UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA E MATEMÁTICA
CURSO DE GRADUAÇÃO EM LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

VINÍCIUS MARQUES PEREIRA

SUPERFÍCIES UMBÍLICAS EM $\mathbb{R}^3$

CUITÉ
2026

VINÍCIUS MARQUES PEREIRA

SUPERFÍCIES UMBÍLICAS EM $\mathbb{R}^3$

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Licenciatura em Matemática do Centro de Educação e Saúde da Universidade Federal de Campina Grande, como requisito parcial à obtenção do grau de licenciado em Licenciatura em Matemática.

Orientadora: Profa. Márcia Cristina Silva Brito.
Coorientadora: Profa. Maria Gisélia Vasconcelos.

CUITÉ

2026

P436s Pereira, Vinícius Marques.

Superfícies umbílicas em R^3. / Vinícius Marques Pereira. - Cuité, 2026.
68 f.: il. color.

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Educação e Saúde, 2026.
"Orientação: Profa. Márcia Cristina Silva Brito; Profa. Maria Gisélia Vasconcelos".

Referências.
1. Superfícies. 2. Superfícies algébricas. 3. Superfícies umbílicas. 4. Superfícies regulares. 5. Superfícies conexas. 6. Superfícies orientadas. 7. Centro de Educação e Saúde. I. Brito, Márcia Cristina Silva. II. Vasconcelos, Maria Gisélia. III. Título.

CDU 513.6(043)

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELO BIBLIOTECÁRIO Msc. Jesiel Ferreira Gomes - CRB-15/256

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE – UFCG
CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE - CES
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA E MATEMÁTICA – UAFM

Superfícies Umbílicas em R^3

Vinícius Marques Pereira

Monografia de Trabalho de Conclusão de Curso submetida à banca examinadora como parte dos requisitos necessários a obtenção do grau de Graduação em Licenciatura em Matemática.

A citação de qualquer trecho deste trabalho é permitida, desde que seja feita de conformidade com as normas de ética científica.

Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) aprovado em 25 de março de 2026.

Banca Examinadora

Márcia Cristina Silva Brito

Profª. Márcia Cristina Silva Brito
(Orientadora)

Maria Gisélia Vasconcelos

Profª. Maria Gisélia Vasconcelos
(Coorientadora)

Jarbas Dantas da Silva

Prof. Jarbas Dantas de Silva

À minha família, Aos meus pais, Angela Maria e José Marques, alicerces da minha vida, que com amor incondicional, sacrifícios e ensinamentos tornaram possível a realização deste sonho. A eles, minha eterna gratidão e admiração.

AGRADECIMENTOS

A jornada acadêmica que culmina neste Trabalho de Conclusão de Curso não seria possível sem o apoio e a contribuição de diversas pessoas, às quais manifesto minha mais profunda gratidão.

Primeiramente, elevo meus agradecimentos a Deus, fonte de toda sabedoria e inspiração. Por Sua infinita bondade e por iluminar meus caminhos, concedendo-me perseverança e discernimento para superar os desafios e chegar até aqui.

À minha família, alicerce fundamental da minha existência, dedico este trabalho. Agradeço de coração aos meus amados pais, Angela Maria e José Marques, pelo amor incondicional, pelos ensinamentos e por nunca medirem esforços para que este sonho se tornasse realidade. Aos meus avós, Maria Raimunda (presente em meu coração) e em memória do meu querido avô Elis Benigno, cuja memória e legado de carinho e sabedoria me acompanham sempre. A gratidão se estende aos meus irmãos, Felipe Marques e Felício Marques, pelo companheirismo, apoio e compreensão ao longo de todos esses anos, quero agradecer também a pessoa muito especial que está do meu lado minha namoroda Mariana Da Silva.

Sou imensamente grato aos amigos que a universidade me presenteou. A Maria Nazaré, Jonatas, Anderson e Leandro, minha sincera gratidão pela parceria, pelas trocas de conhecimento, pelo incentivo nos momentos difíceis e por tornarem essa trajetória mais leve e memorável.

Expresso meu profundo reconhecimento à minha orientadora, Professora Márcia Cristina, e à minha coorientadora, Professora Gisélia. Agradeço pela confiança em meu trabalho, pela orientação precisa, pela paciência inesgotável e por todo o conhecimento compartilhado, que foram fundamentais para o desenvolvimento e aprimoramento desta pesquisa.

Agradeço ao Professor Jarbas por sua disponibilidade e presença na banca do meu Trabalho de Conclusão de Curso. Sua participação foi de grande importância para a realização deste momento, contribuindo significativamente com suas considerações e orientações.

Não poderia deixar de agradecer ao meu professor e primo, Aldeir Fernandes, cujo incentivo e crença inabalável no meu potencial foram combustíveis essenciais para que eu persistisse na vida acadêmica. Suas palavras de encorajamento ecoaram em muitos momentos e certamente contribuíram para esta conquista.

Por fim, a todos que, direta ou indiretamente, cruzaram meu caminho e contribuíram para minha formação pessoal e profissional, o meu muito obrigado.

RESUMO

Neste trabalho, vamos estudar a caracterização dos pontos de uma superfície regular. Vamos apresentar algumas propriedades das superfícies umbílicas do $\mathbb{R}^3$. Provaremos que as únicas superfícies regulares, conexas e orientadas que são totalmente umbílicas são (pedaços de) planos e esferas.

Palavras-chave: Superfícies; Classificação de Pontos; Superfícies Umbílica.

ABSTRACT

In this work, we will study the characterization of points on a regular surface. We will present some properties of umbilical surfaces in $\mathbb{R}^3$. We will prove that the only regular, connected, and oriented surfaces that are fully umbilical are (pieces of) planes and spheres.

Keywords: Surfaces; Classification to the points; Umbilical Surfaces.

SUMÁRIO

1	**INTRODUÇÃO**	8
2	**UM POUCO DE HISTÓRIA**	10
3	**RESULTADOS CLÁSSICOS**	16
3.1	**Curvas**	16
3.2	**Superfícies Regulares**	17
3.2.1	***Mudança de Parâmetros***	26
3.3	**Plano Tangente**	29
3.4	**Primeira Forma Fundamental**	31
3.4.1	***Orientação de Superfícies***	36
4	**CLASSIFICAÇÃO DE PONTOS EM SUPERFÍCIES**	38
4.1	**Aplicação de Gauss**	38
4.1.1	***A aplicação de Gauss em coordenadas locais***	43
4.2	**Classificação dos Pontos em uma Superfícies**	47
4.3	**Exemplos**	49
4.4	**Teorema principal**	68
5	**CONCLUSÕES**	72
	REFERÊNCIAS	73

1 INTRODUÇÃO

O estudo das superfícies regulares em $\mathbb{R}^3$ constitui um dos pilares da Geometria Diferencial. Após compreender conceitos fundamentais como plano tangente, vetor normal e curvaturas, surge naturalmente a necessidade de analisar o comportamento local da superfície em cada um de seus pontos. É nesse contexto que se insere a **classificação de pontos em uma superfície regular**.

A classificação baseia-se, essencialmente, no sinal da curvatura gaussiana ou, de forma equivalente, no comportamento das curvaturas principais. Assim, um ponto de uma superfície regular pode ser classificado como elíptico, hiperbólico, parabólico ou planar. Essa distinção descreve como a superfície se comporta nas proximidades do ponto: se ela se curva na mesma direção, em direções opostas, ou se apresenta comportamento degenerado.

O estudo dessa classificação é de grande importância, pois permite compreender a geometria local da superfície, identificar regiões de concavidade e convexidade, analisar estabilidade geométrica e descrever propriedades qualitativas do formato da superfície. Além disso, tais conceitos possuem aplicações relevantes em áreas como física, engenharia, computação gráfica e modelagem geométrica, onde o entendimento do comportamento local das superfícies é essencial.

Dessa forma, a classificação dos pontos fornece uma ferramenta fundamental para a análise qualitativa das superfícies regulares, conectando propriedades locais às características globais da geometria da superfície.

Uma superfície regular em $\mathbb{R}^3$ é chamada de **totalmente umbílica** se todos os seus pontos forem **umbílicos**. Um ponto é denominado umbilico quando as curvaturas principais nesse ponto são iguais, ou seja, a superfície se curva igualmente em todas as direções a partir desse ponto. Em termos geométricos, isso significa que, no ponto umbílico, o plano tangente toca a superfície de maneira simétrica, e a curvatura normal é independente da direção escolhida dentro do plano tangente.

As superfícies totalmente umbílicas apresentam propriedades geométricas muito particulares e altamente simétricas. De acordo com um resultado clássico da geometria diferencial, toda superfície totalmente umbílica em $\mathbb{R}^3$ é, localmente, uma porção de uma **esfera** ou de um **plano**. Isso decorre do fato de que, para que todos os pontos sejam umbílicos, a curvatura gaussiana deve ser constante em toda a superfície.

O estudo das superfícies totalmente umbílicas é importante porque fornece exemplos

extremos e simétricos dentro da classificação de pontos. Elas representam casos onde a curvatura não distingue direções preferenciais, servindo como referência para comparar superfícies mais gerais. Além disso, superfícies totalmente umbílicas aparecem frequentemente em aplicações de física e engenharia, como na modelagem de lentes, cascas esféricas e superfícies de equilíbrio isotrópico, onde a simetria das curvaturas é desejável.

Superfícies compactas em $\mathbb{R}^3$ possuem propriedades geométricas especiais que permitem caracterizar os pontos críticos de forma mais restrita do que em superfícies gerais. Uma superfície S é dita **compacta** se for limitada e fechada, ou seja, se estiver contida em uma região finita do espaço e incluir todos os seus pontos-limite.

Um resultado clássico da Geometria Diferencial afirma que, em superfícies compactas:

- Existem sempre pontos de curvatura gaussiana máxima e mínima.
- Esses pontos são pontos elípticos, onde a superfície é localmente convexa ou côncava.
- A existência de pontos hiperbólicos depende da topologia global da superfície.

Em particular, o Teorema de Euler e a Teoria de Gauss-Bonnet estabelecem uma relação entre a curvatura total da superfície e sua topologia, implicando que a soma dos índices dos pontos críticos (como pontos elípticos e hiperbólicos) é determinada pelo **número de Euler** da superfície. Dessa forma, o estudo da caracterização de pontos em superfícies compactas não apenas descreve a geometria local, mas também conecta as propriedades locais da curvatura com invariantes globais da superfície.

