



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM FÍSICA
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA

José Rodrigues da Silva

Termodinâmica do Buraco Negro Regular

Campina Grande, Paraíba, Brasil

9 de setembro de 2025

José Rodrigues da Silva

Termodinâmica do Buraco Negro Regular

Dissertação realizada sob orientação do Prof. Dr. Marcos Antônio Anacleto, apresentada à Unidade Acadêmica de Física em complementação aos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Professor Dr. Marcos Antônio Anacleto
Coorientador: Professor Dr. Jean Paulo Spinelly da Silva

Campina Grande, Paraíba, Brasil

9 de setembro de 2025

S586t Silva, José Rodrigues da.
Termodinâmica do buraco negro regular / José Rodrigues da Silva. –
Campina Grande, 2025.
53 f. : il. color.

Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal de Campina
Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2025.

"Orientação: Prof. Dr. Marcos Antônio Anacleto, Prof. Dr. Jean Paulo
Spinelly da Silva".

Referências.

1. Buraco Negro - Termodinâmica. 2. Buraco Negro Regular.
3. Métrica de Bardeen. 4. Métrica de Nozari-Mehdipour. I. Anacleto,
Marcos Antônio. II. Silva, Jean Paulo Spinelly da. III. Título.

CDU 524.882:536.7(043.3)



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
POS-GRADUACAO EM FISICA

Rua Aprigio Veloso, 882, - Bairro Universitario, Campina Grande/PB, CEP 58429-900

FOLHA DE ASSINATURA PARA TESES E DISSERTAÇÕES

JOSÉ RODRIGUES DA SILVA □

Termodinâmica do Buraco Negro Regular

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física como pré-requisito para obtenção do título de Mestre em Física.

Aprovada em: 14/05/2025

Marcos Antonio Anacleto
Presidente da Comissão e Orientador

Jean Paulo Spinelly da Silva
Coorientador

José André Vieira Campos □
Examinador Interno

Francisco Artur Pinheiro Alves Júnior
Examinador Externo



Documento assinado eletronicamente por **José André Vieira Campos**, **Usuário Externo**, em 26/05/2025, às 16:17, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 8º, caput, da [Portaria SEI nº 002, de 25 de outubro de 2018](#).



Documento assinado eletronicamente por **Francisco Artur Pinheiro Alves Júnior, Usuário Externo**, em 26/05/2025, às 17:03, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 8º, caput, da [Portaria SEI nº 002, de 25 de outubro de 2018](#).



Documento assinado eletronicamente por **MARCOS ANTONIO ANACLETO, PROFESSOR 3 GRAU**, em 29/05/2025, às 10:02, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 8º, caput, da [Portaria SEI nº 002, de 25 de outubro de 2018](#).



Documento assinado eletronicamente por **Jean Paulo Spinelly da Silva, Usuário Externo**, em 05/09/2025, às 10:30, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 8º, caput, da [Portaria SEI nº 002, de 25 de outubro de 2018](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site <https://sei.ufcg.edu.br/autenticidade>, informando o código verificador **5501290** e o código CRC **0871CE0A**.



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
POS-GRADUACAO EM FISICA

Rua Aprígio Veloso, 882, - Bairro Universitário, Campina Grande/PB, CEP 58429-900

REGISTRO DE PRESENÇA E ASSINATURAS

REGISTRO DE PRESENÇA E ASSINATURAS

ATA DA DEFESA PARA CONCESSÃO DO GRAU DE MESTRE EM FÍSICA, REALIZADA
EM 14 DE MAIO DE 2025

Aos quatorze dias do mês de maio do ano de dois mil e vinte e cinco, reuniram-se em caráter de solenidade pública, os membros da comissão designada para avaliar **José Rodrigues da Silva** ao grau de Mestre em Física, área de concentração Física. Foram componentes da Banca Examinadora os especialistas: o professor **Marcos Antonio Anacleto** (Orientador) – Doutor em Física, o professor **Jean Paulo Spinelly da Silva** (Coorientador) – Doutor em Física, o pesquisador **José André Vieira Campos** – Doutor em Física o professor **Francisco Artur Pinheiro Alves Júnior** □ □ – Doutor em Física, sendo o primeiro e o terceiro integrantes do corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Campina Grande, o segundo, integrante do corpo docente da Universidade Estadual da Paraíba, e o quarto, integrante do corpo docente da Universidade Federal do Vale do São Francisco. HORA DE INÍCIO: **14h00min** – LOCAL: **Sala Virtual**. Dando início aos trabalhos, o Presidente da Banca, professor **Marcos Antonio Anacleto**, após declarar os objetivos da reunião, apresentou o(a) candidato(a) **José Rodrigues da Silva** □ □, a quem concedeu a palavra para que dissertasse oral e sucintamente sobre o tema apresentado, intitulado "**Termodinâmica do Buraco Negro Regular**". Após discorrer o referido tema, o(a) candidato(a) foi arguido(a) pelos examinadores na forma regimental. Ato contínuo, passou a Comissão, em caráter secreto, a proceder a avaliação e julgamento do trabalho, concluindo por atribuir-lhe o conceito Aprovado. Face à aprovação, declarou o Presidente estar o(a) avaliado(a), legalmente habilitado(a) a receber o Grau de Mestre em Física, cabendo à Universidade Federal de Campina Grande, providências para a expedição do Diploma a que o(a) mesmo(a) faz jus. Nada mais havendo a tratar, foi lavrada a ata, que será submetida à aprovação da Comissão Examinadora. Campina Grande, 14 de maio de 2025.

Marcos Antonio Anacleto
Presidente da Comissão e Orientador

Jean Paulo Spinelly da Silva
Coorientador

José André Vieira Campos □
Examinador Interno

Francisco Artur Pinheiro Alves Júnior
Examinador Externo

José Rodrigues da Silva □
Candidato(a)

João Rafael Lucio dos Santos
Coordenador do Programa

2 - APROVAÇÃO

2.1. Segue a presente Ata de Defesa de Tese de Mestrado do(a) candidato(a) **José Rodrigues da Silva**, assinada eletronicamente pela Comissão Examinadora acima identificada.

2.2. No caso de examinadores externos que não possuam credenciamento de usuário externo ativo no SEI, para igual assinatura eletrônica, os examinadores internos signatários certificam que os examinadores externos acima identificados participaram da defesa da tese e tomaram conhecimento do teor deste documento.



Documento assinado eletronicamente por **José André Vieira Campos, Usuário Externo**, em 26/05/2025, às 16:17, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 8º, caput, da [Portaria SEI nº 002, de 25 de outubro de 2018](#).



Documento assinado eletronicamente por **Francisco Artur Pinheiro Alves Júnior, Usuário Externo**, em 26/05/2025, às 17:04, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 8º, caput, da [Portaria SEI nº 002, de 25 de outubro de 2018](#).



Documento assinado eletronicamente por **JOSÉ RODRIGUES DA SILVA, Usuário Externo**, em 26/05/2025, às 20:34, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 8º, caput, da [Portaria SEI nº 002, de 25 de outubro de 2018](#).



Documento assinado eletronicamente por **MARCOS ANTONIO ANACLETO, PROFESSOR 3 GRAU**, em 29/05/2025, às 10:02, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 8º, caput, da [Portaria SEI nº 002, de 25 de outubro de 2018](#).



Documento assinado eletronicamente por **Jean Paulo Spinelly da Silva, Usuário Externo**, em 05/09/2025, às 10:31, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 8º, caput, da [Portaria SEI nº 002, de 25 de outubro de 2018](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site <https://sei.ufcg.edu.br/autenticidade>, informando o código verificador **5500274** e o código CRC **4F293205**.

Referência: Processo nº 23096.026965/2025-72

SEI nº 5500274

Aos meus amados pais, Rositania Maria da Silva e Severino João da Silva, DEDICO.

Agradecimentos

- Agradeço primeiramente a Deus por me proporcionar o dom da vida, e por me ajudar em todos os momentos, seja pessoal ou acadêmico, pois sem ele não conseguiria nada. Por mim proporcionar oportunidades e me dá forças para sempre seguir em frente, e realizar meus sonhos.
- Sou eternamente grato aos meus pais Severino e Rositania pelos esforços de ambos, por me ajudar em toda essa caminhada, pelo amor, dedicação e por me incentivar nesta jornada de conciliar estudo e trabalho ao mesmo tempo. Amos vocês.
- Ao meu orientador, Dr. Marcos Antônio Anacleto, que confiou em mim, por toda paciência e cuidado na orientação deste trabalho, bem como na minha formação acadêmica deste curso.
- Ao meu co-orientador, Dr. Jean Paulo Spinelly da Silva, que além de um grande amigo é um professor/profissional exemplar. Agradeço por toda sua paciência, companheirismo e amizade em todo desenvolvimento desta jornada, que contribuiu significativamente e que acompanhou o meu processo de formação desde a graduação até aqui. Sou grato por todos os seus ensinamentos.
- À minha noiva Maria Almeida que sempre foi meu refúgio nos momentos bons e ruins desta caminhada, pelo seu companheirismo, seu amor e por me motivar a ser um excelente profissional da educação, bem como por compreender minhas ausências devido à vida acadêmica. Por me incentivar e sempre acreditar que posso realizar meus sonhos.
- À minha irmã Rosiane pela motivação e companheirismo e ao meu sobrinho Roger por me proporcionar sempre alegrias.
- À toda minha família, por acreditar em mim e me incentivar durante todo processo de formação.
- A todos os professores do Programa de Pós-graduação em Física da UFCG, que contribuíram de forma direta ou indiretamente nessa formação acadêmica.
- Ao meu amigo Lucas Ramos que conheci durante curso, por toda a ajuda, contribuição, motivação e por compartilhar momentos divertidos.
- Aos colegas de pós-graduação e funcionários da Unidade Acadêmica de Física pela grata convivência durante a minha permanência nesta Unidade.

*Seja forte e corajoso!
Não fique desanimado, nem tenha medo,
porque eu, o SENHOR, seu Deus,
estarei com você em qualquer lugar para onde você for!
(Bíblia Sagrada, Josué 1:9)*

Resumo

A presente dissertação consiste na relação entre buracos negros e a termodinâmica, destacando a importância de compreender as propriedades físicas desses objetos astrofísicos. Iniciamos os estudos com uma pequena revisão sobre as equações de campo de Einstein que fornecem soluções que descrevem diversos objetos astrofísicos e a evolução do Universo de forma abrangente no campo da Cosmologia. No entanto, algumas dessas soluções com simetria esférica, quando consideradas no vácuo, deixam de ser aplicáveis para $r = 0$ devido às singularidades presentes. Nesse cenário, James Bardeen foi um dos primeiros a propor ajustes na métrica para contornar essa incompatibilidade, o que levou ao surgimento dos chamados Buracos Negros Regulares. Na seção dedicada aos buracos negros regulares, são discutidas soluções que evitam a singularidade central típica dos buracos negros de Schwarzschild. Essas soluções apresentam uma região de estabilidade térmica, o que indica diferenças fundamentais em suas propriedades termodinâmicas. Apresentamos nesta seção também as métricas regulares, a métrica de Nozari-Mehdipour e a métrica de Bardeen a qual as duas substituí a massa M , por uma função $m(r)$, com intuito de eliminar a singularidade central presente no buraco negro singular. A partir destas novas métricas obtemos um novo horizonte de eventos e uma nova função para cada métrica, assim, estudamos seus comportamentos. Em seguida apresentamos as leis da termodinâmica de buracos negros e fazendo um paralelo com as leis da termodinâmica clássica. Remontando aos estudos de Bekenstein na década de 1970, que introduziram a ideia de que buracos negros possuem entropia. Essa entropia está relacionada à informação perdida sobre o que se encontra dentro do buraco negro, sendo acessível apenas a um observador externo. A proposta de que a entropia de um buraco negro está ligada à área do seu horizonte de eventos, que nunca diminui, é um ponto central da discussão. Por fim, analisamos o comportamento das propriedades termodinâmicas regulares como a temperatura, entropia e a capacidade térmica associadas aos modelos de buracos negros previstos.

Palavras-chave: Termodinâmica de buracos negros. Buracos Negros Regulares. Métrica de Bardeen. Métrica de Nozari-Mehdipour.

Abstract

This dissertation focuses on the relationship between black holes and thermodynamics, highlighting the importance of understanding the physical properties of these astrophysical objects. We begin our study with a brief review of Einstein's field equations, which provide solutions describing various astrophysical objects and the overall evolution of the Universe within the field of Cosmology. However, some of these solutions with spherical symmetry, when considered in a vacuum, become inapplicable at $r = 0$ due to the presence of singularities. In this context, James Bardeen was one of the first to propose adjustments to the metric to overcome this incompatibility, leading to the emergence of the so-called Regular Black Holes. In the section dedicated to regular black holes, we discuss solutions that avoid the central singularity typical of Schwarzschild black holes. These solutions exhibit a region of thermal stability, indicating fundamental differences in their thermodynamic properties. This section also presents the regular metrics, including the Nozari-Mehdipour metric and the Bardeen metric, where in both cases the mass M is replaced by a function of r in order to eliminate the central singularity present in singular black holes. From these new metrics, we derive new event horizons and new characteristic functions for each metric, allowing us to study their behavior. Next, we present the laws of black hole thermodynamics and draw a parallel with the laws of classical thermodynamics. We revisit the studies of Bekenstein from the 1970s, which introduced the idea that black holes possess entropy. This entropy is related to the loss of information about what lies inside the black hole, being accessible only to an external observer. The proposal that the entropy of a black hole is linked to the area of its event horizon, which never decreases, is a central point of this discussion. Finally, we analyze the behavior of the regular thermodynamic properties, such as temperature, entropy, and heat capacity, associated with the predicted black hole.

Keywords: Black Hole Thermodynamics. Regular Black Holes. Bardeen Metric. Nozari-Mehdipour Metric.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Buraco Negro da galáxia M87	14
Figura 2 – Nas coordenadas de Schwarzschild, ao se aproximar de $r = 2M$ o cone de luz se fecha.	23
Figura 3 – Nas coordenadas tortoise, a singularidade $r = 2M$ é empurrada para o menos infinito.	24
Figura 4 – Ao atravessar o $r = 2M$, o cone de luz sofre uma inclinação.	25
Figura 5 – Comportamento da função $K(r)$ em $r = 0$, para diferentes valores de Θ	28
Figura 6 – Comportamento da função $h(r)$ para $\Theta = 0,01$ e diferentes valores de M . Neste caso, quando $M = M_0 = 0,22$, a função será nula em $r = r_0 \cong 0,2$	28
Figura 7 – Nas coordenadas de Schwarzschild, ao se aproximar de $r = r_+$ o cone de luz se fecha.	30
Figura 8 – Ao atravessar a superfície definida por $r = r_+$, o cone de luz sofre uma inclinação.	31
Figura 9 – Comportamento da função $f(r)$ para $q = 0,01$ e diferentes valores de M	32
Figura 10 – Representação esquemática do efeito Hawking	35
Figura 11 – Comparação entre a temperatura do buraco negro de Schwarzschild e o regular de Nozari-Mehdpour. A curva pontilhada representa o comportamento da função $T_{H\Theta}$ em função de r_S , para o caso em $\Theta = 0,01$; enquanto que a contínua decreve a situação na qual $\Theta = 0$	39
Figura 12 – Comparação entre as entropias dos buracos negros de Schwarzschild e o regular de Nozari-Mehdpour. A curva contínua representa o comportamento da função (4.16) em função de r_S , para o caso em $\Theta = 0,001$; enquanto que a tracejada decreve a situação na qual $\Theta = 0$	40
Figura 13 – Comparação entre as capacidades térmicas do buraco negro de Schwarzschild e regular de Nozari-Mehdpour. A curva contínua representa o comportamento da função (4.19) em função de r_S , para o caso em $\Theta = 0,001$; enquanto que a tracejada decreve a situação na qual $\Theta = 0$	41
Figura 14 – Comparação entre a temperatura do buraco negro de Schwarzschild e o regular de Bardeen. A curva contínua representa o comportamento da função 4.22 em função de r_S , para o caso em $q = 0,4$; enquanto que a tracejada decreve a situação na qual $q = 0$	43
Figura 15 – Comparação entre as entropias do buraco negro de Schwarzschild e o regular de Bardeen. A curva contínua representa o comportamento da função (4.25) em função de r_S , para o caso em $q = 0,3$; enquanto que a tracejada decreve a situação na qual $q = 0$	44

Figura 16 – Comparação entre as capacidades térmicas do buraco negro de Schwarzschild e o regular de Bardeen. A curva contínua representa o comportamento da função (4.28) em função de r_S , para o caso em $q = 0,3$; enquanto que a tracejada decreve a situação na qual $q = 0$ 45

Sumário

1	INTRODUÇÃO	10
2	SOLUÇÃO DE SCHWARZSCHILD	13
2.1	O Campo Gravitacional Relativístico	15
2.2	Equações da TRG	17
2.3	A métrica de Schwarzschild	18
2.4	Horizontes de eventos, singularidades e Buraco Negro	22
3	BURACO NEGRO REGULAR	26
3.1	Caso I: Solução de Nozari-Mehdpour	27
3.2	Caso II: Buraco Negro de Bardeen	31
4	TERMODINÂMICA DO BURACO NEGRO REGULAR	34
4.1	Variáveis Termodinâmicas	35
4.2	Cálculo das Variáveis	37
4.2.1	Caso I: Buraco Negro de Nozari-Mehdpour	37
4.2.2	Caso II: Buraco Negro de Bardeen	42
5	CONCLUSÕES	47
	REFERÊNCIAS	49

1 Introdução

As teorias da relatividade de Einstein (tanto a restrita, de 1905, quanto a geral, de 1915) formam a base moderna da física para descrever o espaço e o tempo, substituindo os conceitos de Newton sobre espaço e tempo absolutos pela ideia de espaço-tempo unificado [1, 2]. Como todos os fenômenos físicos, especialmente os clássicos, são definidos com base nas concepções de espaço e tempo, as leis da física precisam estar em conformidade com essas teorias. Quando essas concepções mudam, a física deve se ajustar a elas. Foi essa necessidade de adaptação que deu origem à física relativista, que, desde o início, apresentou previsões notáveis, como a equação $E = mc^2$, mostra que massa e energia são equivalentes. Ela diz que um objeto com massa contém uma enorme quantidade de energia, onde E é a energia, m é a massa e c é a velocidade da luz (cerca de 300.000 km/s), amplamente confirmada experimentalmente.

