UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA E MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

CRISLANY SILVA TRAJANO

A CONJECTURA DE GOLDBACH: ANÁLISE HISTÓRICA E ABORDAGENS CONTEMPORÂNEAS PARA SUA RESOLUÇÃO

CUITÉ - PB
2026

CRISLANY SILVA TRAJANO

A CONJECTURA DE GOLDBACH: ANÁLISE HISTÓRICA E ABORDAGENS CONTEMPORÂNEAS PARA SUA RESOLUÇÃO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Matemática da Unidade Acadêmica de Física e Matemática do Centro de Educação e Saúde da Universidade Federal de Campina Grande, como requisito parcial à obtenção do grau de licenciado em Matemática

Orientador: Prof. Dr. Aluízio Freire da Silva Junior

CUITÉ - PB

2026

T768c Trajano, Crislany Silva.

A conjectura de Goldbach: análise histórica e abordagens contemporâneas para sua resolução. / Crislany Silva Trajano. - Cuité, 2026.

46 f.: il.

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Educação e Saúde, 2026.

"Orientação: Prof. Dr. Aluízio Freire da Silva Junior".

Referências.

1. Números primos. 2. Teoria dos números. 3. Christian Goldbach. 4. Leonhard Euler. 5. Centro de Educação e Saúde. I. Silva Junior, Aluízio Freire da. II. Título.

CDU 511.28(043)

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELO BIBLIOTECÁRIO Msc. Jesiel Ferreira Gomes - CRB-15/256

CRISLANY SILVA TRAJANO

A CONJECTURA DE GOLDBACH: ANÁLISE HISTÓRICA E ABORDAGENS CONTEMPORÂNEAS PARA SUA RESOLUÇÃO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Matemática da Unidade Acadêmica de Física e Matemática do Centro de Educação e Saúde da Universidade Federal de Campina Grande, como requisito parcial à obtenção do grau de licenciado em Matemática .

Orientador: Prof. Dr. Aluízio Freire da Silva Junior

Trabalho de Conclusão de Curso aprovado em 20 de Março de 2026

BANCA EXAMINADORA

_____

Prof. Dr. Aluízio Freire da Silva Junior (Orientador)
Universidade Federal de Campina Grande (UFCG)

_____

Profa. Dra. Celia Maria Rufino Franco Leite (Examinadora)
Universidade Federal de Campina Grande (UFCG)

_____

Prof. Dr .Marciel Medeiros de Oliveira (Examinador)
Universidade Federal de Campina Grande (UFCG)

Dedico esta conquista aos meus pais, Josenilda e Gaspar. Embora a vida lhes tenha negado oportunidades, vocês garantiram que as minhas fossem aproveitadas com todo apoio e incentivo. Vocês são as raízes que me sustentam e o chão que me faz voar.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus e Nossa Senhora, pela força constante e pela proteção que me permitiram vencer todas as dificuldades e barreiras ao longo desta graduação.

Aos meus pais, Josenilda dos Santos Silva e Gaspar Silva Trajano, por todo apoio e dedicação. Nada do que conquistei seria possível sem o sacrifício e o amor de vocês.

Aos meus irmãos, Guilherme Silva Trajano e Sibelle Silva Trajano, os maiores presentes que a vida me deu. Ser irmã de vocês é o que me motiva a seguir forte a cada dia.

A todos os meus familiares pelo incentivo constante, em especial aqueles que partiram antes desta conquista, mas que permanecem em meu coração: meus avós paternos, Maria Pereira da Silva e Agnaldo Trajano Silva, e meu tio Erivelton Silva Trajano.

Ao meu orientador, Prof.Dr. Aluízio Freire da Silva Junior, por toda a paciência e orientação. Foi uma honra ser sua aluna; sigo com profunda gratidão. Estendo este agradecimento a todos os professores do CES que contribuíram para o meu desenvolvimento profissional.

Aos meus amigos, que foram suporte nos momentos de dificuldade e alegria, especialmente Janaina Pontes, Alisson Medeiros e Alex Venâncio. Obrigado pela parceria e pelos momentos vividos nesta trajetória.

À PRAC por todo apoio financeiro durante todos esses anos.

Por fim, estendo minha gratidão a todos que colaboraram para a realização deste sonho de infância. Um agradecimento especial a mim mesma, que mesmo diante de todas as adversidades e perdas vivenciadas nestes cinco anos, mantive-me resiliente em busca da concretização deste objetivo que, embora pessoal, sempre foi coletivo.

“Os matemáticos são agraciados com um privilégio particular, qual seja, ao longo dos séculos eles só podem avançar, mas nunca retroceder.”

Edward Gibbon

RESUMO

Este trabalho apresenta um estudo bibliográfico sobre a conjectura proposta por Christian Goldbach em 1742, em uma carta enviada ao matemático Leonhard Euler. Nessa correspondência, Goldbach sugeriu que todo número par maior que 2 pode ser expresso como a soma de dois números primos, proposição que ficou conhecida como Conjectura de Goldbach, um dos problemas mais conhecidos e ainda não resolvidos da Teoria dos Números. O objetivo geral deste trabalho é apresentar o desenvolvimento histórico e investigar os principais resultados parciais relacionados à conjectura, analisando como cada avanço matemático contribui para a redução do problema a casos específicos ainda não resolvidos. Para isso, inicialmente é apresentado o contexto histórico em que a conjectura foi formulada, bem como a trajetória de Goldbach e a relevância do problema dentro da Teoria dos Números. Em seguida, são discutidos alguns conceitos fundamentais dessa área da matemática, necessários para a compreensão da conjectura e das dificuldades envolvidas em sua demonstração. Posteriormente, são analisados alguns resultados parciais importantes obtidos ao longo do tempo, incluindo tentativas históricas de avanço, como a de Georg Cantor em 1894. Também é discutida a chamada Conjectura Fraca de Goldbach, que afirma que todo número ímpar maior que 5 pode ser expresso como a soma de três números primos, e que foi demonstrada pelo matemático Harald Andrés Helfgott, sendo analisada sua relação com a conjectura forte. Por fim, são apresentados os principais desafios matemáticos que ainda impedem a demonstração completa da Conjectura de Goldbach, bem como possíveis caminhos de pesquisa. Conclui-se que, apesar de ainda não possuir uma prova geral, os diversos resultados parciais e as tentativas de demonstração contribuíram significativamente para o desenvolvimento da matemática, especialmente no campo da Teoria dos Números.

Palavras-chave: Christian Goldbach; Teoria dos Números; Números primos.

ABSTRACT

This work presents a bibliographical study on the conjecture proposed by Christian Goldbach in 1742, in a letter sent to the mathematician Leonhard Euler. In this correspondence, Goldbach suggested that every even number greater than 2 can be expressed as the sum of two prime numbers, a proposition that became known as Goldbach's Conjecture, one of the best-known and still unsolved problems in Number Theory. The general objective of this work is to present the historical development and investigate the main partial results related to the conjecture, analyzing how each mathematical advance contributes to reducing the problem to specific cases that are still unsolved. To this end, the historical context in which the conjecture was formulated is initially presented, as well as Goldbach's trajectory and the relevance of the problem within number theory. Then, some fundamental concepts of this area of mathematics, necessary for understanding the conjecture and the difficulties involved in its proof, are discussed. Subsequently, some important partial results obtained over time are analyzed, including historical attempts at advancement, such as that of Georg Cantor in 1894. The so-called Weak Goldbach Conjecture, which states that every odd number greater than 5 can be expressed as the sum of three prime numbers, and which was proven by the mathematician Harald Andrés Helfgott, is also discussed, and its relationship with the Strong Conjecture is analyzed. Finally, the main mathematical challenges that still prevent the complete proof of Goldbach's Conjecture are presented, as well as possible avenues of research. It is concluded that, despite not yet having a general proof, the various partial results and attempts at proof have contributed significantly to the development of mathematics, especially in the field of number theory.

Keywords: Christian Goldbach; Number Theory; Prime Numbers.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO **10**

1. CONTEXTO HISTÓRICO **12**

1.1. BIOGRAFIA- CHRISTIAN GOLDBACH 12

1.2. UMA ANÁLISE HISTÓRICA DA INTERAÇÃO ENTRE GOLDBACH E EULER 16

1.3. HISTÓRIA DA CONJECTURA DE GOLDBACH 17

2. ELEMENTOS ESSENCIAIS DA TEORIA DOS NÚMEROS PARA O ESTUDO DA CONJECTURA DE GOLDBACH **21**

2.1. CONJUNTO DOS INTEIROS E A DIVISIBILIDADE **21**

2.0.1. Definições e Propriedades de $\mathbb{Z}$ 21

2.1.2. A Relação de Divisibilidade 22

2.1.3. O Algoritmo da Divisão 24

2.2. MÁXIMO DIVISOR COMUM E O ALGORITMO DE EUCLIDES **25**

2.2.1. Máximo Divisor Comum (MDC) 25

2.2.2. Algoritmo de Euclides 27

2.3. NÚMEROS PRIMOS **29**

2.4. O TEOREMA FUNDAMENTAL DA ARITMÉTICA (TFA) **31**

2.5. INFINITUDE DE EUCLIDES **33**

3. A CONJECTURA DE GOLDBACH **34**

3.1. CONJECTURA DE GOLDBACH 34

3.2. CONJECTURA FORTE (BINÁRIA) 35

3.3. CONJECTURA FRACA (TERNÁRIA) 35

3.4. DIFICULDADES ANALITICAS DA CONJECTURA 38

3.5. RESULTADOS SIGNIFICATIVOS E AVANÇOS 39

CONSIDERAÇÕES FINAIS **44**

REFERÊNCIAS **45**

INTRODUÇÃO

A matemática, com sua natureza abstrata e complexa, continua a intrigar estudiosos que se aventuram em suas profundezas. Dentre as diversas áreas, a Teoria dos Números destaca-se como uma área de grande relevância, dedicada ao estudo dos números inteiros e suas propriedades. De acordo com Domingues e Iezzi (2003), muitas das proposições nesse campo estão associadas a classes de objetos que compartilham propriedades comuns, como os números primos, uma sequência que, apesar de sua aparente irregularidade, desempenha um papel central na estrutura dos números. Ao longo do tempo, a Teoria dos Números consolidou-se como uma área desafiadora e dinâmica, inspirando gerações de matemáticos a explorarem suas complexidades.

Com isso, este trabalho faz um estudo sobre um dos problemas dos inúmeros que permanecem sem solução na Teoria dos Números, a Conjectura de Goldbach. Formulada pelo matemático russo Christian Goldbach (1690-1764), em uma das suas correspondências com Leonhard Euler. Vamos mostrar através de pesquisas com base bibliográficas todo o trajeto da conjectura, bem como seu contexto histórico e suas vertentes ao longo do tempo.

