

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA E MATEMÁTICA
Curso de Graduação em Licenciatura em Matemática

DESENVOLVIMENTO DE ALGORITMO NO FORTRAN, USANDO O MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON PARA EQUAÇÕES TRANSCENDENTES

João Lucas Almeida Silva

Cuité – PB
Março de 2026

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Educação e Saúde
Unidade Acadêmica de Física e Matemática
Curso de Graduação em Licenciatura em Matemática

DESENVOLVIMENTO DE ALGORITMO NO FORTRAN, USANDO O MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON PARA EQUAÇÕES TRANSCENDENTES

por

João Lucas Almeida Silva

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática em cumprimento às exigências do Componente Curricular Trabalho Acadêmico Orientado, para obtenção do grau de Graduado em Licenciatura em Matemática.

Orientador: **Aluizio Freire da Silva Júnior**

Cuité – PB
Março de 2026

S586d Silva, João Lucas Almeida.

Desenvolvimento de algoritmo no Fortran usando o método de Newton-Raphson para equações transcedentes. / João Lucas Almeida Silva. - Cuité, 2026.

46 f.: il. color.

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Educação e Saúde, 2026.

"Orientação: Prof. Dr. Aluízio Freire da Silva Junior".

Referências.

1. Equações não lineares. 2. Newton-Raphson – método. 3. Fortran - algoritmo. 4. Equações transcedentes. 5. Centro de Educação e Saúde. I. Silva Junior, Aluízio Freire da. II. Título.

CDU 517.93(043)

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELO BIBLIOTECÁRIO Msc. Jesiel Ferreira Gomes - CRB-15/256

DESENVOLVIMENTO DE ALGORITMO NO FORTRAN, USANDO O MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON PARA EQUAÇÕES TRANSCENDENTES

por

João Lucas Almeida Silva

Monografia de Trabalho de Conclusão de Curso submetida à banca examinadora como parte dos requisitos necessários a obtenção do grau de Graduação em Licenciatura em Matemática.

A citação de qualquer trecho deste trabalho é permitida, desde que seja feita em conformidade com as normas de ética científica.

Aprovada em 20 de março de 2026.

Banca Examinadora:

Aluizio Freire da Silva Júnior
(Orientador)

Marciel Medeiros de Oliveira

Maria de Jesus Rodrigues da Silva

Dedico este trabalho à minha avó, Severina, in memoriam, cujo amor, ensinamentos e lembranças permanecem vivos em meu coração.

Agradecimentos

Expresso minha gratidão, primeiramente, a Deus, que me concedeu força, sabedoria e perseverança para concretizar meus objetivos ao longo desta graduação. Em todos os momentos, especialmente nos mais desafiadores, senti Sua presença me guiando e me dando ânimo para seguir em frente. Reconheço que nada disso teria se realizado sem a Sua permissão e cuidado, e sou profundamente grato por todas as bênçãos e oportunidades que me foram concedidas durante essa caminhada acadêmica.

Aos meus pais, João da Costa Silva e Maria José Rocha Almeida, por todo o apoio, incentivo e palavras de conforto ao longo da minha graduação. Sem dúvidas, vocês foram meus maiores apoiadores durante esses anos de curso. Agradeço por nunca terem soltado minha mão e por toda a paciência, cuidado e amor dedicados a mim em cada momento dessa caminhada. Vocês são minha maior inspiração de vida e de educação. Esta conclusão de curso não é apenas minha, é nossa.

As minhas irmãs, Jéssica e Maria das Vitórias, por todo carinho, apoio e companheirismo ao longo dessa caminhada. A presença de vocês em minha vida sempre foi motivo de força e alegria, especialmente nos momentos mais desafiadores. Agradeço por cada palavra de incentivo, pelas conversas e por estarem sempre ao meu lado torcendo pelas minhas conquistas. Vocês também fazem parte dessa vitória.

A minha namorada Nadly, por todo apoio, carinho e incentivo durante o desenvolvimento deste trabalho. Agradeço especialmente pela ajuda nas correções e revisões do TCC, que foram de grande importância para a melhoria deste trabalho. Sou muito grato pela paciência, companheirismo e por estar ao meu lado ao longo dessa etapa tão importante da minha vida acadêmica.

Aos meus amigos do período 2021.1 e 2022.1, em especial a Alex, Rodrigo e Ruan, pela amizade, companheirismo e pelos inúmeros momentos compartilhados ao longo da graduação. A convivência com vocês tornou essa caminhada mais leve e significativa. Sou grato pelas conversas, pelo apoio mútuo nos estudos e por todos os momentos que contribuíram para tornar essa jornada acadêmica ainda mais especial.

Ao meu orientador, Aluizio, por ter aceitado orientar este trabalho e por toda a dedicação, paciência e disponibilidade ao longo do seu desenvolvimento. Agradeço pelas valiosas contribuições, orientações e ensinamentos, que foram fundamentais para a realização desta pesquisa e para o meu crescimento acadêmico.

A todos os professores do curso, que contribuíram de forma significativa para minha formação acadêmica e pessoal. Em especial, às professoras Márcia e Giselia, pelos valiosos conselhos e até mesmo pelos "puxões de orelha" na parte final do curso, que

foram fundamentais para meu amadurecimento e para a conclusão desta etapa tão importante da minha vida.

Finalizo meus agradecimentos com a certeza de que cada etapa desta caminhada foi conduzida por Deus, que me deu força, sabedoria e perseverança para chegar até aqui. Como diz a Palavra:

"Consagre ao Senhor tudo o que você faz,
e os seus planos serão bem-sucedidos."
(Provérbios 16:3)

Resumo

Os métodos numéricos são muito utilizados na matemática, física e engenharia para resolver equações complexas que não podem ser resolvidas com métodos analíticos, essas são denominadas como equações transcendentes ou equações não lineares. Dentre os métodos existentes um dos mais famosos é o de Newton-Raphson, pois oferece uma convergência rápida para a raiz desejada e sua aplicação não é tão complexa. O presente trabalho tem como objetivo apresentar o Método de Newton-Raphson e desenvolver um algoritmo para resolver equações transcendentes, tendo foco na convergência e eficácia do método na matemática aplicada. A metodologia utilizada será uma revisão bibliográfica sobre o desenvolvimento histórico do Método de Newton, seguida da demonstração do método e sua aplicabilidade, por fim será desenvolvido o algoritmo em linguagem do Fortran para resolução de equações transcendentes. O Método de Newton-Raphson mesmo tendo suas limitações em casos específicos, é extremamente rápido e eficaz para resolução de equações não lineares, tendo em vista o poder computacional em que ele pode ser aplicado nos dias de hoje.

Palavras-chave: Newton-Raphson; convergência; Fortran.

Abstract

Numerical methods are widely used in mathematics, physics, and engineering to solve complex equations that cannot be handled by analytical methods. These equations are commonly referred to as transcendental or nonlinear equations. Among the existing numerical methods, one of the most well-known is the NewtonâRaphson method, due to its fast convergence to the desired root and its relatively simple implementation. The objective of this work is to present the NewtonâRaphson method and to develop an algorithm for solving transcendental equations, with emphasis on the convergence and efficiency of the method in applied mathematics. The methodology adopted consists of a bibliographic review addressing the historical development of Newtonâs method, followed by the theoretical demonstration of the method and its applicability. Finally, an algorithm implemented in the Fortran programming language is developed for the numerical solution of transcendental equations. Although the NewtonâRaphson method has limitations in specific cases, it is extremely fast and effective for solving nonlinear equations, especially considering the computational power available today.

Keywords: Newton-Raphson; convergence; Fortran.

Sumário

Introdução **2**

1 Desenvolvimento Histórico **4**

1.1 O Método de Newton-Raphson 4

1.2 Fortran 6

2 Método de Newton-Raphson **8**

2.1 Equações Transcendentes 8

2.2 Zeros de funções reais 8

2.3 Critérios de parada 11

2.4 Método do Ponto Fixo 12

2.5 Convergência do Método do Ponto Fixo 13

2.6 Método de Newton-Raphson 16

2.6.1 Algoritmo do método 19

2.7 Limitações do método 20

3 Algoritmo **22**

3.1 Descrição do algoritmo 25

3.2 Ánalise de convergência utilizando o algoritmo 29

3.2.1 Teste com função transcendente 32

3.3 Comparação com o Método da Falsa Posição 34

Conclusão **35**

Referências Bibliográficas **36**

Lista de Figuras

2.1 Gráfico da função $x^3 - 9x + 3$ 10
2.2 Fluxograma do método iterativo. S = sim; N = não; K = iteração . . . 11

3.1 Fluxograma do algoritmo 29
3.2 Gráfico do exemplo 2.7.3 30
3.3 Saída do algoritmo considerando $x_0 = 0,5, \epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-5}$ 30
3.4 Saída do algoritmo considerando $x_0 = 1, \epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-5}$ 30
3.5 Saída do algoritmo considerando $x_0 = 1,8, \epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-5}$ 31
3.6 Saída do algoritmo considerando $x_0 = 2, \epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-5}$ 31
3.7 Saída do algoritmo considerando $x_0 = -1, \epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-5}$ 32
3.8 Saída do algoritmo considerando $x_0 = -0,05, \epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-5}$ 32
3.9 Gráfico da função $cos(x) - x$ 33
3.10 Saída do algoritmo considerando $x_0 = 0,5, \epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-5}$ 33
3.11 Saída do algoritmo considerando $I = [-2, 3], \epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-5}$ 34

Introdução

Encontrar as raízes de uma equação polinomial do segundo grau não é uma tarefa difícil, visto que existem fórmulas que dão as raízes em função do coeficiente, como por exemplo a de "Bhaskara", assim conhecida no Brasil. No entanto, existem funções mais complicadas onde muitas delas não podem ser resolvidas de maneira analítica e outras são praticamente impossíveis de se encontrar o zero da função, essas são denominadas equações transcendentes ou equações não-lineares.