Inicialmente, a relatividade na física implicava a rejeição do espaço absoluto, e foi exatamente isso que ambas as teorias de Einstein realizaram. A relatividade restrita, que trata do espaço-tempo plano, eliminou o conceito de espaço absoluto no sentido Maxwelliano, o “éter” no qual se pensava que os campos eletromagnéticos, como a luz, se propagavam [3, 4, 5]. Esta teoria é fundamentada em dois princípios: a covariância das leis da física e a constância da velocidade da luz. Por outro lado, a relatividade geral, que incorpora referenciais acelerados e interpreta a gravidade como um efeito da curvatura do espaço-tempo, afirma que a matéria distorce o espaço-tempo ao seu redor, fazendo com que trajetórias que pareciam retas no espaço e no tempo apresentem características associadas a linhas curvas e, conseqüentemente, que o tempo não é mais absoluto [6].

Em 1916, o astrônomo alemão Karl Schwarzschild foi o primeiro a encontrar uma solução exata para Teoria da Relatividade Geral (TRG). Ele resolveu as equações de campo, conhecidas como equações de Einstein, para explicar como se comporta o campo gravitacional de um corpo bastante massivo em colapso. Schwarzschild demonstrou que, se a massa de um corpo estiver concentrada em uma região esfericamente simétrica e suficientemente pequena, de modo que a razão entre o valor absoluto da massa e o raio seja maior que um valor crítico específico, o encurvamento do espaço-tempo será tal que nada que se aproxime da superfície denominada de horizonte de eventos, que representa uma fronteira teórica ao redor da distribuição de massa, poderá escapar, nem mesmo a luz. Assim, se o raio do corpo for menor que o horizonte de eventos, essa solução descreverá o espaço-tempo de um buraco negro [7, 8, 9].

Podemos ter como exemplo deste fenômeno o resultado da deformação do espaço-tempo causada pelo colapso gravitacional de uma estrela massiva, com pelo menos 30 vezes

a massa do Sol, durante uma supernova. Após esse evento, a estrela desaparece, dando origem ao que a Física se refere como singularidade, o núcleo de um buraco negro, onde o espaço-tempo deixa de existir. Nesta região, o campo gravitacional é tão intenso que toda a matéria do buraco negro fica concentrada em uma área geométrica extremamente pequena, fazendo com que a densidade tenda ao infinito, já que o raio dessa esfera gravitante é minúsculo [10]. O espaço-tempo ao redor da singularidade é tão distorcido que cria um poço gravitacional profundo, de modo que qualquer objeto que cruze o horizonte de eventos será inevitavelmente atraído para a singularidade [11]. Nessa singularidade, diversas propriedades geométricas se tornam infinitas. A singularidade é considerada a parte central do buraco negro, pois é onde toda a sua massa está concentrada.

A presença de singularidades na TRG tem sido um ponto de controvérsia desde seu início, especialmente no que diz respeito aos buracos negros. As singularidades fundamentais impedem a aplicação das leis da Física que conhecemos, levando a propostas para resolver essa questão. A primeira dessas propostas, conhecida como Censura Cósmica, foi formulada por Penrose no século XX. A segunda surgiu com a solução de buracos negros regulares, cuja primeira solução foi encontrada por Bardeen [12, 13]. É interessante notar que as soluções que descrevem buracos negros regulares possuem horizonte de eventos e a singularidade gravitacional é substituída por uma região regular da geometria do espaço-tempo. Ao longo deste trabalho iremos abordar também a solução de Nazari-Mehdipour que é uma proposta que explora a geometria não comutativa, possibilitando a existência de buracos negros que possuem uma estrutura de espaço-tempo mais suave e bem comportada, em contraste com as soluções tradicionais, com a de Schwarzschild, que contém singularidade. Nesses modelos, a densidade e curvatura no centro do buraco negro são finitas, evitando as singularidades presentes nos buracos negros tradicionais e compartilham diversas características com os buracos negros regulares.

Assim, se os buracos negros são de fato objetos reais, há uma boa possibilidade de que os buracos negros regulares possam ser detectados experimentalmente. Portanto, a investigação teórica dessas soluções torna-se altamente relevante. Em particular, a análise da termodinâmica dos buracos negros regulares pode revelar implicações experimentais significativas, sendo necessário, para isso, definir como a temperatura será incorporada e como a entropia gravitacional será calculada[14].

A termodinâmica dos buracos negros teve seu início em 1972, quando Jacob David Bekenstein sugeriu que buracos negros possuem entropia [15, 16]. A existência de entropia implicaria que um buraco negro tem temperatura, o que contradizia a noção clássica. No entanto, Bekenstein não forneceu uma explicação completa para sua proposta. Somente com a descoberta da radiação de hawking essa teoria deixou de ser vista como mera especulação. As leis da termodinâmica dos buracos negros traçam um paralelo entre os observáveis dos buracos negros e suas leis, comparando-os com grandezas termodinâmicas.

Uma característica fascinante destes objetos celestes é sua capacidade térmica negativa, que impede que eles entrem em equilíbrio térmico com um reservatório de energia, levando à sua evaporação ou à absorção total da radiação do reservatório[17].

Nesse sentido a presente dissertação busca fazer uma revisão sobre alguns aspectos da termodinâmica de buracos negros clássica e em seguida fazer uma discussão sobre termodinâmica de buracos negros regulares analisando as propriedades termodinâmicas inserida neste contexto. Para isso vamos iniciar com um breve resumo das ferramentas da TRG, que serão úteis no desenvolvimento desse trabalho. O Capítulo 2 é dedicado à solução de Schwarzschild, abordando o campo gravitacional relativístico, as equações relatividade geral, a métrica de Schwarzschild e os conceitos de horizontes de eventos e singularidades. O Capítulo 3 aborda os buracos negros regulares, discutindo a métrica regular proposta por Nozari-Mehdipour e a métrica proposta por James Bardeen e suas implicações. Em seguida examinamos as propriedades termodinâmicas dos buracos negros, apresentando suas leis e fazendo seu paralelo com a termodinâmica clássica.

Por fim, analisamos o comportamento regular das propriedades termodinâmicas como temperatura, entropia e capacidade térmica, definindo as variáveis relevantes e apresentando métodos para seu cálculo. Percebemos, através dos cálculos da temperatura e da entropia, que o buraco negro emitirá radiação e evaporará até que sua massa atinja um valor mínimo o qual definimos. Finalizamos com uma apresentação das conclusões e comentários finais deste trabalho no Capítulo 4. Ao longo desta dissertação, usaremos o sistema de unidades no qual $c = G = k_B = \hbar = 1$ e adotaremos a assinatura $(+, -, -, -)$ para a métrica.

2 Solução de Schwarzschild

Desde que passaram a observar os astros, os cientistas e entusiastas do espaço têm sido atraídos e intrigados pelos buracos negros. Esses corpos cósmicos extraordinários, com sua enorme gravidade e características únicas, desafiam nossa compreensão do universo e estimulam nossa imaginação. O primeiro a postular a existência de buracos negros foi o padre e filósofo inglês John Michell, em 1778. Ele sugeriu que se uma estrela fosse suficientemente densa, a velocidade de escape em sua superfície seria maior que a velocidade da luz. Como resultado, a luz emitida por essa estrela seria puxada de volta pela gravidade, tornando-a escura para observadores distantes. Alguns anos depois, Pierre Laplace nomeiou esses corpos de “estrelas escuras” em uma obra intitulada *Exposição do Sistema do Mundo* [18]. Michell propôs que essas estrelas escuras poderiam existir e que, embora não pudessem ser vistas diretamente, sua presença poderia ser inferida a partir dos efeitos gravitacionais sobre os corpos vizinhos. No entanto, essa ideia não ganhou muito apoio na época e acabou sendo esquecida.

Somente com o surgimento da teoria relativística da gravitação de Einstein, em 1915, a TRG, é que foi possível compreender como a gravidade influencia efeitos nas ondas e conseqüentemente na luz [19, 20]. A TRG supõe que o campo gravitacional deve ser visto como a alteração da geometria do espaço-tempo, causada pela presença de massa e energia, e que tal mudança deve ser determinada a partir da resolução das chamadas equações de Einstein. Então, levando isso em conta, em 1916 o físico alemão Karl Schwarzschild [21, 22], que trabalhava na linha de frente durante a Primeira Guerra Mundial como cientista, mais especificamente em funções técnicas ligadas à inteligência, utilizou seu tempo livre para encontrar qual seria a forma geométrica mais básica que pudesse representar e explicar as equações de campo de Einstein e constatou que a esfera é perfeitamente simétrica seria a melhor opção sem movimento e sem carga elétrica, pois a geometria depende apenas da distância ao centro, e não do tempo ou da direção. Ao considerar um sistema sem movimento (estático) e sem carga elétrica, eliminam-se as variações temporais e os efeitos eletromagnéticos, o que reduz significativamente a complexidade matemática e facilita a obtenção de soluções.[23]. As equações propostas por Schwarzschild, confirmaram as concepções originais de Michell. Além disso, previam que a luz, ao passar próximo a um objeto massivo, sofreria uma deflexão.

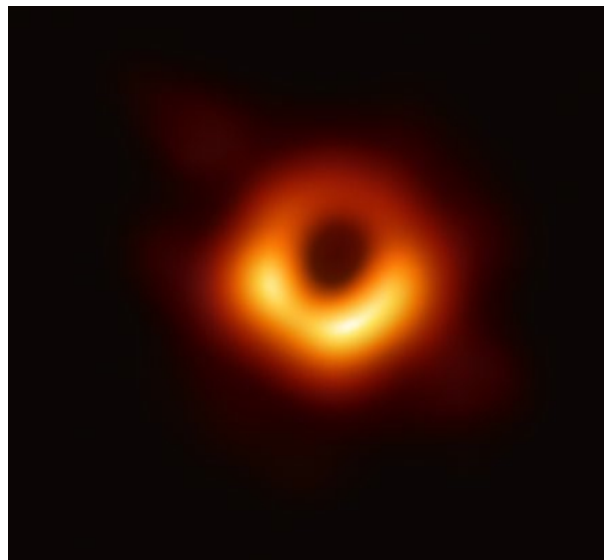
Em 1919, durante um eclipse solar, a Relatividade Geral foi confirmada. A missão dirigida pelo cientista britânico Sir Arthur Eddington foi para a ilha do Príncipe, no golfe da Guiné, e para Sobral-CE, no Brasil, com o objetivo de observar o eclipse solar total. Durante o evento do eclipse, foi possível observar as estrelas próximas ao Sol devido à diminuição de sua intensa luminosidade, o que possibilitou a medição da deflexão da luz

das estrelas ao se aproximarem do Sol [18]. Estes resultados validaram a teoria feita por Einstein da relatividade geral, consolidando-a como uma das teorias mais impactantes na história da física. A TRG tem desempenhado um papel importante em nossa compreensão sobre os buracos negros. Em 1969, John Wheeler deu o nome de Buraco Negro a essa região, reforçando assim a sua compreensão e popularizando-o na astronomia e na física teórica.

Embora muitas vezes sejam vistos como objetos exóticos pelo público, os buracos negros são, na verdade, bastante comuns no Universo. Estima-se que, no centro da grande maioria das galáxias, exista um buraco negro supermassivo, cuja massa pode ser bilhões de vezes superior à do Sol [24]. Devido à sua imensa massa, alguns desses buracos negros estão próximos do limite de nossa capacidade de observação. Como vimos, Einstein por meio de sua teoria da relatividade geral já tinha previsto as ondas gravitacionais que são geradas por massas aceleradas e propagam-se pelo espaço-tempo à velocidade da luz, transportando energia na forma de radiação gravitacional. Porém, elas só foram detectadas experimentalmente em 2015, através da colaboração do LIGO (Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory) que anunciou em 2016, a primeira detecção de ondas gravitacionais, que também marcou a primeira observação de uma colisão entre buracos negros [25, 26].

Para aprofundar o estudo dos buracos negros, era fundamental obter evidências experimentais, o que exigiu melhorias nos equipamentos utilizados. A equipe do EHT (Telescópio do Horizonte de Eventos), que reuniu 347 cientistas como astrônomos, físicos, matemáticos e engenheiros de 60 instituições em 20 países, por mais de uma década de trabalho na coleta e análise de dados, apresentou ao mundo em 2019, uma imagem de um buraco negro e sua vizinhança [27, 28, 29, 30].

Figura 1 – Buraco Negro da galáxia M87



Fonte: Figura extraída de [31]

Esta imagem é o resultado de um conjunto de dados processados através de um algoritmo desenvolvido pela cientista Katie Bouman, a imagem foi captada por meio de um telescópio virtual do tamanho da Terra, que é formado por 8 radiotelescópio, gerando um grande avanço neste ramo de estudos. A imagem na figura 1 mostra o movimento de uma nuvem de gás altamente energizada atravessando o disco de acreção de um buraco negro supermassivo. Este buraco negro possui uma massa equivalente a 6,5 bilhões de vezes a do Sol e está situado no centro da galáxia M87, localizada a 53,5 milhões de anos-luz de distância na constelação de Virgem. Ele também é 1600 vezes maior que o outro alvo do EHT, o Sagitarius A*, que é o Buraco Negro que está localizado no centro nossa galáxia [27, 32].

Neste capítulo, deduziremos a solução de Schwarzschild e veremos como os buracos negros são previstos. Antes, porém, faremos uma discussão sobre alguns aspectos da Relatividade Geral e apresentaremos as equações de campo.

2.1 O Campo Gravitacional Relativístico

A primeira teoria da gravitação foi proposta por Isaac Newton em seu trabalho “Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica”, no ano de 1687. De acordo com essa teoria, quando uma partícula se move na presença de uma distribuição de massa de densidade ρ , agirá sobre ela uma força atrativa dada por $\vec{F} = m\vec{g}$, onde $\vec{g} = -\vec{\nabla}\Phi$ é o campo gravitacional, sendo Φ o potencial gravitacional, o qual é solução da equação de Poisson,

$$\nabla^2\Phi = 4\pi\rho. \quad (2.1)$$

Uma peculiaridade da gravidade é o fato de que, na ausência de resistência do ar, todos os corpos caem com a mesma aceleração ($\vec{a} = \vec{g}$) quando sujeitos a um campo gravitacional uniforme, independente de suas massas. Esta observação foi demonstrada por Galileu Galilei no século XVII, quando ele supostamente soltou duas esferas de diferentes massas da Torre de Pisa e observou que ambas atingiram o solo ao mesmo tempo.

Esse aspecto levou à formulação do princípio da equivalência, o qual afirma que, numa pequena região do espaço, não há diferença entre as características do movimento em um sistema não inercial e um sistema inercial na presença de um campo gravitacional. Por exemplo, vamos admitir que, uma determinada localidade, um observador dentro de um foguete sem janelas larga uma bola com aceleração de 9,8 m/s. Deste evento ele poderia concluir que estaria em uma região onde o campo gravitacional é uniforme e que, devido a isto, a bola caiu em uma linha reta com uma certa aceleração, ou ainda que estaria na ausência do campo gravitacional em um referencial que se movimenta na mesma aceleração da bola.