Essa análise é essencial para compreender comportamentos globais de superfícies em aplicações práticas, como em engenharia estrutural, design de superfícies complexas, modelagem de formas naturais e simulações físicas, onde regiões de máxima ou mínima curvatura podem indicar pontos de tensão, estabilidade ou interesse geométrico.

2 UM POUCO DE HISTÓRIA

Neste capítulo apresentamos alguns aspectos históricos da Geometria, desde suas origens até o período do grande matemático e lógico alemão David Hilbert. Daremos ênfase especial aos estudiosos que contribuíram para o desenvolvimento da Geometria Diferencial e que emprestaram seus nomes a muitos dos teoremas fundamentais dessa área.

Utilizamos como fontes principais as referências (BOYER, 1974) e (EVES, 2004), bem como notas históricas encontradas em diversos textos de Geometria Diferencial.

A palavra *geometria* tem origem no grego e significa literalmente "medir a terra", sugerindo que seu surgimento esteve associado à necessidade prática de demarcação de terras, possivelmente para fins agrícolas. Embora não haja consenso entre os historiadores quanto a um marco inicial preciso da Geometria como campo de estudo, é amplamente reconhecido que suas raízes encontram-se no antigo Egito e na Babilônia. Registros também indicam o desenvolvimento de formas rudimentares de geometria entre hindus e chineses, ainda que, nesses contextos, ela apareça predominantemente como um conjunto de regras empíricas.

A Geometria como teoria lógico-dedutiva, tal como a conhecemos atualmente, teve seu desenvolvimento sistemático na Grécia Antiga, especialmente com Euclides de Alexandria. Sabe-se que Euclides nasceu por volta de 325 a.C. e faleceu aproximadamente em 265 a.C., tendo vivido grande parte de sua vida em Alexandria, onde lecionou e trabalhou na célebre Biblioteca de Alexandria. Euclides foi responsável pela organização de praticamente todo o conhecimento matemático acumulado até sua época na monumental obra *Os Elementos*, composta por treze livros.

Seu mérito não reside apenas na compilação desse vasto material, mas sobretudo na introdução do método lógico-dedutivo — o método axiomático — como fundamento para a construção de uma teoria matemática. Em *Os Elementos* (EUCLIDES, 2009), Euclides apresenta dez axiomas: cinco "noções comuns", consideradas verdades gerais aceitas sem contestação, e cinco "postulados", proposições específicas da geometria. A partir desses princípios, deduziu 465 proposições, abrangendo resultados de geometria plana, espacial e até de teoria dos números sob abordagem geométrica. Até hoje, os livros didáticos de geometria mantêm essa obra como referência estrutural. Trata-se da segunda obra mais publicada no mundo, perdendo apenas para a Bíblia.

No que se refere à *Geometria Diferencial* — entendida atualmente como o estudo da geometria com o auxílio do cálculo diferencial e integral — suas origens podem ser associadas ao

estudo de curvas notáveis presentes nas obras de Euclides, Arquimedes de Siracusa e Apolônio de Perga, considerados três dos maiores matemáticos da Antiguidade.

Entretanto, a forma moderna da Geometria Diferencial começou a tomar corpo no século XIX, especialmente com Carl Friedrich Gauss, em sua obra *Disquisitiones generales circa superficies curvas* (1828) (GAUSS, 1902). Nesse trabalho, Gauss introduziu conceitos fundamentais, entre eles o célebre *Teorema Egregium*.

Esse período coincide com a fase final das tentativas de resolução do chamado "Problema das Paralelas", que consistia em demonstrar a independência do quinto postulado de Euclides em relação aos demais. O quinto postulado foi enunciado da seguinte forma:

> *"Se uma reta corta duas outras formando ângulos colaterais internos cuja soma é menor que dois ângulos retos, então as duas retas, se prolongadas indefinidamente, encontram-se do lado em que a soma dos ângulos é menor que dois retos."*

As tentativas de provar esse postulado conduziram, no século XIX, à descoberta das geometrias não euclidianas, desenvolvidas independentemente por Gauss, Nikolai Lobachewsky e János Bolyai.

Outro personagem central no desenvolvimento da Geometria Diferencial foi Bernhard Riemann. Em 1854, apresentou o trabalho *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen* ("Sobre as hipóteses que fundamentam a geometria") (RIEMANN, 1867), considerado o marco inicial da Geometria Riemanniana.

Nesse trabalho, Riemann introduziu a noção de espaço como uma variedade obtida pela colagem de abertos do $\mathbb{R}^n$, na qual a cada ponto se associa uma forma quadrática positiva definida, hoje chamada de métrica. A partir dessa estrutura, definiu as geodésicas como curvas que localmente minimizam distâncias e introduziu o conceito de curvatura seccional.

Cabe destacar que Gauss demonstrou que a curvatura gaussiana de uma superfície em $\mathbb{R}^3$ depende apenas de sua métrica e não da forma como está mergulhada no espaço ambiente. Em sua demonstração, obteve uma expressão explícita para a curvatura em termos dos coeficientes da Primeira Forma Fundamental e de suas derivadas.

Esse resultado, conhecido como *Teorema Egregium*, abriu caminho para o estudo da geometria intrínseca de superfícies abstratas. Riemann utilizou explicitamente essas ideias ao formular sua teoria da curvatura. Contudo, não apresentou uma expressão analítica explícita para

a curvatura seccional. Tal formulação foi desenvolvida posteriormente por Elwin Christoffel e Rudolf Lipschitz, que, em 1869, introduziram os hoje chamados *símbolos de Christoffel*.

Desenvolvimentos posteriores consolidaram a estrutura moderna da Geometria Diferencial e da Geometria Riemanniana. Entre eles destacam-se os trabalhos de Eugenio Beltrami sobre a pseudo-esfera, Gregorio Ricci-Curbastro e Tullio Levi-Civita na criação do cálculo tensorial — incluindo os conceitos de derivação covariante e transporte paralelo —, Pierre Bonnet sobre propriedades de geodésicas e curvatura geodésica (no contexto do Teorema de Gauss-Bonnet), e David Hilbert, cuja obra *Grundlagen der Geometrie* (1900) reformulou os fundamentos axiomáticos da geometria.

Essas contribuições estabeleceram a estrutura conceitual que caracteriza a Geometria Diferencial contemporânea.

Uma linha do tempo da Geometria Diferencial

Apresentamos uma breve linha do tempo da Geometria Diferencial destacando alguns de seus principais protagonistas e suas contribuições mais relevantes.

Euclides de Alexandria (325–265 a.C.), Arquimedes de Siracusa (287–212 a.C.) e Apolônio de Perga (262–190 a.C.)

As origens da Geometria Diferencial remontam à Antiguidade Clássica. Euclides estabeleceu o método axiomático-dedutivo, que se tornou o alicerce da geometria. Arquimedes desenvolveu métodos geométricos inovadores para o cálculo de áreas e volumes, enquanto Apolônio investigou profundamente as curvas cônicas, cujas propriedades permanecem fundamentais nos estudos modernos de curvas.

Pierre de Fermat (1601–1665) e René Descartes (1596–1650)

Fermat e Descartes, de forma independente, criaram a Geometria Analítica. O método das coordenadas associa a cada ponto do espaço tridimensional uma terna ordenada (x, y, z) em relação a eixos ortogonais, permitindo traduzir problemas geométricos em linguagem algébrica.

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) e Isaac Newton (1643–1727)

Leibniz e Newton desenvolveram, independentemente, o cálculo infinitesimal. Esse instrumental possibilitou o estudo sistemático de curvas e superfícies por meio de propriedades diferenciais, constituindo a base formal da Geometria Diferencial.

Christiaan Huygens (1629–1695), Alexis Clairaut (1713–1765) e Gaspard Monge (1746–1818)

Huygens estudou curvas planas e introduziu os conceitos de involuta e evoluta. Clairaut investigou curvas no espaço tridimensional, com ênfase em propriedades de primeira ordem, como retas tangentes. Monge aprofundou o estudo da curvatura e da torção das curvas espaciais, estabelecendo conceitos essenciais para a análise local das curvas.

Leonhard Euler (1707–1783), Augustin-Louis Cauchy (1789–1857) e Jean Baptiste Meusnier (1754–1793)

Euler investigou as condições sob as quais uma superfície pode ser desenvolvida isometricamente sobre um plano, caracterizando superfícies regradas como o cilindro e o cone. Cauchy sistematizou métodos analíticos aplicados à geometria e contribuiu para a formulação das equações conhecidas como fórmulas de Frenet-Serret. Meusnier demonstrou um importante teorema sobre curvaturas normais e estudou superfícies mínimas, como o helicoide.

Carl Friedrich Gauss (1777–1855) e Bernhard Riemann (1826–1866)

Gauss e Riemann são considerados os fundadores da Geometria Diferencial moderna. Gauss introduziu o conceito de curvatura intrínseca em sua obra *Disquisitiones generales circa superficies curvas* (1828). Riemann generalizou essas ideias ao introduzir variedades munidas de métricas, estabelecendo os fundamentos da Geometria Riemanniana.

Eugenio Beltrami (1835–1900), Felix Klein (1849–1925) e Henri Poincaré (1854–1912)

Beltrami construiu modelos de espaços de curvatura constante e apresentou um modelo da geometria hiperbólica baseado na pseudoesfera. Klein formulou o Programa de Erlangen, segundo o qual cada geometria pode ser caracterizada pelos invariantes de um grupo de transformações. Poincaré desenvolveu importantes modelos para geometrias não euclidianas,

ampliando a compreensão das estruturas geométricas abstratas.

Pierre Ossian Bonnet (1819–1892), Elwin Bruno Christoffel (1829–1900) e Rudolf Lipschitz (1838–1903)

Bonnet introduziu o conceito de curvatura geodésica e contribuiu para o desenvolvimento do Teorema de Gauss-Bonnet. Christoffel e Lipschitz forneceram expressões analíticas fundamentais para o cálculo da curvatura seccional.

Gregorio Ricci-Curbastro (1853–1925) e Tullio Levi-Civita (1873–1941)

Ricci-Curbastro e Levi-Civita desenvolveram o cálculo tensorial, introduzindo os conceitos de derivação covariante e transporte paralelo, ferramentas centrais no estudo moderno de variedades e geodésicas.