No primeiro capítulo, abordaremos a história de Christian Goldbach e da sua famosa conjectura. Uma análise abrangente de sua trajetória, desde as origens, passando por todos os seus processos de contribuições e descobertas na área da Matemática. Será feito ainda, um estudo sobre a interação de Goldbach e Euler, e por fim o contexto de formulação de como sua conjectura foi elaborada.

No segundo capítulo, trataremos de definir conceitos fundamentais e importantes para a Conjectura de Goldbach. Esses conceitos servirão de base para a compreensão da dificuldade de demonstrar a conjectura. Estudaremos conceitos essenciais da Teoria dos Números, conjunto dos inteiros, as regras de divisibilidade, como calcular o máximo divisor comum usando o Algoritmo de Euclides, a definição de números primos, o Teorema Fundamental da Aritmética e a prova da infinitude dos números primos feita por Euclides.

No terceiro capítulo, depois de termos feito um estudo sobre definições e teoremas da Teoria dos Números, vamos tratar sobre as duas vertentes da Conjectura de Goldbach, a binária e ternária, mostrando assim as contribuições e desafios trazidos por tais conjecturas. Será discutido ao longo do capítulo a

implicação da conjectura forte na fraca, como também a prova da conjectura fraca feita por Harald Helfgott em 2013, seguindo com as dificuldades analíticas para a resolução da conjectura. Assim, torna-se fundamental destacar os principais resultados e avanços obtidos ao longo do tempo, evidenciando as contribuições matemáticas que aproximam a comunidade científica de sua possível resolução. Concluiremos esse trabalho com a apresentação de uma das primeiras tentativas de demonstração da conjectura feita por Cantor em 1894.

Capítulo 1

1. CONTEXTO HISTÓRICO

Neste capítulo, apresenta-se a história do matemático Christian Goldbach e a história de sua famosa conjectura, nomeada como “A Conjectura de Goldbach”. Este problema está há mais de 280 anos sem solução, acumulando diversas tentativas de resolução. O percurso histórico da vida de Christian Goldbach, sua interação com Leonhard Euler e o contexto de formulação de sua conjectura foram elaborados baseados nas informações disponíveis no site MacTutor History of Mathematics e no livro Correspondence of Leonhard Euler with Christian Goldbach: Part I, editado por Lemermeier e Mattmüller (2015) e com tradução própria.

1.1. BIOGRAFIA- CHRISTIAN GOLDBACH

Christian Goldbach, conhecido principalmente por ser o criador de uma das maiores questões não resolvidas na matemática, nasceu em Konigsberg, na Prússia, e viveu entre 1690 e 1764, faleceu em Moscou.

Goldbach fazia parte de uma família de destaque na cidade, seu pai Bartholomäus Goldbach (1640–1708), era pastor luterano que também lecionava História e Retórica na Universidade de Königsberg. A sua posição social e profissional garantiu a Goldbach uma formação sólida e disciplinada.

Desde cedo, Goldbach demonstrou uma grande paixão e dedicação pelos estudos. Assim, aos 16 anos, em 1706, matriculou-se na Universidade de Königsberg, com o objetivo de estudar direito. Além dessa área, ele se dedicava a outras áreas do conhecimento como História, Engenharia, Música e Literatura. Entretanto, seu maior encanto e interesse era pela Matemática, o campo que futuramente marcaria sua trajetória científica.

Ao longo de sua vida, Goldbach se dedicou a inúmeras viagens com o objetivo de expandir seus conhecimentos. Aos vinte anos, em 1710, iniciou uma longa jornada pela Europa, para fazer contato com os principais estudiosos da época. No ano seguinte, em maio de 1711, na cidade Leipzig, localizada no estado da Saxônia, Alemanha, conheceu o renomado filósofo e matemático Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) e desse encontro surgiu uma troca de correspondências, mantida de 1711 a 1713, composta por várias cartas escritas em

latim. Dessa troca de correspondências, cinco cartas de Leibniz e seis de Goldbach resistiram ao tempo, sendo essa relação um fator crucial para despertar o interesse de Goldbach pela área da Matemática.

Em 1712, Goldbach iniciou sua formação em Direito, obtendo diploma pela Universidade de Groningen, nos Países Baixos. No mesmo ano, viajou para a Inglaterra, visitando a Royal Society e teve contato com grandes nomes da ciência, como Isaac Newton, Edmond Halley, John Flamsteed e Abraham de Moivre. Posteriormente, em Oxford, na Biblioteca Bodleiana, fez amizade com Nicolaus I Bernoulli, iniciando discussões sobre séries infinitas. Apesar de fascinado pela matemática, Goldbach confessou que não possuía conhecimento aprofundado sobre o tema.

Em maio de 1713, Goldbach chegou a Paris e, em 1714 completou uma admirável viagem pela Itália, percorrendo cidades importantes como Turim, Roma, Florença, Nápoles, Bolonha, Pádua e Veneza. Em todos os lugares visitou pontos turísticos, bibliotecas, museus e sociedades científicas, buscando ativamente recomendações e discussões acadêmicas com cientistas de prestígio. Após três anos de viagem, retornou à sua cidade natal em 14 de dezembro de 1714, repleto de experiências, diversidade de conhecimentos e aprendizagens, além de muitos contatos importantes para sua vida intelectual.

Aos 28 anos, no final de 1718, Goldbach iniciou outra importante viagem, para a Suécia, onde encontrou grandes nomes da política, como o Conselheiro de Estado Lil Lienstedt. Durante nove meses no país, ele exerceu as funções diplomáticas informais. Nos anos seguintes, Goldbach seguiu viajando e conhecendo lugares como Dinamarca, Alemanha, Veneza e diversas regiões do Império Alemão, incluindo Baviera, Boêmia, Saxônia, Hungria e até a Sérvia, retornando a Königsberg somente em 1724. Nesse mesmo ano ele conheceu duas figuras importantes para sua trajetória científica, o filósofo e matemático Georg Bernhard Bilfinger e o matemático Jakob Hermann. Ambos estavam envolvidos na formação da recém-proposta Academia Imperial de Ciências de São Petersburgo, um projeto idealizado por Leibniz e inspirado na Academia de Ciências de Berlim.

Em 1725, interessado em participar do novo centro científico, Goldbach enviou uma carta ao presidente da Academia, Lorenz Blumentrost, solicitando uma posição. Embora seu pedido tenha sido negado, posteriormente recebeu um convite para atuar como historiador e professor de matemática. Em 27 de dezembro de

1725, ele teve uma participação significativa na fundação da Academia de São Petersburgo, atuando como secretário de registro durante a cerimônia inaugural da Academia, exercendo o cargo até janeiro de 1728, um período de grande instabilidade política da Rússia. Mesmo após a morte de Pedro, o Grande, e a ascensão de Catarina I ao trono, Goldbach manteve-se próximo aos círculos de poder, garantindo estabilidade e prestígio em sua carreira.

Na Academia, que distribuía suas onze cátedras entre matemática, ciências físicas e humanidades, Goldbach fez várias contribuições. Inicialmente com a participação do selo oficial e publicações, escreveu um prefácio histórico para o primeiro volume do *Commentarii* e colaborou com o obituário em honra a Nicolaus II Bernoulli. Apesar de suas viagens, Goldbach mantinha uma vida tranquila em São Petersburgo, trabalhando na Academia e mantendo o contato através de cartas com os importantes colegas. Porém, essa tranquilidade foi interrompida quando Czarina Catarina I, viúva de Pedro I, nomeou Pedro Alekseevich como seu sucessor, e encarregou Goldbach de acompanhar sua educação e sua irmã Natalya. Em maio de 1727, assumiu o título de Conselheiro Jurídico e, nesse mesmo ano, conheceu seu grande amigo Leonhard Euler, em uma recepção na Academia.

Em janeiro de 1728, Goldbach foi obrigado a acompanhar a mudança da corte para Moscou. Mais tarde, em 1732, retornou a São Petersburgo, onde voltou a cumprir diversas responsabilidades na Academia, incluindo a presidência de reuniões e atendendo às solicitações dos acadêmicos. Passou a residir em uma casa particular na Ilha Vasilievsky, com uma vida reservada e limitando suas correspondências, apesar de que ainda continuasse o contato com estudiosos como Doppelmayr, Bilfinger, e Poleni. Nesse período, a Academia discutia a questão da forma da Terra, promovida pelas expedições da Academia de Ciências de Paris. Em fevereiro de 1737, antes dos resultados dessas viagens fossem divulgados, Goldbach apresentou uma palestra sobre o tema. Ao mesmo tempo, ficou responsável pelas instruções e análises dos relatórios de uma grande expedição científica organizada pela Academia ao norte do Império Russo, que alcançou a Sibéria e Kamchatka.

Sua colaboração com o presidente Heinrich Johann von Korff foi muito importante. Korff reorganizou a Academia, confiando a Schumacher a chancelaria e as áreas técnicas e artísticas, enquanto Goldbach assumiu atividades científicas, como a correspondência oficial, relações públicas e historiografia. Em 1737 e 1738,

Korff obteve decretos que promoveram Goldbach ao cargo de Conselheiro Colegiado, autorizando-o a assinar documentos oficiais. Sempre que o governo necessitava de textos formais em latim, francês ou alemão, confiava essa tarefa a Goldbach. Ele revisou, por exemplo, uma petição em defesa da nomeação de Biron como Duque da Curlândia e propôs inscrições para medalhas comemorativas. Em cartas pessoais, ele confessou sentir que havia encontrado seu lugar, exercendo funções adequadas a seus talentos e desfrutando de estabilidade e prestígio.

Em 1740, Goldbach apresentou ao presidente Brevern um documento no qual criticava a situação precária da Academia e propondo reformas. No entanto, o cenário político era desvantajoso. Após a morte de Anna Ioannovna, durante o governo de Ivan VI, o futuro da Academia estava em risco, levando Euler a aceitar um cargo em Berlim. Com a elevação de Elizaveta Petrovna ao trono em 1741, Brevern foi nomeado Ministro do Colégio de Assuntos Exteriores e nomeou Goldbach Conselheiro de Estado. Em março de 1742, aos 52 anos, Goldbach deixou a Academia com menção honrosa, passando a morar em Moscou, embora voltasse periodicamente a São Petersburgo até se estabelecer definitivamente ali em 1754.

No Ministério das Relações Exteriores, Goldbach foi intitulado para o Departamento de Criptografia, criado por Pedro I para garantir a segurança das comunicações secretas e decodificar mensagens diplomáticas. Suas habilidades linguísticas e matemáticas, associadas com seu profundo conhecimento político e sua descrição, sendo ideal para a função. Em 1744, decifrou uma carta do embaixador francês La Chétardie que continha críticas à Czarina, o que levou à expulsão imediata do diplomata. Seu trabalho foi reconhecido com promoções e honrarias: ele se tornou Conselheiro de Estado Efetivo, recebeu uma caixa de rapé de ouro, teve sua nobreza confirmada e, em 1746, ganhou uma propriedade rural na Livônia. Em 1760 alcançou o cargo de Conselheiro Privado, recebendo 3.000 rublos anuais e se juntando aos círculos da elite russa.