Os campos que correspondem aos sistemas não inerciais, diferem dos campos reais, onde as forças gravitacionais reais estão presentes em certos pontos dos referenciais inerciais. Quando há dois corpos infinitamente distantes o campo gravitacional real tende a zero. Entretanto, o campo equivalente ao sistema não inercial tende ao infinito, ou, em certos casos, permanece o mesmo módulo em todos os pontos do espaço, inclusive no infinito. Uma boa ilustração para exemplificar essa diferença é a força centrífuga. Neste sistema rotativo, a força aumenta infinitamente à medida que nos distanciamos do eixo de rotação. Além disso, quando mudamos de um sistema não-inercial para um sistema inercial, o campo criado pelo primeiro é cancelado. No entanto, não é possível excluir um campo gravitacional real com apenas uma alteração de referencial. Isso poderia ocorrer se houvesse um sistema em que sua aceleração fosse a mesma para pequenas regiões em que uma partícula obtería esta mesma variação de rapidez se estivesse na área designada do campo [33].

A teoria newtoniana foi muito bem sucedida, pois conseguiu descrever vários fenômenos físicos, como o movimento dos planetas, o comportamento das marés e a queda de corpos na Terra. Contudo, essa teoria apresenta limitações significativas, que passaram a se tornar evidentes no final do século XIX e início do século XX. Uma delas é que ela falha na descrição do movimento de partículas que atingem velocidades próximas a da luz, ao se moverem na presença de um campo gravitacional muito intenso.

Na busca por uma teoria da gravitação relativística, que não apresentasse limitações como essa, Einstein propôs a Relatividade Geral. Na elaboração de sua teoria, ele partiu de uma ideia simples: assumiu que, mesmo quando o campo gravitacional é muito forte, o princípio da equivalência deverá permanecer válido. Por conseguinte, concluiu que o campo gravitacional deve ser visto como a curvatura do espaço-tempo. Na sequência, partindo da ideia de espaço-tempo incluída na Teoria Relatividade Restrita (TRR), veremos como Einstein associou gravitação à curvatura.

Antes da relatividade geral, Einstein publicou a TRR, no ano de 1905 [34]. Nela, um observador inercial descreve os eventos a partir de um diagrama de espaço-tempo quadrimensional plano, cujo elemento de linha, expresso em coordenadas cartesianas, é

$$ds^2 = dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.2)$$

em que $x^\mu = (t, x, y, z)$ e $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ é o chamado tensor métrico de Minkowski. Porém, se desejarmos mudar para um referencial não inercial, mesmo utilizando as coordenadas acima, a forma Minkowskiana do elemento de linha não será preservada. Na verdade, encontraremos

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.3)$$

onde o tensor métrico, $g_{\mu\nu}$, depende das coordenadas x^μ [35, 36]. Sendo assim, podemos afirmar que, enquanto um referencial inercial é descrito por $\eta_{\mu\nu}$, um não inercial é

representado por $g_{\mu\nu}$.

Baseado nesta característica e utilizando o princípio da equivalência, Einstein postulou que os campos gravitacionais são semelhantes aos campos de inércia e podem ser explicados pelas componentes do tensor métrico. A única ressalva é que, diferentemente de um campo de inércia, um campo gravitacional real não pode ser removido através de uma alteração de coordenadas. Em outras palavras, não há nenhuma transformação de coordenadas que leve o tensor métrico, associado a um campo gravitacional real, à forma plana de Minkowski. Diante disso, concluiu que esse tipo de espaço-tempo é curvo, e que essa curvatura é causada pela presença de massa e energia [33, 36].

2.2 Equações da TRG

Uma vez que o tensor métrico é simétrico, conforme podemos verificar a partir da equação (2.3), haverá apenas 10 componentes independentes. Como consequência, a Relatividade Geral requer a existência de 10 equações de campo que devem ser satisfeitas por tais objetos. Naturalmente, como a TRG é uma teoria relativística, esse conjunto deve ser constituído por equações diferenciais de segunda ordem do tensor métrico que, no limite em que o campo gravitacional é fraco, devem adotar a forma da equação (2.1).

Por esta razão, em analogia ao operador Laplaciano do campo Φ na equação de Poisson, o lado esquerdo das equações de campo deve ser expresso em termo de derivadas parciais de segunda ordem do tensor métrico; enquanto que o lado direito deve conter um objeto que seja capaz de descrever a quantidade de matéria e energia presentes, de maneira semelhante à densidade ρ .

Levando em conta que, em uma teoria relativística, o conteúdo de matéria e energia é expresso pelo tensor energia momento, $T_{\mu\nu}$, procurando seguir esses critérios acima mencionados e desejando satisfazer à condição de conservação da energia, $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$, após várias tentativas, Einstein concluiu que as equações de campo da TRG são:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu}, \quad (2.4)$$

onde

$$R_{\mu\nu} = g^{\alpha\beta}R_{\alpha\mu\beta\nu} = \frac{\partial\Gamma_{\mu\nu}^\rho}{\partial x^\rho} - \frac{\partial\Gamma_{\mu\rho}^\nu}{\partial x^\rho} + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma\Gamma_{\rho\sigma}^\rho - \Gamma_{\mu\rho}^\sigma\Gamma_{\nu\sigma}^\rho \quad (2.5)$$

é o tensor de Ricci, sendo

$$R_{\alpha\mu\beta\nu} = g_{\alpha\rho} \left(\frac{\partial\Gamma_{\mu\beta}^\rho}{\partial x^\nu} - \frac{\partial\Gamma_{\mu\nu}^\rho}{\partial x^\beta} + \Gamma_{\mu\beta}^\lambda\Gamma_{\nu\lambda}^\rho - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda\Gamma_{\beta\lambda}^\rho \right) \quad (2.6)$$

o tensor de Riemann e

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu = \frac{1}{2}g^{\mu\lambda} \left(\frac{\partial g_{\lambda\alpha}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\lambda\beta}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\lambda} \right) \quad (2.7)$$

os símbolos de Christoffel. Além disso, $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ é o chamado escalar de Ricci e $k = 8\pi$ [36, 37]. Vale salientar que a constante k é determinada quando as equações da relatividade são impostas no limite de campo fraco. Nesse regime, as equações da TRG precisam estar alinhadas com as da teoria clássica.

Após alguns anos Einstein introduziu nas equações de campo o termo, Λ , chamada de constante cosmológica para garantir uma solução estática cosmológica, pois em sua época existia a crença do universo estático e suas equações levavam a definição de um universo dinâmico, então ele reescreveu as equações da seguinte forma:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \Lambda g_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu}. \quad (2.8)$$

Entretanto, mais tarde, com as descobertas de que o universo está em expansão por Edwin Hubble, excluía a necessidade de inserção da constante cosmológica, Einstein considerou a adição da constante como o maior erro da sua vida.

No entanto, sabemos que hoje em dia com as novas observações principalmente a partir do final dos anos 1990, mostraram que o universo não apenas está em expansão, mas que essa expansão está se acelerando. Tal aceleração só poderia ser explicada com a reintrodução de um termo de energia escura, cuja descrição mais simples é exatamente a constante cosmológica Λ . A energia escura ocupa uma porcentagem bem acima das demais componentes, porém a sua natureza ainda é desconhecida, muitos cientistas trabalham arduamente na sua busca. Para um estudo aprofundado sobre as contribuições da constante cosmológica pode ser encontrado em [38, 39, 40, 41, 42].

Embora a relatividade geral tenha sido desenvolvida para um espaço quadridimensional, podemos usá-la em um espaço com $(2+1)$ dimensões. Nessas dimensões, as equações de Einstein são expressas da mesma forma pela equação (2.8). Além disso, a métrica, os símbolos de Christoffel e o tensor de curvatura são definidos de forma usual. Contudo, diferentemente de um espaço-tempo quadridimensional, as equações de campo não mudam possuem um comportamento newtoniano, ou seja, não seguem abordagens de Poisson quando a intensidade do campo é baixa. Devido a isso, na escala reduzida a constante para ficar sujeito à arbitrariedade.

2.3 A métrica de Schwarzschild

Nesta seção, resolveremos as equações de Einstein e obteremos a métrica que descreve a deformação do espaço-tempo exterior a um corpo estático e esférico de massa M , conhecida como a solução de Schwarzschild.

Como não há matéria e energia na região externa, devemos considerar que $T_{\mu\nu} = 0$. Além disso, para facilitar o nosso trabalho, precisamos escolher um elemento linha que corresponda à simetria da distribuição de massa. Em outras palavras, em uma distância r ,

medida a partir do centro da distribuição, o elemento de linha escolhido deve garantir que intervalo entre dois pontos seja o mesmo em todas as direções.

Para satisfazer o requisito acima citado, a distância infinitesimal entre dois pontos, que se encontram na região do espaço-tempo exterior ao objeto massivo, deve ser expressa por [37]

$$ds^2 = e^A dt^2 - e^B dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (2.9)$$

em que A e B são funções de r e t . Neste caso, utilizando as coordenadas, $x^0 = t, x^1 = r, x^2 = \theta, x^3 = \varphi$, vemos que as componentes covariantes e contravariantes do tensor métrico são dadas por:

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}(e^A, -e^B, -r^2, -r^2\sin^2\theta) \quad (2.10)$$

e

$$g^{\mu\nu} = \text{diag}(e^A, -e^{-B}, -r^{-2}, -r^{-2}\sin^{-2}\theta). \quad (2.11)$$

Logo, a partir de (2.7), vemos que os símbolos de Christoffel diferentes de zero são:

$$\Gamma_{00}^0 = \frac{\dot{A}}{2}, \quad \Gamma_{01}^0 = \Gamma_{10}^0 = \frac{A'}{2}, \quad \Gamma_{11}^0 = \frac{\dot{B}}{2}e^{B-A}, \quad \Gamma_{00}^1 = \frac{A'}{2}e^{A-B},$$

$$\Gamma_{01}^1 = \Gamma_{10}^1 = \frac{\dot{B}}{2}, \quad \Gamma_{11}^1 = \frac{B'}{2}, \quad \Gamma_{22}^1 = -re^{-B}, \quad \Gamma_{33}^1 = -r\sin^2\theta e^{-B},$$

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{33}^2 = -\sin\theta\cos\theta, \quad \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 = \cotg\theta,$$

sendo que o “ponto” indica a derivada em relação a coordenada t e a “linha” representa a derivada em relação a r .

Com base nas expressões acima, realizamos o cálculo do tensor e do escalar de Ricci. Na sequência, ao colocarmos os resultados nas equações de Einstein, vemos que as funções, que descrevem a geometria externa à distribuição esférica, obedecem às seguintes equações diferenciais:

$$-e^{-B} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{B'}{r} \right) + \frac{1}{r^2} = 0, \quad (2.12)$$

$$-\frac{1}{2}e^{-B} \frac{\dot{B}}{r} = 0, \quad (2.13)$$

$$-e^{-B} \left(\frac{A'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} = 0, \quad (2.14)$$

$$-\frac{1}{2}e^{-B} \left(A'' + \frac{v'^2}{2} + \frac{A' - B'}{r} - \frac{A'B'}{2} \right) + \frac{1}{2}e^{-A} \left(\dot{\lambda} + \frac{\dot{B}^2}{2} - \frac{A\dot{B}}{2} \right) = 0 \quad (2.15)$$

e

$$\sin^2\theta \left[-\frac{1}{2}e^{-B} \left(A'' + \frac{v'^2}{2} + \frac{A' - B'}{r} - \frac{A'B'}{2} \right) + \frac{1}{2}e^{-A} \left(\dot{\lambda} + \frac{\dot{B}^2}{2} - \frac{A\dot{B}}{2} \right) \right] = 0. \quad (2.16)$$

A partir de (2.13), concluímos que B é função apenas de r . Além disso, ao somarmos (2.12) com (2.14), obtemos:

$$A' + B' = 0. \quad (2.17)$$

Consequentemente,

$$A + B = f(x^0). \quad (2.18)$$

Ainda é possível realizarmos uma transformação de coordenadas, em que $x^0 = h(x'^0)$ e $x^k = x'^k$, de forma que o elemento de linha (2.9) permaneça inalterado. Neste processo de mudança, observamos que:

$$g'_{00} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^0} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^0} g_{\alpha\beta} = \left(\frac{dx^0}{dx'^0} \right)^2 g_{00} = \dot{h}^2 g_{00}. \quad (2.19)$$

Logo, escolhendo $h(x'^0)$ como sendo

$$\dot{h} = e^{-f(x^0)/2}, \quad (2.20)$$

onde $f(x^0)$ é dado por (2.18), obtemos

$$g'_{00} = e^{-f} g_{00}. \quad (2.21)$$

Desse modo, para que a forma do elemento de linha permaneça a mesma depois da mudança de coordenadas, devemos impor que f seja nulo. Fazendo isso, segue da equação (2.18) que

$$A = -B. \quad (2.22)$$

É importante destacar que, ao estabelecer uma relação direta entre A e B , essa decisão nos leva à conclusão de que essas funções são exclusivamente dependentes de r , evidenciando que a dependência temporal da métrica de uma distribuição com simetria esférica pode ser eliminada através de uma simples transformação de coordenadas adequada (Teorema de Birkhoff).

De posse do resultado apresentado em (2.22), podemos reescrever a equação (2.14) como

$$\frac{d}{dr} (re^A - r) = 0, \quad (2.23)$$

e, portanto,

$$e^A = e^{-B} = 1 - \frac{r_H}{r}, \quad (2.24)$$

em que r_S é uma constante de integração.

Assim, ao inserir (2.23) na equação da métrica (2.9), obtemos:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (2.25)$$

No limite em que $r \rightarrow \infty$, alcançamos a métrica de um espaço-tempo plano. Já considerando uma região em que r muito grande, vemos que o elemento de linha (2.25) toma a forma:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) dt^2 - \left(1 + \frac{r_S}{r}\right) dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (2.26)$$

Além disso, em tal região, a componente g_{00} do tensor métrico é expressa como:

$$g_{00} \cong 1 + 2\Phi, \quad (2.27)$$

onde Φ é o potencial newtoniano, solução da equação de Poisson.

No caso de uma distribuição simetricamente esférica de massa M , o potencial gravitacional externo é descrito pela equação [43]:

$$\Phi = -\frac{M}{r}. \quad (2.28)$$

Desse modo, ao empregarmos este resultado na equação anterior e a compararmos com a componente 00 do tensor métrico vinculado ao elemento de linha (2.26), concluímos que a constante de integração é dada por $r_S = 2M$. Consequentemente, usando este resultado em (2.25), vemos que o elemento de linha, que descreve o campo gravitacional exterior a um objeto esfericamente simétrico, é

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (2.29)$$

o qual é conhecido como a **métrica de Schwarzschild**.

Analisando esta métrica, podemos observar que ela apresenta duas singularidades: uma em $r = 2M$ e outra em $r = 0$. A que ocorre em $r = 2M$ não representa uma característica real do espaço-tempo, pois é apenas uma consequência do sistema de coordenadas que adotamos. De fato, como veremos na próxima seção, uma simples mudança de coordenadas fará com que tal singularidade seja excluída. Contudo, embora isto aconteça, este valor de r , que é conhecido como o raio de Schwarzschild, é bastante relevante nesta solução. Na verdade, ele corresponde ao horizonte de eventos de um buraco negro, ou seja, é o raio que delimita uma região do espaço-tempo onde a gravidade é tão

intensa que nem a luz pode escapar. Por outro lado, aquela que há em $r = 0$ é uma singularidade física, isto é, existe independentemente das coordenadas utilizadas.

Para compreendermos a natureza da singularidade em $r = 0$, precisamos calcular o escalar de Kretschmann, que é a quantidade que mede a intensidade da curvatura do espaço-tempo e é definida por

$$K = R^{\mu\nu\alpha\beta} R_{\mu\nu\alpha\beta}. \quad (2.30)$$

Fazendo isso, obtemos:

$$K = \frac{48M^2}{r^6}. \quad (2.31)$$

Este resultado mostra que à medida que r se aproxima de zero, o valor de K aumenta rapidamente, tendendo ao infinito. Isto significa que a curvatura se torna infinitamente grande em $r = 0$. Além disso, visto que K é um escalar, concluímos que este aspecto não poderá ser eliminado por uma transformação de coordenadas, o que caracteriza $r = 0$ como uma verdadeira singularidade física.