Ernst Ferdinand Adolf Minding (1806–1885), Jean Frenet (1819–1900) e Joseph Alfred Serret (1819–1885)

Minding demonstrou que superfícies com a mesma curvatura gaussiana constante são localmente isométricas. Frenet e Serret publicaram, de forma independente, as fórmulas que descrevem o comportamento local de curvas espaciais, atualmente conhecidas como fórmulas de Frenet-Serret.

Olinde Rodrigues (1795–1851) e Joseph Liouville (1809–1882)

Rodrigues estabeleceu relações diferenciais entre curvatura normal e linhas de curvatura. Liouville contribuiu para o estudo da curvatura geodésica e das transformações conformes.

Hermann Minkowski (1864–1909), Jacques Hadamard (1865–1963) e David Hilbert (1862–1943)

Minkowski desenvolveu a Geometria dos Números e estabeleceu fórmulas integrais que relacionam área e curvaturas de superfícies. Hadamard provou importantes teoremas globais envolvendo difeomorfismos entre superfícies completas. Hilbert contribuiu para a fundamentação lógica da geometria e demonstrou resultados sobre a impossibilidade de certos modelos completos

da geometria hiperbólica no espaço euclidiano tridimensional.

3 RESULTADOS CLÁSSICOS

Neste capítulo, serão inicialmente estabelecidos o conceito de curva parametrizada e os conceitos e as propriedades fundamentais das superfícies regulares parametrizadas. Conforme destaca (LIMA, 2016), "uma superfície regular é um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}^3$, composto por abertos de $\mathbb{R}^2$, os quais são deformados e inseridos suavemente por meio de aplicações denominadas parametrizações locais". A partir dessa definição, abordaremos a primeira forma fundamental, a aplicação de Gauss e alguns conceitos fundamentais da geometria intrínseca das superfícies. As referências utilizadas para o desenvolvimento deste estudo são (CARMO, 2010), (DELGADO; FRENSEL, 2010), (TENENBLAT, 2008), (LIMA, 2014) e (LIMA, 2016).

3.1 Curvas

Definição 3.1 *Uma curva parametrizada diferenciável é uma aplicação diferenciável* $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ *onde* I *é um intervalo de* $\mathbb{R}$ *que, a cada* $t \in I$*, associa um vetor* $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^3$*, onde* $x, y, z : I \to \mathbb{R}$ *são funções de classe* C^∞*.*

A variável t é o parâmetro da curva. Denotando por $x'(t)$ a primeira derivada de $x(t)$ em um ponto t, onde $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ é chamado vetor tangente da curva $\alpha(t)$. A imagem $\alpha(I) \subset \mathbb{R}^3$ é chamado traço da curva α.

Definição 3.2 *Uma curva parametrizada diferenciável* $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ *é chamada regular se* $\alpha'(t) \neq 0$ *para todo* $t \in I$*.*

A partir deste instante, por simplicidade omitiremos o termo diferenciável.

Definição 3.3 *Seja* $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ *uma curva parametrizada regular. A função* $s : I \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} |\alpha'(t)| dt, \; t_0, t \in I,$$

onde

$$|\alpha'(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}.$$

é denominada função comprimento de arco de α *a partir de* t_0*.*

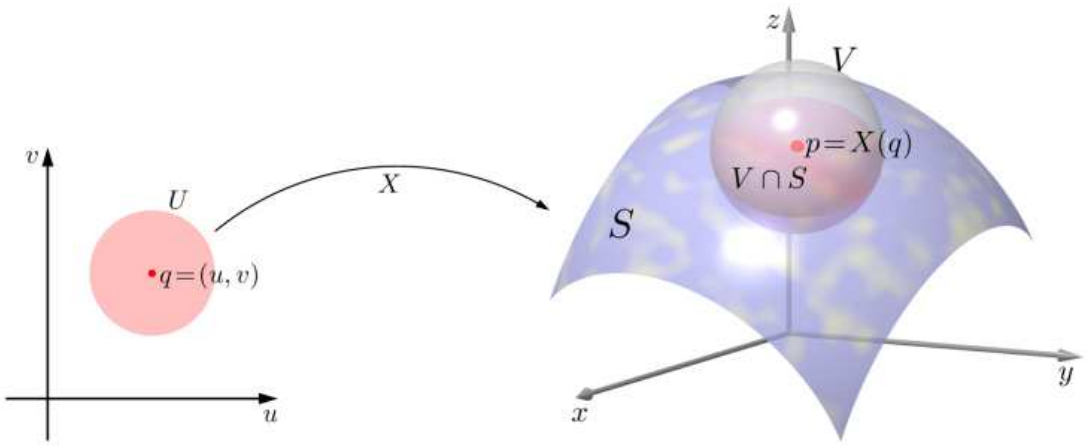
3.2 Superfícies Regulares

De forma geral, uma superfície regular em $\mathbb{R}^3$ pode ser obtida a partir de regiões abertas do plano $\mathbb{R}^2$, que são suavemente deformadas e unidas de forma contínua, de modo que a superfície resultante seja diferenciável, não apresente vértices, arestas ou auto-interseções, e que tenha sentido falar em plano tangente em cada ponto da superfície.

Definição 3.4 *Um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma superfície regular se para cada $p \in S$, existe um aberto $V \subset \mathbb{R}^3$, com $p \in V$, e uma aplicação $X : U \to V \cap S$, definida num aberto U de $\mathbb{R}^2$ tal que:*

1. *X é diferenciável, ou seja, se $X(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)$, $(u,v) \in U$, então, as funções $x, y, z : U \to \mathbb{R}$ tem derivadas parciais contínuas de todas as ordens em U.*
2. *X é um homeomorfismo, isto é, X é uma bijeção contínua cuja a inversa $X^{-1} : V \cap S \to U$ é contínua.*
3. *Para todo $q = (u,v) \in U$ a diferencial $dX_q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ é injetiva (Condição de regularidade).*

A aplicação $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to V \cap S \subset \mathbb{R}^3$ é denominada uma parametrização de S no ponto p e a vizinhança $V \cap S$ se denomina vizinhança coordenada.



Fonte: (DELGADO; FRENSEL, 2010) pág. 82

Observação 3.1 *Vejamos alguns detalhes da definição*

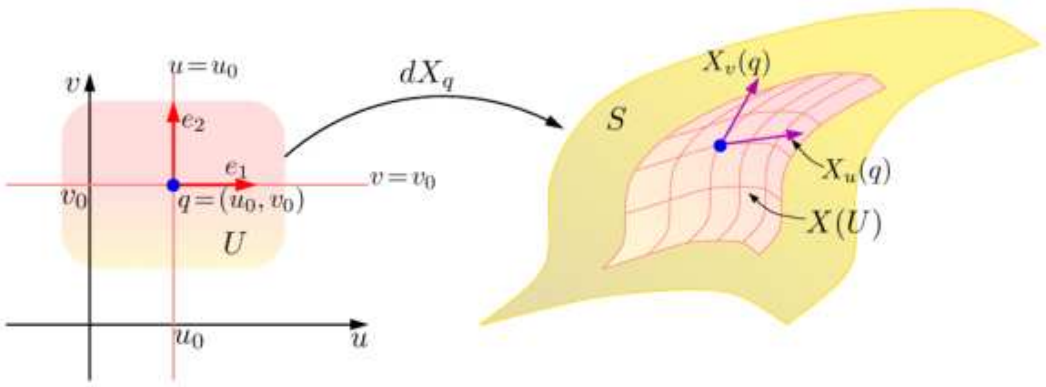
- *A matriz da aplicação linear dX_q nas bases canônicas de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ dada por $\{e_1, e_2\}$ e $\{f_1, f_2, f_3\}$, torna possível, expressar a condição de regularidade de forma mais clara.*

Seja $q = (u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$ e e_1 vetor tangente a curva $\alpha(t) = (u_0 + t, v_0)$, com $\alpha(0) = (u_0, v_0)$ e $\alpha'(0) = (1,0) = e_1$. A imagem de α por X é

$$\begin{aligned} \beta(t) &= X \circ \alpha(t) = (x(\alpha(t)), y(\alpha(t)), z(\alpha(t)) \\ \beta(t) &= X(u_0 + t, v_0) = \big(x(u_0 + t, v_0), y(u_0 + t, v_0), z(u_0 + t, v_0)\big). \end{aligned}$$

Derivando $\beta(t)$ com relação a t, obtemos

$$\beta'(t) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{dv}{dt}, \frac{\partial y}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{dv}{dt}, \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dt}\right) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right).$$



Fonte: (DELGADO; FRENSEL, 2010) pág. 83

A curva $\beta(t)$ é chamada curva coordenada $v = v_0$, está em S e tem em $X(q)$ o vetor tangente

$$\beta'(0) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right) = \frac{\partial X}{\partial u}$$

onde as derivadas são calculadas em (u_0, v_0) e o vetor $\beta'(0)$ é indicado pelas suas componentes na base $\{f_1, f_2, f_3\}$. Assim, pela definição de diferencial, temos,

$$dX_q(e_1) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right) = \frac{\partial X}{\partial u} = X_u$$

De modo análogo, para a curva coordenada $u = u_0$, temos

$$dX_q(e_2) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right) = \frac{\partial X}{\partial v} = X_v$$

A matriz da aplicação linear dX_q, também chamada de matriz Jacobiana, com relação a essas bases será dada por

$$dX_q = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

- *A injetividade da diferencial dX_q é equivalente as seguintes afirmações:*

a) A matriz da aplicação linear $dX(q)$, com relação as bases canônicas de $\mathbb{R}^2$ e de $\mathbb{R}^3$, ou seja,

$$dX_q = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}$$

tem posto 2.

b) Algum dos determinantes jacobianos

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}, \qquad \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}, \qquad \frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}$$

seja diferente de zero em $q = (u,v)$, $\forall\, q \in U$,

c) Os vetores colunas da matriz dX_q sejam linearmente independentes, isto é, que o produto vetorial $\frac{\partial X}{\partial u} \times \frac{\partial X}{\partial v}$ seja não nulo.