Nesse período, muitos de seus antigos correspondentes europeus faleceram, e Euler tornou-se sua principal ligação com o Ocidente. Na Rússia, sua convivência diminuiu devido à idade e aos problemas de saúde. Ainda assim, mantinha amigos próximos como Gerhard Friedrich Müller, Johann Adolph Braun, Johann Jacob Lerche e Gottfried Bock.

Após um longo período de saúde frágil, Goldbach faleceu em 20 de novembro de 1764, na presença de Gerhard Friedrich Müller, que relatou seus últimos dias e

funeral a Euler. Goldbach nunca se casou nem deixou herdeiros diretos. Assim, ele destinou seus bens ao bibliotecário Bock, em Oranienbaum. Seu corpo foi sepultado em um cemitério próximo à Catedral de São Sansão. Seus documentos foram selados e transferidos para o Arquivo Estatal Russo de Documentos Antigos, em Moscou, onde estão preservados, embora grande parte ainda permaneça intocada.

1.2. UMA ANÁLISE HISTÓRICA DA INTERAÇÃO ENTRE GOLDBACH E EULER

O jovem pesquisador Leonhard Euler chegou à Academia de São Petersburgo em maio de 1727, com apenas 20 anos. Três dias após sua chegada, em 27 de maio conheceu um de seus maiores amigos nos próximos anos, Christian Goldbach, que na época aos 37 anos, já ocupava uma posição influente na corte russa. Esse encontro ocorreu durante uma recepção organizada pelo presidente da Academia, Lorenz Von Blumentrost, e marcou o começo de uma das amizades mais importantes do século XVIII.

Em 1729, Euler iniciou a troca de correspondências com Goldbach, dando início a uma relação que se tornaria histórica e enriquecedora para o mundo da Matemática e o campo da Teoria dos Números. Nas cartas trocadas entre os anos de 1729 e 1731 focaram em temas como séries infinitas, interpolação, integração de diferenciais algébricos, figuras geométricas como lúnulas e inúmeros problemas de Teoria dos Números que foi um dos principais campos abordados por ambos nas trocas de cartas. No entanto, após uma breve pausa na comunicação em 1731, retomado por Goldbach, estabelecendo Euler como o seu principal emissor científico em São Petersburgo, Rússia.

Entre 1732 e 1741, há poucos registros de cartas entre Euler e Goldbach, isto ocorreu devido a eles passarem a residir próximos, na Ilha Vasilievsky, em São Petersburgo, e se encontravam pessoalmente com frequência. Enquanto Goldbach, atuando como secretário, reduziu suas atividades de pesquisa, Euler, por outro lado, como um jovem cientistas viveu anos de uma intensa produção com publicações de livros e ganhando prêmios, se tornando assim o matemático mais influente da sua geração.

Além da colaboração profissional entre esses dois importantes matemáticos da Teoria dos Números, uma amizade surgiu e se fortaleceu, Goldbach, por exemplo, foi padrinho do primeiro filho de Euler e também atuou como mediador nas questões administrativas e contratuais em seu favor, especialmente para a redução

de suas obrigações quando Euler perdeu a visão de um olho. Mesmo que afastado das pesquisas, Goldbach era uma dos poucos intelectuais capazes de entender os trabalhos de Euler e, inclusive, inspirar novas ideias. Nessa mesma perspectiva, por recomendações dele, a Academia, em 1735, criou uma Conferência de Matemática, exclusivamente para a avaliação das pesquisas de Euler. Os dois matemáticos juntos formaram uma importante dupla para colaborações com matemática, entre 1731 e 1741 as suas contribuições não se limitaram apenas à matemática, contribuíram também em atividades administrativas nas academias, com pareceres, revisões de publicações e alguns intercâmbios matemáticos que tratam de séries do tipo zeta.

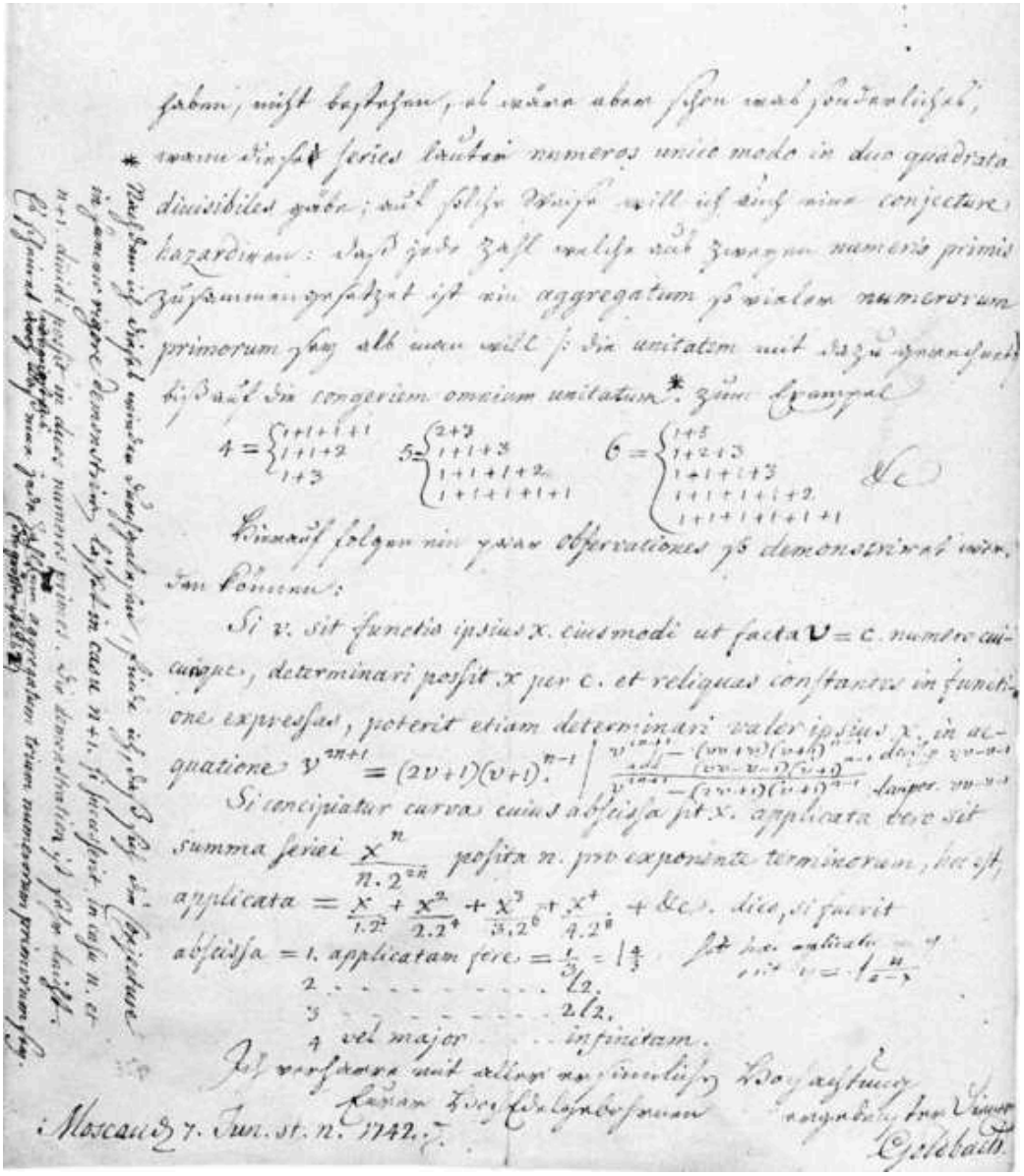
Em 1741, Euler deixou a Rússia por motivações políticas e de saúde, aceitando um convite para trabalhar na Academia de Berlim, que foi recém-restaurada com o patrocínio de Frederico II da Prússia, seu então amigo Goldbach foi fundamental na negociação de sua dispensa. Mesmo com a saída de Euler, as correspondências se mantiveram intensas e afetuosas, porém centralizadas em trocas de notícias pessoais, discussões filosóficas e principalmente, em colaborações científicas.

Durante 15 anos, entre 1741 e 1756, Euler e Goldbach abordaram em suas cartas temas de grande peso na matemática, como a representação de números por formas quadráticas e de grau superiores, séries trigonométricas, produtos infinitos, funções zeta e multi-zeta, números primos, fatoração, números perfeitos, integração de funções racionais e algébricas, somas de divisores e partições e principalmente a Conjectura de Goldbach. Em suas correspondências eles também discutiram sobre física, astronomia, filosofia natural e óptica. No total, a correspondência histórica entre eles elencam cerca de 196 cartas, na qual 102 escritas por Euler e 94 por Goldbach, e permanece como um dos mais importantes registros do pensamento científico colaborativo da era moderna.

1.3. HISTÓRIA DA CONJECTURA DE GOLDBACH

Em meio às inúmeras cartas trocadas entre Goldbach e Euler que contribuíram para a matemática, em especial a Teoria dos Números, surgiu a carta **n° 51 ocorrida em 07 de junho de 1742**, que desde então inquieta diversos matemáticos na tentativa de demonstração da conjectura.

Figura 1. Carta n°51



Fonte: Lemmermeyer e Mattmüller (2015).

Segundo Lemmermeyer e Mattmüller (2015), em correspondência para Euler, Goldbach destaca a importância de considerar proposições, mesmo que ainda não tenham sido demonstradas,, pois reside no fato de que elas podem impulsionar novas descobertas e avanços no campo da Matemática.

, seguindo esta ideia ele propõe a seguinte conjectura:

"Que todo número composto de dois números primos seja um agregado de tantos números primos quanto se queira (contando-se também a unidade), exceto pela soma de todas as unidades."

Na mesma carta, Goldbach observa que a ideia apresentada por ele pode ser demonstrada por indução, relatando que:

"Caso se possa mostrar que um número $n + 1$ é soma de dois primos sempre que isso ocorre para n."

Através dessa afirmação, Goldbach chega à conclusão de que "todo número maior que 2 é uma soma de três números primos". Para ilustrar sua observação, ele apresenta exemplos da decomposição de números pequenos como soma de primos. É válido ressaltar que, na época, o número 1 ainda era considerado primo.

