostram o gráfico da solução u versus x para alguns valores de ct.

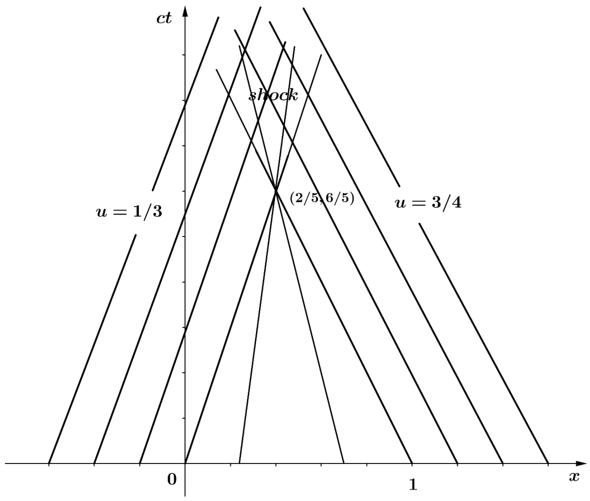

Figura 3.6: Interserção das curvas características

Apesar de não ser um campo fácil, o estudo das Equações Diferenciais Parcias é bastante eficaz na modelagem de fenômenos físicos. Mostramos de uma forma introdutória a aplicação de uma Equação Diferencial Parcial Quasi-linear de Primeira Ordem no Fluxo de Tráfego de Veículos ao Longo de uma Rodovia. E mesmo que ao longo deste trabalho tenhamos citado a explessão "solução clássica", vimos que nem sempre é possível encontra-la. O fenômeno citado aqui foi modelado através de uma EDP que não possuia solução clássica, pois a mesma dependia da função densidade inicial; a qual não era diferenciável. Vimos também que na aplicação do problema físico, se a densidade inicial dos carros fosse constante ou decrescente na direção que está ocorrendo o fluxo de tráfego, não ocorreria o choque entre veículos e fluxo ocorreria de maneira contínua. Caso a densidade inicial dos carros sejam crescente, ocorrerá choques e a solução do problema não será mais vista analiticamente após um período de tempo.