- *Note que a condição 2 exclui a possibilidade de auto-intersecções em superfícies regulares.*

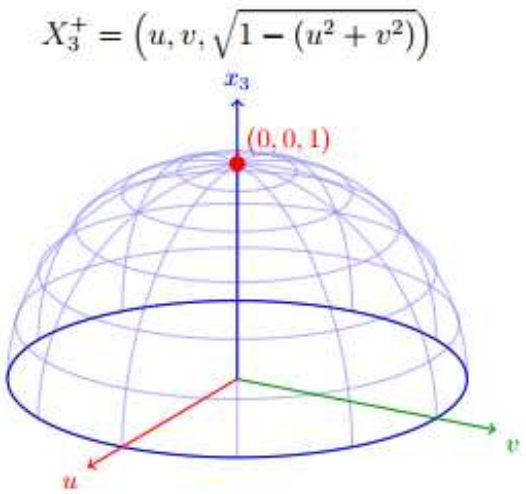
Exemplo 1 *A esfera unitária* $\mathbb{S}^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1\}$ *é uma superfície regular.*

Mostraremos que $X_3^+ : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$X_3^+ = \left(u, v, \sqrt{1-(u^2+v^2)}\right), \quad (u,v) \in U$$

onde $U = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2+v^2 < 1\}$ é uma parametrização de $\mathbb{S}^2$.

Podemos observar que a imagem da parametrização X_3^+ é a parte aberta de $\mathbb{S}^2$ que cobre o hemisfério norte da esfera unitária (menos o equador).



1. Podemos observar que as funções componentes de X_3^+ são diferenciáveis, já que temos que $u^2+v^2 < 1$, logo a condição (1) da definição de superfície regular é verificada.
2. Seja um ponto qualquer $(x,y,z) \in X_3^+(U) \subset \mathbb{S}^2$, com

   $$X_3^+(U) \subset \mathbb{S}^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{S}^2 \mid x^2+y^2 < 1 \text{ e } z > 0\}$$

   e se fizermos $(X_3^+)^{-1}(x,y,z) \mapsto (x,y)$ temos u e v bem definidos de maneira única por $u = x$ e $v = y$, logo X_1 é bijetiva. E $(X_3^+)^{-1}$ é a projeção de $X_3^+(U) \subseteq S$ em U, que é contínua. Logo a condição (2) é verificada.
3. Observe que a matriz jacobiana é dada por

   $$JX_3^+(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{-u}{\sqrt{1-(u^2+v^2)}} & \frac{-v}{\sqrt{1-(u^2+v^2)}} \end{pmatrix}$$

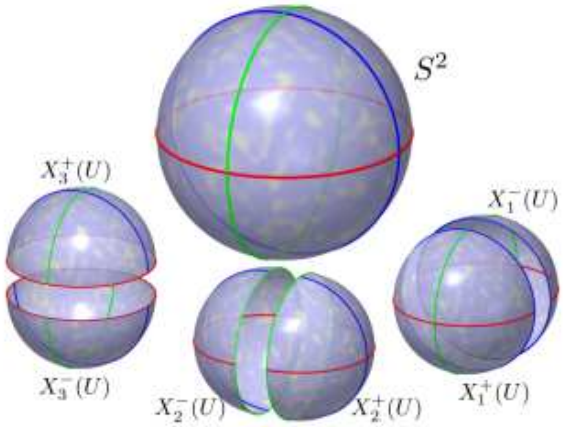
   Assim, podemos perceber que $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = 1$, com isso concluímos que a matriz $JX_3^+(u,v)$ tem posto 2, logo a condição 3 também é satisfeita.

Agora cobriremos toda esfera utilizando parametrizações similares, como a parametrização $X_3^- : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $X_3^-(u,v) = (u,v,-\sqrt{1-(u^2+v^2)}),\ (u,v) \in U$.

Podemos observar que $X_3^+(U) \cup X_3^-(U)$ cobre a esfera menos o equador $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2=1,\ z=0\}$.

Para cobrir toda a esfera, juntamente com X_3^+ e X_3^-, utilizamos os planos xz e zy e definimos as seguintes parametrizações:

$$
\begin{aligned}
X_2^+(u,v) &= \left(u,+\sqrt{1-(u^2+v^2)},v\right), \quad (u,v) \in U = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2+v^2<1\right\} \\
X_2^-(u,v) &= \left(u,-\sqrt{1-(u^2+v^2)},v\right), \quad (u,v) \in U = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2+v^2<1\right\} \\
X_1^+(u,v) &= \left(+\sqrt{1-(u^2+v^2)},u,v\right), \quad (u,v) \in U = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2+v^2<1\right\} \\
X_1^-(u,v) &= \left(-\sqrt{1-(u^2+v^2)},u,v\right), \quad (u,v) \in U = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2+v^2<1\right\}
\end{aligned}
$$



Fonte: (DELGADO; FRENSEL, 2010) pág. 85

Assim, verificamos que a esfera é uma superfície regular.

Como observamos anteriormente, pode ser relativamente trabalhoso mostrar que um subconjunto de $\mathbb{R}^3$ é uma superfície regular por meio da descrição explícita de parametrizações.

A seguir, apresentaremos duas proposições que asseguram que determinadas classes de conjuntos constituem superfícies regulares.

Proposição 3.2.1 *Suponha que $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ seja uma função diferenciável, onde U é um aberto de $\mathbb{R}^2$. O gráfico de f, ou seja, o conjunto*

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x,y)\}$$

é uma superfície regular de $\mathbb{R}^3$.

Demonstração 3.2.1 *(CARMO, 2010)*

Exemplo 2 *Sejam $p_0 \in \mathbb{R}^3$ e $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^3$ vetores linearmente independentes. Então o plano*

$$\Pi = \{\, p_0 + s\mathbf{v}_1 + t\mathbf{v}_2 \mid s,t \in \mathbb{R}\,\},$$

que passa por p_0 e é paralelo a $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$, é uma superfície regular.

Seja $\mathbf{n} = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$ o vetor normal a Π. Temos

$$\Pi = \{\, p \in \mathbb{R}^3 \mid \langle p - p_0, \mathbf{n}\rangle = 0\,\}.$$

Escrevendo $\mathbf{n} = (a,b,c)$, obtemos a equação cartesiana

$$\Pi = \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = d\,\},$$

onde $d = \langle p_0, \mathbf{n}\rangle$.

Como $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ são LI, segue que $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$, logo $(a,b,c) \neq (0,0,0)$. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $c \neq 0$. Então Π é o gráfico da função diferenciável $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \frac{d - ax - by}{c}.$$

Portanto, Π é uma superfície regular.

Definição 3.5 *Seja $F : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma aplicação diferenciável definida num aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. Dizemos que $p_0 \in U$ é um ponto crítico de F se a diferencial $dF_{p_0} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ não é sobrejetiva. A imagem $F(p_0)$ de um ponto crítico é dita valor crítico de F. Um ponto a de $\mathbb{R}^m$ que não é um valor crítico é chamado valor regular de F.*

Observação 3.2 *Sendo $f : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, a diferencial $df_p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é um funcional linear, isto é, uma aplicação linear de um espaço vetorial em um corpo. Sua matriz é dada por*

$$df_q = \begin{pmatrix} f_x & f_y & f_z \end{pmatrix}$$

e como a dimensão da imagem é 1, então df_p ou é sobrejetiva ou é nula.

Note que, neste caso, dizer que df_q não é sobrejetiva é equivalente a dizer que

$$f_x = f_y = f_z = 0.$$

Portanto, $a \in f(U)$ é um valor regular de $f : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ se, e somente se, f_x, f_y e f_z não se anulam simultaneamente em qualquer ponto do conjunto $f^{-1}(a) = \{(x,y,z) \in U \mid f(x,y,z) = a\}$, chamado a pré-imagem ou imagem inversa do ponto a.

Proposição 3.2.2 *Se $f : U \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável definida no aberto U de $\mathbb{R}^3$ e $a \in f(U)$ é um valor regular de f, então $S = f^{-1}(a)$ é uma superfície regular.*

Demonstração 3.2.2 *(CARMO, 2010)*

Exemplo 3 *O parabolóide hiperbólico*

$$S = \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 - y^2 \,\}$$

é uma superfície regular.

Definimos a função $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ por

$$F(x,y,z) = x^2 - y^2 - z.$$

Observe que F é de classe C^∞ (função polinomial) e

$$S = \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid F(x,y,z) = 0 \,\} = F^{-1}(0).$$

Calculamos o gradiente de F:

$$\operatorname{grad} F(x,y,z) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right) = (2x, -2y, -1).$$

Afirmamos que 0 é um **valor regular** de F. De fato, para qualquer $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, temos

$$\| \operatorname{grad} F(x,y,z) \|^2 = 4x^2 + 4y^2 + 1 \geq 1 > 0.$$

Em particular, para todo $p \in S = F^{-1}(0)$:

$$\operatorname{grad} F(p) \neq \mathbf{0}.$$

Portanto, $S = F^{-1}(0)$ é uma superfície regular.