Figura 2. Decomposição de números

$$4 = \begin{cases} 1+1+1+1 \\ 1+1+2 \\ 1+3 \end{cases} \qquad 5 = \begin{cases} 2+3 \\ 1+1+3 \\ 1+1+1+2 \\ 1+1+1+1+1 \end{cases} \qquad 6 = \begin{cases} 1+5 \\ 1+2+3 \\ 1+1+1+3 \\ 1+1+1+1+2 \\ 1+1+1+1+1+1 \end{cases}$$

Fonte: Lemermayer e Mattmüller (2015).

Com a apresentação dos exemplos, Goldbach reforça empiricamente a sua conjectura mostrando que ela pode ser simples, mas ainda não conseguia ser demonstrada.

Em 30 de junho de 1742, Euler responde a carta de seu amigo não apenas sobre a conjectura como também sobre diversos assuntos como a política europeia, livros, séries, integrais, entre outros. Quanto à conjectura, Euler mostrou compreender a ideia de Goldbach, porém reorganiza o pensamento de seu amigo de uma forma simples. Como destaca Lemmermeyer e Mattmüller (2015), Euler recorda a observação de Goldbach da seguinte forma:

"Todo número par é uma soma de dois números primos".

Diante essa afirmação, Euler faz duas observações e demonstra que:

"Se o número é par, pode ser escrito como soma de dois primos."

e

"Se o número é ímpar, ele pode ser expressado como soma de três primos, pois $n - 1$ é par e, portanto, soma dois primos."

Deste modo, Euler transforma a conjectura original formulada por Goldbach de uma forma mais ampla e com a unidade sendo primo, na forma que é conhecida atualmente a Conjectura Binária de Goldbach (Forte):

“Todo número par maior que 2 pode ser escrito como a soma de dois números primos.”

De modo semelhante, tem-se a chamada Conjectura Ternária de Goldbach (Fraca):

“Todo número ímpar maior que 5 é a soma de três números primos.”

Em sua carta, Euler expressa sua convicção da validade da conjectura proposta por seu amigo, por outro lado ele lamenta não conseguir uma demonstração para tal proposição.

Então, a Conjectura de Goldbach, como é conhecida hoje em dia, tem o seu surgimento através de uma rica troca intelectual entre dois dos maiores matemáticos do século XVIII. Goldbach mostra a sua descoberta inicial, por outro lado Euler reformula com uma forma precisa, transformando uma observação empírica em uma afirmação profunda, de modo que se torna e permanece sendo uma das mais famosas e desafiadoras conjecturas da Teoria dos Números, que há quase 300 anos não se tem sua demonstração geral, colecionando diversas tentativas em todas as partes do mundo.

Capítulo 2

2. ELEMENTOS ESSENCIAIS DA TEORIA DOS NÚMEROS PARA O ESTUDO DA CONJECTURA DE GOLDBACH

A Teoria dos Números é uma das áreas mais antigas e cruciais da Matemática e, notavelmente, que abriga inúmeros problemas ainda em aberto. Dentre estes, destaca-se a Conjectura de Goldbach, na qual os números primos desempenham um papel central e são fundamentais para a compreensão da estrutura dos números. Para se obter resultados significativos envolvendo os números primos, como demonstrar sua infinitude ou entender suas propriedades de divisão, é fundamental dominar um conjunto de conceitos básicos da Teoria dos Números.

Assim, este capítulo tem o objetivo de apresentar os conteúdos matemáticos essenciais para o estudo da Conjectura de Goldbach. Para isso, serão discutidos o conjunto dos inteiros, as regras de divisibilidade, como calcular o máximo divisor comum usando o Algoritmo de Euclides, a definição de números primos, o Teorema Fundamental da Aritmética e a prova da infinitude dos números primos feita por Euclides. As definições e demonstrações usadas aqui se baseiam nos livros *Introdução à Teoria dos Números* de José Plínio de Oliveira Santos (2007) e *Teoria Elementar dos Números de Edgard de Alencar Filho* (1981).

2.1. CONJUNTO DOS INTEIROS E A DIVISIBILIDADE

2.0.1. Definições e Propriedades de $\mathbb{Z}$

Os conjuntos numéricos surgiram pela necessidade humana de ampliar a contagem e representação das situações do cotidiano, o primeiro conjunto é o dos naturais ($\mathbb{N}$), que são todos os números maiores que zero. O conjunto dos $\mathbb{N}$, possui operações de adição fechada e associativa, tendo o elemento neutro 0 e possui a multiplicação fechada, associativa e comutativa. Deste modo, a partir dos conjuntos dos naturais surge o conjunto dos inteiros, que veio pela necessidade de representar perdas, dívidas e diferenças, assim ampliando os naturais para incluir os números negativos, portanto temos a seguinte definição e propriedades dos inteiros.

Definição 1 : O conjunto dos números inteiros é representado por:

$$Z = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$$

Destacamos os seguintes subconjuntos de $\mathbb{Z}$:

1. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, o conjunto dos naturais está contido nos inteiros.
2. $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$ ou seja $\mathbb{Z}^* = \{..., -3, -2, -1, 1, 2, 3, ..\}$

Propriedades 1: O conjunto $\mathbb{Z}$ é fechado para adição $(+)$, subtração $(-)$ e multiplicação $(\cdot)$, com as seguintes propriedades, $\forall\, a, b, c \in \mathbb{Z}$:

1) Comutatividade: $a \pm b = b \pm a$ e $a \cdot b = b \cdot a$
2) Associatividade: $(a \pm b) \pm c = a \pm (b \pm c)$ e $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
3) Elemento Neutro aditivo e multiplicativo: $0 + a = a$ e $1 \cdot a = a$
4) Elemento Oposto: $-a = (-1) \cdot a$ e $a - a = a + (-a) = 0$
5) Distributividade: $a \cdot (b \pm c) = a \cdot b \pm a \cdot c$
6) Lei do Cancelamento: $a + c = b + c$, então $a = b$

O conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$ possui uma estrutura ordenada, ou seja seus elementos podem ser comparados entre si de forma consistente. Sejam quaisquer A e $B \in \mathbb{Z}$, vale as seguintes relações:

1. $A < B$
2. $A > B$
3. $A = B$

Essa propriedade caracteriza uma ordem total, pois garante que, para quaisquer dois inteiros, é sempre possível estabelecer uma relação de comparação entre eles. Além disso, essa ordem satisfaz propriedades fundamentais, como a tricotomia, a transitividade e a compatibilidade com as operações.

2.1.2. A Relação de Divisibilidade

A divisibilidade é um conceito importante da Teoria dos Números como também é essencial para a compreensão dos números primos.

Definição 2 : Diz-se que um inteiro a divide um inteiro b, se existe $c \in \mathbb{Z}$, tal que

$$b = a \cdot c$$

Neste caso, denota-se $a|b$ para a divide b e $a \nmid b$ para a não divide b.

Exemplos 1: Assim, tem-se os seguintes exemplos:

- $3|21,\ porque\ 21 = 3 \cdot 7$;
- $2|10,\ porque\ 10 = 2 \cdot 5$;
- $-9|36,\ porque\ 36 = (-9) \cdot (-4)$;

- $3 \nmid 25,\ porque\ não\ existe\ c \in \mathbb{Z},\ tal\ que\ 25 = 3 \cdot c.$

Propriedades 2: Para quaisquer que sejam os inteiros $a,\ b$ e c, tem-se, as seguinte propriedades:

1) $a|a, \forall a \in Z$
2) $a|b\ e\ b|a,\ então\ a = \pm b$
3) $a|b\ e\ b|c,\ então\ a|c$
4) $a|b\ e\ c|d,\ então\ ac|bd$
5) $Se\ a|b\ e\ a|c,\ então\ a|(bx + cy),\ \forall x, y \in Z.$

Demonstração:

1) É notório que:

   $a = a \cdot 1$

2) Se $a|b\ e\ b|a$ então existem $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$, tais que

   $$b = ax_1\ e\ a = bx_2$$

   Assim,

   $$a = bx_2 = (ax_1)x_2 = a(x_1x_2)$$

   Portanto, temos que $x_1x_2 = 1$, então $x_1 = x_2 = \pm 1$.

   Logo, $a = \pm b$.

3) Se $a|b\ e\ b|c$, existem $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$, tais que

   $$b = ax_1\ e\ c = bx_2$$

   Como $b|c$, então

   $$c = bx_2$$

   $$c = (a \cdot x_1)x_2$$

   $$c = a \cdot (x_1 \cdot x_2)$$

   Logo, $a|c$

4) Se $a|b\ e\ c|d$, então existem $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$, tais que

   $$b = ax_1\ e\ d = cx_2$$

   Então,

   $$bd = ax_1 \cdot cx_2 = (ac) \cdot (x_1x_2)$$

   Logo, $ac|bd$

5) Se $a|b$ e $a|c$, então, existem $r, s \in \mathbb{Z}$, tais que

$$b = a{\cdot}r \; e \; b = a{\cdot}s$$

Considerando $x \; e \; y$ inteiros arbitrários. Multiplicando $b = a{\cdot}r \; e \; b = a{\cdot}s$, temos o seguinte

$$b{\cdot}x = a{\cdot}r{\cdot}x \; e \; c{\cdot}y = a{\cdot}s{\cdot}y$$

De onde temos,

$$bx + cy = (arx + asy)$$

$$bx + cy = a\,(rx + sy)$$

Como $rx + sy \in \mathbb{Z}$, então

Logo, $bx + cy = a|(bx + cy)$ □

Para o desenvolvimento das próximas seções, é fundamental definir o Princípio da Boa Ordenação. Este teorema estabelece que todo subconjunto não vazio de inteiros não negativos possui um elemento mínimo. A demonstração detalhada desta proposição pode ser consultada na obra *Teoria Elementar dos Números*, de Edgard de Alencar Filho (1981).