Dessa forma, impulsionado pela dificuldade de representar com precisão os zeros de funções, uma abordagem lógica foi tentar encontrar maneiras de pelo menos alcançar uma aproximação deles (AMARAL; SOUZA; CATALAN, 2015, p. 65). Nesse contexto, o uso de métodos numéricos mostra-se adequado, pois possibilita a obtenção de aproximações das raízes com precisão suficiente para atender às necessidades práticas das aplicações.

Os métodos numéricos são muito utilizados nas engenharias, na física, na mate mática e também na ciência da computação, pois essas áreas necessitam constantemente de resolver equações complexas que os métodos analíticos não são capazes de resolver. Embora com eles possamos chegar apenas em uma aproximação, ela é suficiente para a aplicação desejada. Para se aproximar da raiz da função, são utilizados métodos iterativos que consistem em, a partir de uma aproximação inicial dada, calcularmos sucessivas aproximações para solução daquela equação.

Nesse sentido, a busca por raízes de funções que não possuem solução analítica elementar exige estratégias computacionais robustas. Diante deste cenário, surge o seguinte problema de pesquisa: de que forma a implementação do Método de Newton-Raphson na linguagem Fortran contribiu para a obtenção de aproximações precisas em equações transcendentes de difícil solução analíticas? Com intuito de responder a essa questão, este trabalho tem como objetivo analisar a aplicação do método, evidenciando sua eficiência e precisão na resolução dessas equações.

A partir dessa proposta, nossa discussão começa com uma abordagem téorica do desenvolvimento histórico do Método de Newton-Raphson e também da linguagem de programação Fortran, partindo daí, demonstraremos sua aplicabilidade, eficácia e a importância para a matemática aplicada, em seguida será desenvolvido um algoritmo para obter a solução de algumas equações transcendentes utilizando o método na linguagem do Fortran.

A escolha do Fortran nesse trabalho se deu pela sua capacidade de lidar com cálculos

matemáticos difíceis e na implementação de algoritmos que exigem um elevado desempenho computacional, sendo amplamente utilizado na implementação dos Métodos Numéricos, dentre eles, o Método de Newton. Além disso, o Fortran consegue trabalhar com uma abundante quantidade de números e oferece uma grande precisão em seus cálculos. Assim, sua aplicação neste estudo não somente assegura mais confiabilidade e exatidão nos resultados, mas também oferece um desempenho superior quando confrontada com outras linguagens de programação de propósito geral.

O Método de Newton-Raphson é um dos mais famosos e também um dos mais eficientes para encontrar a solução de equações não-lineares, sendo de grande importância para os dias atuais. Mesmo tendo suas limitações em casos específicos, sua fama se deu por ser um método que converge muito rápido para o zero da função, assim diminuindo o custo computacional.

Para a melhor organização deste trabalho, sua estrutura foi dividida em capítulos. No Capítulo 1, apresenta-se o desenvolvimento histórico dos métodos numéricos, com ênfase no Método de Newton-Raphson e na linguagem de programação Fortran. No Capítulo 2, são discutidos os fundamentos teóricos necessários, incluindo equações transcendentes, zeros de funções reais, critérios de parada, o Método do Ponto Fixo e, por fim, o Método de Newton-Raphson, destacando sua formulação, convergência e limitações.

No Capítulo 3, é apresentada a construção do algoritmo na linguagem Fortran, bem como sua aplicação prática, análise de convergência e comparação com outros métodos numéricos. Por fim, apresentam-se as conclusões obtidas a partir do estudo realizado, destacando os principais resultados e contribuições do trabalho.

Capítulo 1

Desenvolvimento Histórico

Os métodos númericos surgiram com a necessidade de resolver problemas dos quais ainda não existiam "fórmulas"para tais problemas. Os primeiros registros do uso dos métodos numéricos são para encontrar aproximações de raízes, segundo Burden *et al.*(2015):

> O problema de encontrar uma aproximação da raiz de uma equação data de pelo menos 1700 a.C. Uma tábua cuneiforme na Coleção de Yale da Babilônia que data desse período fornece um número sexagesimal (base 60) equivalente a $1,414222$ como aproximação de $\sqrt{2}$, um resultado com precisão de 10^{-5} (BURDEN *et al.*, 2015, p.52).

Este registro do passado mostra que, desde os tempos antigos, existia a preocupação em descobrir maneiras aproximadas para resolver questões matemáticas que não podiam ser solucionadas com precisão. O conceito fundamental de solucionar uma equação aprimorando uma previsão da resposta através da inclusão de um elemento de ajuste era empregado em diversas civilizações milhares de anos antes dessa época. Certas técnicas antigas dos gregos e babilônios para encontrar raízes seguem esse padrão, assim como algumas abordagens dos matemáticos árabes (YPMA, 1995, p. 534).

Com o passar do tempo, várias civilizações criaram abordagens que podem ser vistas como antecessoras das práticas numéricas que conhecemos hoje. Um dos mais significativos avanços entre os métodos para encontrar raízes, é o Método de Newton-Raphson.

1.1 O Método de Newton-Raphson

Isaac Newton(1642 - 1727) foi um dos mais brilhantes cientistas de todos os tempos. O fim do século XVII foi um período de muito entusiasmo para a ciência e a matemática, das quais quase todos os aspectos foram abrangidos pelo trabalho de Newton (BURDEN *et al.*, 2015, p.71)

No ano de 1669, Isaac Newton em *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas* (publicado em 1711), comunica ao seu professor Isaac Barrow um primeiro anúncio do que viria a ser o princípio dos fluxos e o teorema binomial (QUEIROGA, 2018, p. 6), nele podemos ver a primeira discussão do que viria a ser futuramente o

Método de Newton-Raphson. De acordo com Machado e Alves (2013):

> O método de Newton, cujo o objetivo é estimar raízes de uma função, foi proposto por Isaac Newton em dois momentos: em 1669 em *De analysi per aequationes número terminorum infinitas* composta por ideias adquiridas em 1665-1666, sendo publicado apenas em 1711 e em *De metodis fluxionum et serierum infinitarum*, escrito em 1671 sendo aprimorado para qualquer tipo de função real em 1690 por Joseph Raphson. Daí sua popularidade como método de Newton-Raphson (MACHADO e ALVES, 2013, p. 31 - 32).

Segundo YPMA (1995, p. 537), embora a formulação seja consideravelmente diferente da forma agora convencional, os cálculos sejam muito mais tediosos do que na formulação atual e o método seja apresentado apenas no contexto da solução de uma equação polinomial, a ideia fundamental do procedimento já estava presente, servindo como base para o desenvolvimento das formulações modernas do método.

Vale salientar que nessa primeira versão nenhum cálculo é realizado, o que sugere que Newton considerava esse processo apenas como geométrico. A primeira publicação em que Newton fez uso do método iterativo para resolver uma equação não polinomial está na segunda e terceira edição de *Philosophiae Naturalis Principia mathematica* em 1687, em que ele descreveu técnicas para resolução da equação de Kepler

$$x - esen(x) = M$$

Dado que não há uma solução analítica disponível para essa equação, Newton utilizou aproximações sucessivas, o que revela o início do método que seria posteriormente formalizado. Essa aplicação ilustra a importância prática do processo iterativo, pois permitia resolver questões de astronomia e mecânica celeste que não podiam ser tratadas apenas com métodos algébricos.

Joseph Rapshon(1648 - 1715) descreveu o método atribuído a Isaac Newton em 1690, creditando-o como fonte da descoberta. Sua participação foi crucial para a disseminação e estabelecimento da técnica, pois elucidou de maneira mais clara e organizada o processo iterativo que já havia sido sugerido anteriormente por Newton. Vale ressaltar que, naquele período, o cálculo diferencial ainda estava em fase de evolução, o que explica a ausência do uso explícito do conceito de derivada por Newton e Raphson em suas apresentações. Ao invés disso, os dois limitaram suas investigações às equações polinomiais, aplicando raciocínios algébricos e aproximações consecutivas para fundamentar o método (BURDEN *et al.*, 2015, p.72).

Raphson publicou o tratado *Analysis aequationum universalis*, no qual apresentou

um novo método para resolver equações polinomiais. Uma segunda edição desse tratado foi publicada em forma de livro em 1697, em que um apêndice faz referências a Newton, mas omitindo um prefácio com diferentes referências a Newton que havia aparecido no tratado original (YPMA, 1995, p. 548). Ademais, a utilização do Método de Newton-Raphson não se restringe apenas à matemática, sendo muito utilizada em áreas como a física, engenharia, economia e ciência da computação.

Embora o método de Newton-Raphson tenha sido consolidade entre os séculos XVII e XVIII, sua aplicação em larga escala para a resolução de equações de alta complexidade encontrou limitações no custo operacional do cálculo manual. Esse cenário alterou-se significativamente na década de 1950 com o surgimento das primeiras linguagens de programação de alto nível com destaque para o *Fortran*. A capacidade de processamento dos computadores permitiu o renascimento desses métodos numéricos clássicos, transformando procedimentos teóricos em algoritmos de alta performance capazes de fornecer aproximações com precisões antes inalcançáveis. Assim, a união entre o rigor do método de Newton-Raphson a robustez do *Fortran* estabeleceu o padrão para a computação científica moderna, justificando a abordagem proposta neste trabalho.

1.2 Fortran

Nos primórdios da computação, programar era uma tarefa bem difícil, já que o programador precisava conhecer profundamente como funcionava a CPU do computador, incluindo seus registradores, comandos e outros detalhes internos. Naquela época, o código era criado usando números, como o código *octal* [1], o que deixava tudo confuso e aumentava as chances de erros.

Conforme a área evoluiu, surgiram códigos *mnemônicos* [2], chamados de linguagem de máquina ou *assembly*, que permitiram uma forma de escrita mais fácil de entender. Esses códigos passaram a ser transformados em comandos que o computador podia executar, usando programas chamados montadores, marcando um ponto importante na história da programação.

Na década de 1950, tornou-se cada vez mais evidente que essa forma de programação era altamente inconveniente, embora permitisse que a CPU fosse usada de maneira muito eficiente (METCALF; REID; COHEN, 2011, p. 2).