Proposição 3.2.3 *Seja $p \in S$ um ponto de uma superfície regular S e seja uma aplicação $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ com $p \in X(U)$ tal que as condições (1) e (3) da Definição 3.4 sejam satisfeitas. Se X é bijetiva, então X^{-1} é contínua.*

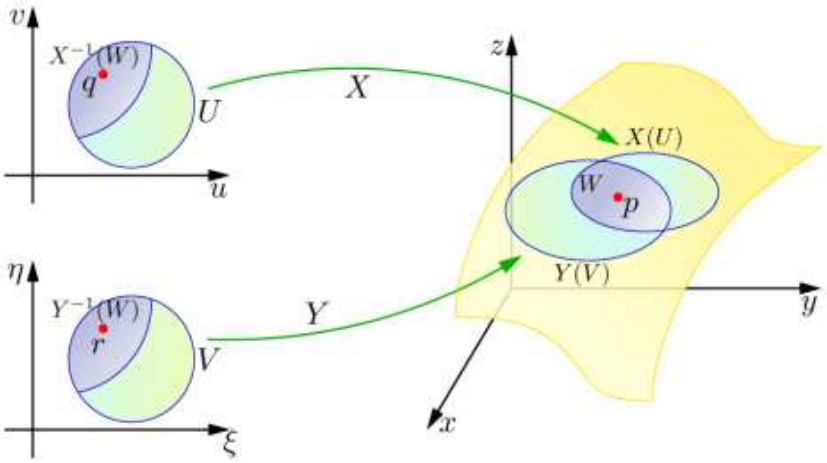
Demonstração 3.2.3 *(CARMO, 2010)*

□

3.2.1 Mudança de Parâmetros

Pela definição de superfície regular, cada ponto $p \in S$ pertence a uma vizinhança coordenada. Porém, como vimos no exemplo 1, o mesmo ponto p pode pertencer à várias vizinhanças coordenadas, logo pode-se eleger outra parametrização em uma vizinhança de p. Sendo assim, para que a definição de superfície regular tenha sentido, é necessário que esta não dependa apenas da parametrização escolhida. Isto é, devemos mostrar que se p pertence a duas vizinhanças coordenadas com parâmetros (u,v) e (a,b), é possível passar de um dos pares coordenados para outro através de uma transformação diferenciável. Para isto, tem-se a seguinte proposição:

Proposição 3.2.4 (Mudança de Parâmetros) *Seja p um ponto de uma superfície regular S, e sejam $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ e $Y : V \subset \mathbb{R}^2 \to S$ duas parametrizações de S, tais que $p \in X(U) \cap Y(V) = W$. Então a mudança de coordenadas $h = X^{-1} \circ Y : Y^{-1}(W) \to X^{-1}(W)$ é um difeomorfismo, isto é, h é diferenciável e tem uma inversa diferenciável h^{-1}.*



Fonte: (DELGADO; FRENSEL, 2010) pág. 101

Demonstração 3.2.4 *(CARMO, 2010)*

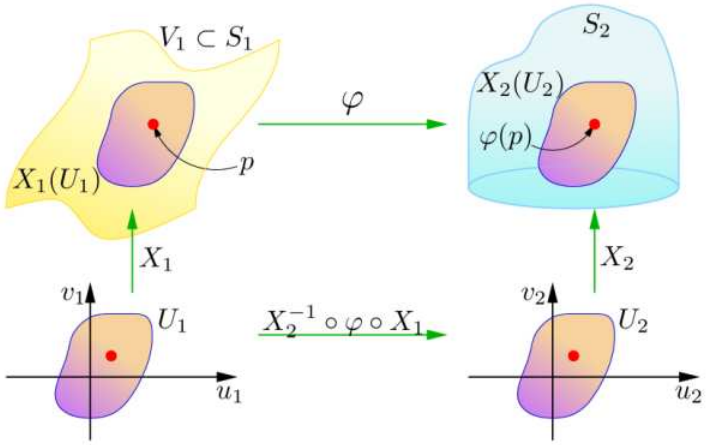
Nesta seção vamos tratar de dois tipos de aplicações sobre S, uma função f e uma aplicação φ, dadas por $f : V \subset S \to \mathbb{R}$ e $\varphi : V \subset S_1 \to S_2$, com S, S_1, S_2 superfícies regulares.

Definição 3.6 *Uma função $f : V \subset S \to \mathbb{R}$, com S uma superfície regular, é diferenciável em $p \in S$ se dada uma parametrização $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ com $p \in X(U) \subseteq V$, temos que $f \circ X : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é diferenciável em $q = X^{-1}(p)$.*

Exemplo 4 *Seja S uma superfície regular, $V \subset \mathbb{R}^3$ um conjunto aberto tal que $S \subset V$ e $f : V \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável.*

Note que a restrição de f a S ainda é uma função diferenciável sobre S, pois para qualquer $p \in S$ e qualquer parametrização $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ em p, pela definição anterior a composição $f \circ X : U \to \mathbb{R}$ é diferenciável.

Definição 3.7 *Seja $\varphi : V_1 \subset S_1 \to S_2$ uma aplicação contínua, de um conjunto aberto V_1 de uma superfície regular S_1 em uma superfície regular S_2. A aplicação φ é diferenciável em $p \in V_1$ se dadas as parametrizações $X_1 : U_1 \subset \mathbb{R}^2 \to S_1$ e $X_2 : U_2 \subset \mathbb{R}^2 \to S_2$ com $p \in X_1(U_1)$ e $\varphi(X_1(U_1)) \subset X_2(U_2)$ a aplicação $X_2^{-1} \circ \varphi \circ X_1 : U_1 \to U_2$ é diferenciável em $q = X_1^{-1}(p)$.*



Fonte: (DELGADO; FRENSEL, 2010) pág. 104

Observação 3.3 *Duas superfícies regulares são difeomorfas se existe uma aplicação diferenciável $\varphi : S_1 \to S_2$ com uma inversa diferenciável $\varphi^{-1} : S_2 \to S_1$. Uma tal φ é chamada um difeomorfismo de S_1 em S_2.*

3.3 Plano Tangente

A condição de regularidade da definição de superfície regular nos garante a existência de um plano tangente em cada $p \in S$. Nessa seção mostraremos que para cada ponto $p \in S$, o conjunto de vetores tangentes as curvas parametrizadas de S passando por p, constituem um plano, que denotaremos por T_pS.

Definição 3.8 *Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular e $p \in S$. Dizemos que $w \in \mathbb{R}^3$ é um vetor tangente a S em p se $w = \alpha'(0)$, onde $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ é uma curva parametrizada diferenciável em 0 e $\alpha(0) = p$.*

Proposição 3.3.1 *Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to X(U)$ uma parametrização de S em p, com $X(q) = p$, $q \in U$. Então o subespaço vetorial de dimensão 2, $dX_q(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^3$ é o conjunto de todos os vetores tangentes a S em p.*

Demonstração 3.3.1 *(CARMO, 2010)*

O plano $dX_q(\mathbb{R}^2)$, que passa por $X(q) = p$, independe da parametrização X.

Definição 3.9 *O plano tangente a S em p, designado por T_pS, é o plano que passa por p e é paralelo ao plano que passa pela origem formado pelos vetores tangentes a S em p.*

As coordenadas de um vetor $w \in T_pS$ na base associada a uma parametrização X são determinadas do seguinte modo: w é o vetor velocidade $\alpha'(0)$ de uma curva $\alpha = X \circ \beta$, onde $\beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$ é dada por $\beta(t) = (u(t), v(t))$, com $\beta(0) = q = X^{-1}(p)$. Temos que:

$$\begin{aligned} \alpha'(0) &= \frac{d}{dt}(X \circ \beta)(0) = \frac{d}{dt}(X(u(t), v(t))(0) \\ &= X_u(q)u'(0) + X_v(q)v'(0) = w \end{aligned}$$

Ou seja, w é uma combinação linear dos vetores X_u e X_v no ponto q.

Na base $\{X_u, X_v\}$, o vetor w tem coordenadas $(u'(0), v'(0))$, sendo $(u(t), v(t))$ a expressão de uma curva na parametrização X cujo vetor velocidade no instante $t = 0$ é w.

Vamos definir a diferencial de uma aplicação diferenciável entre superfícies regulares.

Definição 3.10 *Sejam S_1 e S_2 superfícies regulares e seja $\varphi : V \subset S_1 \to S_2$ uma aplicação diferenciável de um conjunto aberto V de S_1 em S_2. Sejam $w \in T_pS_1$ e $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to V \subset S_1$ uma curva parametrizada diferenciável em 0 com $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = w$.*

A curva $\beta(t) = \varphi \circ \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to V \subset S_1$ é uma curva diferenciável em 0 com $\beta(0) = \varphi(p)$. Portanto $\beta'(0)$ é um vetor tangente a S_2 em $\varphi(p)$.

Proposição 3.3.2 *Dado $w \in T_pS_1$, o vetor $\beta'(0)$ não depende da escolha de α. A aplicação $d\varphi_p : T_pS_1 \to T_{\varphi(p)}S_2$ definida por $d\varphi_p(w) = \beta'(0)$ é linear.*

Demonstração 3.3.2 *(CARMO, 2010)*

Definição 3.11 *A aplicação linear $d\varphi_p : T_pS_1 \to T_{\varphi(p)}S_2$ é chamada a diferencial de φ em p.*

3.4 Primeira Forma Fundamental

Nessa seção apresentaremos a primeira forma quadrática, denominada primeira forma fundamental, que nos permite fazer alguns cálculos na superfície.

Definição 3.12 *Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular e T_pS o plano tangente a S no ponto p. A forma quadrática I_p definida por:*

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{I}_p & : & T_pS & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & w & \longmapsto & \mathrm{I}_p(w) = \langle w, w \rangle_p = ||w||^2 \geq 0 \end{array}$$

é chamada de Primeira Forma Fundamental.

Como podemos observar, a primeira forma fundamental é basicamente o produto interno usual do $\mathbb{R}^3$ restrito aos vetores tangentes a S.

Vamos agora expressar a primeira forma fundamental na base $\{X_u, X_v\}$ associada a parametrização $X(u,v)$ em p.

Seja $w \in T_p(S)$. Da definição de T_pS decorre a existência de uma curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ diferenciável em 0 tal que $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$, com $\alpha(0) = p = X(u_0, v_0)$ e $w = \alpha'(0) = X_u u'(0) + X_v v'(0)$, onde $X(q) = p$ e $q \in U$.

Então

$$\begin{aligned} \mathrm{I}_p(w) &= \langle w, w \rangle_p = \langle \alpha'(0), \alpha'(0) \rangle_p \\ &= \langle X_u(q)u'(0) + X_v(q)v'(0), X_u(q)u'(0) + X_v(q)v'(0) \rangle_p \\ &= u'(0)^2 \langle X_u, X_u \rangle_p + 2u'(0)v'(0)\langle X_u, X_v \rangle_p + v'(0)^2 \langle X_v, X_v \rangle_p \\ &= u'(0)^2 E(q) + 2u'(0)v'(0)F(q) + v'(0)^2 G(q), \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} E(u,v) &= \langle X_u(u,v), X_u(u,v) \rangle_p \\ F(u,v) &= \langle X_u(u,v), X_v(u,v) \rangle_p \\ G(u,v) &= \langle X_v(u,v), X_v(u,v) \rangle_p \end{aligned}$$

são os coeficientes da primeira forma fundamental na base $\{X_u(u,v), X_v(u,v)\}$ de $T_p(S)$, sendo $q = (u,v)$ e $X(u,v) = X(q) = p$.