2.4 Horizontes de eventos, singularidades e Buraco Negro

Para uma melhor compreensão dos aspectos acima citados, faremos, nesta seção, uma discussão sobre a estrutura geométrica do espaço-tempo de Schwarzschild. Para tanto, consideraremos curvas radiais nulas nas quais θ e φ são constantes e $ds^2 = 0$. Neste caso, segue da equação (2.29) que

$$\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 = 0, \quad (2.32)$$

ou ainda

$$\frac{dt}{dr} = \pm \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}. \quad (2.33)$$

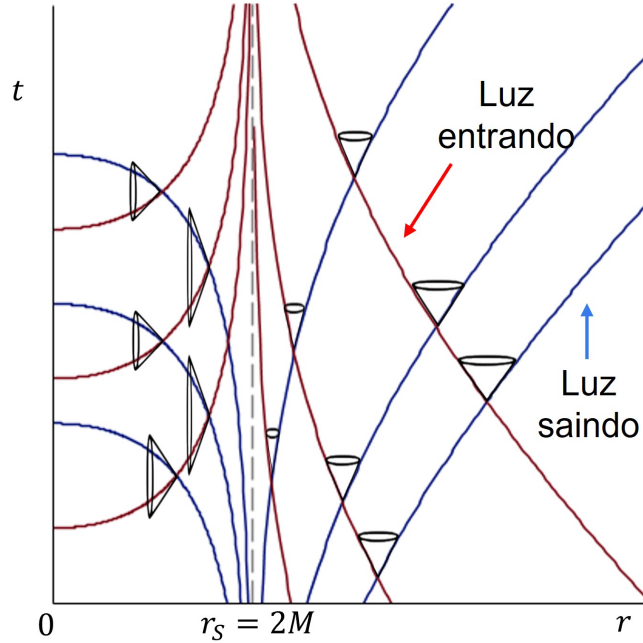
Esta relação determina a inclinação da reta tangente à linha de universo da luz, para cada valor de r , sendo que os sinais positivo e negativo estão associados, respectivamente, aos feixes que se afastam e se aproximam da origem. A partir dela, vemos que, para valores elevados de r , a inclinação é ± 1 , assim como no plano euclidiano. Já quando nos aproximamos de $r = 2M$, temos

$$\frac{dt}{dr} \longrightarrow \pm\infty, \quad (2.34)$$

o que indica que o cone de luz se estreita à medida que nos aproximamos desse ponto (Ver Fig. 2). Assim, pelo menos neste sistema de coordenadas, aparentemente, o raio de luz não consegue alcançar $r = 2M$.

Não é errado afirmar que um observador fixo não consegue ver um raio de luz (ou uma partícula massiva) atingir a região $r = 2M$, pois a medida que a fonte se

Figura 2 – Nas coordenadas de Schwarzschild, ao se aproximar de $r = 2M$ o cone de luz se fecha.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2024.

aproxima desta região, este observador receberá o sinal em intervalos cada vez maiores e isto continuará para sempre, fazendo com que ele nunca veja uma partícula massiva ou a luz alcançar tal localidade. No entanto, não é apropriado dizer que a trajetória no plano $t - r$ não alcançará este ponto. Na verdade, esta “impossibilidade” em atingir o horizonte de eventos esta relacionada ao o sistema de coordenadas utilizado. De fato, na sequência veremos que é possível encontramos um sistema no qual isto não ocontecerá.

Nossa primeira tentativa será efetuar uma mudança que seja capaz de tornar a inclinação do cone constante, assim como acontece no espaço-tempo plano. Naturalmente, para satisfazer esse critério, devemos fazer a seguinte transformação:

$$\frac{dr^*}{dr} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \Rightarrow r^* = r + 2M \ln \left| \frac{r}{2M} - 1 \right|. \quad (2.35)$$

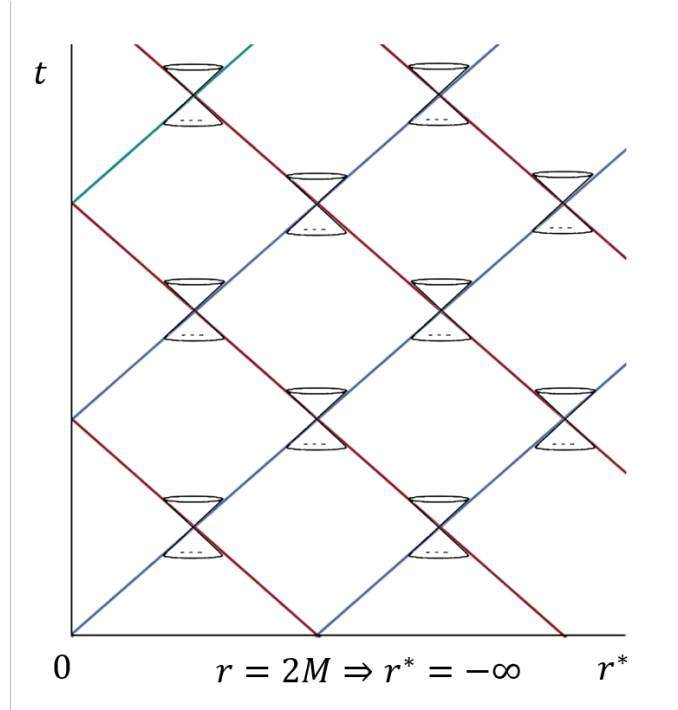
De fato, nesse sistema, conhecido como coordenadas tortoise, $(t, r^*, \theta, \varphi)$, temos que

$$\frac{dt}{dr^*} = \pm 1, \quad (2.36)$$

o que garante que o cone não se fecha (Ver Fig. 3). Porém, embora isto seja um avanço, ainda há algo pendente: nessas coordenadas a superfície de interesse, $r = 2M$ é deslocada para o menos infinito, indicando que a luz jamais adentraria à região em que $r < 2M$.

Por conta disso, tentaremos uma nova transformação. Agora, adotaremos uma mudança na coordenada temporal do tipo $t^* = t^*(t, r)$, que garanta que a geodésica da luz

Figura 3 – Nas coordenadas tortoise, a singularidade $r = 2M$ é empurrada para o menos infinito.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2024.

incidente seja horizontal. Levando isto em conta, segue que a nova coordenada temporal deve obedecer à equação

$$dt^* = dt + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr, \quad (2.37)$$

que é a expressão que define as chamadas coordenadas de Eddington-Finkelstein, $(t^*, r, \theta, \varphi)$. Realmente, utilizando (2.37) em (2.33) vemos que

$$\frac{dt^*}{dr} = \begin{cases} 0, & \text{entrando} \\ 2(1 - 2M/r)^{-1}, & \text{saindo} \end{cases}. \quad (2.38)$$

ou seja, que a linha de universo da luz que incide possui inclinação nula, como queríamos.

Voltando às coordenadas de Eddington-Finkelstein, podemos mostrar que a métrica não apresenta singularidade em $r = 2M$. De fato, usando (2.37), vemos que o elemento de linha assume a forma

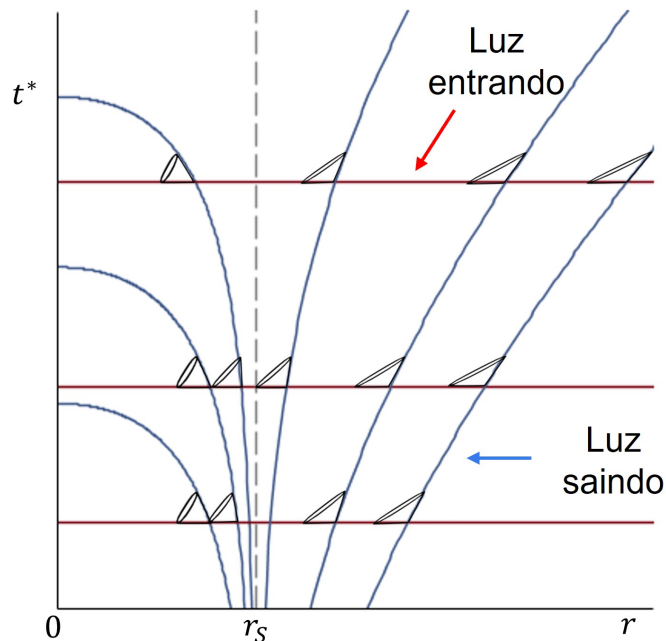
$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^{*2} - 2dt^* dr - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (2.39)$$

o qual é finito nesse valor de r . Isto indica que $r = 2M$ é simplesmente uma singularidade coordenada do nosso sistema original (t, r, θ, φ) [37].

Neste sistema de coordenadas os cones de luz continuam bem-comportados em $r = 2M$, e esta superfície equivale a um valor finito da coordenada t^* . Isto significa que

um raio de luz (ou uma partícula massiva) não enfrentará dificuldades para atravessar esta superfície. Além do mais, algo interessante está ocorrendo: conforme, ilustra a figura 4, embora cones de luz não se fechem, eles são inclinados de tal modo que para $r < 2M$ todos os caminhos do futuros são dirigidos na direção decrescente de r . Como consequência,

Figura 4 – Ao atravessar o $r = 2M$, o cone de luz sofre uma inclinação.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2024.

todas as partículas (independentemente da suas massas ou ausência de massa) que estejam dentro da superfície em que $r < r_s$, acabarão inevitavelmente caindo na singularidade $r = 0$. Além disso, um observador que se encontra na região $r > r_s$ não receberá nenhuma informação do que acontece no interior desta localidade, porque nada, nem mesmo a luz pode ir através do raio de Schwarzschild. Assim, para este observador, a região dentro desse raio, é “negra”. A superfície definida pelo raio r_s é chamada Horizonte de Eventos, porque oculta os eventos que estão localizados “atrás” dela.

Para que uma distribuição de massa esfericamente simétrica possua um horizonte de eventos, é preciso que sua massa se contraia em uma esfera com raio menor do que o raio de Schwarzschild. Neste caso, esta distribuição de massa resultará em um objeto denominado Buraco Negro.

3 Buraco Negro Regular

Conforme discutido no capítulo anterior, as soluções das equações da TRG são aplicadas em uma ampla gama de situações na física. No entanto, algumas soluções no vácuo com simetria esférica apresentam divergências quando a coordenada radial $r = 0$, fazendo com que as quantidades físicas e matemáticas conhecidas se tornem incalculáveis, ou seja, tendam ao infinito. Portanto, elas não conseguem descrever a origem desses objetos. Como mencionado anteriormente, essa lacuna no domínio das soluções dentro desses corpos é o que chamamos de singularidade.

Embora os teoremas de singularidades garantam que, sob certas condições, as singularidades são inevitáveis na relatividade geral, a presença dessas singularidades pode indicar a necessidade de incorporar efeitos quânticos significativos em cenários de campos gravitacionais intensos [44, 45, 46, 14, 47]. No entanto, surgiram ao longo dos anos alternativas que contornam essa restrição, ainda dentro de um contexto clássico, a ausência de singularidade resulta na formação dos conhecidos buracos negros regulares.

Então, estas soluções buscam evitar a singularidade no centro, apresentando uma estrutura mais suave e bem comportada, em que a regularização é frequentemente alcançada através da introdução de matéria exótica, que pode ter propriedades como pressão negativa, ou pela modificação das equações de Einstein. Os buracos negros regulares não se limitam apenas a modificar as singularidades; eles também apresentam características distintas em comparação com os buracos negros tradicionais. Uma revisão histórica referente a buracos negros regulares pode ser encontrada em [14].

Dentro do contexto mencionado, as primeiras ideias que eventualmente levaram à concepção de soluções para as equações de Einstein que não apresentavam singularidades e, conseqüentemente, soluções regulares para buracos negros surgiram na metade dos anos 1960, com a proposta de Andrei Sakharov [13], em sua pesquisa sobre a formação de estruturas em um universo jovem, obteve um resultado significativo: à medida que a matéria se acumula devido à força gravitacional, a densidade de energia não se torna infinita, mantendo-se constante dentro desse aglomerado de matéria, que poderia ser uma galáxia em formação.

A ausência de divergência ou a não ocorrência de uma singularidade só é garantida se o espaço-tempo dentro desse aglomerado for um espaço-tempo do tipo de Sitter, em homenagem a Willem de Sitter. Pouco depois do resultado de Sakharov, o físico inglês James Bardeen [48] utilizou essa ideia para criar a primeira métrica de buraco negro sem singularidade, a solução ou métrica de Bardeen possui simetria esférica, não tem carga e se diferencia da solução de Schwarzschild por ter uma massa m que é uma função da

coordenada radial, ao invés de uma constante. Sendo assim, a massa, que na solução de Schwarzschild é pontual e localizada no centro do buraco, em Bardeen espalha-se por todo espaço-tempo. A função $m(r)$ deve ser escolhida de forma que a métrica de Bardeen seja um espaço-tempo do tipo de Sitter no núcleo. Com essa condição, o espaço-tempo no interior do buraco negro é regularizado, resultando em um buraco negro regular, ou seja, um objeto compacto com um horizonte de eventos, mas sem uma singularidade [49].

3.1 Caso I: Solução de Nozari-Mehdpour

No contexto de geometrias não comutativas, Nozari e Mehdpour [50] mostraram que a métrica gerada por uma distribuição de densidade

$$\rho = \frac{M\sqrt{\Theta}}{\pi^2 (r^2 + \Theta)^2} \quad (3.1)$$

é dada por

$$ds^2 = h(r)dt^2 - \frac{dr^2}{h(r)} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (3.2)$$

em que

$$h(r) = 1 - \frac{4M}{\pi r} \left[\operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{r}{\sqrt{\Theta}} \right) - \frac{r\sqrt{\Theta}}{r^2 + \Theta} \right], \quad (3.3)$$

sendo M a massa distribuída e Θ o parâmetro da não comutatividade.

Tomando o limite $\Theta \rightarrow 0$ na expressão (3.2), vemos que esta coincide com (2.29). Além do mais, a presença da constante Θ no elemento de linha faz com que este não seja singular na origem. Contudo, para podermos dizer que a geometria é regular nesse ponto, precisamos mostrar que o escalar de Kretschmann, $K = R_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\beta}$, é finito quando tomamos $r = 0$.

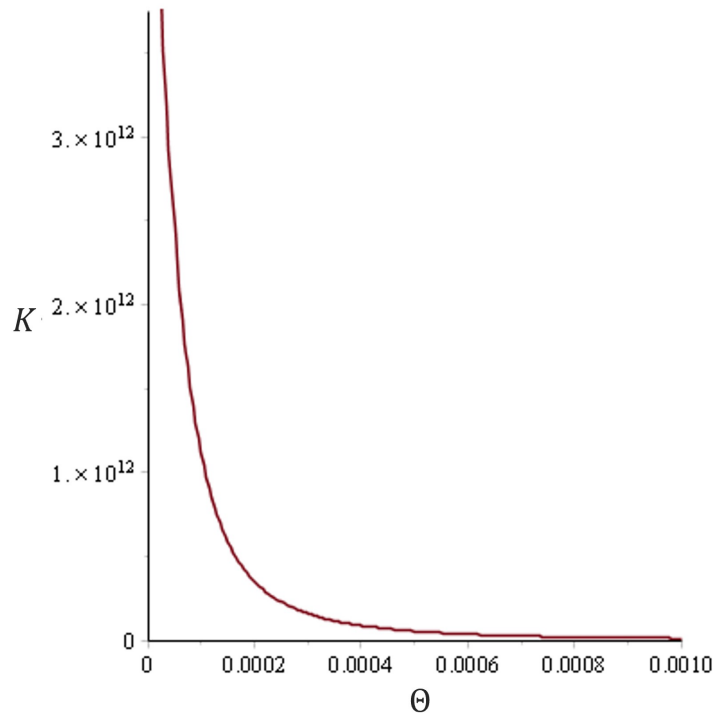
A presente métrica nos leva a uma expressão extensa para o escalar. Desta forma, analisamos graficamente como mostra a figura 5. Observamos que, em $r = 0$, a quantidade K é finita para qualquer valor de Θ , exceto na situação em que $\Theta \rightarrow 0$. Por conseguinte, entendendo que o elemento de linha (3.2) pode ser construído a partir de troca $M \rightarrow m(r)$ em (2.29), onde

$$m(r) = \frac{2M}{\pi} \left[\operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{r}{\sqrt{\Theta}} \right) - \frac{r\sqrt{\Theta}}{r^2 - \Theta} \right], \quad (3.4)$$

dizemos que (3.2) é uma solução regular Schwarzschild.