2.1.3. O Algoritmo da Divisão

Definição 3: Dados quaisquer $a\,, b \in \mathbb{Z},\; b > 0,$ existe um único par de inteiros $q \; e \; r$ tais que

$$a = qb + r,\; com\; 0 \leq r < b$$

em que,

$$q = \; quociente$$

$$r = \; resto\; da\; divisão\; de\; a\; por\; b.$$

Demonstração: Considere o seguinte conjunto S de todos os inteiros não negativos, da forma $a - bx, \text{com } x \in \mathbb{Z},$ então

$$S = \{a - bx \mid x \in \mathbb{Z},\; a - bx \geq 0\}.$$

Assim, este conjunto S não é vazio, pois , sendo $b > 0$, temos $b \geq 1$, portanto, para $x = -|a|$, resulta em no seguinte,

$$a - bx = a + b|a| \geq a + |a| \geq 0.$$

Deste modo, pelo Princípio da Boa Ordenação, existe um elemento mínimo $r \text{ de } S$, tal que

$$r \geq 0 \; e \; r = a - bq \; ou \; a = bq + r, \text{com } q \in \mathbb{Z}.$$

Além disso, temos $r < b$, pois, se fosse $r \geq b$, então

$$0 \leq r - b = a - bq - b = a - b(q + 1) < r$$

ou seja, r não seria um elemento mínimo do conjunto S. Além disso, para a unicidade de $q\ e\ r$, suponha que existem dois inteiros q_1 e r_1, tais que

$$a = bq_1 + r_1 \text{ e } 0 \leq r_1 < b.$$

Então,

$$bq_1 + r_1 = bq + r \Rightarrow r_1 - r = (q - q_1)b \Rightarrow b|(r_1 - r).$$

Por outro lado

$$-b < -r \leq 0\ e\ 0 \leq r_1 < b$$

que implica o seguinte

$$-b < r_1 - r < b$$

isto é

$$|r_1 - r| < b.$$

Assim,

$$b|(r_1 - r)\ e\ |r_1 - r| < b.$$

Portanto,

$$r_1 - r = 0,\ como\ b \neq 0$$

Como b é diferente de zero, então,

$$q - q_1 = 0$$

Deste modo, temos o seguinte

$$r_1 = r\ e\ q_1 = q$$

Logo, q e r são únicos. □

2.2. MÁXIMO DIVISOR COMUM E O ALGORITMO DE EUCLIDES

2.2.1. Máximo Divisor Comum (MDC)

Definição 4: Sejam dois inteiros a e b, ambos diferentes de zero. O máximo divisor comum entre $a\ e\ b$, é o inteiro $d > 0$, que satisfaz as seguintes condições:

I. $d|a\ e\ d|b$, d é $divisor\ de\ a\ e\ b$;

II. $Se\ c|a\ e\ c|b,\ então\ c \leq d,\ d$ é $o\ maior\ divisor\ comum\ de\ a\ e\ b$.

O máximo divisor comum entre $a\ e\ b$ é indicado pela notação $mdc(a, b)$.

Exemplo 2: Pela definição de mdc, temos que:

- $mdc(6, 8) = 2$

- $mdc(16, 28) = 4$
- $mdc(24, 60) = 12$

Existem algumas definições e teoremas subjacentes do Máximo Divisor Comum, um deles é o teorema de existência e unicidade do MDC e a definição de inteiros primos entre si, que serão apresentados a seguir.

Teorema 1 (Existência e Unicidade do MDC): Sejam dois inteiros $a\ e\ b$, ambos diferentes de zero, então existe um único divisor comum. Além disso, existem inteiros $x\ e\ y$ tais que

$$mdc(a, b) = ax + by$$

ou seja, o $mdc(a, b)$ é uma combinação linear de $a\ e\ b$.

Demonstração: Considere o seguinte conjunto,

$$S = \{au + bv \mid au + bv > 0,\ u, v \in \mathbb{Z}\}$$

O conjunto S é formado por todos os inteiros positivos que podem ser expressos como uma combinação linear de $a\ e\ b$. Nota-se que S não é vazio. De fato, sem perda de generalidade, como $a\ e\ b \neq 0$, então seja $a \neq 0$. Assim tem-se que

$$a = a \cdot 1 + b \cdot 0\ ou\ -a = a \cdot (-1) + b \cdot 0$$

Um desses valores é positivo, portanto pertence ao conjunto S, logo $S \neq \emptyset$.

Como S é um subconjunto não vazio do conjunto dos inteiros positivos, pelo Princípio da Boa Ordenação, existe um único elemento mínimo em S. Denotado por $d > 0$, ou seja,

$$d = min\, S$$

Pela definição do conjunto S, existem inteiros $x\ e\ y$, tais que

$$d = ax + by. \quad (1)$$

Assim, pelo Algoritmo da Divisão existem inteiros $q\ e\ r$ tais que,

$$a = dq + r,\ 0 \leq r < d. \quad (2)$$

Substituindo a expressão (1) em (2), tem-se o seguinte

$$r = a - dq$$

$$r = a - (ax + by)q = a - (axq + byq) = a(1 - qx) + b(-qy)$$

$$r = a(1 - qx) + b(-qy).$$

Assim, o resto r também é uma combinação linear de $a\ e\ b$. Seja $r > 0 \in S$, isto contradiz que d é o menor elemento positivo de S. Portanto, $r = 0$, isto implica que $d|a$.

Analogamente, aplicando o Algoritmo da divisão a b, conclui-se que $d|b$.

Portanto, d é um divisor comum positivo de $a\ e\ b$.

Finalmente, considere $c > 0$ um divisor comum qualquer de $a\ e\ b$. Como $c|a\ e\ c|b$, então c divide qualquer combinação linear de $a\ e\ b$. Assim,

$$c|(ax + by)$$

Da expressão (1), então

$$c|(ax + by) = d$$

Assim, $c \leq d$, o que mostra que d é o maior divisor comum positivo de $a\ e\ b$. Portanto, tem-se o seguinte:

$$mdc(a, b) = d = ax + by,\ x, y \in \mathbb{Z}$$

Logo, fica demonstrada a existência, a unicidade e a representação do máximo divisor comum como combinação linear de dois inteiros, encerrando a prova do teorema. □

Teorema 2 (Euclides): Se $a|bc\ e\ mdc(a, b) = 1$, então $a|c$

Demonstração: Como $mdc(a, b) = 1$, pelo Teorema 1, existem inteiros $x\ e\ y$ tais que

$$mdc(a, b) = ax + by = 1.$$

Multiplicando ambos os lados desta igualdade por c, então

$$c \cdot (ax) + c \cdot (by) = 1 \cdot c.$$

Como $a|ac$ e, por hipótese, $a|bc$, então como a divide cada termo da soma, ele divide o resultado c, assim,

$$a|c.$$ □

Definição 5 (Inteiros primos entre si): Sejam dois inteiros $a\ e\ b \neq 0$, assim $a\ e\ b$ são primos entre si, se e somente se o $mdc(a, b) = 1$.

Exemplo 3: Pela definição de inteiros primos entre si, temos os seguintes exemplos:

- $mdc(2, 5) = 1$
- $mdc(41, 12) = 1$
- $mdc(-9, 16) = 1$

2.2.2. Algoritmo de Euclides

Existem diversas formas de obter o mdc de dois números inteiros, um desses métodos é o Algoritmo de Euclides. Para isso faz-se necessário o uso do seguinte lema, que é uma peça chave para o algoritmo, por se tratar de um dos métodos mais eficazes de encontrar o mdc de dois números primos.

Lema 1: Se $a = bq + r$, então o $mdc(a, b) = mdc(b, r)$.

Demonstração: Seja $d = mdc(a, b)$, por definição, temos o seguinte

$$d|a \; e \; d|b.$$

Nota-se que,

$$a = bq + r.$$

Daí,

$$r = a - bq$$

Como r, é uma combinação linear de a e b, então pela propriedade 5 de divisibilidade , temos que

$$d|(a - bq) \Rightarrow d|r$$

portanto, d é um divisor comum de $b \; e \; r$,

$$d|b \; e \; d|r.$$

Além disso, todo divisor comum de $b \; e \; r$, também é divisor comum de $a \; e \; b$. Assim, sendo $c = mdc(b, r)$, então

$$c|b \; e \; c|r.$$

Nota-se que,

$$a = bq + r.$$

Assim, como a é a soma de $bq \; e \; r$, e c divide $bq \; e \; r$, então pela propriedade 5 de divisibilidade, temos que

$$c|(bq + r) \Rightarrow c|a$$

portanto, c é um divisor comum de $a \; e \; b$.

Como $d = mdc(a, b)$ é maior divisor de $a \; e \; b$, e c é qualquer divisor de $a \; e \; b$, temos que, então

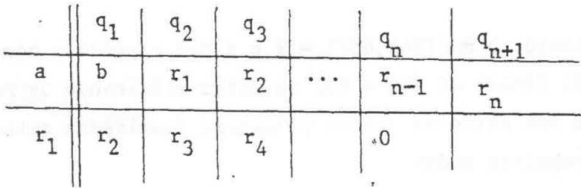
$$mdc(b, r) = d.$$

Assim,

$$mdc(a, b) = mdc(b, r). \square$$

Em outras palavras, a demonstração deste lema tem o objetivo de provar que o $mdc(a, b)$ é exatamente o mesmo $mdc(b, r)$, ou seja, se os conjuntos comuns são iguais, então seus $mdc's$ também devem ser iguais. Diante disso, tem-se que o máximo divisor comum entre dois números inteiros pode ser determinado através da utilização do Algoritmo de Euclides, que consiste em utilizar o seguinte dispositivo de cálculo (Figura 3):

Figura 3: Dispositivo de cálculo



	q_1	q_2	q_3		q_n	q_{n+1}
a	b	r_1	r_2	...	r_{n-1}	r_n
r_1	r_2	r_3	r_4		0	

Fonte: Filho, E.A., (1981).

O mdc é o último resto diferente de zero.

Exemplo 4: Determinar o $mdc(963, 657)$.

Solução: Temos as seguintes divisões sucessivas

$$963 = 657 \cdot 1 + 306$$

$$657 = 306 \cdot 2 + 45$$

$$306 = 45 \cdot 6 + 36$$

$$45 = 36 \cdot 1 + 9$$

$$36 = 9 \cdot 4 + 0$$

Assim, temos o seguinte quadro associada ao $mdc(963, 657)$:

Quadro 1: Máximo divisor comum entre 963 e 657

$mdc(963, 657)$	1	2	6	1	4
963	657	306	45	36	9
306	45	36	9	0	

Fonte: Filho, E.A., (1981).

Portanto, o $mdc(963, 657) = 9$.

2.3. NÚMEROS PRIMOS

Segundo Stewart (2014) os números podem ser divididos em dois grupos, os números primos e os números compostos, que são aqueles inteiros positivos que tem mais de um divisor, como por exemplo os seguintes números: 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15,16. Por outro lado, os números primos são aqueles inteiros positivos que possuem dois divisores positivos distintos, como por exemplo os seguintes números: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19. Assim, é possível observar que não há uma sequência lógica clara nesses dois grupos. No entanto, números compostos podem ser provados apenas encontrando mais um divisor para eles, além de 1 e deles mesmos. Por outro lado, os números primos não possuem uma demonstração para

sua sequência intrigante, o que faz com que muitos problemas continuem sem solução. Desse modo, a definição formal dos números primos é a seguinte:

Definição 6: Diz-se que p um inteiro positivo é primo, se possui exatamente dois divisores positivos $1\ e\ |p|$.

Observa-se que o número inteiro positivo 1 não é primo, como também não é um número composto, assim, sendo um inteiro positivo n, então n é primo, ou n é composto ou $n = 1$. Em particular, na sequência dos números primos é muito observado que tem apenas o número 2 como inteiro positivo e par.