Podemos então definir a primeira forma fundamental na forma matricial como:

$$\mathrm{I} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

Seja $u = aX_u + bX_v$ e $v = cX_u + dX_v$ para algum $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, podemos então expressar a primeira forma fundamental agindo sobre u e v como:

$$\mathrm{I}(u,v) = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

Observação 3.4 *As funções $E,F,G : U \to \mathbb{R}$ são de classe C^1, $E(u,v) > 0$, $G(u,v) > 0$ e $(EG-F^2)(u,v) > 0$ para todo $(u,v) \in U$, pois*

$$||X_u \times X_v||^2 = ||X_u||^2|X_v||^2 - \langle X_u, X_v\rangle = EG - F^2 > 0,$$

pois $X_u(u,v)$ e $X_v(u,v)$ são LI.

Observação 3.5 *As curvas coordenadas de uma parametrização são ortogonais se, e somente se, $F(u,v) = 0$ para todo $(u,v) \in U$.*

Uma tal parametrização é chamada uma parametrização ortogonal.

Exemplo 5 *Seja Π o plano que passa pelo ponto $p_0 \in \mathbb{R}^3$ e tem a direção dos vetores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^3$ unitários e ortogonais. Então Π é parametrizado por*

$$X(u,v) = p_0 + u\mathbf{v}_1 + v\mathbf{v}_2, \quad (u,v) \in \mathbb{R}^2.$$

As derivadas parciais são

$$X_u = \mathbf{v}_1 \quad e \quad X_v = \mathbf{v}_2.$$

Portanto, os coeficientes da primeira forma fundamental são

$$E = \langle X_u, X_u\rangle = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1\rangle = 1,$$
$$F = \langle X_u, X_v\rangle = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\rangle = 0,$$
$$G = \langle X_v, X_v\rangle = \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2\rangle = 1.$$

Assim, a primeira forma fundamental do plano Π é dada por

$$\mathrm{I} = \mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}v^2,$$

coincidindo com a métrica euclidiana canônica do $\mathbb{R}^2$.

Exemplo 6 *Seja S o cilindro circular unitário vertical, parametrizado por*

$$X(u,v) = (\cos u, sen\, u, v), \quad (u,v) \in U = \{\,(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < u < 2\pi,\ v \in \mathbb{R}\,\}.$$

As derivadas parciais são

$$X_u = (-sen\, u, \cos u, 0) \quad e \quad X_v = (0,0,1).$$

Portanto, os coeficientes da primeira forma fundamental são

$$E = \langle X_u, X_u \rangle = sen^2 u + \cos^2 u + 0 = 1,$$
$$F = \langle X_u, X_v \rangle = 0 + 0 + 0 = 0,$$
$$G = \langle X_v, X_v \rangle = 0 + 0 + 1 = 1.$$

Assim, a primeira forma fundamental do cilindro é dada por

$$\mathrm{I} = \mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}v^2.$$

Consequentemente, o cilindro circular é localmente isométrico ao plano euclidiano. Esta isometria local é evidenciada pelo fato de que o cilindro pode ser "desenrolado"sobre um plano sem distorção de distâncias.

Exemplo 7 *Seja S a esfera de raio $R > 0$ centrada na origem, parametrizada em coordenadas esféricas por*

$$X(\theta, \varphi) = (R\, sen\, \theta \cos \varphi, R\, sen\, \theta\, sen\, \varphi, R \cos \theta),$$

com $(\theta, \varphi) \in U = \{\,(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < \theta < \pi,\ 0 < \varphi < 2\pi\,\}$.

As derivadas parciais são

$$X_\theta = (R \cos \theta \cos \varphi, R \cos \theta\, sen\, \varphi, -R\, sen\, \theta),$$
$$X_\varphi = (-R\, sen\, \theta\, sen\, \varphi, R\, sen\, \theta \cos \varphi, 0).$$

Portanto, os coeficientes da primeira forma fundamental são

$$\begin{aligned}
E &= \langle X_\theta, X_\theta \rangle \\
&= R^2 \cos^2\theta \cos^2\varphi + R^2 \cos^2\theta \, sen^2\varphi + R^2 \, sen^2\theta \\
&= R^2 \cos^2\theta (\cos^2\varphi + sen^2\varphi) + R^2 \, sen^2\theta \\
&= R^2 \cos^2\theta + R^2 \, sen^2\theta \\
&= R^2, \\
F &= \langle X_\theta, X_\varphi \rangle \\
&= -R^2 \cos\theta \, sen\,\theta \cos\varphi \, sen\,\varphi + R^2 \cos\theta \, sen\,\theta \, sen\,\varphi \cos\varphi + 0 \\
&= 0, \\
G &= \langle X_\varphi, X_\varphi \rangle \\
&= R^2 \, sen^2\theta \, sen^2\varphi + R^2 \, sen^2\theta \cos^2\varphi + 0 \\
&= R^2 \, sen^2\theta (sen^2\varphi + \cos^2\varphi) \\
&= R^2 \, sen^2\theta.
\end{aligned}$$

Assim, a primeira forma fundamental da esfera é dada por

$$\mathrm{I} = R^2 \, \mathrm{d}\theta^2 + R^2 \, sen^2\theta \, \mathrm{d}\varphi^2.$$

Equivalentemente, podemos escrever

$$\mathrm{I} = R^2 \left(\mathrm{d}\theta^2 + sen^2\theta \, \mathrm{d}\varphi^2 \right).$$

Esta métrica mostra que as coordenadas esféricas são ortogonais ($F = 0$).

Exemplo 8 *Seja S o parabolóide hiperbólico dado pelo gráfico da função $f(x,y) = x^2 - y^2$, parametrizado por*

$$X(u,v) = (u, v, u^2 - v^2), \quad (u,v) \in \mathbb{R}^2.$$

As derivadas parciais são

$$X_u = (1, 0, 2u) \quad e \quad X_v = (0, 1, -2v).$$

Portanto, os coeficientes da primeira forma fundamental são

$$\begin{aligned}
E &= \langle X_u, X_u \rangle = 1 + 0 + 4u^2 = 1 + 4u^2, \\
F &= \langle X_u, X_v \rangle = 0 + 0 - 4uv = -4uv, \\
G &= \langle X_v, X_v \rangle = 0 + 1 + 4v^2 = 1 + 4v^2.
\end{aligned}$$

Assim, a primeira forma fundamental do parabolóide hiperbólico é dada por

$$\mathrm{I} = (1+4u^2)\,\mathrm{d}u^2 - 8uv\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + (1+4v^2)\,\mathrm{d}v^2.$$

Em notação matricial, temos

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+4u^2 & -4uv \\ -4uv & 1+4v^2 \end{pmatrix}.$$

O determinante da primeira forma fundamental é

$$EG - F^2 = (1+4u^2)(1+4v^2) - 16u^2v^2 = 1+4u^2+4v^2 > 0,$$

confirmando que a parametrização é regular em todos os pontos. Note que $F \neq 0$ em geral, indicando que as coordenadas (u,v) não são ortogonais na métrica induzida.

Conhecendo a primeira forma fundamental podemos tratar de questões métricas sobre uma superfície regular, sem fazer referência ao espaço ambiente $\mathbb{R}^3$.

Passamos agora a definir o conceito da segunda forma fundamental, que nos ajudará a definir importantes propriedades de curvatura em superfícies regulares. Primeiro devemos definir o conceito de aplicação de Gauss, porém começamos discutindo a normal unitária de uma superfície regular.

3.4.1 Orientação de Superfícies

Definição 3.13 *Seja p um ponto de uma superfície S. Chama-se vetor normal a S em p e denotemos por $N(p)$ a qualquer dos vetores unitários que são ortogonais ao plano T_pS.*

Dada uma parametrização $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ de uma superfície regular S e um ponto $p \in S$, o plano tangente T_pS é gerado pelos os vetores X_u e X_v. Assim, obtemos um vetor unitário N dado por

$$N(q) = \frac{X_u \times X_v}{||X_u \times X_v||},\ X(q) = p$$

que é normal ao plano T_pS.

Definição 3.14 *Uma superfície regular S é orientável se for possível cobri-la com uma família de vizinhanças coordenadas, de tal modo que se um ponto $p \in S$ pertence a duas vizinhanças dessa família, então a mudança de coordenadas tem Jacobiano positivo em p. A escolha de uma tal família é chamada uma orientação de S, e S, neste caso, diz-se orientada. Se uma tal escolha não é possível, a superfície é não-orientável. Se S é orientada, uma parametrização (local) x é compatível com a orientação de S se, juntando x à família de parametrizações dada pela orientação, obtém-se ainda uma (logo, a mesma) orientação de S.*

Exemplo 9 *Uma superfície que é o gráfico de uma função diferenciável é uma superfície orientável, pois toda superfície que é coberta por uma única vizinhança coordenada é orientável.*

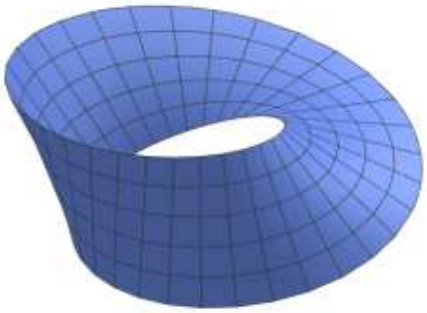
Exemplo 10 *Todas as superfícies que podem ser cobertas por uma única vizinhança coordenada são, trivialmente, orientáveis.*

Definição 3.15 *Seja S uma superfície regular e seja $U \subset S$ um conjunto aberto de S. Chamamos a aplicação $N : U \to \mathbb{R}^3$ de campo diferenciável de vetores normais unitários.*

Definição 3.16 *Diremos que uma superfície regular S é orientável se ela admite um campo diferenciável de vetores normais e unitários definido em toda a superfície. A escolha de N é dita uma orientação de S.*

Exemplo 11 *Toda superfície regular S que é a imagem inversa de um valor regular de uma função diferenciável, definida num aberto de* $\mathbb{R}^3$*, é orientável.*

Nem toda superfície é orientável. Um exemplo de uma superfície com esta propriedade é a faixa de Möbius



Note que, se percorrermos um círculo médio da faixa a partir de um ponto p saindo com um vetor normal N, retornaremos a ele com o vetor $-N$, contradizendo a continuidade do campo.

De agora em diante S denotará uma superfície regular orientável.

4 CLASSIFICAÇÃO DE PONTOS EM SUPERFÍCIES

4.1 Aplicação de Gauss

Nesta seção, definiremos a aplicação de Gauss, a segunda forma fundamental e as curvaturas Média e Gaussiana.