Foram essas dificuldades que incentivaram John Backus, da IBM a liderar uma equipe para desenvolver uma linguagem de programação de alto nível, de Metcalf (2011, p.1): seu objetivo era produzir uma linguagem que fosse simples de entender, mas

[1] Também conhecido com sistema octal, é um sistema de numeração que utiliza oito símbolos para a representação de quantidade.

[2] É um sistema que utiliza técnicas de memorização de informação.

quase tão eficiente em execução quanto a linguagem *assembly*. Dessa iniciativa nasce o *Fortran*.

A linguagem de programação *Fortran*, cujo nome se origina da expressão *Formula Translator*, desempenha uma função essencial na trajetória da computação. A linguagem era de fato simples de aprender, pois era possível escrever fórmulas matemáticas quase como elas são normalmente escritas em textos matemáticos (METCALF; REID; COHEN, 2011, p. 2).

Com a experiência adquirida com o *Fortran I*, foi tomada a decisão de lançar uma nova versão, o *Fortran II*, em 1958. As diferenças mais significativas entre as duas versões foram a adição de subprogramas, juntamente com os conceitos de áreas de dados compartilhadas, e a possibilidade de compilação separada (METCALF, 2011, p.1).

No começo dos anos 1960, o *Fortran* passou a ser a primeira linguagem de programação de alto nível amplamente utilizada, aumentando sua aplicação em universidades, laboratórios estatais e institutos de pesquisa industrial (PUGH, 1995). Esse crescimento atraiu novos usuários para a comunidade *Fortran*, cada um com suas próprias necessidades e expectativas (DODSON e BARTLEY, 2025, p. 8).

Com a consolidação no mercado, o *Fortran* passou por novas atualizações e padronizações que ampliaram suas funcionalidades. Algumas versões que se destacam são o *Fortran* 90 e *Fortran* 95 que introduziram novas capacidades para programação estrutural e modular. No processo de evolução vale destacar o *Fortran* 2003 por ter implantado a programação orientada por objetos. Com as versões 2008, 2018 e a recente 2023, o *Fortran* continuou se modernizando. Isso garante que a linguagem continue firme como uma das principais escolhas para cálculos científicos e computação de alto desempenho.

Capítulo 2

Método de Newton-Raphson

2.1 Equações Transcendentes

Equações transcendentes são equações que envolvem funções como exponenciais, logarítmicas ou trigonométricas e que, em geral, não se pode obter uma solução exata por meio de métodos algébricos convencionais. Por esse motivo, sua resolução costuma depender do uso de métodos numéricos para a determinação aproximada de suas raízes.

2.2 Zeros de funções reais

Definição 2.2.1. Um número real α é um zero(ou raiz) de uma função f, se $f(\alpha) = 0$.

Em alguns casos como por exemplo nas equações polinomiais, os "zeros"das funções podem ser números reais ou complexos, destacamos que neste trabalho abordaremos apenas funções com zeros reais.

Encontrar raízes de equações polinomiais de primeiro e segundo grau não é uma tarefa difícil, visto que existem fórmulas que possibilitam encontrar o zero em função dos coeficientes. No entanto, para equações de graus mais altos e funções mais complexas é praticamente impossível chegar a uma raiz exata. Para isso, recorremos aos métodos numéricos, os quais nos fornecem aproximações necessárias para o que precisamos.

Os métodos numéricos consistem, em sua maioria, no processo iterativo que a partir de uma aproximação inicial, gera uma sequência de resultados que convergem para a solução desejada. Segundo Ruggiero e Lopes 1996:

> A ideia central destes métodos é partir de uma aproximação inicial para a raiz e em seguida refinar essa aproximação através de um processo iterativo. Por isso, os métodos constam de duas fases: Fase I: Localização ou isolamento das raízes, que consiste em obter um intervalo que contém a raiz; Fase II: Refinamento, que consiste em, escolhida aproximações iniciais no intervalo encontrado na Fase I, melhorá-las sucessivamente até se obter uma aproximação para a raiz dentro de uma precisão prefixada (RUGGIERO e LOPES, 1996, p. 29).

Para o processo de localização da raiz, utilizaremos os seguintes resultados:

Teorema 2.2.2. ***Teorema do Valor Intermediário(TVI):*** *Se f é uma função contínua em um intervalo fechado $[a, b]$ e w é um número qualquer entre $f(a)$ e $f(b)$, então existe pelo menos um número c em $[a, b]$, tal que $f(c) = w$.*
A prova desse teorema pode ser vista em [6].

Corolário 2.2.3. Se uma função f atende as condições do **TVI** em um intervalo $[a, b]$ e $f(a)f(b) < 0$, então existe pelo menos um número c em $[a, b]$ tal que $f(c) = 0$.

Vale destacar que sob as hipóteses do TVI, se $f'(x)$ existir e preservar sinal em (a, b), então este intervalo contém um único zero de f.

Para isolar as raízes de $f(x)$ utilizando os resultados anteriores, podemos montar uma tabela com os valores de x e analisar a mudança de sinal em cada caso.

Outro resultado fundamental para o desenvolvimento deste trabalho é o Teorema do Valor Médio, o qual relaciona o comportamento da derivada de uma função com sua variação em um intervalo fechado.

Teorema 2.2.4. ***Teorema do Valor Médio(TVM):*** *Se f é uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b), então existe pelo menos um número c em (a, b) tal que:*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \quad ou \quad f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

A prova desse teorema pode ser vista em [6].

Exemplo 2.2.5. Considere a seguinte equação $x^3 - 9x + 3$:

Aplicando valores para x, temos os seguintes intervalos

x	-9	-6	-3	0	1	2	3
$f(x)$	< 0	< 0	> 0	> 0	< 0	< 0	> 0

Note que f possui raízes nos intervalos [-6,-3], [0,1] e $[2, 3]$. Como f é um polinômio de grau três e os intervalos são disjuntos, essas raízes são únicas em cada intervalo.

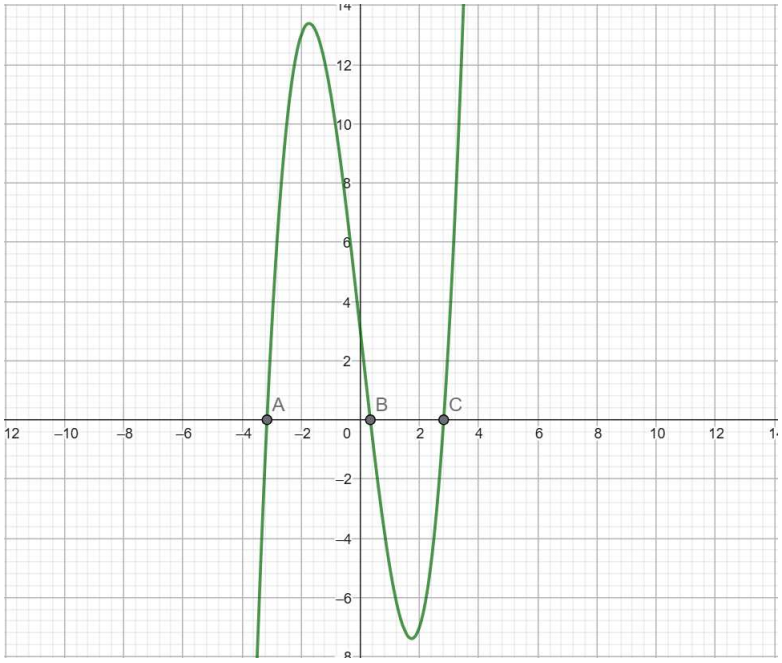


Figura 2.1: Gráfico da função $x^3 - 9x + 3$

Para a segunda fase, damos início ao método iterativo.

Definição 2.2.6. Um método iterativo é uma sequência de instruções que são executadas passo a passo, e algumas são repetidas em ciclos. A execução de cada ciclo recebe o nome de iteração.

A maioria dos procedimentos numéricos fornecem uma sequência de aproximações, cada uma das quais mais precisa que a anterior, de tal modo que a repetição do procedimento fornece uma aproximação a qual difere do valor verdadeiro por alguma tolêrancia pré-fixada (FRANCO, 2006, p. 55).

Com base nas discurssões apresentadas, podemos ilustrar o seguinte diagrama de fluxo:

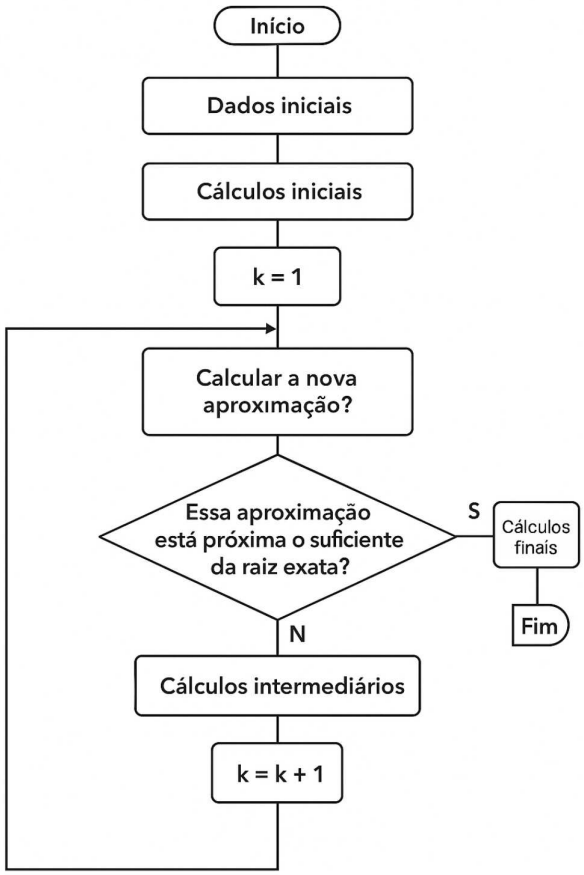


Figura 2.2: Fluxograma do método iterativo. S = sim; N = não; K = iteração
Fonte: RUGGIERO e LOPES (1996, p. 38)

2.3 Critérios de parada

Pelo diagrama acima podemos observar que todo método iterativo para obter raízes busca o seguinte questionamento:

$$x_n \text{ está próxima o suficiente da raiz desejada?}$$

Para obter a resposta, existem duas interpretações para a raiz aproximada:
$\bar{x}$ é raiz aproximada, com precisão ϵ, se:

$(i)|\bar{x} - e| < \epsilon$ ou
$(ii)|f(\bar{x})| < \epsilon$, onde e é uma raiz exata de f.