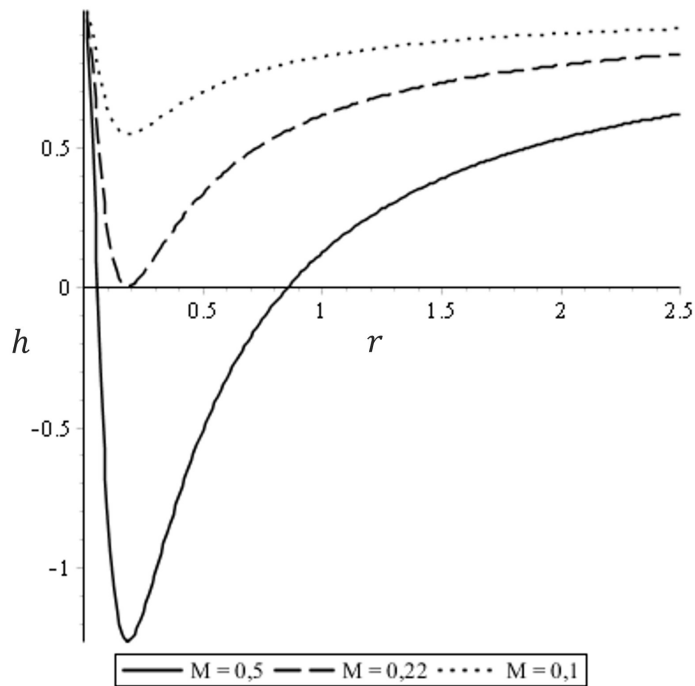
Dependendo da relação entre M e Θ , o elemento de linha poderá apresentar uma ou duas singularidades, ou até mesmo nenhuma. Na verdade, conforme ilustrado no gráfico da Figura 6, fixando $\Theta = 0,01$, haverá uma massa crítica, M_0 , para a qual a função $h(r)$ será nula em um único r , denominado r_0 , e a métrica terá apenas uma singularidade. Já

Figura 5 – Comportamento da função $K(r)$ em $r = 0$, para diferentes valores de Θ .



Fonte: Elaborada pelo autor, 2024.

Figura 6 – Comportamento da função $h(r)$ para $\Theta = 0,01$ e diferentes valores de M . Neste caso, quando $M = M_0 = 0,22$, a função será nula em $r = r_0 \cong 0,2$.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2024.

quando $M > M_0$, a referida função será nula em dois valores de r , o quais chamaremos de r_- e r_+ ($r_- < r_+$), e a métrica apresentará dois pontos de divergência. Por sua vez, na situação em que $M < M_0$, não haverá nenhuma singularidade.

Expandindo a função (3.3) numa série de potências em Θ , obtemos:

$$h(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{8M\sqrt{\Theta}}{r^2\pi} + \dots \quad (3.5)$$

Logo, considerando que o parâmetro é muito pequeno e impondo a condição $h(r) = 0$, encontramos que, nesse regime

$$r_{\pm} \cong \frac{r_S\pi \pm \sqrt{r_S^2\pi^2 - 16r_S\pi\sqrt{\Theta}}}{2\pi}. \quad (3.6)$$

Isso nos permite concluir que, quando a constante de regularização é muito pequena, a solução (3.2) apresentará horizontes apenas se $r_S \geq 16\sqrt{\Theta}/\pi$ ($M \geq M_0 = 8\sqrt{\Theta}/\pi$).

A seguir, mostraremos que, caso essa singularidades existam, poderemos eliminá-las a partir de uma mudança de coordenada. Além disso, assim como na solução de Schwarzschild, veremos que os valores de r que tornam a métrica singular indicam a existência de horizontes e, por consequência, a existência de um buraco negro.

- **Horizontes e buraco negro**

Buscando entender a estrutura do espaço-tempo descrito pela métrica (3.2), investigaremos o comportamento das curvas radiais nulas. Fazendo isso, a equação (3.2) nos fornece a seguinte expressão:

$$\frac{dt}{dr} = \pm \left[1 - \frac{2m(r)}{r} \right]^{-1}. \quad (3.7)$$

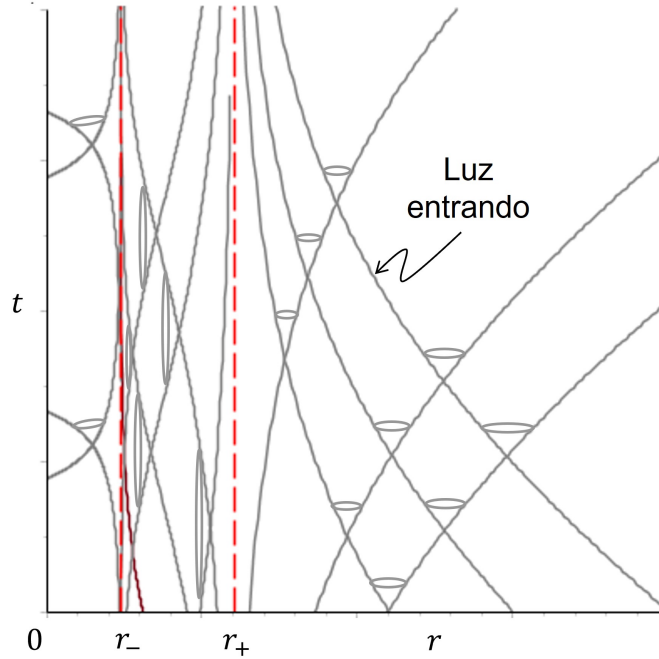
Realizando uma análise numérica desta relação¹, encontramos o comportamento dos feixes que se afastam e se aproximam da origem, conforme mostra a Figura 7. Observamos que os cones de luz se estreitam quando próximos de r_+ . Isso nos leva pensar que, pelo menos neste sistema de coordenadas, o raio de luz não é capaz de alcançar $r = r_+$. Contudo, de forma análoga à solução de Schwarzschild, essa suposta incapacidade está associada ao sistema de coordenadas que estamos utilizando. Diante disso, buscaremos um sistema no qual isto não aconteça.

Seguindo o procedimento abordado no capítulo anterior, escrevemos a métrica nas coordenadas de Eddington-Finkelstein, $(t^*, r, \theta, \varphi)$, onde

$$dt^* = dt + \left[1 - \frac{2m(r)}{r} \right]^{-1} dr. \quad (3.8)$$

¹ Nessa discussão, fixamos a constante Θ e consideramos $M > M_0$

Figura 7 – Nas coordenadas de Schwarzschild, ao se aproximar de $r = r_+$ o cone de luz se fecha.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2024.

Fazendo isso, a equação (3.7) toma a forma

$$\frac{dt^*}{dr} = \begin{cases} 0, & \text{entrando} \\ 2[1 - 2m(r)/r]^{-1}, & \text{saindo} \end{cases}. \quad (3.9)$$

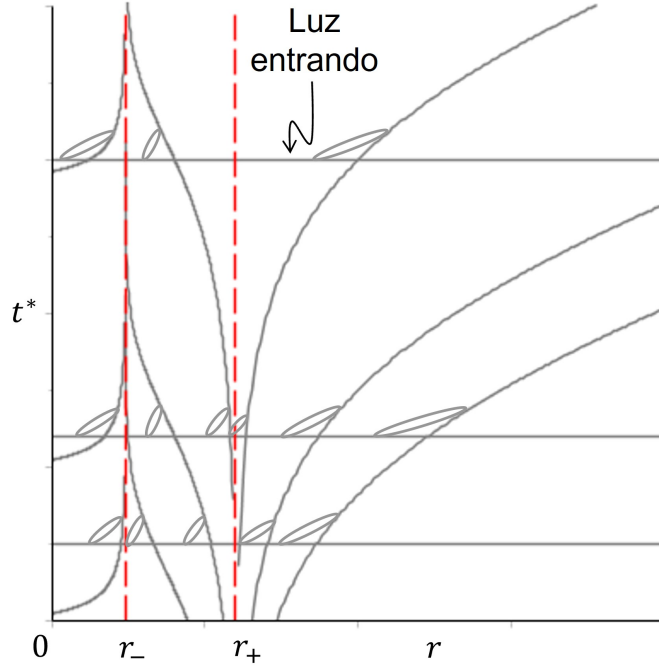
ou seja, que a linha de universo da luz que incide possui inclinação nula. Por sua vez, o elemento de linha torna-se

$$ds^2 = \left[1 - \frac{2m(r)}{r}\right] dt^{*2} - 2dt^* dr - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (3.10)$$

o qual é finito para qualquer valor de r . Isto significa que $r = r_+$ e $r = r_-$ são singularidades presentes apenas nas coordenadas originais (t, r, θ, φ) .

A Figura 8 mostra os comportamentos das linhas de universo da luz, nas coordenadas de Eddington-Finkelstein, obtidos a partir da resolução da equação (3.10). Nela, vemos os cones de luz não se fecham ao atingirem $r = r_+$ e, portanto, o feixe de luz (ou uma partícula massiva) atravessará esta superfície. Outro aspecto a ser destacado é que, na região $r_+ < r < r_-$, os cones estão inclinados de tal maneira que todos os caminhos do futuros são dirigidos na direção decrescente de r . Isto significa que, após atravessar a fronteira r_+ , a luz (ou uma partícula) seguirá para a região $0 < r < r_-$. Contudo, diferentemente do espaço-tempo de Schwarzschild, no qual a linha de universo sempre terminará na origem (ver Figura 4), aqui as posições dos cones nesse setor indicam que o ponto $r = 0$ nunca será atingido. De qualquer forma, seguindo as argumentações

Figura 8 – Ao atravessar a superfície definida por $r = r_+$, o cone de luz sofre uma inclinação.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2024.

apresentadas no capítulo anterior, dizemos que esta configuração de massa é um buraco negro, sendo $r_{H\Theta} = r_+$ o raio do horizonte eventos.

3.2 Caso II: Buraco Negro de Bardeen

O buraco negro de Bardeen [48] é uma solução das equações de Einstein, estática e esféricamente simétrica, expressa por

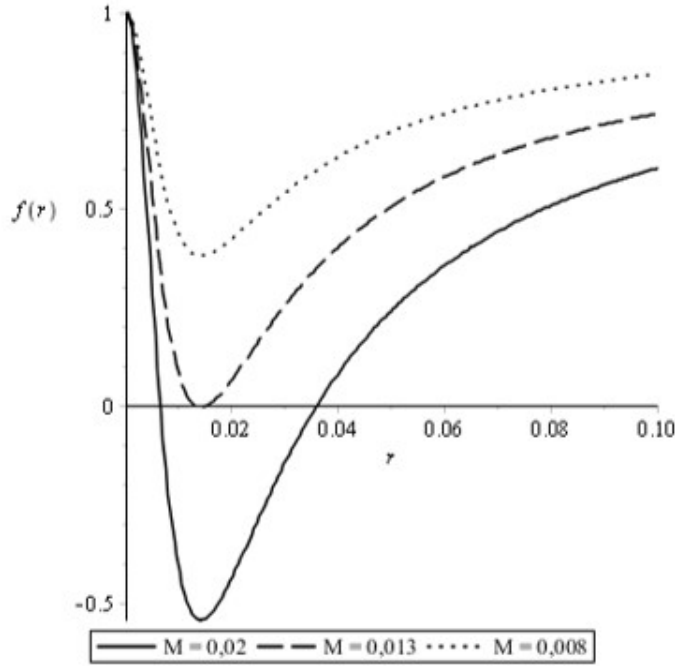
$$ds^2 = f(r)dt^2 - \frac{dr^2}{f(r)} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (3.11)$$

onde

$$f(r) = 1 - \frac{2Mr^2}{(r^2 + q^2)^{3/2}}, \quad (3.12)$$

que é o elemento de linha que corresponde ao campo gravitacional gerado por um monopolo magnético que resulta da eletrodinâmica não linear. Nesta equação, q e M representam, respectivamente, a carga magnética e a massa de um monopolo magnético [51]. Se a constante q for nula, a configuração do espaço-tempo dada por (3.11) retornará à métrica de Schwarzschild. Diante disso, a solução de Bardeen pode ser vista como uma solução regular de Schwarzschild.

Analisando a equação (3.12), vemos que, quando r for igual a $r_0 = \sqrt{2}q$, a função $f(r)$ assumirá o valor mínimo, $f_0 = -\left(4M\sqrt{3}/9q - 1\right)$. Por esta razão, dependendo da

Figura 9 – Comportamento da função $f(r)$ para $q = 0,01$ e diferentes valores de M .

Fonte: Elaborada pelo autor, 2024.

relação entre as constantes q e M , a componente g^{11} da métrica (3.11), que é igual a $f(r)$, poderá ser nula para um ou dois valores de r , ou ainda ser diferente de zero para qualquer valor de r . Isto significa que a existência da superfície e que define o horizonte de eventos e, conseqüentemente, de um buraco negro, está condicionada à forma como essas quantidades estão relacionadas. De fato, como podemos observar na figura 9, se $M > 9q/4\sqrt{3}$, f_0 será negativo e haverá dois valores que anulam a referida componente, o que caracteriza a existência de dois horizontes. Porém, de modo semelhante ao caso anterior, o horizonte de eventos será o de maior valor. Já quando $M = M_0 = 9q/4\sqrt{3}$, o que corresponde a $f_0 = 0$, ambos os horizontes coincidem. Por sua vez, na situação em que $M < 9q/4\sqrt{3}$, f_0 assumirá um valor positivo e g^{11} nunca será nula, impossibilitando a presença dessa superfície.

Impondo a condição $f(r) = 0$ e considerando $M \geq 9q/4\sqrt{3}$, segue de (3.12) que o horizonte de eventos da métrica (3.11) é dado por

$$r_{Hq} = \frac{1}{6} \sqrt{12r_S^2 - 36q^2 + 2^{1/3}12\xi^{1/3} - 2^{2/3}6(6q^2r_S^2 - r_S^4)\xi^{-1/3}}, \quad (3.13)$$

sendo

$$\xi = \frac{1}{4} \left(2r_S^6 - 18r_S^4q^2 + 27r_S^2q^4 + 3r_S^2q^3 \sqrt{27q^2 - 4r_S^2} \right). \quad (3.14)$$

Por conseguinte, no caso em que $q \ll r_S$, temos:

$$r_{Hq} \cong r_S - \frac{3q^2}{2r_S}. \quad (3.15)$$

A abordagem matemática adotada por Bardeen, que consiste na substituição de M por uma função específica de massa, resultou na regularização da métrica (3.11), removendo a singularidade que existia na origem do sistema de coordenadas e convertendo esse ponto em um ponto genérico qualquer. A regularidade da solução de Bardeen se torna evidente ao analisar a métrica diretamente ou ao calcular certos escalares. Por exemplo o escalar de Ricci e o escalar de Kretschmann para a métrica de Bardeen, que demonstra claramente essa regularidade:

$$R = \frac{6Mq^2(4q^2 - r^2)}{(r^2 + q^2)^{7/2}}, \quad (3.16)$$

e

$$R_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{12M^2(8q^8 - 4q^6r^2 + 47q^4r^4 - 12q^2r^6 + 4r^8)}{(r^2 + q^2)^7}. \quad (3.17)$$

Nesse contexto, ao contrário do escalar de Kretschmann da métrica de Schwarzschild, dado pela equação (2.31), o limite quando r tende a zero é finito. Além disso, a métrica também se apresenta como regular, com ds^2 sendo finito no limite em que $r \rightarrow 0$. Assim, o buraco negro de Bardeen se mostra regular, não possuindo uma singularidade na origem do sistema de coordenadas. Ele é caracterizado como um buraco negro principalmente por ter, no mínimo, um horizonte de eventos, conforme discutimos no capítulo anterior.

4 Termodinâmica do Buraco Negro Regular

A origem da Termodinâmica dos Buracos Negros remonta à década de 1970, quando estudos começaram a revelar semelhanças entre as propriedades observáveis dos buracos negros e as leis da Termodinâmica Clássica [52, 53]. A ideia de associar entropia a um buraco negro surgiu não apenas pelo fato de que todos os sistemas possuem entropia, mas também pela necessidade de preservar a Segunda Lei da Termodinâmica Clássica, ao considerar a perda de entropia do universo quando um corpo entra em um buraco negro.[17]

Segundo Bekenstein [15], a entropia de um buraco negro seria uma medida da informação perdida sobre o que há em seu interior, inacessível para um observador externo. Assim, a diminuição da entropia de um corpo ao ser engolido pelo buraco negro seria compensada pelo aumento da entropia, e, conseqüentemente, da área do horizonte de eventos, ou seja, a área de um buraco negro sempre aumenta ou permanece constante independente dos processos físicos que ele sofra. Por exemplo, quando dois buracos negros se fundem, a área do horizonte de eventos do buraco negro resultante é maior do que a soma das áreas dos horizontes dos buracos negros originais. Isso significa que a entropia total de dois sistemas combinados é sempre maior do que a soma das entropias individuais.