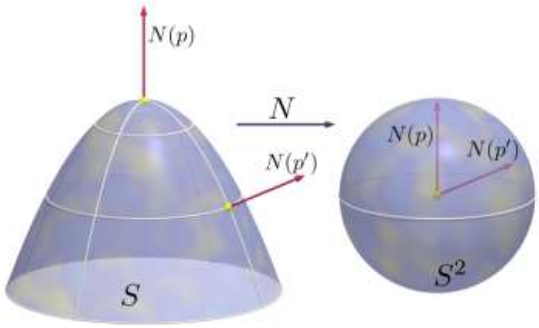
Ao longo desta seção, S será uma superfície regular orientável na qual foi escolhida uma orientação $N : S \to \mathbb{R}^3$. Diremos simplesmente que S é uma superfície com uma orientação N.

Definição 4.1 *Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície com uma orientação N. A aplicação $N : S \to \mathbb{R}^3$ toma seus valores na esfera unitária*

$$\mathbb{S}^2 \quad = \quad \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1\}$$

A aplicação $N : S \to \mathbb{S}^2$, assim definida, é chamada aplicação de Gauss de S.

A aplicação normal (ou aplicação esférica ou aplicação de Gauss) $N : S \to \mathbb{S}^2$ é definida fazendo corresponder a cada $p \in S$ a extremidade do vetor normal $N(p)$ da orientação de S, quando a origem de $N(p)$ é transladada para o centro 0 de $\mathbb{S}^2$.



Fonte: (DELGADO; FRENSEL, 2010) pág. 165

Observação 4.1 *A aplicação de Gauss $N : S \to \mathbb{S}^2$ é diferenciável.*

De fato, a aplicação $N : S \to \mathbb{S}^2$ é contínua e se $X : U \to X(U) \subset S$ é uma parametrização de S em p, $p \in S e Y : V \to Y(V) \subset \mathbb{S}^2$ é uma parametrização de $\mathbb{S}^2$ em $N(p)$ tais que $N(X(U)) \subset Y(V)$, então a aplicação

$$Y^{-1} \circ N \circ X : U \to V$$

é diferenciável, pois $N \circ X : U \to \mathbb{R}^3$ é diferenciável, e Y^{-1} é a restrição de uma aplicação diferenciável definida num aberto de $\mathbb{R}^3$.

Como S é uma superfície orientável, a aplicação de Gauss é diferenciável e a derivada de N, dN_p, no ponto $p \in S$ é uma aplicação linear de T_pS em $T_{N(p)}\mathbb{S}^2$, mas T_pS e $T_{N(p)}\mathbb{S}^2$ são o mesmo espaço vetorial, pelo que dN_p pode ser vista como um endomorfismo, isto é, uma aplicação linear de T_pS nele próprio.

De fato, como $N(p)$ é um vetor unitário normal a T_pS, então $T_pS = \langle N(p)\rangle^{\perp}$. E temos também:

$$T_{N(p)}\mathbb{S}^2 = \{w \in \mathbb{R}^3 : \langle w, N(p)\rangle = 0\} = \langle N(p)\rangle^{\perp}.$$

A aplicação linear $dN_p : T_pS \to T_pS$ é definida do seguinte modo: dada uma curva parametrizada $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ com $\alpha(0) = p$, consideramos a curva parametrizada $(N \circ \alpha)(t) = N(t)$ na esfera $\mathbb{S}^2$, que é equivalente a restringir o vetor N à curva $\alpha(t)$. O vetor tangente a $N(t)$ em $N(p)$ é dado por

$$N'(0) = \frac{d}{dt}(N \circ \alpha)(0) = dN_p(\alpha'(0))$$

é um vetor de T_pS.

Ele mede a taxa de variação do vetor normal N, restrito à curva $\alpha(t)$ em $t = 0$. Assim, dN_p mede quanto N se afasta de $N(p)$ em uma vizinhança de p.

Definição 4.2 *Seja V um espaço vetorial munido de um produto interno $\langle\ ,\ \rangle$. Diremos que uma aplicação linear $A : V \to V$ é auto-adjunta se $\langle Av, w\rangle = \langle v, Aw\rangle$ para todo $v, w \in V$.*

Proposição 4.1.1 *A diferencial $dN_p : T_pS \to T_pS$ da aplicação normal de Gauss é uma aplicação linear auto-adjunta.*

Demonstração 4.1.1 *Como dN_p é linear, basta provar que $\langle dN_p(w_1), w_2\rangle = \langle w_1, dN_p(w_2)\rangle$ para uma base $\{w_1, w_2\}$ de T_pS. Seja $X : U \to X(U)$ uma parametrização de S em p, com $X(q) = p$ e seja $\{X_u, X_v\}$ a base de T_pS associada a S. Se $\alpha : I \to X(U)$, $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ é uma curva parametrizada diferenciável em S, com $\alpha(0) = p$, temos*

$$\begin{aligned} dN_p(\alpha'(0)) &= dN_p\Big(u'(0)X_u + v'(0)X_v\Big) \\ &= u'(0)N_u + v'(0)N_v, \end{aligned}$$

observe que $N_u = dN_p(X_u)$ *e* $N_v = dN_p(X_v)$. *Para provar que* dN_p *é auto-adjunta, é suficiente mostrar que* $\langle N_u, X_v\rangle = \langle X_u, N_v\rangle$. *Como* N *é normal ao plano tangente temos que* $\langle N, X_u\rangle = 0$ *e* $\langle N, X_v\rangle = 0$. *Derivando estas relações em* v *e* u, *respectivamente, obtemos*

$$\begin{aligned} \langle N_v, X_u\rangle + \langle N, X_{uv}\rangle &= 0 \\ \langle N_u, X_v\rangle + \langle N, X_{vu}\rangle &= 0 \end{aligned}$$

Subtraindo estas últimas expressões e lembrando que $X_{uv} = X_{vu}$ *e que o produto interno é comutativo, temos:*

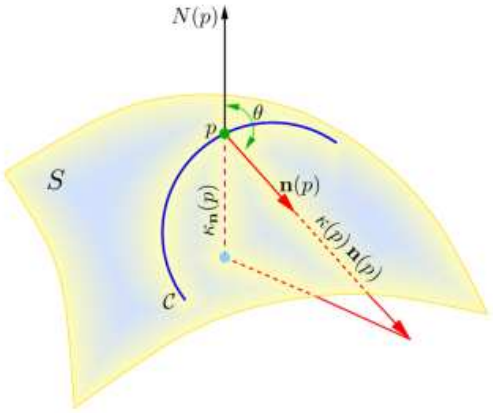
$$\langle N_v, X_u\rangle - \langle N_u, X_v\rangle = 0 \quad \textit{e portanto} \quad \langle dN_p(X_u), X_v\rangle = \langle X_u, dN_p(X_v)\rangle.$$

□

O fato de $dN_p : T_pS \to T_pS$ ser uma aplicação linear auto-adjunta nos permite associar a dN_p uma forma quadrática Q em T_pS , dada por $Q(v) = \langle dN_p(v), v\rangle$, $v \in T_pS$.

Definição 4.3 *A forma quadrática* $II_p : T_pS \to \mathbb{R}$ *definida por* $II_p(v) = -\langle dN_p(v), v\rangle$ *é chamada a segunda forma fundamental de* S *em* p.

Definição 4.4 *Seja* C *uma curva regular em* S *que passa por* p, κ *a curvatura de* C *em* p *e* $\cos\theta = \langle n, N\rangle$, *onde* n *é o vetor normal a* C *em* p *e* N *é o vetor normal a* S *em* p. *O número* $\kappa_n = \kappa\cos\theta$ *é chamado de curvatura normal de* C *em* p.



Fonte: (DELGADO; FRENSEL, 2010) pág. 172

O número $\kappa_n(p) = \kappa(p)\langle n(p), N(p)\rangle$ é o comprimento da projeção do vetor $\kappa(p)n(p)$ sobre o vetor $N(p)$ com sinal dado pela orientação $N(p)$ de S em p

Interpretação Geométrica da Segunda Forma Fundamental

Seja C uma curva regular em S, com $p \in C$, e $\alpha : I \to C$ uma parametrização de C pelo comprimento de arco tal que $\alpha(0) = p$.

Seja $\overline{N}(s) = N \circ \alpha(s)$. Como $\langle \overline{N}(s), \alpha'(s) \rangle = 0$ para todo $s \in I$, temos que $\langle \overline{N}(s), \alpha''(s) \rangle = -\langle \overline{N}(s), \alpha'(s) \rangle$, para todo $s \in I$. Logo,

$$\begin{aligned} II_p(\alpha'(0)) &= -\langle dN_p(\alpha'(0)), \alpha'(0) \rangle = -\langle \overline{N}(0), \alpha'(0) \rangle = \langle \overline{N}(0), \alpha''(0) \rangle \\ &= \langle N(p), \kappa(p) n(p) \rangle = \kappa_n(p). \end{aligned}$$

Assim, o valor de II_p em um vetor unitário $v \in T_pS$ é igual a curvatura normal de qualquer curva regular em S que passa por p e é tangente a v em p.

Proposição 4.1.2 (Meusnier) *Todas as curvas de uma superfície S que têm, em um ponto $p \in S$, a mesma reta tangente têm, neste ponto, a mesma curvatura normal.*

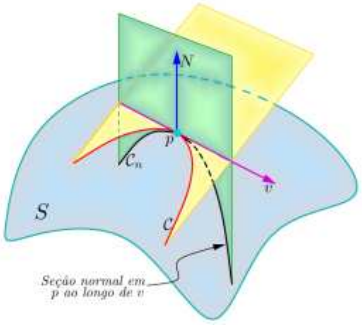
Demonstração 4.1.2 *(CARMO, 2010)*

– A proposição acima nos permite definir a curvatura normal de S no ponto $p \in S$ segundo uma dada direção v em T_pS da seguinte maneira:

$$\kappa_{n_p}(v) = \frac{II_p(v)}{I_p(v)}, \quad v \in T_pS - \{0\}.$$

Esta proposição motiva a seguinte definição.