Suponha que não conhecemos e. Então uma forma de nos aproximarmos de e é reduzindo o intervalo que contém e. Assim, temos:

$$\left.\begin{array}{l} e \in [a,b] \\ \text{e} \\ b-a<\varepsilon \end{array}\right\} \text{com isso, } |x-e|<\epsilon, \forall x \in [a,b].$$

Assim, qualquer elemento de $[a,b]$ pode ser tomado como $\bar{x}$.

Vale destacar que a execução dos métodos numéricos é conduzida de modo a satisfazer pelo menos um dos critérios de parada apresentados. Além disso, em programa computacionais, além do critério de interrupção determinado para cada técnica, é fundamental definir um limite máximo de iterações. Essa abordagem previne que o *software* fique preso em um *"looping"* devido a erros no próprio código ou à inadequação do método selecionado para a situação específica (RUGGIERO e LOPES, 1996, p. 40).

2.4 Método do Ponto Fixo

Antes de discutirmos o Método de Newton-Raphson, é essencial fazermos uma breve apresentação sobre o Método do Ponto Fixo. Isso é importante porque muitos conceitos que aparecem no estudo de Newton se fundamentam nas ideias apresentadas no Método do Ponto Fixo, como a criação de um procedimento iterativo, a definição de funções que são equivalentes e a análise dos critérios de convergência. Portanto, entender o Método do Ponto Fixo, torna mais fácil a formulação do raciocínio necessário e também oferece a base teórica correta para seguir adiante com o presente trabalho.

Além disso, é importante destacar que o Método de Newton-Raphson pode ser interpretado como um caso particular do Método do Ponto Fixo, no qual a função de iteração é escolhida de forma específica como $\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. Essa escolha não é arbitrária, pois visa garantir melhores propriedades de convergência, tornando o método mais eficiente na obtenção das aproximações da raiz.

Definição 2.4.1. O Método do Ponto Fixo consiste na obtenção de uma equação equivalente a equação $f(x) = 0$ e que tenha a forma $x = \varphi(x)$ e a partir de uma aproximação inicial x_0 gerar uma sequência de aproximações para e(raiz) pela relação $x_{k+1} = \varphi(x_k)$. Esta função φ é chamada de função de iteração.

Exemplo 2.4.2. Considere a equação $x^2 + x - 6 = 0$. Note que as funções $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ e φ_4 são funções de iteração da equação .

$\varphi_1(x) = 6 - x^2$; $\qquad$ $\varphi_3(x) = \frac{6}{x} - 1$;
$\varphi_2(x) = \pm\sqrt{6-x}$; $\qquad$ $\varphi_4(x) = \frac{6}{x+1}$.
Considere uma função $A(x)$ tal que $A(e) \neq 0$. Supondo que $f(x) = 0$, temos:

$$A(x) \cdot f(x) = 0 \tag{1}$$

Da definição 2.4.1, podemos escrever $\varphi(x) = x$. Daí

$$\varphi(x) = A(x)f(x) + x \tag{2}$$

A equação (2) é a **forma geral das funções de iterações**.
Note que

$$f(e) = 0 \iff \varphi(e) = e$$

De fato, suponha que $f(e) = 0$. Assim, de $(*)$, temos

$$\varphi(e) = A(e)f(e) + e.$$

Como $f(e) = 0$, temos

$$f(e) = e$$

Reciprocamente, suponha que $\varphi(e) = e$. Assim

$$A(e)f(e) + e = \varphi(e) = e$$

$$A(e)f(e) = 0.$$

Como $A(e) \neq 0$, segue que

$$f(e) = 0.$$

2.5 Convergência do Método do Ponto Fixo

Nosso objetivo é, partindo de um x_0, construir uma sequência $\{x_k\}$ usando a relação $x_{k+1} = \varphi(x_k)$, a qual converge para e. No entanto, veremos que esta convergência não acontece sempre.

Exemplo 2.5.1. Considere a equação $x^2 + x - 6 = 0$ do exemplo 2.4.2.

Solução 2.5.2. Sabemos que as raízes desta equação, são $e_1 = -3$ e $e_2 = 2$.

Vamos considerar, primeiramente, a raiz e_2. Tomando como função de iteração.

$\varphi(x) = 6 - x^2$ e $x_0 = 1,5$; temos

$x_1 = \varphi(x_0) = 6 - 1,5^2 = 3,75$
$x_2 = \varphi(x_1) = 6 - 3,75^2 = -8,0625$

$x_3 = \varphi(x_2) = 6 - (-8,0625)^2 = -59,0039$

Assim, a sequência $\{x_k\}$ obtida por $\varphi(x) = 6 - x^2$ diverge.

Agora, vamos considerar a função de iteração $\varphi(x) = \sqrt{6-x}$ e $x_0 = 1,5$. Assim,

$x_1 = \varphi(x_0) = \sqrt{6-1,5} = 2,1213$
$x_2 = \varphi(x_1) = \sqrt{6-2,1213} = 1,9694$
$x_3 = \varphi(x_2) = \sqrt{6-1,9694} = 2,0077$
$x_4 = \varphi(x_3) = \sqrt{6-2,0077} = 1,9981$
$x_5 = \varphi(x_4) = \sqrt{6-1,9881} = 2,00047$

Portanto, para $\varphi(x) = \sqrt{6-x}$, a sequência $\{x_k\}$ converge para e_2. □

Teorema 2.5.3. *Seja e uma raiz da equação $f(x) = 0$ isolada num intervalo I centrado em e. Seja $\varphi(x)$ uma função de iteração para $f(x) = 0$. Se*

(i) $\varphi(x)$ *e* $\varphi'(x)$ *são contínuas em* I*;*
(ii) $|\varphi'(x)| \leq M < 1$*;*
(iii) $x_0 \in I$*;*

Então a sequência $\{x_k\}$ converge para e.

Prova 2.5.4. Como e é raiz de $f(x) = 0$, temos que $\varphi(e) = e$. Por outro lado, $x_{k+1} = \varphi(x_k)$. Daí

$$\varphi(x_k) - \varphi(e) = x_{k+1} - e \tag{3}$$

Agora, como φ é contínua e diferenciável em I, pelo Teorema do Valor Médio, se $x_k \in I$, existe c_k entre x_k e e, tal que

$$\varphi'(c_k)(x_k - e) = \varphi(x_k) - \varphi(e) \tag{4}$$

Por (3) e (4), temos

$$x_{k+1} - e = \varphi'(c_k)(x_k - e) \tag{5}$$

$\Rightarrow |x_{k+1} - e| = |\varphi'(c_k)| \cdot |x_k - e| < |x_k - e| \Rightarrow |x_{k+1} - e| < |x_k - e|$, pois $|\varphi'(c_k)| < 1$.

Como I é um intervalo centrado em e, existe $\delta > 0$, tal que
$I = (e - \delta, e + \delta)$. Daí
Vamos mostrar, por indução, que $x_k \in I$ para todo k.

Por hipótese, $x_0 \in I$

Suponha que $x_k \in I$, ou seja, $|x_k - e| < \delta$.

De (5), temos:

$|x_{k+1} - e| = |\varphi'(c_k)| \cdot |x_k - e|$

Como c_k está entre x_k e e, temos $c_k \in I$.

Pela hipótese (ii):

$|\varphi'(c_k)| \leq M < 1$. Logo:

$|x_{k+1} - e| \leq M \cdot |x_k - e| < |x_k - e| < \delta$.

Portanto, $|x_{k+1} - e| < \delta$, o que significa $x_{k+1} \in I$. Como $x_0 \in I$, segue que $x_k \in I$.

Finalmente, vamos mostrar que $\lim_{k\to\infty} x_k = e$

Com efeito, por (5), temos

$|x_1 - e| = |\varphi'(c_0)| \cdot |x_0 - e| \leq M \cdot |x_0 - e|$ (c_0 está entre x_0 e e)
$|x_2 - e| = |\varphi'(c_1)| \cdot |x_1 - e| \leq M \cdot (M|x_0 - e|) = M^2 \cdot |x_0 - e|$ (c_1 está entre x_1 e e)
$|x_3 - e| = |\varphi'(c_2)| \cdot |x_2 - e| \leq M \cdot (M^2|x_0 - e|) = M^3 \cdot |x_0 - e|$ (c_2 está entre x_2 e e)
$\vdots$

$$|x_k - e| \leq M^k |x_0 - e| \tag{6}$$

Aplicando o limite em (6), temos

$$0 \leq \lim_{k\to\infty} |x_k - e| \leq \lim_{k\to\infty} M^k |x_0 - e|$$

Como $0 \leq M < 1$, segue que $\lim_{k\to\infty} M^k |x_0 - e| = 0$

Assim

$\lim_{k\to\infty} |x_k - e| = 0 \Rightarrow \lim_{k\to\infty} (x_k - e) = 0 \Rightarrow \lim_{k\to\infty} x_k = e$ □

Exemplo 2.5.5. Considere a função de iteração $\varphi(x) = \sqrt{6-x}$ da equação $x^2+x-6 = 0$. Vamos verificar as hipóteses do teorema anterior:

Temos que

$$\varphi(x) = (6-x)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \varphi'(x) = (-1) \cdot \tfrac{1}{2} \cdot (6-x)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \varphi'(x) = -\tfrac{1}{2\sqrt{6-x}}$$

Além disso, temos

φ é contínua em $\{x \in \mathbb{R}; x \leq 6\}$
φ' é contínua em $\{x \in \mathbb{R}; x < 6\}$

Tomando $I = (-\infty, 6)$, φ e φ' serão contínuas em I.