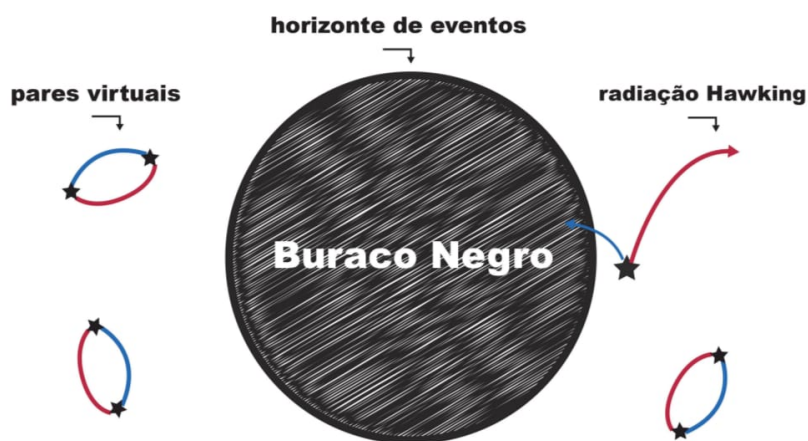
No mesmo estudo, Bekenstein propôs a Segunda Lei da Termodinâmica Generalizada, afirmando que a soma da variação da entropia de um buraco negro e do ambiente externo nunca poderia diminuir. No entanto, ele não forneceu uma justificativa física detalhada para esse postulado, apenas baseou sua hipótese em conceitos da teoria da informação e experimentos teóricos. Isso, aliado à visão clássica de que os buracos negros absorvem matéria sem emitir nada e à recente descoberta do físico inglês Stephen Hawking [52, 54], de que o horizonte de eventos de um buraco negro nunca encolhe, fazia com que a ideia de entropia e temperatura nos buracos negros fosse tratada mais como uma analogia ou até especulação na época.

Somente em 1974, Hawking, influenciado pelo trabalho de Jacob David Bekenstein, começou a aplicar os conceitos da mecânica quântica ao estudo dos buracos negros [55, 56]. No universo quântico, o vácuo não está completamente vazio; em vez disso, pares de partículas virtuais aparecem e desaparecem tão rapidamente que são praticamente impossíveis de serem detectadas. Essas partículas virtuais se manifestam como fótons e seu constante processo de criação e aniquilação é conhecido como flutuação quântica [57, 58, 59]. Quando esse fenômeno ocorre nas proximidades de um buraco negro, o intenso campo gravitacional pode atrair as partículas para dentro do buraco negro. No entanto, também é possível que uma dessas partículas escape para o infinito, processo conhecido

como Radiação de Hawking. A emissão dessas partículas pode eventualmente levar ao desaparecimento do buraco negro. Para que essa radiação se produza, é necessário um gasto de energia, que é retirado do próprio buraco negro, resultando na sua evaporação, ou seja, na diminuição do seu tamanho ao longo do tempo [58, 60, 61].

Para que ocorra a “evaporação” do buraco negro, as partículas absorvidas devem ter energia negativa (conforme o princípio da conservação de energia), enquanto as partículas que escapam devem possuir energia positiva (como qualquer partícula real em regiões de gravidade mais fraca). À medida que o buraco negro emite essas partículas, sua massa e tamanho diminuem de maneira uniforme, facilitando a liberação de mais partículas por tunelamento quântico. Dessa forma, a emissão continua em um ritmo crescente até que, eventualmente, o buraco negro irradia toda a sua energia e desaparece, como ilustrado na figura 10.

Figura 10 – Representação esquemática do efeito Hawking



Fonte: Figura extraída de [55]

Portanto, há razões mais do que suficientes para considerar um buraco negro como um sistema termodinâmico, possuindo temperatura T e a entropia S .

4.1 Variáveis Termodinâmicas

Iniciaremos, agora, o estudo das quatro leis da termodinâmica de buracos negros.

A primeira lei da termodinâmica afirma que uma pequena alteração na entropia de um sistema está sempre associada a uma variação proporcional na energia, sendo a temperatura o fator de proporcionalidade. Bekenstein [15], foi o primeiro a perceber que os buracos negros seguem uma lei semelhante, em que uma mudança na massa do buraco negro está relacionada a uma variação na área do horizonte de eventos, o que seria análogo à entropia. Nesse contexto, o fator de proporcionalidade é conhecido como

gravidade superficial, representada por κ , que corresponde à medida da intensidade do campo gravitacional no horizonte de eventos. Essa analogia se torna ainda mais clara pelo fato de a gravidade superficial ser uniforme em todos os pontos do horizonte de eventos, assim como a temperatura é constante em todo corpo que está em equilíbrio térmico.

$$dE = TdS - pdV. \quad (4.1)$$

Sob a perspectiva da relatividade geral clássica, a analogia mencionada é bastante consistente. Cada uma das leis da termodinâmica tem um equivalente na mecânica dos buracos negros. Um sistema que alcança equilíbrio térmico em um estado estacionário corresponde a um buraco negro em estado estacionário. A Lei Zero está relacionada à gravidade superficial no horizonte de eventos. Enquanto a Segunda Lei diz que área do horizonte de eventos de um buraco negro nunca diminui com o tempo semelhante a entropia dos processos irreversíveis, ou seja, $\delta A \geq 0$ isso é demonstrado pelo Teorema da Área de Hawking, que estabelece uma relação entre a área A de um buraco negro e sua entropia S [62, 63].

A forma usual da terceira lei afirma que não é possível alcançar uma temperatura de $T = 0$ em qualquer processo físico, ou que a entropia deve se aproximar de zero quando a temperatura se aproxima de zero. Para buracos negros postula-se que: É impossível reduzir a gravidade superficial κ de um buraco negro a zero por um número finito de processos, essa ideia não se aplica em todos os casos, o que ocorre é que $\kappa = 0$ se refere aos buracos negros extremos, que não possuem necessariamente uma área de desaparecimento. No entanto, esta lei também não funciona, no sentido de que existem sistemas físicos comuns que a violam. Com isso, podemos fazer algumas correspondências de propriedades termodinâmicas com os buracos negros como, por exemplo, energia, entropia e temperatura são correspondidas à massa, à área e a gravidade da superfície da seguinte forma: $E \rightarrow M$, $T \rightarrow \alpha\kappa$ $S \rightarrow A/8\pi\alpha$, onde α é uma constante indeterminada.

Na teoria da relatividade geral, essa similaridade é basicamente perfeita com cada lei da termodinâmica, correspondendo a uma lei da mecânica dos buracos negros. Essa conexão descrita é de grande relevância, uma vez que E e M expressam a mesma propriedade física, ou seja, a energia total do sistema. Entretanto, de acordo com a relatividade geral clássica, a temperatura física de um buraco negro é zero absoluto. Isso sugere que não deve haver uma relação física entre T e κ . Da mesma forma, seria incoerente assumir uma relação física entre S e A . Por esse motivo, como já foi dito anteriormente, quando essa ideia foi inicialmente apresentada, muitos pesquisadores consideravam a analogia entre buracos negros e as leis da termodinâmica apenas como uma curiosidade matemática, sem relevância física.

No entanto, essa perspectiva mudou com a descoberta de Hawking [17], demonstrou em seu trabalho que os campos quânticos em torno de um buraco negro possibilitam a

emissão de partículas, que irradiam a uma determinada temperatura, dada por:

$$T_H = \frac{\kappa}{2\pi}. \quad (4.2)$$

Esta expressão representa a temperatura física de um buraco negro, não sendo apenas uma quantidade puramente matemática, mas também análoga à noção de temperatura presente nas leis da mecânica dos buracos negros. Com isso, o cálculo de Hawking para a criação de partículas forneceu uma resposta afirmativa sobre a existência de um significado físico nas relações matemáticas entre as leis da mecânica dos buracos negros e as da termodinâmica.

Com isso, podemos interpretar a entropia real de um buraco negro como $A/4$. Bekenstein sugeriu uma lei generalizada que define essa relação como sendo

$$\delta \left(S + \frac{A}{4} \right) \geq 0. \quad (4.3)$$

Essa lei generalizada nos mostra que a variação da entropia de um buraco negro, somada a variação da entropia do exterior nunca decrescem. Vale destacar que essa lei inclui a radiação de Hawking, pois a redução da entropia do buraco negro, resultante da diminuição de sua massa e área, é equilibrada pelo aumento da entropia no ambiente externo. Esta lei pode ser comprovada se associarmos a entropia de um sistema ao logaritmo do número de estados quânticos possíveis.

4.2 Cálculo das Variáveis

Nesta seção iremos investigar como as propriedades termodinâmicas se comportam na ausência da singularidade. Especificamente, determinaremos as temperatura, entropia e capacidade térmica dos dois buracos negros regulares tratados no capítulo anterior.

4.2.1 Caso I: Buraco Negro de Nozari-Mehdpour

- **Temperatura**

Segundo Wald [64], quando a geometria do espaço-tempo é gerada por uma distribuição esfericamente simétrica em rotação, a gravidade na superfície é expressa por:

$$\kappa^2 = - \frac{1}{2} \nabla_\mu \chi_\nu \nabla^\mu \chi^\nu \Big|_{r=r_H}, \quad (4.4)$$

onde $\chi^\mu = (1, 0, 0, \Omega)$ é o vetor de Killing, sendo $\Omega \equiv -(g_{03}/g_{33})|_{r=r_H}$ a velocidade angular no horizonte de eventos, r_H . Naturalmente, dado que o espaço-tempo estudado é gerado por um objeto com simetria esférica e estática, essa velocidade angular é zero. Por conseguinte, a expressão (4.4) toma a forma:

$$\kappa^2 = - \frac{1}{2} g_{\nu\alpha} g^{\mu\beta} \Gamma_{\mu 0}^\alpha \Gamma_{\beta 0}^\nu \Big|_{r=r_H} \quad (4.5)$$

Uma vez que as conexões de Christoffel não nulas, para os dois espaços-tempo abordados, são do tipo

$$\begin{aligned} \Gamma_{01}^0 &= \frac{1}{2} \frac{1}{g_{00}} \frac{dg_{00}}{dr}, & \Gamma_{00}^0 &= -\frac{1}{2} \frac{1}{g_{11}} \frac{dg_{00}}{dr}, & \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2} \frac{1}{g_{11}} \frac{dg_{11}}{dr} & \Gamma_{22}^1 &= -\frac{r}{g_{11}}, \\ \Gamma_{33}^1 &= -\frac{r \operatorname{sen}^2 \theta}{g_{11}}, & \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{r}, & \Gamma_{33}^2 &= -\operatorname{sen} \theta \cos \theta & \text{e} & \Gamma_{23}^3 &= \cot \theta, \end{aligned} \quad (4.6)$$

podemos escrever (4.5) como

$$\kappa = \frac{1}{2\sqrt{-g_{00}g_{11}}} \left(\frac{dg_{00}}{dr} \right) \Big|_{r=r_H}. \quad (4.7)$$

Logo, substituindo em (4.2), segue que

$$T_H = \frac{1}{4\pi\sqrt{-g_{00}g_{11}}} \left(\frac{dg_{00}}{dr} \right) \Big|_{r=r_H}. \quad (4.8)$$

No espaço-tempo gerado pelo buraco negro de Nozari-Mehdpour, as componentes covariantes 00 e 11 do tensor métrico, $g_{\mu\nu}$, são dadas por

$$g_{00} = -g_{11}^{-1} = 1 - \frac{4M}{\pi r} \left[\operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{r}{\sqrt{\Theta}} \right) - \frac{r\sqrt{\Theta}}{r^2 + \Theta} \right]. \quad (4.9)$$

Por outro lado, tomando $g^{11} = 0$, vemos que a expressão da massa em termos de $r_{H\Theta}$ é

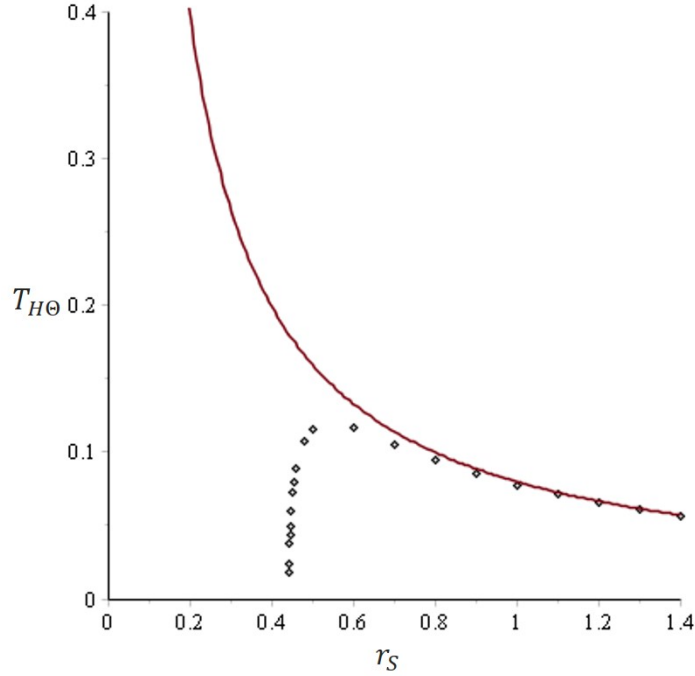
$$M = \frac{\pi r_{H\Theta}}{4} \left[\operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{r_{H\Theta}}{\sqrt{\Theta}} \right) - \frac{r_{H\Theta}\sqrt{\Theta}}{r_{H\Theta}^2 + \Theta} \right]^{-1} \quad (4.10)$$

Logo, usando estas equações em (4.8), encontramos:

$$T_{H\Theta} = \frac{1}{4\pi r_{H\Theta}} \left\{ \frac{(r_{H\Theta}^2 + \Theta)^2 \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{r_{H\Theta}}{\sqrt{\Theta}} \right) - 3r_{H\Theta}^3 \sqrt{\Theta} - r_{H\Theta} \Theta^{3/2}}{\left[(r_{H\Theta}^2 + \Theta) \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{r_{H\Theta}}{\sqrt{\Theta}} \right) - r_{H\Theta} \sqrt{\Theta} \right] (r_{H\Theta}^2 + \Theta)} \right\}. \quad (4.11)$$

Para entendermos como a presença do fator de regularização, Θ , altera o comportamento da temperatura do buraco negro, precisamos escrever $T_{H\Theta}$ em função do raio de Schwarzschild. Porém, devido a forma da métrica, não conseguimos encontrar $r_{H\Theta} = r_{H\Theta}(r_S)$. Por conta disso, optamos por realizar uma análise numérica, conforme consta na figura 11. Como podemos observar, diferentemente de um buraco negro singular, onde a radiação é emitida para todos os valores de r_S , no caso regular esta emissão ocorre até um certo valor que corresponde ao raio do buraco negro de massa mínima, M_0 . Dito de outra forma, a presença da regularidade garante que o buraco negro vai emitir radiação e evaporar até que sua massa se torne igual M_0 . Outro aspecto importante é que, para valores grandes de r_S ($M \gg M_0$) a temperatura comporta-se de maneira semelhante à do buraco negro de Schwarzschild. Isto mostra que, nesse caso, a contribuição da regularização na radiação Hawking é muito pequena.

Figura 11 – Comparação entre a temperatura do buraco negro de Schwarzschild e o regular de Nozari-Mehdipour. A curva pontilhada representa o comportamento da função $T_{H\Theta}$ em função de r_S , para o caso em $\Theta = 0,01$; enquanto que a contínua decreve a situação na qual $\Theta = 0$.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2024.

Por fim, substituindo (3.6) em (4.11), podemos mostrar que, quando esse parâmetro é muito pequeno, a temperatura se comporta como:

$$T_{H\Theta} \cong \frac{1}{4\pi r_S} - \frac{4\Theta}{\pi^3 r_S^3}. \quad (4.12)$$

Esta equação mostra que, nesse regime, os efeitos da regularização não são tão relevantes.

• Entropia

De modo geral, a entropia do buraco negro é dada por

$$S = \int \frac{dM}{T_H} \Rightarrow S = \int \frac{1}{T_H} \frac{\partial M}{\partial r_H} dr_H. \quad (4.13)$$

Logo no presente caso, segue que

$$S_\Theta = \int \frac{1}{T_{H\Theta}} \frac{\partial M}{\partial r_{H\Theta}} dr_{H\Theta}. \quad (4.14)$$

Porém, ao substituímos (4.10) e (4.11) nesta equação, não conseguiremos resolver a integral. Sendo assim, determinaremos a entropia apenas para a situação em que Θ é muito pequeno, ou seja, assumiremos que a temperatura é dada por (4.12).