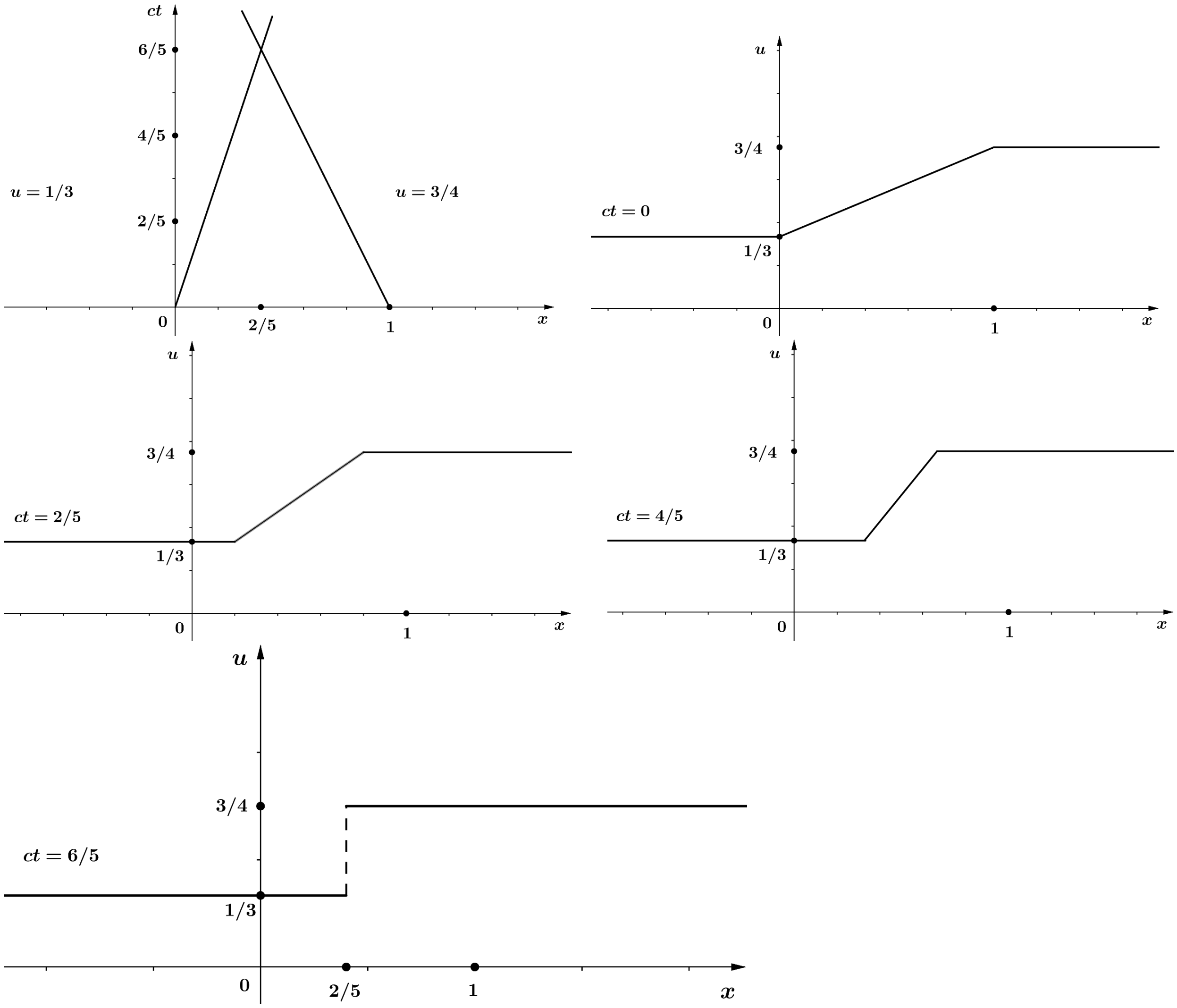

Figura 3.7: gráfico da solução u versus x para alguns valores de ct

Apêndice

Resultados utilizados

Teorema Fundamental do Cálculo

Primeira Parte: Seja f uma função continua num intervalo fechado $[a,b]$, se uma função $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ for definida por $G(x) = \int_a^b f(t)dt, \forall x \in [a,b]$, então G é uma antiderivada de f, isto é,

$$G'(x) = f(x).$$

Segunda Parte: Seja f uma função continua num intervalo fechado $[a,b]$, se F é uma antiderivada de f em $[a,b]$, então

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Demonstração ver [3] ou [4].

Função de Duas Variáveis a Valores Reais

Por definição, uma função de duas variáveis reais a valores reais é uma função $f : \Omega \to \mathbb{R}$, com Ω um subconjunto de $\mathbb{R}^2$, que leva a cada par $(x,y) \in \Omega$ um único número $w = (x,y) \in \mathbb{R}$. Assim, sendo indicado por $D_f = \Omega$ o domínio da função f, a imagem de f será

$$Imf = \{f(x,y) \in \mathbb{R} | (x,y) \in D_f\}.$$

Teorema: (Regra da Cadeia para Derivada de uma Função Composta) Sejam $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, Ω aberto, e $g : I \to \mathbb{R}^2$, tais que $g(t) \in \Omega$ para todo t no intervalo I. Nestas condições, se g for diferenciável em t_0 e f em $x_0 = g(t_0)$, então a composta $F(t) = f(g(t))$ será diferenciável em t_0 e vale a regra da cadeia

$$F'(t_0) = \nabla f(g(t_0)) \cdot g'(t_0).$$

Demonstração ver [3].

Vetor Gradiente

Seja $z = f(x, y)$ uma função que admite derivadas parciais no ponto (x_0, y_0), então para calcular o gradiente de f nesse ponto basta resolver

$$\nabla f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right),$$

onde $\nabla f(x_0, y_0)$ é um vetor perpendicular a uma curva C tangente ao gráfico de f no ponto (x_0, y_0).

Proposição (regra de Leibniz):

Seja $f(x, t)$ uma função real definida num retângulo $R = [a, b]\chi[c, d] \in \mathbb{R}^2$ integrável em x para cada valor real de t e $\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}$ a sua derivada parcial contínua em x e t no mesmo retângulo, então

$$\frac{d}{dt} \int_a^b f(x, t) dx = \int_a^b \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} dx.$$

Ver [3].

Referências Bibliográficas

[1] BOYCE, W.E. *Equações Diferenciais elementares e problema de valores de contorno.* Rio de Janeiro. LTC, 2006.

[2] FIGUEIREDO, D.G. *Equações diferenciais aplicadas* 3ª ed. Rio de Janeiro. IMPA, 2007.

[3] GUIDORIZZI, H.L. *Um curso de cálculo, volume 1.* 5ª ed. Rio de Janeiro. LTC, 2008.

[4] GONÇALVES, M.B. *Cálculo B.* 2ª ed. São Paulo. Pearson Prentice Hall, 2007.

[5] IÓRIO, V. *EDP, um curso de graduação.* 2ª ed. Rio de Janeiro. 2007.

[6] ZILL, D.G. *Equações Diferenciais, volume 1.* 3ª ed. São Paulo. 2001.

[7] ZACHMANOGLU, E.C.; THOE, D.W. *Introduction to partial differential equations with applications.* New York. Dover Publications, 1976.