Por outro lado

$$|\varphi'(x)| < 1 \Rightarrow \left|-\tfrac{1}{2\sqrt{6-x}}\right| < 1 \Rightarrow \tfrac{1}{2\sqrt{6-x}} < 1 \Rightarrow \sqrt{6-x} > \tfrac{1}{2}$$

$$\sqrt{6-x} > \tfrac{1}{2} \Leftrightarrow (\sqrt{6-x})^2 > \tfrac{1}{4} \Leftrightarrow |6-x| > \tfrac{1}{4}$$

Se $6-x > \frac{1}{4}$:

$$6-x > \tfrac{1}{4} \Leftrightarrow -x > -6+0,25 \Rightarrow -x > -5,75 \Rightarrow x < 5,75.$$

Se $6-x < -\frac{1}{4}$:

$$6-x < -\tfrac{1}{4} \Leftrightarrow -x < -0,25-6 \Rightarrow -x < -6,25 \Rightarrow x > 6,25.$$

No entanto, é preciso lembrar que $\varphi(x) = \sqrt{6-x}$ só está definida para $x \leq 6$. O segundo caso, $x > 6,25$, está fora do domínio de φ, pois para $x > 6$ a raiz quadrada não está definida em $\mathbb{R}$. Portanto, a única condição válida é $x < 5,75$.

Finalmente, note que é possível encontrar um intervalo I' que satisfaça as hipóteses do teorema anterior. De fato, considere $I' = (0,4)$, as hipóteses são satisfeitas e $x_0 = 1,5 \in I'$.

2.6 Método de Newton-Raphson

Ao estudarmos o Método do Ponto Fixo, observamos que:

i) Uma das condições necessárias para a convergência é que

$$|\varphi'(x)| \leq M < 1, \quad \forall x \in I,$$

em que I é um intervalo centrado na raiz;

ii) A taxa de convergência do método é tanto maior quanto menor for o valor de $|\varphi'(\xi)|$. Essa relação será justificada adiante, por meio da análise do erro.

O método de Newton tem como objetivo garantir e acelerar a convergência do Método do Ponto Fixo. Para isso, o método define a função de iteração $\varphi(x)$ de forma que $\varphi'(\xi) = 0$.

Dada a equação $f(x) = 0$ e considerando a forma geral da função de iteração $\varphi(x)$, buscamos determinar uma função $A(x)$ tal que $\varphi'(\xi) = 0$, onde ξ representa a raiz da equação.

Essa condição é desejável porque, como será mostrado adiante, a velocidade de convergência do método do ponto fixo está diretamente relacionada ao valor de $|\varphi'(\xi)|$. Quanto menor for esse valor, mais rápida é a convergência. O caso ideal ocorre quando $\varphi'(\xi) = 0$ o que pode elevar a ordem de convergência do método. Considere a sequência definida por

$$x_{k+1} = \varphi(x_k),$$

onde ξ é ponto fixo da função φ, isto é, $\xi = \varphi(\xi)$. Pelo Teorema do Valor Médio, existe um ponto c_k entre x_k e ξ tal que

$$x_{k+1} - \xi = \varphi'(c_k)(x_k - \xi).$$

Dividindo ambos os lados por $x_k - \xi$, obtém-se

$$\frac{x_{k+1} - \xi}{x_k - \xi} = \varphi'(c_k).$$

Tomando o limite quando $k \to \infty$ e supondo a convergência da sequência $\{x_k\}$ para ξ, segue que $c_k \to \xi$ e, portanto,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x_{k+1} - \xi}{x_k - \xi} = \varphi'(\xi).$$

Assim, ao impor a condição $\varphi'(\xi) = 0$, garantimos que o erro tende a zero de forma mais rápida, caracterizando uma convergência de ordem superior.

Com base nessa situação, estabelece-se a função $A(x)$ de modo que a igualdade $\varphi'(\xi) = 0$ seja satisfeita.

$$\varphi(x) = x + A(x)f(x).$$

Derivando em relação a x:

$$\varphi'(x) = 1 + A'(x)f(x) + A(x)f'(x).$$

Logo,

$$\varphi'(\xi) = 1 + A'(\xi)f(\xi) + A(\xi)f'(\xi)$$

Como desejamos que $\varphi'(\xi) = 0$, temos:

$$\varphi'(\xi) = 0 \iff 1 + A(\xi)f'(\xi) = 0 \Rightarrow A(\xi) = -\frac{1}{f'(\xi)}.$$

Portanto, tomamos $A(x) = -\dfrac{1}{f'(x)}$.
Dessa forma, a função de iteração é dada por:

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}, \tag{7}$$

a qual satisfaz $\varphi'(\xi) = 0$, como pode ser verificado

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{f'(x)f'(x) - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} = 1 - \frac{[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} =$$

$$= 1 - 1 + \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} \Rightarrow \varphi'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

Como $f(\xi) = 0$, concluimos que $\varphi'(\xi) = 0$ (desde que $f'(\xi) \neq 0$).
Assim, escolhido um valor inicial x_0, a sequência $\{x_k\}$ é definida por:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

O método do ponto fixo que considera $(*)$ como função de iteração é chamado de **Método de Newton**.

Teorema 2.6.1. *Sejam $f(x)$, $f'(x)$ e $f''(x)$ funções contínuas num intervalo I que contém a raiz e e tal que $f(x) = 0$. Suponha que $f'(e) \neq 0$. Então existe um intervalo $\bar{I} \subset I$, contendo a raiz e, tal que se $x_0 \in I$, a sequência $\{x_k\}$ gerada pela fórmula $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ converge para a raiz e.*

Demonstração 2.6.2. Como o método de Newton é um método do ponto fixo, precisamos apenas mostrar que existe um interavalo $\bar{\mathrm{I}} \subset I$ centrado em e, tal que:

(i) $\varphi(x)$ e $\varphi'(x)$ são contínuas em $\bar{\text{I}}$;
(ii) $|\varphi'(x)| \leq M < 1, \forall x \in \bar{\text{I}}$.

Temos que:

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \text{ e } \varphi'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

Como $f'(e) \neq 0$ e $f'(x)$ é contínua em I, é possível obter $I_1 \subset I$ tal que $f'(x) \neq 0, \forall x \in I_1$.

Assim, $f(x), f'(x)$ e $f''(x)$ são contínuas em $I_1 \subset I$ e $f'(x) \neq 0$ em $I_1 \subset I$. Portanto, φ e φ' são contínuas em I_1. Finalmente, como φ' é contínua em I_1 e $\varphi'(e) = 0$, podemos encontrar um intervalo $I_2 \subset I$, centrado em e, tal que $|\varphi'(x)| < 1, \forall x \in I_2$.

Assim, tomando $x_0 \in I_1$ e $\bar{\text{I}} = I_2$, o resultado segue.

□

2.6.1 Algoritmo do método

Seja a equação $f(x) = 0$.

1) Dados iniciais:
a) x_0: aproximação inicial;
b)ϵ_1 e ϵ_2 : precisões

2) Se $|f(x_0)| < \epsilon_1$, faça $\bar{x} = x_0$. FIM.

3) k = 1

4) $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

5) $\left.\begin{array}{l} \text{Se } |f(x_1)| < \epsilon_1 \\ \text{ou se } |x_1 - x_0| < \epsilon_2 \end{array}\right\}$ faça $\bar{x} = x_1$. FIM.

6) $x_0 = x_1$

7) $k = k + 1$

Volte ao passo 4.

Exemplo 2.6.3. Considere a função $f(x) = sen(x) - x^2$. Admitindo $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-2}$, encontre uma raiz aproximada para f em $(0, 1]$.

Solução 2.6.4. Fazendo $x_0 = 0,6$; temos

$\mathrm{x}_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0,6 - \frac{sen(0,6)-(0,6)^2}{cos(0,6)-2\cdot(0,6)} = 1,1462$
Assim,
$|f(x_1)| = |sen(0,6) - (0,6)^2| = 0.4026 > \epsilon_1$

$|x_1 - x_0| = |1,1462 - 0,6| = 0,5462 > \epsilon_2$

$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1,1462 - \frac{sen(1,1462)-(1,1462)^2}{cos(1,1462)-2\cdot(1,1462)} = 0,9321$

$|f(x_2)| = |sen(0,9321) - (0,9321)^2| = 0,065999 > \epsilon_1$

$|x_2 - x_1| = |0,9321 - 1,1462| = 0,2140 > \epsilon_2$

$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 0,9321 - \frac{sen(0,9321)-(0,9321)^2}{cos(0,9321)-2\cdot(0,9321)} = 0.8801$

$|f(x_3)| = |sen(0,8801) - (0,8801)^2| = 0,0037771 < \epsilon_1$

Logo,

$\bar{\mathrm{x}}= 0,8801$ □

2.7 Limitações do método

Apesar do Método de Newton ser extremamente eficiente em inúmeras situações, o procedimento é bastante dependente do valor inicial selecionado. Uma seleção inadequada do x_0 pode levar a uma convergência lenta ou até a uma convergência para uma solução diferente da esperada. Portanto, muitas vezes é essencial examinar minuciosamente o ponto inicial ou fazer múltiplas tentativas com diferentes valores. Além disso, se $f'(x) = 0$ perto da raiz ou exatamente nela, a abordagem não funciona, pois acontece uma divisão por zero. Da mesma forma, se a função tiver singularidades ou pontos de mudança próximos da raiz, a convergência pode não se realizar. Vale destacar também que quando uma função tem múltiplas raízes, o Método de Newton-Raphson pode levar a diferentes raízes conforme o valor inicial escolhido (GAWADE et al., 2024, p. 732).