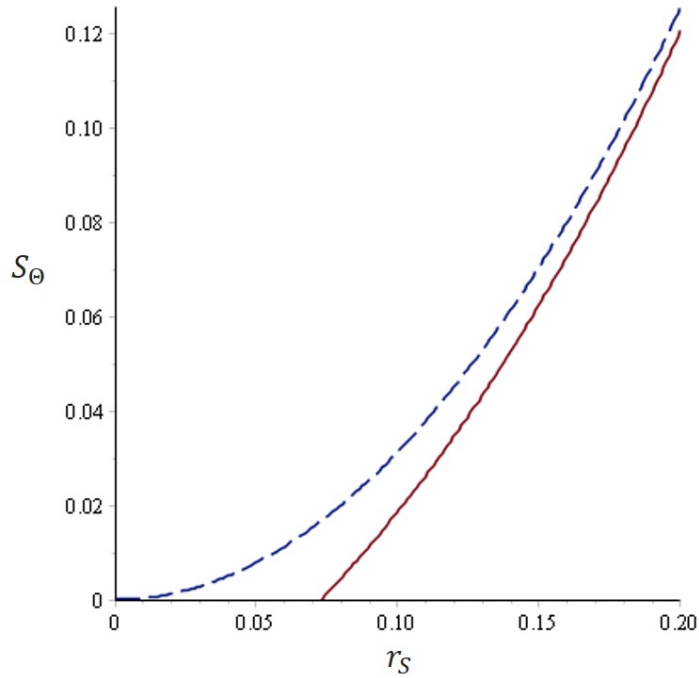
Entendendo que r_S é uma função de $r_{H\Theta}$, usando a regra da cadeia e levando em conta que $\partial M/\partial r_S = 1/2$, podemos mostrar que a equação (4.14) toma a seguinte forma:

$$S_\Theta = \frac{1}{2} \int \frac{1}{T_{H\Theta}} dr_S. \quad (4.15)$$

Assim, usando (4.12) e integrando, obtemos

$$S_\Theta \cong \pi r_S^2 + \frac{16\Theta}{\pi} \ln(\pi^2 r_S^2 - 16\Theta). \quad (4.16)$$

Figura 12 – Comparação entre as entropias dos buracos negros de Schwarzschild e o regular de Nozari-Mehdpour. A curva contínua representa o comportamento da função (4.16) em função de r_S , para o caso em $\Theta = 0,001$; enquanto que a tracejada decreve a situação na qual $\Theta = 0$.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2024.

Analisando a equação (4.16) ou o gráfico da figura 12, vemos que, diferentemente do que acontece com o buraco negro de Schwarzschild, onde a entropia se tornará nula quando $r_S = 0$, a do buraco negro de Nozari-Mehdpour se anulará quando $r_S \cong 16\sqrt{\Theta}/\pi$. Isto significa que a entropia decresce a medida que a radiação é emitida e a massa é reduzida, e que este processo se encerra quando o buraco negro atinja a massa mínima $M_0 \cong 8\sqrt{\Theta}/\pi$. Outro aspecto que pode ser observado é que, quanto maior for a massa, menor será a contribuição do fator Θ no comportamento da entropia. Além disso, quando o parâmetro de regularização é nulo, o resultado torna-se igual aquele que é previsto por Bekeinstein (1973) para o buraco negro de Schwarzschild.

• Capacidade Térmica

A capacidade térmica é obtida a partir da relação

$$C_q = \frac{\partial M}{\partial T_H}. \quad (4.17)$$

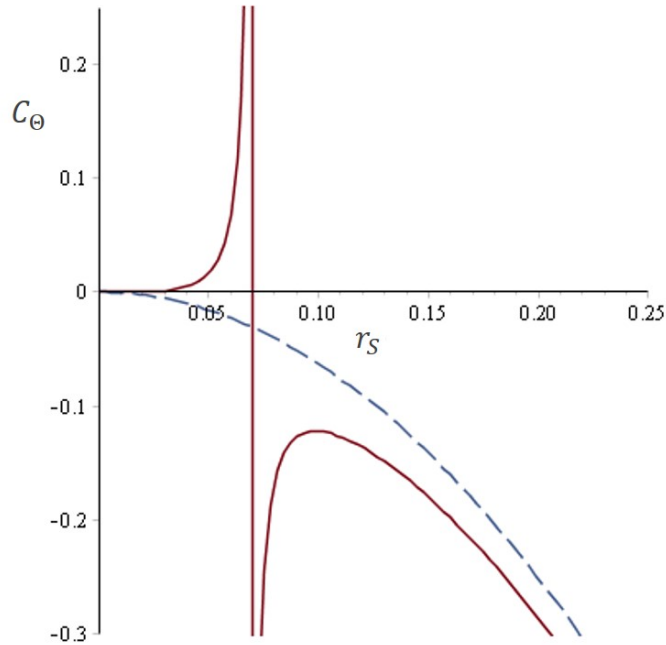
Sendo assim, para o Buraco Negro de Nozari-Mehdpour, podemos escrever

$$C_\Theta = \frac{\partial M}{\partial T_{H\Theta}} = \frac{\partial M}{\partial r_{Hq}} \left(\frac{\partial T_{H\Theta}}{\partial r_{Hq}} \right)^{-1} \Rightarrow C_\Theta = \frac{\partial M}{\partial r_S} \left(\frac{\partial T_{H\Theta}}{\partial r_S} \right)^{-1}. \quad (4.18)$$

Logo, considerando que o parâmetro Θ é muito pequeno e usando o fato que $M = r_S/2$, segue, a partir de (4.12), que

$$C_\Theta \cong -\frac{2r_S^4\pi^3}{\pi^2r_S^2 - 48\Theta}. \quad (4.19)$$

Figura 13 – Comparação entre as capacidades térmicas do buraco negro de Schwarzschild e regular de Nozari-Mehdpou. A curva contínua representa o comportamento da função (4.19) em função de r_S , para o caso em $\Theta = 0,001$; enquanto que a tracejada decreve a situação na qual $\Theta = 0$.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2024.

Para compreendermos a influência da regularização, na figura 4.19, comparamos as capacidades térmicas dos buracos negros de Schwarzschild e de Nozari-Mehdpour. A capacidade térmica, representada no eixo vertical, nos dá uma medida de como o buraco

negro responde à absorção de calor em termos de variação de temperatura. Valores positivos indicam que, ao absorver calor, a temperatura aumenta, enquanto valores negativos indicam que a absorção de calor faz com que a temperatura do buraco negro diminua, sugerindo instabilidade.

A curva contínua representa o comportamento da equação (4.19) em função do raio de Schwarzschild, com $\Theta = 0,001$. O gráfico de C_Θ mostra um pico no valor da capacidade térmica quando $r_S \cong 4\sqrt{3\Theta}/\pi = 0,07$, indicando uma região de **estabilidade térmica**. Nesta região, a capacidade térmica é positiva, o que significa que o buraco negro está em equilíbrio e pode absorver calor sem se tornar instável. Por outro lado, quando o raio do horizonte de eventos diminui abaixo desse valor, a capacidade térmica se torna negativa. Essa **região negativa** no gráfico indica uma fase de **instabilidade térmica**, onde o buraco negro, ao absorver calor, não aumenta sua temperatura de forma equilibrada, mas sim perde estabilidade. Esse comportamento é típico de buracos negros pequenos ou com raios de horizonte muito próximos da singularidade.

A curva tracejada representa o buraco negro de Schwarzschild, que é caracterizado por uma singularidade central. A capacidade térmica desse buraco negro é sempre negativa, o que significa que ele é termodinamicamente instável em todas as situações. Isso implica que, ao absorver calor, sua temperatura tende a diminuir, o que é uma característica da instabilidade em buracos negros sem qualquer regularização ou modificação.

4.2.2 Caso II: Buraco Negro de Bardeen

- **Temperatura**

No espaço-tempo de Bardeen, as componentes g_{00} e g_{11} são

$$g_{00} = -g_{11}^{-1} = 1 - \frac{2Mr^2}{(r^2 + q^2)^{3/2}}. \quad (4.20)$$

Além do mais, a massa, expressa em termos do raio do horizonte, é

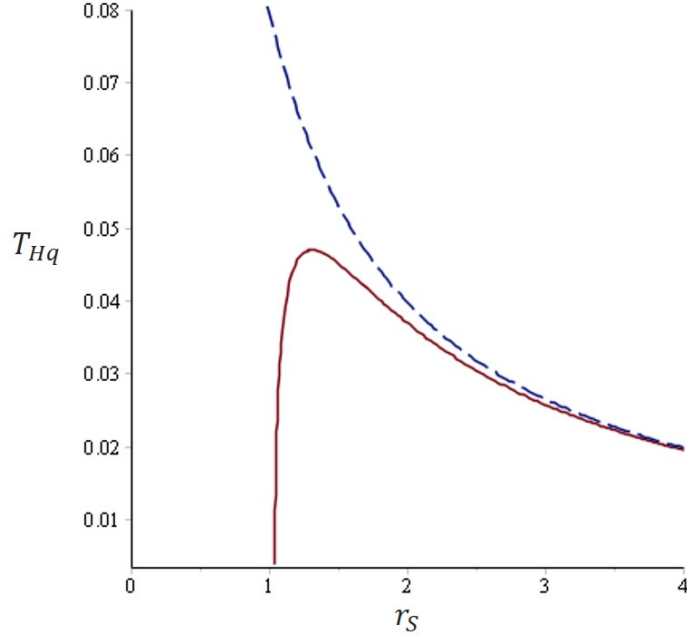
$$M = \frac{(r_{Hq}^2 + q^2)^{3/2}}{2r_{Hq}^2}, \quad (4.21)$$

Como consequência, substituindo estas equações em (4.8), encontramos:

$$T_{Hq} = \frac{1}{4\pi} \frac{r_{Hq}^2 - 2q^2}{r_{Hq}(r_{Hq}^2 + q^2)}. \quad (4.22)$$

Seguindo a argumentação do caso anterior, no intuito de compreendermos os efeitos da regularização na temperatura do buraco negro, substituímos (3.13) em (4.22), para escrevermos T_{Hq} em função do raio de Schwarzschild. Porém, ao executarmos esse

Figura 14 – Comparação entre a temperatura do buraco negro de Schwarzschild e o regular de Bardeen. A curva contínua representa o comportamento da função 4.22 em função de r_S , para o caso em $q = 0, 4$; enquanto que a tracejada decreve a situação na qual $q = 0$.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2024.

procedimento nos deparamos com uma equação bastante “complexa”, o que dificultou a nossa compreensão. Por esta razão, decidimos fazer uma análise gráfica, conforme segue na figura 14. A partir dela vemos que, assim como acontece no buraco negro de Nozari-Mehdpour, a emissão ocorrerá até que o buraco negro alcance uma massa mínima, que neste caso é dada por $M_0 = 9q/4\sqrt{3}$. Também percebemos que, se $M \gg M_0$, o comportamento de T_{Hq} é aproximadamente igual ao resultado previsto para o buraco negro de Schwarzschild.

Além disso, no regime em que q é muito pequeno, podemos mostrar que

$$T_{Hq} \cong \frac{1}{4\pi r_S} - \frac{3}{8\pi} \frac{q^2}{r_S^3}, \quad (4.23)$$

evidenciando que, em tal situação, os efeitos do parâmetro q são sutis.

• Entropia

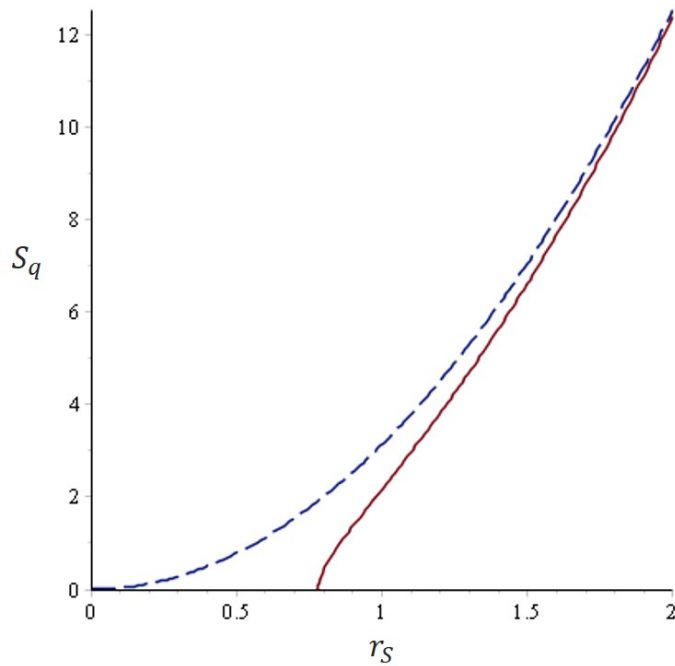
No caso II, temos que:

$$\frac{\partial M}{\partial r_{Hq}} = \frac{3}{2} \frac{\sqrt{q^2 + r_{Hq}^2}}{r_{Hq}} - \frac{(q^2 + r_{Hq}^2)^{3/2}}{r_{Hq}^3} \quad (4.24)$$

e que a temperatura é descrita pela equação (4.22). Logo, substituindo esses resultados na definição da entropia [Ver Eq. (4.13)], chegamos à:

$$S_q = \frac{\pi}{r_{Hq}} \left[\sqrt{q^2 + r_{Hq}^2} (r_{Hq}^2 - 2q^2) + 3q^2 r_{Hq} \ln (r_{Hq} + \sqrt{q^2 + r_{Hq}^2}) \right]. \quad (4.25)$$

Figura 15 – Comparação entre as entropias do buraco negro de Schwarzschild e o regular de Bardeen. A curva contínua representa o comportamento da função (4.25) em função de r_S , para o caso em $q = 0,3$; enquanto que a tracejada decreve a situação na qual $q = 0$.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2024.

De forma análoga ao caso I, devemos substituir (3.13) em (4.25) para expressarmos S_q como uma função de r_S . Mas, isto também nos leva a uma equação muito extensa, dificultando o nosso entendimento sobre o papel da constante q no comportamento da entropia. Sendo assim, analisaremos esta variável a partir do gráfico apresentado na figura 15. Observando a referida figura, vemos que a entropia se reduzirá até $r_S = 0,78$, que é o valor correspondente à massa $M_0 = 9q/4\sqrt{3}$, com $q = 0,3$. Além do mais, quando $M \gg M_0$, a contribuição da regularização torna-se irrelevante.

No regime em que q é muito pequeno a entropia toma a forma

$$S_q \cong \pi r_S^2 + \frac{3\pi}{2} [-3 + 2 \ln(2r_S)] q^2. \quad (4.26)$$

A partir deste resultado concluímos que, quando $q = 0$, a entropia torna-se a de Benkeinstein.

• Capacidade Térmica

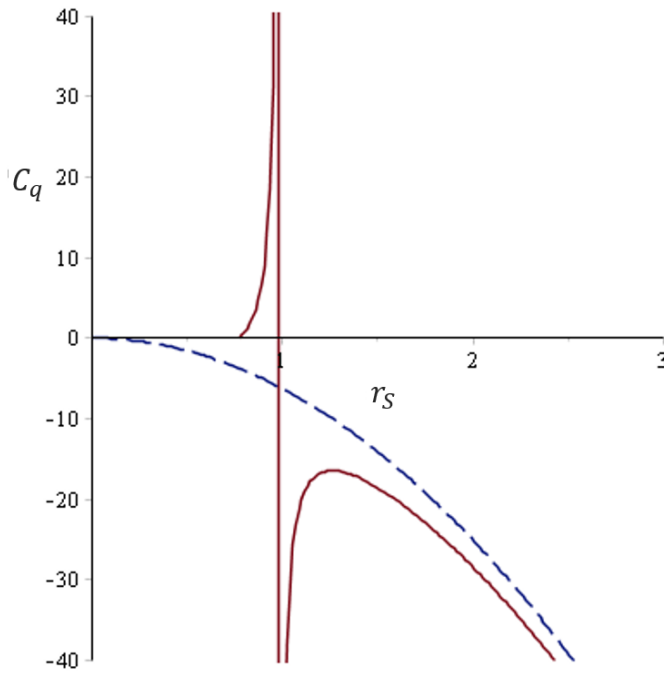
Para este buraco negro, a capacidade térmica é obtida a partir da relação

$$C_q = \frac{\partial M}{\partial T_{Hq}} = \frac{\partial M}{\partial r_{Hq}} \left(\frac{\partial T_{Hq}}{\partial r_{Hq}} \right)^{-1}. \quad (4.27)$$

Sendo assim, substituindo (4.21) e (4.22) nesta equação, encontramos

$$C_q = -\frac{2\pi (r_{Hq}^2 + q^2)^{5/2} (r_{Hq}^2 - 2q^2)}{r_{Hq} (r_{Hq}^4 - 7r_{Hq}^2 q^2 - 2q^4)}. \quad (4.28)$$

Figura 16 – Comparação entre as capacidades térmicas do buraco negro de Schwarzschild e o regular de Bardeen. A curva contínua representa o comportamento da função (4.28) em função de r_S , para o caso em $q = 0,3$; enquanto que a tracejada decreve a situação na qual $q = 0$.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2024.