Proposição 1: Seja p um número primo, e sejam $a, b \in \mathbb{Z}$. Então:

I. $Se\ p \nmid a,\ então\ mdc(p, a) = 1,$

II. $Se\ p|ab,\ então\ p|a\ ou\ p|b.$ (de Euclides)

Demonstrações:

I. Seja o $mdc(p, a) = k \neq 1$, Então como p é primo e $k \neq 1$, tem-se que $k = |p|$. Daí, $|p| \mid a$, assim $p|a$ o que é um absurdo pois p não divide a $(p \nmid a)$. Portanto, $mdc(p, a) = 1$.

II. Se $p|a$, não há o que demonstrar, por outro lado, se p não divide a, então por I, $mdc(p, a) = 1$. Assim pelo teorema 2, $p|b$. ■

O item II da proposição 1 é essencial para a prova da unicidade do Teorema Fundamental da Aritmética. Por outro lado, o seguinte teorema é importante para essa parte do estudo, pois através dele surgem resultados importantes para os números primos.

Teorema 3 : Se um número primo p não divide um inteiro n, então $n\ e\ p$ são primos entre si.

Demonstração: Seja $d = mdc(n, p)$. Então $d|n\ e\ d|p$. Como p é primo, da relação $d|p$, tem-se que $d = 1\ ou\ d = p$, assim a igualdade $d = p$ é falsa pois p não divide n, segue que $d = 1$, ou seja, $mdc(n, p) = 1$. Portanto $n\ e\ p$ são primos entre si. ■

Corolário 1: Se p é um número primo tal que $p|a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_n$, em que $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_n \in \mathbb{Z}$, então existe um índice k, com $1 \leq k \leq n$, tal que $p|a_k$.

Demonstração: Faremos uma indução matemática sobre n. Se $n = 1$ então $p|a_1$, portanto, o resultado segue para $n = 1$. Agora, suponha que o resultado vale para $n = t$, ou seja,

$$p|(a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_t \cdot a_t) \Rightarrow p|a_i,\ para\ algum\ i = 1, 2, \ldots, t$$

Daí,

$$p|a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_t \cdot a_{t+1}) = (a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_t) \cdot a_{t+1}$$

Pela proposição 1 (II), temos o seguinte:

$$p|a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_t \; ou \; p|a_{t+1}$$

Deste modo, se $p|a_{t+1}$, o resultado segue.

Por fim, se $p|a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_t$, pela hipótese de indução matemática, tem-se o seguinte,

$$p|a_i \text{ para algum } 1 \leq i \leq 1$$ □

2.4. O TEOREMA FUNDAMENTAL DA ARITMÉTICA (TFA)

Teorema 4: Todo inteiro positivo $n > 1$ é igual a um produto de fatores primos.

Demonstração: Seja um inteiro positivo $n > 1$, se n é primo, então não há nada a ser demonstrado, pois o próprio número n constitui um produto de fatores primos. Por outro lado, suponha que n seja um número composto. Então, existe um divisor primo p_1 tal que,

$$1 < p_1 < n \text{ e } p_1|n.$$

Assim, pode-se escrever

$$n = p_1 \cdot n_1, \; com \; 1 < n_1 < n \quad (3)$$

Se n_1 for primo a prova está completa. Caso contrário, n_1 for composto, então pelo mesmo argumento chega-se que

$$n_1 = p_2 \cdot n_2, \; com \; 1 < n_2 < n_1.$$

Substituindo em (3), obtém-se

$$n = p_1 \cdot p_2 \cdot n_2.$$

Repetindo este procedimento, sempre que o fator for composto ele poderá ser decomposto como produto de um primo por um inteiro positivo estritamente menor. Assim, obtém-se uma sequência decrescente de inteiros positivos:

$$n > n_1 > n_2 > n_3 > \cdots > 1$$

e como só existe um número finito de inteiros positivos menores que n e maiores que 1, existe necessariamente um n_k que é um primo $p_k (n_k = p_k)$, assim tem-se o seguinte:

$$n = p_1 p_2 p_3 \cdots p_k \ .$$

Está igualdade representa o inteiro positivo $n > 1$ como produto de fatores primos. □

Corolário 2 (Unicidade do TFA): A decomposição de um inteiro positivo $n > 1$ como produto de fatores primos é única, menos da ordem dos fatores.

Demonstração: Suponha que $n > 1$ admite duas decomposições como produto de fatores primos, então

$$n = p_1 p_2 p_3 \cdots p_r = q_1 q_2 q_3 \cdots q_s$$

onde todos os $p_i e\ q_j$, são inteiros primos , tais que

$$p_1 \leq p_2 \leq p_3 \leq \cdots \leq p_r \ , \ q_1 \leq q_2 \leq q_3 \leq \cdots \leq q_s$$

Pela proposição 1 (II), se um primo divide um produto, então divide pelo menos um dos fatores. Deste modo, existe um índice k, com $1 \leq k \leq s$, tal que

$$p_1 | q_k .$$

Como q_k é primo, os seus únicos divisores são 1 e ele mesmo. Assim,

$$p_1 = q_k$$

o que implica em,

$$p_2 p_3 \cdots p_r = \ q_1 q_{k-1} q_{k+1} \cdots q_s$$

Analogamente para $p_2 p_3 \cdots$, conclui-se que cada fator primo da primeira decomposição coincide com um fator primo da segunda.

Por outro lado, se $r \neq s$, após o cancelamento de todos os fatores comuns, restaria uma igualdade do tipo:

$$1 = q_{t_1} q_{t_2} \cdots q_{t_m} ,$$

isso é uma contradição, pois todo número primo é maior que 1. Logo se faz necessário que

$$r = s,$$

portanto após uma reordenação dos fatores, tem-se:

$$p_1 = q_1, \ p_2 = q_2 \cdots \ p_r = q_r .$$

Deste modo, conclui-se que a decomposição de um inteiro positivo $n > 1$ como produto de fatores primos é única. ∎

2.5. INFINITUDE DE EUCLIDES

Em sua obra *"Elementos"*, Euclides afirma e prova o teorema sobre a infinitude de números primos, ou seja, não é possível listar todos os números primos.

Teorema 4 (de Euclides) : A sequência dos números primos é infinita.

Demonstração: Suponha que a sequência dos números seja finita. Assim, pode-se listá-los da seguinte forma,

$$p_1, p_2, p_3, p_4, \cdots, p_n \quad (4)$$

onde p_n seria o maior número primo existente. Agora considere o número R da seguinte forma,

$$R = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_n + 1.$$

E notável que R não é divisível por nenhum dos p_i da lista e que R é maior do que qualquer p_i. Porém pelo Teorema Fundamental da Aritmética, ou R é primo ou possui algum fator primo, ou seja, têm a existência de um primo que não pertence a lista (4), o que é uma contradição.

Portanto, a sequência dos números primos não pode ser finita.

Logo, a sequência dos números primos é infinita. ∎

Capítulo 3

3. A CONJECTURA DE GOLDBACH

No capítulo anterior, foram estabelecidos os fundamentos da Teoria dos Números essenciais para a compreensão da Conjectura de Goldbach. A discussão abrangeu desde o conjunto dos números inteiros e as regras de divisibilidade até a aplicação do Algoritmo de Euclides para o cálculo do máximo divisor comum. Além disso, exploramos a definição de números primos, o Teorema Fundamental da Aritmética e a demonstração clássica de Euclides sobre a infinitude dos primos. Esta base sólida permite, agora, avançar para o estudo específico da Conjectura de Goldbach.

Portanto, esse capítulo dedica-se a este problema mais desafiador e clássico da Matemática, devido à sua profunda ligação com a estrutura aditiva dos inteiros e a distribuição dos números primos. Ao longo das próximas seções, serão apresentadas as duas vertentes da questão: a Conjectura Forte (Binária) e a Conjectura Fraca (Ternária). Serão discutidas, ainda, as dificuldades analíticas impostas pela variante forte Conjectura Forte e os resultados históricos mais significativos alcançados até o momento.

3.1. CONJECTURA DE GOLDBACH

No raciocínio lógico-matemático, a conjectura é o estágio que antecede o teorema. Segundo Velleman (2006), uma conjectura define-se como uma afirmação matemática que, embora pareça convincente, ainda não teve a sua veracidade formalmente comprovada. A distinção fundamental entre ambos reside na prova: uma conjectura só se transforma em teorema após ser rigorosamente validada por uma demonstração matemática.

Um exemplo clássico deste conceito é a Conjectura de Goldbach. Esta afirmação, apesar de aparentar ser verdadeira e ter sido validada para uma vasta quantidade de casos específicos, carece de uma demonstração geral e universal. Assim, enquanto não houver uma prova que cubra todos os números inteiros previstos, a afirmação de Goldbach permanece como uma conjectura e não pode ser classificada como um teorema.

3.2. CONJECTURA FORTE (BINÁRIA)

A Conjectura Forte de Goldbach, foi formulada originalmente em uma correspondência com Leonhard Euler em 1742, onde estabelece que todo número natural par maior que 2 pode ser representado como a soma de dois números primos.

Conjectura 1 (Forte): Para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > 2$ e n é par, existem primos p_1 e p_2 tais que,

$$n = p_1 + p_2$$

Apesar de simples seu enunciado, essa proposição revela uma profunda e misteriosa conexão entre a natureza dos números primos e a operação de adição, desafiando matemáticos há quase três séculos.

3.3. CONJECTURA FRACA (TERNÁRIA)

Conjectura 2 (Fraca): Todo número ímpar maior que 5 pode ser expresso como a soma de três números primos.

O termo "Fraca" deriva do fato de que a validade da Conjectura Forte implica, necessariamente, a validade da Fraca. Logicamente, temos a seguinte implicação:

$$Conjectura\ Forte \Rightarrow Conjectura\ Fraca$$

Demonstração: Seja n um natural ímpar tal que $n > 5$. Daí, subtraindo 3 em ambos os lados da desigualdade, temos que

$$n - 3 > 2.$$

Note que $n - 3$ é par. De fato, como n é ímpar, segue que

$$n = 2k + 1$$

com $k \in \mathbb{N}$.

Deste modo,

$$\begin{aligned} n - 3 &= (2k + 1) - 3 \\ &= 2k - 2 \\ &= 2(k - 1) \end{aligned}$$

Portanto, $n - 3$ é par.

Agora, considerando que a Conjectura forte é verdadeira, então existem dois primos $p_1 e\ p_2$ tais que ,

$$n - 3 = p_1 + p_2$$

$$n = p_1 + p_2 + 3.$$

Assim, como 3 também é um número primo, provamos que $n > 5$ é a soma de três primos. Aplicando a contrapositiva , temos que

$$\sim(\mathit{Conjectura\ Fraca}) \Rightarrow \sim(\mathit{Conjectura\ Forte}).$$ ■

Contudo a versão binária continua um dos maiores problemas em aberto da matemática. Por outro lado a conjectura ternária obteve resultados mais avançados, conforme os autores O'Connor e Robertson (2006), em 1937, Ivan Vinogradov verificou que esta conjectura é verdadeira para um número suficientemente grande, porém sem uma prova definitiva.