Exemplo 2.7.1. Considere a função $x^3 - 2x + 2$. Admitindo $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-2}$, encontre uma raiz aproximada para f em $[-2, -1]$

Solução 2.7.2. Se tomarmos $x_0 = 0$; temos
$f'(x) = 3x - 2$ e
$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0 - \frac{0^3 - 2 \cdot 0 + 2}{3 \cdot 0 - 2} = 1$
Assim
$|f(x_1)| = |1^3 - 2 \cdot 1 + 2| = 1 > \epsilon_1$

$|x_1 - x_0| = |1 - 0| = 1 > \epsilon_2$

$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1 - \frac{1^3 - 2 \cdot 1 + 2}{3 \cdot 1 - 2} = 0$

$|f(x_2)| = |0^3 - 2 \cdot 0 + 2| = 0 > \epsilon_2$

$|x_2 - x_1| = |0 - 1| = 1 > \epsilon_2$

$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 0 - \frac{0}{-2} = 0$

A partir daí, a iteração do método entra em um ciclo oscilatório entre os valores 0 e 1, jamais alcançando a raiz. Este fenômeno evidencia que, mesmo para funções polinomiais simples, a seleção do ponto inicial é decisiva e requer análise preliminar, como a inspeção gráfica ou o conhecimento do domínio do problema.

□

Agora vejamos um exemplo quando a derivada se anula.

Exemplo 2.7.3. Considere a função $x^3 - 3x^2 + 4$, cuja derivada é $3x^2 - 6x$, temos que $f'(0) = 0$ e $f'(2) = 0$. Se uma iteração x_n coincidir ou estiver suficientemente próxima de 0 ou 2, o termo $\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ tenderá ao infinito, causando uma falha numérica na divisão por zero ou uma grande perturbação que afasta a sequência da região de convergência.
□

Capítulo 3

Algoritmo

No presente capítulo, será apresentado o algoritmo criado na linguagem do *Fortran* para a aplicação do Método de Newton-Raphson, visando calcular de forma numérica as raízes de equações transcendentes. Com base nos conceitos teóricos abordados nos capítulos anteriores, a seguir se descreve a configuração computacional do método, especificando suas fases, critérios de parada e pontos ligados à convergência. A implementação foi estruturada de forma modular, sendo organizada em quatro arquivos distintos. Tal divisão foi adotada com o objetivo de tornar o código mais claro, reutilizável e de fácil manutenção. O desenvolvimento e a execução do programa foram realizados no ambiente *Visual Studio* 2012, utilizando o compilador *Intel Visual Fortran Composer XE* 2013, compatível com padrões modernos da linguagem, como *Fortran* 2003 e *Fortran* 2008.

A seguir, apresenta-se o código-fonte completo do programa.

```
program newton
doubleprecision tol1,tol2,a,b,c,z,df,f,x,X0
INTEGER nummax,cont

WRITE(*,*)"ESCREVA O NÚMERO DE ITERAÇÕES:"
READ(*,*) nummax
WRITE(*,*)"ESCREVA O ERRO 1:"
READ(*,*) tol1
WRITE(*,*)"ESCREVA O ERRO 2:"
READ(*,*) tol2
WRITE(*,*)"ESCREVA A APROXIMAÇÃO INICIAL X0:"
READ(*,*) X0

OPEN(UNIT=1,FILE='DADOS.DAT')
cont=0
DO WHILE(cont /= nummax)
cont=cont+1
```

```
z=x0-(f(x0))/(df(x0))
!WRITE(1,*)f(x0)


IF (abs(z-x0)¡tol1.or.abs(f(z))¡tol2) THEN


    WRITE(*,*)”
    WRITE(1,*)”
    WRITE(*,*)’ITERAÇÃO = ’,CONT
    WRITE(1,*)’ITERAÇÃO = ’,CONT
    WRITE(*,*)”
    WRITE(1,*)”
    WRITE(*,*)’ERRO 1’,abs(z-x0)
    WRITE(1,*)’ERRO 1’,abs(z-x0)
    WRITE(*,*)”
    WRITE(1,*)”
    WRITE(*,*)’ERRO 2’,abs(f(z))
    WRITE(1,*)’ERRO 2’,abs(f(z))
    WRITE(*,*)”
    WRITE(1,*)”
    WRITE(*,*)”RAIZ APROXIMADA:”,z
    WRITE(1,*)”RAIZ APROXIMADA:”,z
    WRITE(*,*)”
    WRITE(1,*)”
    WRITE(*,*)’VALOR DA FUNÇÃO NA RAIZ APROXIMADA:’, f(z)
    WRITE(1,*)’VALOR DA FUNÇÃO NA RAIZ APROXIMADA:’, f(z)
    WRITE(*,*)”
    WRITE(1,*)”
    WRITE(*,*)’!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!’
    WRITE(1,*)’!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!’
    WRITE(*,*)”A RAIZ APROXIMADA É:”,z
    CLOSE(UNIT=1)

    STOP

END IF
```

```
WRITE(*,*)”
WRITE(1,*)”
WRITE(*,*)’ITERAÇÃO = ’,CONT
WRITE(1,*)’ITERAÇÃO = ’,CONT
WRITE(*,*)”
WRITE(1,*)”
WRITE(*,*)’ERRO 1’,abs(z-x0)
WRITE(1,*)’ERRO 1’,abs(z-x0)
WRITE(*,*)”
WRITE(1,*)”
WRITE(*,*)’ERRO 2’,abs(f(z))
WRITE(1,*)’ERRO 2’,abs(f(z))
WRITE(*,*)”
WRITE(1,*)”
WRITE(*,*)”RAIZ APROXIMADA:”,z
WRITE(1,*)”RAIZ APROXIMADA:”,z
WRITE(*,*)”
WRITE(1,*)”
WRITE(*,*)’VALOR DA FUNÇÃO NA RAIZ APROXIMADA:’, f(z)
WRITE(1,*)’VALOR DA FUNÇÃO NA RAIZ APROXIMADA:’, f(z)
WRITE(*,*)”
WRITE(1,*)”
WRITE(*,*)’!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!’
WRITE(1,*)’!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!’

x0=z

END DO

CLOSE(UNIT=1)

STOP

END PROGRAM

function df(x)
```

```
doubleprecision df,f,x

    df=(f(x+1d-12)-f(x))/1d-12

return

end function
function f(x)
doubleprecision f,x

    f=x**3-3*x**2+4

return

end function
```

3.1 Descrição do algoritmo

O primeiro arquivo, denominado *Newton.f90*, contém o programa principal responsável pela execução do Método de Newton-Raphson. Nele são declaradas as variáveis utilizadas no processo iterativo, incluindo as tolerâncias adotadas, o número máximo de iterações e a aproximação inicial.:

```
program newton
doubleprecision tol1,tol2,a,b,c,z,df,f,x,X0
INTEGER nummax,cont

WRITE(*,*)"ESCREVA O NÚMERO DE ITERAÇÕES:"
READ(*,*) nummax
WRITE(*,*)"ESCREVA O ERRO 1:"
READ(*,*) tol1
WRITE(*,*)"ESCREVA O ERRO 2:"
READ(*,*) tol2
WRITE(*,*)"ESCREVA A APROXIMAÇÃO INICIAL X0:"
READ(*,*) X0

OPEN(UNIT=1,FILE='DADOS.DAT')
```

```
cont=0
DO WHILE(cont /= nummax)
cont=cont+1
z=x0-(f(x0))/(df(x0))
!WRITE(1,*)f(x0)


IF (abs(z-x0)¡tol1.or.abs(f(z))¡tol2) THEN


    WRITE(*,*)”
    WRITE(1,*)”
    WRITE(*,*)’ITERAÇÃO = ’,CONT
    WRITE(1,*)’ITERAÇÃO = ’,CONT
    WRITE(*,*)”
    WRITE(1,*)”
    WRITE(*,*)’ERRO 1’,abs(z-x0)
    WRITE(1,*)’ERRO 1’,abs(z-x0)
    WRITE(*,*)”
    WRITE(1,*)”
    WRITE(*,*)’ERRO 2’,abs(f(z))
    WRITE(1,*)’ERRO 2’,abs(f(z))
    WRITE(*,*)”
    WRITE(1,*)”
    WRITE(*,*)”RAIZ APROXIMADA:”,z
    WRITE(1,*)”RAIZ APROXIMADA:”,z
    WRITE(*,*)”
    WRITE(1,*)”
    WRITE(*,*)’VALOR DA FUNÇÃO NA RAIZ APROXIMADA:’, f(z)
    WRITE(1,*)’VALOR DA FUNÇÃO NA RAIZ APROXIMADA:’, f(z)
    WRITE(*,*)”
    WRITE(1,*)”
    WRITE(*,*)’!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!’
    WRITE(1,*)’!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!’
    WRITE(*,*)”A RAIZ APROXIMADA É:”,z
    CLOSE(UNIT=1)
```

```
    STOP

END IF

WRITE(*,*)”
WRITE(1,*)”
WRITE(*,*)’ITERAÇÃO = ’,CONT
WRITE(1,*)’ITERAÇÃO = ’,CONT
WRITE(*,*)”
WRITE(1,*)”
WRITE(*,*)’ERRO 1’,abs(z-x0)
WRITE(1,*)’ERRO 1’,abs(z-x0)
WRITE(*,*)”
WRITE(1,*)”
WRITE(*,*)’ERRO 2’,abs(f(z))
WRITE(1,*)’ERRO 2’,abs(f(z))
WRITE(*,*)”
WRITE(1,*)”
WRITE(*,*)”RAIZ APROXIMADA:”,z
WRITE(1,*)”RAIZ APROXIMADA:”,z
WRITE(*,*)”
WRITE(1,*)”
WRITE(*,*)’VALOR DA FUNÇÃO NA RAIZ APROXIMADA:’, f(z)
WRITE(1,*)’VALOR DA FUNÇÃO NA RAIZ APROXIMADA:’, f(z)
WRITE(*,*)”
WRITE(1,*)”
WRITE(*,*)’!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!’
WRITE(1,*)’!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!’

x0=z

END DO

CLOSE(UNIT=1)

STOP
```

```
END PROGRAM
```

O segundo arquivo, *Derivada.f90*, contém a implementação da função responsável pelo cálculo da derivada. Como a linguagem *Fortran* não realiza derivação simbólica automaticamente, optamos por utilizar uma aproximação numérica baseada na definição de derivada,

```
function df(x)
doubleprecision df,f,x

    df=(f(x+1d-12)-f(x))/1d-12

return

end function
```

Em seguida, o arquivo *Funcao.f90* contém a definição da função $f(x)$ cuja raiz se deseja determinar. Essa separação torna o código mais modular, possibilitando a alteração da função analisada sem necessidade de modificar a estrutura principal do algoritmo.

```
function f(x)
doubleprecision f,x

    f=x**3-3*x**2+4

return

end function
```

Por fim, o arquivo *DADOS.DAT* é gerado durante a execução do programa e tem como finalidade armazenar os resultados de cada iteração, incluindo número de iterações, erros calculados, valor da raiz aproximada e o valor da função no ponto obtido. Esse registro permite acompanhar o comportamento do método e analisar sua convergência.