Buscando entender como C_q varia com r_S , devemos substituir (3.13) em (4.28). Porém, assim como nos cálculos das temperatura e entropia, isto nos leva a uma expressão longa e difícil de ser analisada. Diante disso, optamos por construir um gráfico, onde comparamos as entropias dos buracos negros de Schwarzschild e de Bardeen, considerando $q = 0,3$ [Ver Fig. 16]. Conforme podemos observar, o comportamento da capacidade térmica desse buraco negro é equivalente ao de Nozari-Mehdipour e, portanto, as conclusões do caso anterior podem ser aplicadas aqui. A única diferença é que, no buraco negro de Bardeen, o pico ocorre em outro valor de r_S .

A análise global dos gráficos revela que, enquanto o buraco negro de Schwarzschild é instável, a introdução de um parâmetro que modifique e regularize a métrica cria uma região de **estabilidade térmica**. Essa transição de uma fase instável para uma fase estável ocorre quando o valor de r_S atinge certos valores críticos. Isso sugere que, pelo menos nos casos analisados, os buracos negros regularizados possuem uma termodinâmica mais rica e apresentam uma transição de fase que pode ser interpretada como um equilíbrio térmico em um regime específico.

5 Conclusões

Na presente dissertação, com o intuito de compreendermos a termodinâmica de buracos negros regulares, fizemos uma revisão sobre as soluções propostas por Nozari-Mehdipour e James Bardeen e estudamos o comportamento das temperatura, entropia e capacidade térmica associadas ao buraco negro previsto.

A métrica apresentada na seção 3.1 mostrou que a massa M não é um ponto localizado, mas se distribui por todo espaço tempo, o que modifica a natureza do buraco negro. Os resultados indicam que a presença de horizontes de eventos depende da relação entre a massa M e o parâmetro da massa crítica M_0 . Para $M < M_0$ não há formação de buracos negros, enquanto para $M \geq M_0$, onde $M_0 = 8\sqrt{\Theta/\pi}$, a métrica pode apresentar um ou dois horizontes de eventos. Isso destaca a importância do parâmetro de regularização na definição das condições de existência de buracos negros.

Durante a análise da temperatura do buraco negro de Nozari-Mehdipour percebemos que diferentemente dos buracos negros singulares, onde a radiação Hawking pode continuar até a evaporação completa, no caso de Nozari-Mehdipour a emissão e a evaporação correrá até que sua massa se torne $M_0 = 8\sqrt{\Theta/\pi}$. Desta maneira, para massas muito maiores que M_0 ($M \gg M_0$), a temperatura do buraco negro se comporta de forma semelhante à de um buraco negro de Schwarzschild. Isso indica que, em escalas grandes, a regularização tem pouca influência na radiação Hawking, sendo relevante apenas em regimes próximos à massa mínima.

Vimos também que ao contrário do buraco negro de Schwarzschild, cuja entropia desaparece completamente quando $r_S = 0$, no caso do buraco negro de Nozari-Mehdipour, ela se anula em $r_S \cong 16\sqrt{\Theta/\pi}$, indicando um limite diferente para o processo de evaporação. Conforme a radiação Hawking é emitida e a massa diminui, a entropia também decresce gradualmente, encerrando-se quando o buraco negro atinge a massa mínima $M_0 \cong 8\sqrt{\Theta/\pi}$. Outro ponto a ser destacado nesta análise é que, à medida que a massa aumenta, a influência do fator Θ na entropia se torna cada vez menor. Além disso, na ausência do parâmetro de regularização, o resultado recupera a formulação proposta por Bekenstein (1973) para a entropia do buraco negro de Schwarzschild.

Para a capacidade térmica observamos que buraco negro de Nozari-Mehdipour apresenta uma fase onde a capacidade térmica é positiva, sugerindo uma região de estabilidade térmica para determinados valores do raio do horizonte de eventos. A regularização proposta nesta métrica modifica a capacidade térmica do buraco negro, permitindo uma fase de estabilidade térmica ausente no caso de Schwarzschild. Esse comportamento sugere que buracos negros regulares podem ter uma evaporação diferente

e possivelmente evitar a singularidade total.

A análise apresentada na seção 3.2 revelou que, ao regularizar a solução de Schwarzschild, substituindo a massa, M , por uma função de $m(r)$, Bardeen obteve uma métrica que corresponde à geometria produzida por uma carga magnética q . Neste caso, dependendo da relação entre M e q , a solução pode apresentar um ou dois horizontes, ou até mesmo nenhum. Em outras palavras, nesta solução, a existência de buraco negro depende dos valores de M e q . Na verdade, esse objeto existirá apenas se $M \geq 9q/4\sqrt{3}$.

No que se refere a termodinâmica, percebemos, através dos cálculos da temperatura e da entropia, que o buraco negro emitirá radiação e evaporará até que sua massa atinja o valor mínimo, $M_0 = 9q/4\sqrt{3}$. Quanto a capacidade térmica, os resultados mostraram que, enquanto os buracos negros de Schwarzschild são sempre instáveis, a introdução de uma carga cria uma região de estabilidade térmica. Essa transição de uma fase instável para uma fase estável ocorre para um determinado valor de r_H . Isso mostra que o buraco negro de Bardeen possui uma termodinâmica mais complexa e apresentam uma transição de fase que pode ser interpretada como um equilíbrio térmico em um regime específico. Também vimos que, quando $M \gg q$, a contribuição da regularização na comportamento dessas variáveis é muito pequena.

Referências

- 1 RINDLER, W. *Relativity: Special, General and Cosmological*. 2.ed. ed. New York: OXFORD, 2006. Citado na página 10.
- 2 HUGHSTON L. P.;TOD, K. P. *An Introduction to General Relativity*. Cambridge: University Press,, 1990. Citado na página 10.
- 3 BERGMANN, P. G. *Introdução a Teoria da Relatividade*. New York: Dover Publicações, 1975. Citado na página 10.
- 4 RESNICK, R. *Introduction to Special Relativity*. 2.ed. ed. New York: John Wiley and Sons, 1968. Citado na página 10.
- 5 FERRARO, R. *Einstein's Space-Time. An Introduction to Special an General Relativity*. Buenos Aires: Springer. Universidad de Buenos Aires, 2007. Citado na página 10.
- 6 D'INVERNO, R. A. *Introducing Einstein's Relativity*. New York: Oxford, Clarendon Press, 1992., 1992. Citado na página 10.
- 7 CARROL, S. *Spacetime and Geometry. An Introduction to General Relativity*. Chicago: Addison Wesley. University of Chicago, 2004. Citado na página 10.
- 8 WEINBERG, S. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of The General Theory of Relativity*. 1.ed. ed. Cambridge: Massachusetts Institute of Technology, 1972. Citado na página 10.
- 9 SOARES, D. De schwarzschild a newton. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, SciELO Brasil, v. 42, p. e20190262, 2020. Citado na página 10.
- 10 ALMEIDA, C. R. A pré-história dos buracos negros. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, SciELO Brasil, v. 42, p. e20200197, 2020. Citado na página 11.
- 11 ALMEIDA, C. R. Buracos negros: mais de 100 anos de história. *Cadernos de Astronomia*, v. 2, n. 1, p. 93–93, 2021. Citado na página 11.
- 12 NEVES, J.; SAA, A. Regular rotating black holes and the weak energy condition. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 734, p. 44–48, 2014. Citado na página 11.
- 13 SAKHAROV, A. D. The initial stage of an expanding universe and the appearance of a nonuniform distribution of matter. *Soviet Physics JETP*, v. 22, p. 241, 1966. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 26.
- 14 ANSOLDI, S. Spherical black holes with regular center: a review of existing models including a recent realization with gaussian sources. *arXiv preprint arXiv:0802.0330*, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 26.
- 15 BEKENSTEIN, J. D. Black holes and entropy. *Physical Review D*, v. 7, p. 2333–2346, 1973. Citado 3 vezes nas páginas 11, 34 e 35.

- 16 ANACLETO, M.; BRITO, F.; PASSOS, E. Quantum-corrected self-dual black hole entropy in tunneling formalism with gup. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 749, p. 181–186, 2015. Citado na página 11.
- 17 HAWKING, S. W. Particle creation by black holes. *Commun. math. Phys.*, v. 43, p. 199–220, 1975. Citado 3 vezes nas páginas 12, 34 e 36.
- 18 BERGMANN, T. S. *MyNews explica buracos negros*. 70. ed. São Paulo: Almedina Brasil, 2023. 188 p. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 14.
- 19 WALD, R. M. *General relativity*. [S.l.]: University of Chicago press, 2010. Citado na página 13.
- 20 DIRAC, P. A. M. *General theory of relativity*. [S.l.]: Princeton University Press, 1996. v. 14. Citado na página 13.
- 21 SCHWARZSCHILD, K. Sitzungsberichte der königlich preussischen akademie der wissenschaften zu berlin. *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, p. 189–196, 1916. Citado na página 13.
- 22 SCHWARZSCHILD, K. Über das gravitationsfeld einer kugel aus incompressibler flüssigkeit nach der einsteinschen theorie. *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Phys.-Math. Klasse*, v. 24, p. 424–434, 1916. Citado na página 13.
- 23 ALBERTO, S. Cem anos de buracos negros: o centenário da solução de schwarzschild. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, IOP Publishing, v. 38, n. 4, p. L4, e4201 2016. Citado na página 13.
- 24 JUNIOR, H. C. L. et al. Sombras de buracos negros: desvendando a física por detrás da imagem de m87. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, SciELO Brasil, v. 43, p. e20200232, 2020. Citado na página 14.
- 25 NEVES, J. O buraco negro e sua sombra. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, SciELO Brasil, v. 42, p. e20200216, 2020. Citado na página 14.
- 26 AKIYAMA, K. et al. First sagittarius a* event horizon telescope results. i. the shadow of the supermassive black hole in the center of the milky way. *The Astrophysical Journal Letters*, IOP Publishing, v. 930, n. 2, p. L12, 2022. Citado na página 14.
- 27 MATSUURA, O. T. A primeira imagem de um buraco negro. *Cadernos de Astronomia*, v. 1, n. 1, p. 52–82, 2020. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 15.
- 28 ABBOTT, B. P. et al. Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. *Physical Review Letters*, APS, v. 116, n. 6, p. 061102, 2016. Citado na página 14.
- 29 Event Horizon Telescope Collaboration et al. First m87 event horizon telescope results. i. the shadow of the supermassive black hole. *The Astrophysical Journal Letters*, The American Astronomical Society, v. 875, n. 1, p. L1, abr. 2019. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.3847/2041-8213/ab0ec7>>. Citado na página 14.
- 30 AKIYAMA, K. et al. First m87 event horizon telescope results. iv. imaging the central supermassive black hole. *The Astrophysical Journal Letters*, IOP Publishing, v. 875, n. 1, p. L4, 2019. Citado na página 14.

- 31 Event Horizon Telescope Collaboration. *Event Horizon Telescope*. 2025. <<https://eventhorizontelescope.org>>. Acesso em: 4 jun. 2025. Citado na página 14.
- 32 JOHNSON, M. D. et al. Key science goals for the next-generation event horizon telescope. *Galaxies*, MDPI, v. 11, n. 3, p. 61, 2023. Citado na página 15.
- 33 LANDAU L. E LIFCHITZ, E. *Teoria de Campo*. São Paulo: HEMUS - Livraria Editora Ltda, 1974. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 17.
- 34 HUGHSTON, L. P.; TOD, K. P. *An introduction to general relativity*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1990. v. 5. Citado na página 16.
- 35 SPIEGEL, M. R. *Análise Vetorial*. Rio de Janeiro: Editora Mc Graw Hill, 1979. Citado na página 16.
- 36 CARMELLI, M. *Classical Fields: General Relativity and Gauge Theory*. New York: John Wiley and Sons, 1982. Citado 3 vezes nas páginas 16, 17 e 18.
- 37 CARROLL, S. M. *Lecture Notes on General Relativity*. Santa Bárbara: University of California, 1997. Citado 3 vezes nas páginas 18, 19 e 24.
- 38 TYSON, N. d. G.; GOLDSMITH, D. Origens: catorze bilhões de anos de evolução cósmica. *São Paulo: Planeta do Brasil*, p. 74, 2015. Citado na página 18.
- 39 SPARROW, G. *50 Ideias de Astronomia que Você Precisa Conhecer*. [S.l.]: Editora Planeta do Brasil, 2018. Citado na página 18.
- 40 POULIN, V.; SMITH, T. L.; KARWAL, T. The ups and downs of early dark energy solutions to the hubble tension. *arXiv preprint*, 2023. Citado na página 18.
- 41 AKARSU, et al. Relaxing cosmological tensions with a sign switching cosmological constant. *arXiv preprint*, 2022. Citado na página 18.
- 42 VALENTINO, E. D. et al. In the realm of the hubble tension – a review of solutions. *Classical and Quantum Gravity*, v. 38, n. 15, 2021. Citado na página 18.
- 43 MARION J. B.; THORNTON, S. T. *Classical Dynamics: of the particles and systems*. Santa Bárbara: 5.ed. Thomson Brooks/Cole, 2003. Citado na página 21.
- 44 ELLIS, G. F. R.; HAWKING, S. W. The large scale structure of space-time. (*No Title*), 1973. Citado na página 26.
- 45 PENROSE, R. Gravitational collapse and space-time singularities. *Physical Review Letters*, APS, v. 14, n. 3, p. 57, 1965. Citado na página 26.
- 46 HAWKING, S. W.; PENROSE, R. The singularities of gravitational collapse and cosmology. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, The Royal Society London, v. 314, n. 1519, p. 529–548, 1970. Citado na página 26.
- 47 HAWKING, S. W. The occurrence of singularities in cosmology. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, The Royal Society London, v. 294, n. 1439, p. 511–521, 1966. Citado na página 26.

- 48 BARDEEN, J. Non-singular general relativistic gravitational collapse. In: *Proceedings of the 5th International Conference on Gravitation and the Theory of Relativity*. [S.l.: s.n.], 1968. p. 87. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 31.
- 49 NEVES, J. Relatividade bem comportada: buracos negros regulares. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, SciELO Brasil, v. 39, n. 3, p. e3303, 2017. Citado na página 27.
- 50 NOZARI, K.; MEHDIPOUR, S. H. Hawking radiation as quantum tunneling from a noncommutative schwarzschild black hole. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 25, n. 17, p. 175015, 2008. Citado na página 27.
- 51 AYÓN-BEATO, E.; GARCIA, A. The bardeen model as a nonlinear magnetic monopole. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 493, n. 1-2, p. 149–152, 2000. Citado na página 31.
- 52 BARDEEN J. M.; CARTER, B. H. S. W. The four laws of black hole mechanics. *Comm. Math. Phys.*, v. 31, n. 2, p. 161–170, 1973. Citado na página 34.
- 53 BEKENSTEIN, J. D. Generalized second law of thermodynamics in black-hole physics. *Physical Review D*, v. 9, p. 3292–3300, 1974. Citado na página 34.
- 54 HAWKING, S. W. Black holes in general relativity. *Comm. Math. Phys.*, v. 25, n. 2, p. 152–166, 1972. Citado na página 34.
- 55 FELIPE, B. S.; OLIVEIRA, J. de. Introdução aos buracos negros e sua termodinâmica. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, SciELO Brasil, v. 46, p. e20240010, 2024. Citado 2 vezes nas páginas 34 e 35.
- 56 ANACLETO, M.; BRITO, F.; PASSOS, E. Hawking radiation and stability of the canonical acoustic black holes. *Annals of Physics*, Elsevier, v. 455, p. 169364, 2023. Citado na página 34.
- 57 HAWKING, S. W. *Uma Breve história do tempo*. Tradução: Cássio de arantes leite, 1 ed. Rio de Janeiro: Intrínseca, 2015. 256 p. Citado na página 34.
- 58 FERNANDES, T. A termodinâmica de buracos negros. *Cadernos de Astronomia*, v. 4, n. 1, p. 78–90, 2023. Citado 2 vezes nas páginas 34 e 35.
- 59 ANACLETO, M. et al. Absorption, scattering and shadow by a noncommutative black hole with global monopole. *The European Physical Journal C*, Springer, v. 83, n. 4, p. 298, 2023. Citado na página 34.
- 60 DAMASIO F; PACHECO, S. M. V. Buracos nem tão negros assim. *Física na Escola*, v. 10, n. 1, p. 30–35, 2009. Citado na página 35.
- 61 HAWKING, S. W. *A Brief History of Time*. New York: Bantam Books, 1998. Citado na página 35.
- 62 HAWKING, S. W. Black holes and thermodynamics. *Physical Review D*, APS, v. 13, n. 2, p. 191, 1976. Citado na página 36.
- 63 HAWKING, S. W. The quantum mechanics of black holes. *Scientific American*, JSTOR, v. 236, n. 1, p. 34–42, 1977. Citado na página 36.

64 WALD R, M. *lack Holes and Relativistic Stars*. Chicago: University of Chicago Press, 1998. Citado na página [37](#).