A resolução definitiva do problema foi apresentada apenas em 2013 pelo matemático Harald Andrés Helfgott, que estabeleceu uma demonstração rigorosa e incondicional válida para todos os números ímpares maiores que 5. A prova combina técnicas sofisticadas da Teoria Analítica dos Números com métodos computacionais avançados, representando um marco histórico no estudo de problemas aditivos envolvendo números primos.

Em seu artigo "*The ternary Goldbach conjecture is true"* (2013), Helfgott inicia sua demonstração baseada no método do círculo, desenvolvido por Hardy-Littlewood e Vinogradov. É possível ver que este método expressa o número de representações de um inteiro ímpar N como soma de três números primos através de uma integral definida sobre o quociente $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Utilizando somas exponenciais ponderadas pela função de Von Mangoldt, demonstra-se que a positividade dessa integral garante a existência de ao menos uma decomposição de N como soma de três primos.

A sua principal estratégia da prova equivale a dividir o domínio de integração em dois subconjuntos, conhecidos como arcos maiores e arcos menores. Os arcos maiores são os pequenos intervalos em torno de números racionais com denominadores pequenos, nos quais as somas exponenciais apresentam comportamento regular e permitem aproximações precisas. Por outro lado, os arcos menores são o restante do intervalo e representam a parte mais delicada da análise.

Nos arcos maiores, é possível analisar que Helfgott (2023) utiliza ferramentas clássicas da teoria analítica dos números, como caracteres de Dirichlet e funções L, associadas a técnicas modernas de suavização. O uso de funções de suavização, como a função Gaussiana, permite uma redução significativa dos termos de erro e

assim, adquirir estimativas mais eficientes para o termo principal da integral, garantido que essa contribuição seja positiva e dominante.

O controle das contribuições vindo dos arcos menores constitui o principal desafio da demonstração. Assim, para superar está dificuldade, Helfgott (2013) usa uma versão refinada do crivo largo aplicada as somas sobre números primos, baseado em trabalhos de Olivier Ramaré. Essa abordagem permitiu limitar a norma L^2 das somas exponenciais envolvidas, evitando perdas logarítmicas que poderia impossibilitar a prova para valores menores de N.

Diante dessas melhorias analíticas, Helfgott (2013) conseguiu fazer uma redução drástica da constante mínima a partir da qual a prova analítica é válida, estabelecendo o limite explícito $C = 10^{27}$. Assim, ele demonstrou que todo número ímpar maior ou igual a 10^{27} pode ser escrito como a soma de três números primos, uma vez que o termo principal da integral supera rigorosamente o termo de erro.

Nesse sentido, para completar a demonstração, foi realizada uma verificação computacional dos casos restantes, isto é, de todos os números ímpares menores que 10^{27}. Nessa etapa Helfgott (2013) teve como base os resultados prévios sobre a Conjectura Forte de Goldbach, especialmente as verificações computacionais realizadas por Oliveira e Silva em 2002, como afirma Paiva *et al.* (2024), a Conjectura Binária e validade para números pares até 4×10^{18}. Com a combinação desses dados com estimativas explícitas sobre lacunas entre números primos, em 2023, Helfgott e David Platt conseguiram cobrir integralmente o intervalo restante por meio de cálculos computacionais rigorosos.

Diante do exposto, a união entre a prova analítica válida para números grandes e a verificação computacional exaustiva para os casos menores, depois de inúmeras tentativas por parte de todos os matemáticos, Helfgott (2013) encerra definitivamente a questão, estabelecendo que a Conjectura Fraca de Goldbach é verdadeira para todos os números ímpares maiores que 5, tornando assim não mais uma conjectura e sim um teorema.

3.4. DIFICULDADES ANALITICAS DA CONJECTURA

Ao analisar os obstáculos para a prova da conjectura, Silva (2014) destaca que a demonstração da conjectura exigiria "conceitos matemáticos muito avançados", o que explica por que, mesmo após séculos, o problema binário

permanece em aberto. Essa necessidade fundamenta-se pelo fato de que os números primos são definidos por propriedades multiplicativas, enquanto a conjectura trás a proposta de descrever uma propriedade aditiva. Considerando este contexto, os matemáticos precisam recorrer a áreas como a Teoria Analitica dos Números, utilizando ferramentas de análise complexa que fogem ao sentido real da aritmética elementar.

Outro desafio central está na irregularidade da distribuição dos números primos. Conforme aponta Sousa (2013):

> A distribuição dos primos é bastante irregular, ou por outras palavras, que os números primos não têm um sentido de ritmo, são imprevisíveis e arbitrários, não se regem por qualquer lei, nem permitem que uma fórmula aritmética simples os gere a todos. Sousa (2013, pg, 18).

Nessa perspectiva, a "imprevisibilidade" mencionada pelo autor não é apenas um detalhe estético da Teoria dos Números, mas o principal obstáculo para a construção de uma prova definitiva. Como não existe uma fórmula simples que crie todos os números primos, os matemáticos atuais precisam buscar regras em conceitos muito mais complexos. Em vez de tentarem adivinhar onde cada número primo está, eles usam ferramentas que estudam como esses números se agrupam. Assim, utilizam a estatística para encontrar respostas que os cálculos básicos ainda não conseguiram fornecer.

Além disso, a infinitude do conjunto dos números naturais impõe limites à abordagem computacional. Ainda que Tomás Oliveira e Silva (2012), tenha verificado computacionalmente para todos os números pares até $4 \cdot 10^{18}$, tal verificação jamais poderá ser conclusiva, pois sempre existirão números além do alcance computacional atual. A Matemática exige demonstrações rigorosas e gerais, capazes de abranger todos os casos possíveis sem deixar furos, e não apenas evidências empíricas obtidas por meio de cálculos extensivos.

Historicamente, muitos avanços estiveram condicionados à Hipótese de Riemann que assim como a Conjectura de Goldbach e a Conjectura dos Primos Gêmeos, estão na lista de 23 problemas citados pelo matemático David Hilbert (1862-1943) durante o Congresso Internacional de Matemática que aconteceu em Paris, em 1900 (Yandell, 2002). Trabalhos fundamentais, como os de Hardy e Littlewood (1923), dependiam da suposição sobre a distribuição dos zeros não triviais da função zeta de Riemann. De acordo com Paiva *et al.* (2024), diversos

avanços no campo da matemática, incluindo teoremas ligados à Conjectura de Goldbach, foram estabelecidos tomando a Hipótese de Riemann como premissa verdadeira, nesse sentido a ausência de uma prova desta hipótese limita a força de diversos resultados e mantém certas abordagens no campo das provas condicionais.

Portanto, ressalta-se que nenhuma verificação numérica substitui o rigor de uma demonstração formal. A resolução da Conjectura Forte de Goldbach demanda inovação teórica e a integração de diferentes ramos da Teoria dos Números. Superar essas limitações e formular um argumento universal para todos os naturais é, justamente, o que torna esse problema um desafio tão profundo e persistente.

3.5. RESULTADOS SIGNIFICATIVOS E AVANÇOS

Ao longo dos séculos, a busca pela demonstração da Conjectura de Goldbach impulsionou avanços notáveis na Teoria Analítica dos Números e no desenvolvimento da computação matemática. Embora a Conjectura Forte permaneça como um dos grandes problemas em aberto da matemática, diversos resultados parciais contribuíram para a consolidação de métodos analíticos e computacionais cada vez mais sofisticados, esses resultados foram elencados por Sales *et al.* (2024), no quadro a seguir:

Quadro 2. Evolução histórica da Conjectura de Goldbach.

Ano	Autor	Resultado
1855	Desboves	Todos os números pares até 1.000 podem ser escritos como a soma de dois primos.
1894	Cantor	Forneceu uma tabela com as composições de todos os números pares até 1000 como a soma de dois números primos .
1897	Hausner	Todos os números pares até 10.000.000 podem ser escritos como a soma de dois primos.
1920	Brun	Qualquer número par suficientemente grande é a soma de dois números , cada um tendo no máximo nove fatores primos.
1923	Hardy e Littlewood	Todo número ímpar suficientemente grande é a soma de três números primos (assumindo a hipótese de Riemann).
1923	Littlewood	10^{50} já poderia ser considerado “suficientemente grande" para o resultado deles.

1926	Lucke	Reduz o valor para 10^{32}.
1930	Schnirelmann	Todo número par maior ou igual a 2 pode ser escrito como a soma de não mais de 20 números primos .
1932	Estermann	Todo número par suficientemente grande é a soma entre um número primo é um produto de, no máximo, 6 fatores primos.
1937	Vinogradov	Remove a dependência da hipótese de Riemann do resultado de Hardy e Littlewood
1938	Tchudakov	Quase todos os números pares são somas de dois primos (verificada por Littlewood na década de 20).
1948	Rényi	Remove a dependência da hipótese de Riemann do resultado de Estermann.
1956	Borodkin	“Suficientemente grande”, independendo da hipótese de Riemann, seriam números maiores que $10^{7.000.00}$.
1962	Yuab e Buhstab	Todo número par suficientemente grande é a soma entre um número primo e um produto de no máximo três fatores primos.
1966	Chen	Todo número par suficientemente grande é a soma entre um número primo e um produto de, no máximo, dois primos.
1975	Montgomery e Vaughan	A quantidade $E(X)$ de números pares que excedem X e que não são a soma de dois primos, e tal que $E(X) \ll X^{1-\delta}$.
1980	Pan e Chen	Estimam que $\delta > 0,04$
1989	Chen e Wang	Reduzem o número encontrado por Borodzkin em 1956 para $10^{43.000}$
1995	Ramaré	Todo número par maior que 2 pode ser escrito como a soma de, no máximo, 6 números primos.
1996	Chen e Wang	Reduzem o valor antes encontrado por eles para $10^{7.194}$.
1997	JMD,PE e HR	A hipótese de Riemann implica a Conjectura Fraca de Goldbach, para todos os números ímpares.
2000	Li	O valor de $\delta > 0,04$ de Pan e Chen é aprimorado para $\delta \approx 0,086$.
2002	Liu e Wang	Reduzem o valor encontrado em 1996 para $10^{1.346}$.
2010	Lu	Determina que $\delta \approx 0,121$

2012	Tao	Todo número ímpar pode ser escrito como a soma de no máximo 5 números primos.
2012	Oliveira e Silva	Todos os números pares até $4 \cdot 10^{18}$ podem ser escritos como a soma de dois primos.
2013	Helfgott	Prova a Conjectura Fraca de Goldbach.
2014	Dudek	Todo número inteiro maior que dois é a soma de um número primo e um número livre de quadrados.
2015	Yamada	“Suficientemente grande” no teorema de Chen seriam números maiores que $exp(exp\,36))$.
2020	Francis e Lee	Estabelecem sobre o trabalho de Dudek condições de divisibilidade no número livre de quadrados.
2022	MB,DRJ e VS	“Suficientemente grande” no teorema de Chen seriam números maiores que $exp(exp\,32,6))$.
2022	Bordignon e Starichkova	Melhoraram o número anterior para $exp(exp\,15,85))$, assumindo a hipótese de Riemann.