O fluxograma a seguir apresenta, de forma resumida, a sequência lógica de execução do algoritmo, destacando as etapas principais do processo iterativo e o fluxo de controle

desde a entrada dos dados até a obtenção do resultado final. Sua finalidade é facilitar a visualização do funcionamento geral do método, complementando a descrição anteriormente apresentada.

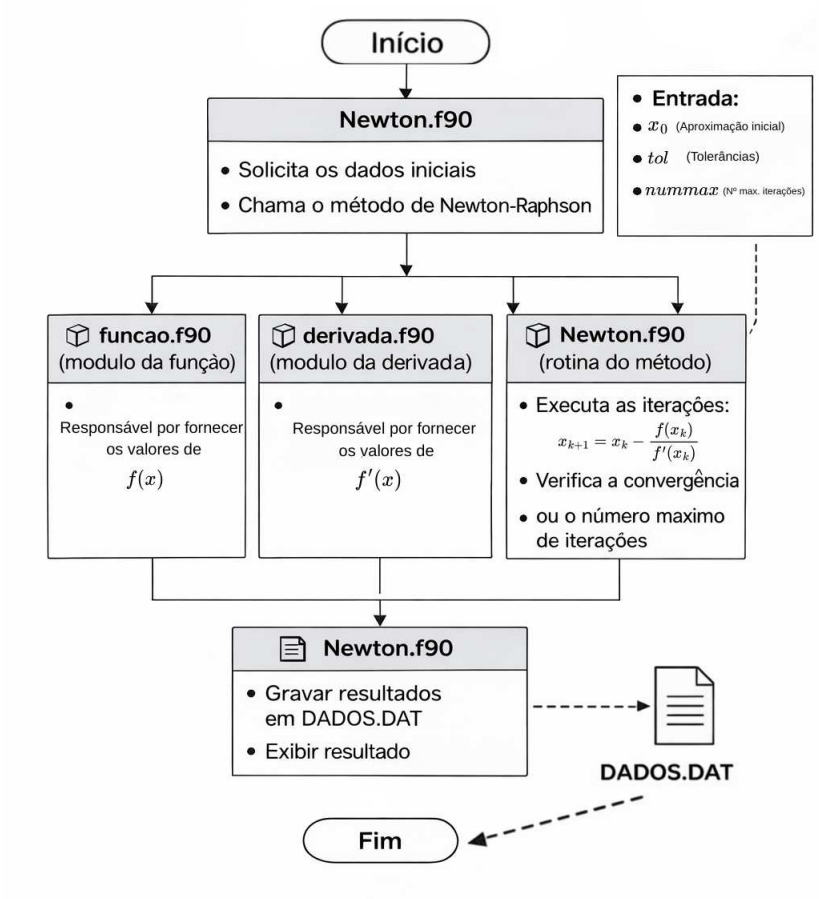


Figura 3.1: Fluxograma do algoritmo

3.2 Ánalise de convergência utilizando o algoritmo

Retornando a função do **Exemplo 2.7.3**, agora será realizada uma série de testes numéricos com a finalidade de demonstrar situações práticas em que o Método de Newton-Raphson pode não funcionar adequadamente.

A análise a seguir tem como objetivo mostrar de forma prática cenários em que a convergência do método não são atendidas, especialmente quando a derivada da função é zero ou apresenta valores muito próximos de zero.

Exemplo 3.2.1. Partindo de uma análise gráfica para encontrar as raízes, temos:

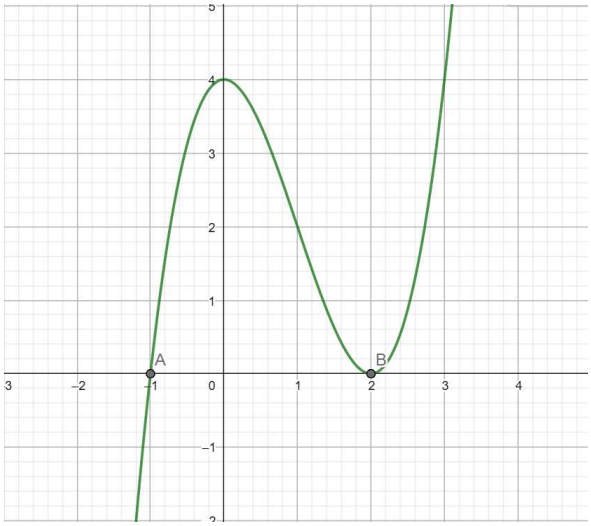


Figura 3.2: Gráfico do exemplo 2.7.3

Considere, inicialmente, a escolha da aproximação inicial $x_0 = 0,5$ adotamos as tolerâncias $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-5}$. Sob essas circunstâncias, realizamos a implementação do algoritmo para examinar o comportamento da sequência iterativa gerada pelo método.

```
ITERAÇÃO =            1

ERRO 1   1.50016272625103

ERRO 2  7.944380620017455E-008

RAIZ APROXIMADA:   2.00016272625103

VALOR DA FUNÇÃO NA RAIZ APROXIMADA:  7.944380620017455E-008

!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
```

Figura 3.3: Saída do algoritmo considerando $x_0 = 0,5, \epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-5}$

Note que apenas uma iteração foi necessária para chegarmos a raiz desejada. Agora refazemos o teste com as mesmas circustâncias e aproximação inicial $x_0 = 1$:

```
ITERAÇÃO =            9

ERRO 1  1.189393332857058E-003

ERRO 2  3.1924415511142OOE-006

RAIZ APROXIMADA:   1.99896824746719

VALOR DA FUNÇÃO NA RAIZ APROXIMADA:  3.192441551114200E-006

!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
```

Figura 3.4: Saída do algoritmo considerando $x_0 = 1, \epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-5}$

Perceba que ao tormamos uma aproximação inicial mais próxima de 2, a con-

vergência se torna mais lenta. Tal comportamento está relacionado às características locais da função e de sua derivada na vizinhança considerada. Agora faremos o teste com a partindo de $x_0 = 1,8$.

```
ITERAÇÃO =           9

ERRO 1  1.189393332857058E-003

ERRO 2  3.192441551114200E-006

RAIZ APROXIMADA:   1.99896824746719

VALOR DA FUNÇÃO NA RAIZ APROXIMADA:  3.192441551114200E-006

!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
```

Figura 3.5: Saída do algoritmo considerando $x_0 = 1,8, \epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-5}$

A partir da análise dos resultados obtidos para $x_0 = 1$ e $x_0 = 1,8$ observamos que, ao considerar aproximações iniciais pertencentes ao intervalo $[1, 2)$, o método passa a exigir o mesmo número de iterações para satisfazer os critérios de parada estabelecidos. Tal comportamento sugere que, nessa região, a dinâmica da função e de sua derivada conduz a um padrão semelhante de convergência.

Por outro lado, se usarmos $x_0 = 2$ como ponto de partida, o método falha. Isso acontece porque a derivada da função nesse valor é zero (ou muito próxima disso). Como a fórmula do Método de Newton-Raphson exige uma divisão pela derivada, o cálculo se torna matematicamente impossível.

```
ITERAÇÃO =         100

ERRO 1                   NaN

ERRO 2                   NaN

RAIZ APROXIMADA:                  NaN

VALOR DA FUNÇÃO NA RAIZ APROXIMADA:                  NaN
```

Figura 3.6: Saída do algoritmo considerando $x_0 = 2, \epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-5}$

Além disso, é relevante analisar o comportamento do método para aproximações iniciais que se aproximam de 0 pela esquerda. Seguindo as mesmas tolerâncias, considere $x_0 = -1$:

```
ITERAÇÃO =           1

ERRO 1  0.000000000000000E+000

ERRO 2  0.000000000000000E+000

RAIZ APROXIMADA:  -1.00000000000000

VALOR DA FUNÇÃO NA RAIZ APROXIMADA:  0.000000000000000E+000

!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
```

Figura 3.7: Saída do algoritmo considerando $x_0 = -1, \epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-5}$

Observamos que, para $x_0 = -1$, o método converge para a raiz desejada em apenas uma iteração, satisfazendo imediatamente os critérios de parada estabelecidos. Contudo, ao chegarmos mais próximo de 0, a convergência tornou-se progressivamente mais lenta. Considere $x_0 = -0,05$.

```
ITERAÇÃO =          10

ERRO 1  7.003531882654457E-006

ERRO 2  5.309215289628355E-009

RAIZ APROXIMADA:  -1.00000000058991

VALOR DA FUNÇÃO NA RAIZ APROXIMADA: -5.309215289628355E-009

!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
```

Figura 3.8: Saída do algoritmo considerando $x_0 = -0,05, \epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-5}$

Notou-se que o número de iterações aumenta significativamente quando comparado ao caso $x_0 = -1$. Esses experimentos numéricos evidenciam que a escolha da aproximação inicial exerce influência decisiva no desempenho do método de Newton-Raphson. Dependendo da região considerada, o método pode apresentar convergência rápida, convergência lenta ou até mesmo falhar, como observado anteriormente no caso em que a derivada se anula. Assim, torna-se fundamental uma análise prévia da função antes da aplicação do algoritmo, a fim de garantir maior eficiência e robustez no processo iterativo.

3.2.1 Teste com função transcendente

Para avaliar a robustez do algoritmo, aplicamos o Método de Newton-Raphson à função $f(x) = cos(x) - x$. Diferente dos exemplos anteriores, esta equação não possui solução analítica elementar.

Exemplo 3.2.2. Considere a função $f(x) = cos(x) - x$. Admitindo $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-5}$ encontre uma raiz aproximada para f.