Fonte: Sales *et al*. (2024).

O quadro 2 evidência a evolução progressiva dos estudos relacionados à Conjectura de Goldbach ao longo de mais de um século e meio. Podemos observar que os primeiros resultados concentraram-se em verificações numéricas para intervalos finitos, como os trabalhos dos estudos de Desboves em 1855, que validou a conjectura para números pares até 10.000, passando por Cantor (1894) e Haussner (1897), que validaram a conjectura respectivamente para 1.000 é 1.000.000.

A partir da década de 1920, percebe-se uma mudança metodológica para a análise teórica, com Brun demonstrando que números pares grandes poderiam ser escritos como a soma de dois números com, no máximo, nove fatores primos. Logo após, em 1923, Hardy e Littlewood apresentaram um avanço fundamental para a versão ternária, embora dependente da validade da Hipótese de Riemann. Em 1937 Vinogradov removeu essa dependência, que provou a validade para números ímpares "suficientemente grandes".

Outro aspecto relevante evidenciado no quadro 2, é que na segunda metade do século XX o constante esforço para reduzir os limites que definem o que se considera “número suficientemente grande”. Observa-se que, ao longo das décadas, tais limites foram sendo diminuídos por meio do aprimoramento das técnicas

analíticas e computacionais. Esse movimento termina com a prova incondicional da Conjectura Fraca por Helfgott (2013), que representa um dos avanços mais significativos na história do problema.

Além disso, destaca-se o papel crescente da verificação computacional, especialmente nos trabalhos de Oliveira e Silva (2012), que ampliaram significativamente o alcance das confirmações numéricas da versão binária.

No quadro 2, observa-se inicialmente a contribuição de Georg Cantor (1894), em que ele realizou uma verificação sistemática da conjectura para todos os números pares até 1000. Em sua tese Scimone (2002), mostra de forma detalhada como ocorreu a construção da tabela de Cantor, que foi apresentada na Associação Francesa para o Avanço das Ciências, em Caen, constituindo uma das primeiras tentativas organizadas de validação empírica do problema.

Neste sentido, para estruturar sua investigação, Cantor (1894) utilizou a notação $n = 2N = x + y$, onde $x\, e\, y$ são primos, com $x \leq y$, utilizou também uma função de contagem $v(n)$ que representa a quantidade total de pares de primos (x, y) que satisfazem a igualdade para um determinado n.

Figura 4 - Recorte da Tabela de Cantor (1894)

n=2N	x	ν(n)
10	3, 5	2
22	3, 5, 11	3
34	3, 5, 11, 17	4
40	3, 11, 17	3
78	5, 7 11, 17, 19, 31, 37	7
86	3, 7, 13, 19, 43	5
100	3, 11, 17, 29, 41, 47	6
1000	3, 17, 23, 29, 47, 53, 59, 71, 89, 113, 137,173, 179, 191, 227, 239, 257, 281, 317, 347, 353, 359, 383, 401, 431, 443, 479, 491	28

Fonte: Scimone (2002).

A figura 4 apresenta para cada número par analisado, todas as decomposições possíveis. Conforme destaca Scimone (2002), a análise desses dados permitiu não apenas confirmar a conjectura para os valores examinados, mas também permitiu a Cantor(1894) identificar três comportamentos fundamentais na distribuição dos números primos, a tendência de crescimento, ou seja, quanto maior o número, maior a quantidade de formas de escrevê-lo como soma de dois primos,

outro comportamento e a influência da divisibilidade por três, pois ele observou que números pares que são múltiplos de três apresentam picos de decomposição, é por fim a dependência dos fatores primos, ou seja, a frequência das decomposições parece ser influenciada pela quantidade de fatores primos ímpares distintos contido em N, não pela potência desses fatores.

Cantor (1894) destacou que a prova definitiva da Conjectura de Goldbach reside na verificação de que $v(2N) > 0, \forall N$. Embora sua tabela tenha fornecido forte evidência empírica da veracidade da conjectura, o matemático reconheceu que a verificação direta era um processo exaustivo e que o verdadeiro desafio permanecia na criação de uma prova analítica rigorosa que substituísse a observação manual.

O trabalho de Cantor (1894) ilustra uma dualidade clássica na Teoria dos Números, a enorme evidência prática contra a falta de uma prova teórica definitiva. Se na época de Cantor a verificação era um processo exaustivo e manual, feito através de tabelas e cálculos extensos, hoje esse esforço foi transferido para o campo tecnológico. Embora utilizemos supercomputadores e algoritmos de ponta, o desafio permanece semelhante, exigindo alto custo de processamento e sofisticação lógica.

Assim, a história da Conjectura de Goldbach revela que o avanço da Matemática não ocorre de forma isolada. Ele é fruto de um percurso cumulativo e dinâmico, que une a investigação empírica, a profundidade dos métodos analíticos e o suporte da computação moderna.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Conclui-se que foi possível aprofundar o conhecimento em uma área fundamental da Matemática que, embora de grande importância, nem sempre é explorada com a devida profundidade durante a graduação. A investigação sobre a Conjectura de Goldbach proporcionou uma experiência acadêmica enriquecedora, permitindo o contato com temas e desafios até então inéditos em minha formação.

A presente pesquisa percorreu a trajetória de Christian Goldbach e suas contribuições, situando historicamente o surgimento de sua famosa conjectura. Para fundamentar a compreensão desse problema, foram estudados e apresentados teoremas, lemas e definições essenciais da Teoria dos Números, que serviram como base teórica para evidenciar a complexidade por trás do enunciado.

A Conjectura de Goldbach revela um contraste admirável, pois possui um enunciado de aparência simples, compreensível para qualquer estudante familiarizado com o conceito de números primos, mas esconde uma dificuldade técnica. Conforme demonstrado ao longo deste estudo, apesar dos significativos avanços computacionais e das contribuições teóricas acumuladas ao longo dos séculos, a afirmação permanece sem uma demonstração definitiva. Isso reforça a ideia de que, mesmo diante do progresso tecnológico, a Matemática ainda preserva mistérios que desafiam o conhecimento humano.

Nesse contexto, destaca-se que os resultados parciais obtidos ao longo das investigações sobre a Conjectura de Goldbach possuem relevância que vai além da busca por sua demonstração completa. Tais avanços contribuíram significativamente para o desenvolvimento da Teoria dos Números, especialmente no estudo dos números primos, além de impulsionarem novas técnicas, métodos e abordagens matemáticas. Assim, mesmo sem uma solução definitiva, essas contribuições fortalecem o progresso da Matemática como um todo, ampliando o conhecimento e abrindo caminhos para futuras pesquisas.

Por fim, os objetivos traçados inicialmente foram plenamente alcançados. Espera-se que este trabalho possa servir como material de consulta e referência para futuros estudos que busquem explorar a beleza e o rigor da Teoria dos Números.

REFERÊNCIAS

ALENCAR FILHO, Edgard de. **Teoria elementar dos números**. São Paulo: Nobel, 1981.

DOMINGUES, Hygino H.; IEZZI, Gelson. **Álgebra moderna**. São Paulo: Atual, 2003.

HELFGOTT, Harald Andrés. **Major arcs for Goldbach 's problem**. [S. l.]: arXiv, 14 abr. 2014. Disponível em: https://arxiv.org/abs/1305.2897. Acesso em: 5 fev. 2026.

HELFGOTT, Harald Andrés. **The ternary Goldbach conjecture is true**. [S. l.]: arXiv preprint arXiv:1305.2897, 2013.Disponível em: https://arxiv.org/abs/1312.7748. Acesso em: 6 de fev.2026.

LEMMERMEYER, Franz; MATTMÜLLER, Martin (ed.). **Correspondence of Leonhard Euler with Christian Goldbach**, Part I. Basel: Springer Basel, 2015. (Leonhardi Euleri Opera Omnia. Series quarta A, Commercium Epistolicum, Volumen quartum Pars prima).

MACTUTOR History of Mathematics. **Christian Goldbach (1690-1764) – Biography**. University of St Andrews. Disponível em: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Goldbach/. Acesso em: 14 de outubro de 2025

PAIVA, Carlos Daniel Chaves *et al*. A busca pela prova da conjectura de Goldbach: explorando suas conquistas. **Revista Caderno Pedagógico**, Curitiba, v. 21, n. 7, e3983, 2024. Disponível em: https://doi.org/10.54033/cadpedv21n7-134. Acesso em: 8 fevereiro de 2026.

SALES, Francisco Odécio *et al*. Os teoremas de incompletude de Gödel e a conjectura de Goldbach. **Revista Caderno Pedagógico**, Curitiba, v. 21, n. 7, p. 1104-1123, 2024. Disponível em: https://doi.org/10.54033/cadpedv21n7-056. Acesso em:8 de fevereiro de 2026.

SANTOS, José Plínio de Oliveira. **Introdução à teoria dos números**. 3. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2007.

SCIMONE, Aldo. **Pupils' conceptions about an open historical question: Goldbach' s conjecture**: the improvement of mathematical education from a historical viewpoint. 2002. 113 f. Tese (Doutorado em Didática da Matemática) – Faculty of Mathematics and Physics, Comenius University Bratislava, Bratislava, 2002.

SILVA, Joab Cavalcante da. **Análise computacional dos números primos e da Conjectura de Goldbach**. 2014. 81 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, Dourados, 2014.

SILVA, Tomás Oliveira e. **Goldbach conjecture verification**. Home page of Tomás Oliveira e Silva, 2015. Disponível em: https://sweet.ua.pt/tos/goldbach.html. Acesso em: 2 fevereiro de 2026.

SOUSA, José Emanuel. **Conjetura de Goldbach – Uma visão aritmética**. 2013. Dissertação (Mestrado em Matemática para Professores) – Departamento de Matemática, Universidade dos Açores, Ponta Delgada, 2013.

STEWART, Ian. **Os maiores problemas matemáticos de todos os tempos**. Tradução de George Schlesinger. Rio de Janeiro: Zahar, 2014.

VELLEMAN, Daniel J. **How to prove it**: a structured approach. Cambridge: Cambridge University Press, 2006.

Yandell, B. H. (2002). **The Honors Class: Hilbert 's Problems and Their Solvers.** A. K.Peters Ltd, Oxfordshire, Reino Unido.