Partindo de uma ánalise gráfica para encontrar as raízes, temos:

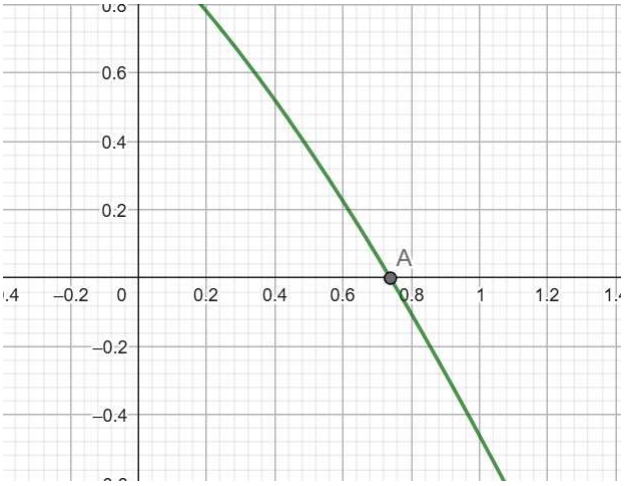


Figura 3.9: Gráfico da função $cos(x) - x$

Considere, inicialmente, a aproximação inicial $x_0 = 0,5$. A aplicação do algoritmo, sob as tolerâncias estabelecidas, resulta na convergência em apenas 3 iterações evidenciando a eficiência do método mesmo quando aplicado a funções de natureza trigonométrica. Esse resultado destaca a rapidez de convergência característica do Método de Newton-Raphson, especialmente quando a aproximação inicial é escolhida de forma adequada.

```
ITERAÇÃO =            3

ERRO 1   5.633116706726948E-005

ERRO 2   1.597739274217247E-009

RAIZ APROXIMADA:   0.739085134169826

VALOR DA FUNÇÃO NA RAIZ APROXIMADA: -1.597739274217247E-009
```

Figura 3.10: Saída do algoritmo considerando $x_0 = 0,5, \epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-5}$

Além disso, o experimento reforça o grande potencial do método na resolução de equações transcendentes, para as quais, em geral, não se dispõe de soluções analíticas explícitas. Nesses casos, métodos numéricos tornam-se ferramentas indispensáveis, e o Método de Newton-Raphson se sobressai por sua precisão e velocidade de convergência. Assim, quando bem aplicado e com condições favoráveis, o método se mostra extremamente eficaz na obtenção de aproximações confiáveis para raízes de funções transcendentes.

3.3 Comparação com o Método da Falsa Posição

Com o objetivo de enriquecer a análise numérica realizada neste capítulo, será apresentada a seguir uma comparação entre a convergência do Método de Newton-Raphson e o método da Falsa Posição, ambos aplicados à mesma equação e sob os mesmos critérios de parada.

Ao contrário do Método de Newton-Raphson, este procedimento não necessita do cálculo da derivada da função, confiando apenas na análise da função em dois pontos que definem um intervalo onde há alteração de sinal.

Definição 3.3.1. Se $f(x)$ é uma função contínua num intervalo $[a, b]$ e tal que $f(a)f(b) < 0$, definimos x_0 como:

$$x_0 = \frac{a_0 f(b_0) - b_0 f(a_0)}{f(b_0) - f(a_0)}$$

A prova da convergência desse método pode ser vista em [12].

Exemplo 3.3.2. Neste exemplo, utilizaremos novamente a função do **Exemplo 2.7.3**. Para esse teste utilizaremos o intervalo $I = [-2, 3]$, e tolerâncias $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-5}$.

```
ITERAÇÃO =            1

ERRO 1   4.00000000000000

ERRO 2  0.000000000000000E+000

RAIZ APROXIMADA:   2.00000000000000

VALOR DA FUNÇÃO NA RAIZ APROXIMADA:  0.000000000000000E+000

!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
```

Figura 3.11: Saída do algoritmo considerando $I = [-2, 3], \epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-5}$

Observou-se que, embora o método da Falsa Posição apresente convergência mais lenta quando comparado ao Método de Newton-Raphson, neste caso específico ele se mostra mais adequado. Isso ocorre porque o Método de Newton enfrenta dificuldades associadas à anulação da derivada em determinados pontos, o que pode comprometer sua aplicabilidade.

Assim, a comparação revela que a seleção do método numérico precisa considerar não apenas a taxa de convergência, mas também as propriedades estruturais da função em questão.

Conclusão

Neste trabalho, foi realizado uma abordagem teórica e computacional do Método de Newton-Raphson, destacando sua eficiência e limitações. Inicialmente, foi feito um levantamento histórico acerca dos métodos numéricos e a importância de Isaac Newton e Joseph Raphson para a consolidação do método, bem como foi mostrado a evolução da linguagem de programação *Fortran*, escolhida para a implementação do algoritmo.

A fundamentação teórica apresentou conceitos essenciais para implementação do método como funções transcendentes, zeros de funções, critérios de parada, bem como o Método do Ponto fixo e o estudo de sua convergência. A partir dessa base, foi possível deduzir o método iterativo de Newton, suas propriedades, suas limitações e evidenciar que sob hipóteses adequadas, o método se torna um dos mais eficientes para localizar raízes.

A implementação do algoritmo em *Fortran* permitiu verificar, na prática, o comportamento do método diante de diferentes escolhas de aproximação inicial e tolerâncias estabelecidas. Os experimentos executados mostraram que, em condições teóricas adequadas, o método se aproxima rapidamente de uma solução em um número reduzido de iterações. Em contrapartida, também foram notadas circunstâncias em que a seleção inadequada da aproximação inicial ou a anulação da derivada prejudicaram a convergência, enfatizando as restrições abordadas durante o texto.

A comparação com o Método da Falsa Posição, proporcionou uma análise adicional, mostrando que mesmo o método de newton sendo eficiente e na maioria dos casos ser mais rápido, há situações em que precisamos usar um método diferente, como o Método da Falsa Posição. Assim, em cenários onde a função apresenta comportamentos oscilatórios, derivadas nulas ou quando não se tem uma estimativa inicial confiável, a garantia de convergência da Falsa Posição supera a vantagem da velocidade de Newton, assegurando que a solução seja encontrada sem o risco de divergência do sistema.

Dessa forma, podemos concluir que o Método de Newton-Raphson é uma ferramenta muito importante para a matemática aplicada, especialmente quando utilizado junto com recursos computacionais. O algoritmo desenvolvido neste trabalho evidencia a importância da integração entre teoria matemática e implementação computacional, contribuindo para a compreensão dos métodos iterativos e para sua aplicação prática na resolução de problemas envolvendo equações não lineares.

Referências Bibliográficas

[1] AMARAL, C.; SOUZA, M.; CATALAN, T. Um estudo do Método de Newton-Raphson. **Revista Eletrônica Matemática e Estatística em Foco**, Uberlândia, v. 3, n. 1, p. 65-72, maio 2015. Disponível em: `https://seer.ufu.br/index.php/matematicaeestatisticaemfoco/article/view/24627` Acesso em: 15 out. 2025.

[2] BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D.; BURDEN, A. M. **Análise numérica. Tradução da 10. ed. norte-americana**. São Paulo: Cengage Learning, 2016. 896 p.

[3] DODSON, S.; BARTLEY, J. The paper behind the program: a documentary history of FORTRAN. **Journal of Documentation**, 2025. Disponível em: https://www.emerald.com/jd/article-pdf/81/7/464/10382419/jd-08-2025-0213en.pdf. Acesso em: 20 jan. 2026.

[4] FRANCO, N. B. **Cálculo Numérico**. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006. 505 p.

[5] GAWADE, S. *et al.* The Newton-Raphson Method: a detailed analysis. **International Journal For Research In Applied Science And Engineering Technology**, [S.L.], v. 12, n. 11, p. 729-734, 30 nov. 2024. International Journal for Research in Applied Science and Engineering Technology (IJRASET). Disponível em: `http://dx.doi.org/10.22214/ijraset.2024.65147`. Acesso em: 10 nov. 2025.

[6] GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de cálculo**. Rio de Janeiro: LTC, 2001.

[7] MACHADO, I. A.; ALVES, R. R. Método de Newton. **Revista Eletrônica de Educação da Faculdade Araguaia**, Goiânia, v. 4, n. 4, p. 30-45, ago. 2013. Disponível em: `https://sipe.uniaraguaia.edu.br/index.php/REVISTAUNIARAGUAIA/issue/view/Volume%204%20n%C3%82%C2%BA%201`. Acesso em: 16 out. 2025.

[8] METCALF, M. The seven ages of Fortran. **Jornal de Ciência da Computação e Tecnologia**, 2011. Disponível em: https://journal.info.unlp.edu.ar/JCST/article/view/681 . Acesso em: 10 jan. 2026.

[9] METCALF, M.; REID, J.; COHEN, M. **Modern Fortran explained**. Oxford: Oxford University Press, 2011.

[10] PAPAKONSTANTINOU, J. M.; TAPIA, R. A. Origin and Evolution of the Secante Method in One Dimension. **Mathematical Association Of America**, [S. L.], v. 120, n. 6, p. 500-518, jun. 2013. Disponível em: `https://www.jstor.org/stable/10.4169/amer.math.monthly.120.06.500`. Acesso em: 07 out. 2025.

[11] QUEIROGA, F. C. S. **O método de Newton: cálculo de raiz de função através de aproximações sucessivas**. 2018. Monografia (Especialização em Matemática) - Departamento de Matemática, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2018. Disponível em: `https://repositorio.ufmg.br/items/d5a5e710-fa75-4801-bf16-8ed5d102f1f1`. Acesso em: 20 out. 2025

[12] RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. R. **Cálculo Numérico: aspectos teóricos e computacionais**. 2. ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 1996. 406 p.

[13] YPMA, T. J. Development of the Newton-Raphson Method. **Siam Review**, [S.I], v. 37, n. 4, p. 531-551, dez. 1995. Disponível em: `https://www.jstor.org/stable/2132904`. Acesso em: 10 out. 2025.