Definição 4.5 *Seja $v \in T_pS$ um vetor unitário e seja $\pi(N(p), v)$ o plano que passa por p e é paralelo aos vetores v e $N(p)$. A interseção $S \cap \pi(N(p), v)$ é chamada seção normal de S em p ao longo de v.*



Fonte: (DELGADO; FRENSEL, 2010) pág. 173

Sabemos que $dN_p : T_pS \to T_pS$ é uma aplicação linear auto-adjunta. Então, existe uma base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ de T_pS tal que

$$\begin{aligned} dN_p(e_1) &= -\kappa_1 e_1, \\ dN_p(e_2) &= -\kappa_2 e_2. \end{aligned}$$

Além disso, κ_1 e κ_2 ($\kappa_1 \geq \kappa_2$) são o máximo e o mínimo da segunda forma fundamental. Portanto, a matriz do diferencial da aplicação normal de Gauss com relação a base $\{e_1, e_2\}$ é dada por

$$\begin{pmatrix} -\kappa_1 & 0 \\ 0 & -\kappa_2 \end{pmatrix}.$$

Os números κ_1 e κ_2 são chamadas curvaturas principais em p e os vetores e_1 e e_2 são chamados direções principais em p.

As curvaturas principais κ_1 e κ_2 determinam a curvatura normal em qualquer direção de T_pS. Considere $v \in T_pS$ e $||v|| = 1$, dada a base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ de T_pS, temos

$$v = \cos\theta e_1 + sen\,\theta e_2$$

onde θ é o ângulo de e_1 a v na orientação de T_pS. A curvatura normal κ_n em p na direção v é dada por:

$$\begin{aligned} \kappa_n &= II_p(v) = -\langle dN_p(v), v\rangle = -\langle dN_p(\cos\theta e_1 + sen\,\theta e_2), \cos\theta e_1 + sen\,\theta e_2\rangle \\ &= \langle \kappa_1 \cos\theta e_1 + \kappa_2\, sen\,\theta e_2, \cos\theta e_1 + sen\,\theta e_2\rangle = \kappa_1 \cos^2\theta + \kappa_2\, sen^2\,\theta \end{aligned}$$

que é conhecida sob o nome de Fórmula de Euler. Esta expressão nada mais é do que a expressão da segunda forma fundamental na base $\{e_1, e_2\}$.

Definição 4.6 *Sejam $p \in S$ e $dN_p : T_pS \to T_pS$ a diferencial da aplicação normal de Gauss em p. O determinante de dN_p é chamado a Curvatura Gaussiana K de S em p, e o negativoda metade do traço de dN_p é chamado a Curvatura Média H de S em p. Assim,*

$$K(p) = det(dN_p) \qquad e \qquad H(p) = -\frac{1}{2} traço(dN_p).$$

Em termos das curvaturas principais κ_1 e κ_2, podemos expressar como

$$K(p) = \kappa_1 \kappa_2 \qquad e \qquad H(p) = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}.$$

Observação 4.2 *Se mudarmos a orientação de S, a curvatura Gaussiana não muda, mas a curvatura Média muda de sinal.*

4.1.1 A aplicação de Gauss em coordenadas locais

Vejamos como expressar a segunda forma fundamental e a diferencial da aplicação normal de Gauss em coordenadas locais.

Consideraremos que todas as parametrizações $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ são compatíveis com a orientação N de S, isto é, que em $X(U)$,

$$N = \frac{X_u \times X_v}{||X_u \times X_v||}.$$

Seja $X(u,v)$ uma parametrização em um ponto $p \in S$. Seja $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ uma curva parametrizada em S, com $\alpha(0) = p$. Simplificaremos a notação, convencionando que todas as funções seguintes têm seus valores calculados no ponto p. O vetor tangente à curva $\alpha(t)$ em p é dado por $\alpha' = X_u u' + X_v v'$ e a derivada de N na direção deste vetor é

$$dN(\alpha') = \frac{d}{dt}N(u(t), v(t)) = N_u u' + N_v v'. \tag{4.1}$$

Derivando $\langle N, N\rangle = 1$ com respeito a u e a v, teremos $\langle N_u, N\rangle = 0$ e $\langle N_v, N\rangle = 0$. Logo, N_u e N_v também pertencem a T_pS e podem ser escritos como combinação linear de X_u e X_v:

$$N_u = a_{11}X_u + a_{21}X_v \tag{4.2}$$

$$N_v = a_{12}X_u + a_{22}X_v \tag{4.3}$$

Substituindo (4.2) e (4.3) em (4.1), teremos

$$dN(\alpha') = (a_{11}u' + a_{12}v')X_u + (a_{21}u' + a_{22}v')X_v.$$

Matricialmente, na base $\{X_u, X_v\}$, podemos escrever

$$dN \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}.$$

Procuraremos obter, a seguir, os coeficientes da segunda forma fundamental.

A expressão da segunda forma fundamental na base $\{X_u, X_v\}$ é dada por

$$\mathrm{II}_p(\alpha') = -\langle dN(\alpha'), \alpha'\rangle = -\langle N_u u' + N_v v', X_u u' + X_v v'\rangle$$

Como $\langle N_u, X_v\rangle = \langle N_v, X_u\rangle$, pelo fato de a derivada da aplicação de Gauss ser auto-adjunta, então

$$\mathrm{II}_p(\alpha') = -[\langle N_u, X_u\rangle u'^2 + \langle N_v, X_v\rangle u'v' + \langle N_u, X_v\rangle u'v' + \langle X_v, X_v\rangle v'^2].$$

Vamos denotar, nessa expressão

$$\begin{aligned} -\langle N_u, X_u\rangle &= e \\ -\langle N_v, X_u\rangle &= -\langle N_u, X_v\rangle = f \\ -\langle N_v, X_v\rangle &= g \end{aligned}$$

Temos

$$\mathrm{II}_p(\alpha') = eu'^2 + 2fu'v' + gv'^2.$$

Onde e, f, g são os coeficientes da segunda forma fundamental.

Vamos obter agora os valores a_{ij} em termos dos coeficientes da segunda forma fundamental. A partir das equações (4.2) e (4.3) obtemos:

$$\begin{aligned} -e &= \langle N_u, X_u\rangle = \langle a_{11}X_u + a_{21}X_v, X_u\rangle = a_{11}E + a_{21}F \\ -f &= \langle N_u, X_v\rangle = \langle a_{11}X_u + a_{21}X_v, X_v\rangle = a_{11}F + a_{21}G \\ -f &= \langle N_v, X_u\rangle = \langle a_{12}X_u + a_{22}X_v, X_v\rangle = a_{12}E + a_{22}F, \\ -g &= \langle N_v, X_v\rangle = \langle a_{12}X_u + a_{22}X_v, X_v\rangle = a_{12}F + a_{22}G. \end{aligned}$$

Sendo E, F *e* G são os coeficientes da primeira forma fundamental na base $\{X_u, X_v\}$. As relações acima podem ser expressas na seguinte forma matricial:

$$-\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix},$$

temos então que,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} &= -\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \\ &= -\frac{1}{EG-F^2} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{EG-F^2} \begin{pmatrix} fF-eG & eF-fE \\ gF-fG & fF-gE \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Portanto os a_{ij} são:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{fF-eG}{EG-F^2}; \qquad a_{12} = \frac{gF-fG}{EG-F^2} \\ a_{21} &= \frac{eF-fE}{EG-F^2}; \qquad a_{12} = \frac{fF-gE}{EG-F^2} \end{aligned}$$

As equações

$$N_u = a_{11}X_u + a_{21}X_v \qquad e \qquad N_v = a_{12}X_u + a_{22}X_v,$$

como a_{11}, a_{12}, a_{21} e a_{22} obtidos acima são conhecidas como as Equações de Weingarten.

Para calcular os coeficientes da segunda forma fundamental, vamos proceder da seguinte forma: Como N é simultaneamente ortogonal a X_u e a X_v, consideremos as igualdades $\langle N, X_u\rangle = 0$ e $\langle N, X_v\rangle = 0$. Derivando ambas expressões com respeito às variáveis u e v:

$$\langle N, X_u\rangle_u = \langle N_u, X_u\rangle + \langle N, X_{uu}\rangle = 0$$
$$\langle N, X_u\rangle_v = \langle N_v, X_u\rangle + \langle N, X_{uv}\rangle = 0$$
$$\langle N, X_v\rangle_v = \langle N_v, X_v\rangle + \langle N, X_{vv}\rangle = 0$$

Onde estamos a usar a notação $\langle N, X_u\rangle_u$ para a derivada parcial da expressão com respeito a u e $\langle N, X_v\rangle_v$ a derivada parcial com respeito a v.

Das equações acima obtidas, vem:

$$\langle N_u, X_u\rangle = -\langle N, X_{uu}\rangle, \quad \langle N_v, X_u\rangle = -\langle N, X_{uv}\rangle, \quad \langle N_v, X_v\rangle = -\langle N, X_{vv}\rangle.$$

Assim, podemos calcular os coeficientes e, f e g da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
e &= -\langle N_u, X_u\rangle = \langle N, X_{uu}\rangle = \left\langle \frac{X_u \times X_v}{||X_u \times X_v||}, X_{uu} \right\rangle = \frac{(X_u, X_v, X_{uu})}{\sqrt{EG - F^2}} \\
f &= -\langle N_u, X_v\rangle = \langle N, X_{uv}\rangle = \left\langle \frac{X_u \times X_v}{||X_u \times X_v||}, X_{uv} \right\rangle = \frac{(X_u, X_v, X_{uv})}{\sqrt{EG - F^2}} \\
g &= -\langle N_v, X_v\rangle = \langle N, X_{vv}\rangle = \left\langle \frac{X_u \times X_v}{||X_u \times X_v||}, X_{vv} \right\rangle = \frac{(X_u, X_v, X_{vv})}{\sqrt{EG - F^2}}
\end{aligned}$$

Usamos a notação

$$||X_u \times X_v|| = \sqrt{\langle X_u, X_u\rangle\langle X_v, X_v\rangle - \langle X_u, X_v\rangle^2} = \sqrt{EG - F^2}$$

e

$$\langle X_u \times X_v, X_{uu}\rangle = (X_u, X_v, X_{uu}),$$
$$\langle X_u \times X_v, X_{uv}\rangle = (X_u, X_v, X_{uv}),$$
$$\langle X_u \times X_v, X_{uu}\rangle = (X_u, X_v, X_{uv}).$$

A partir da representação matricial de dN, pela definição de curvatura de Gauss, é imediato que

$$K = \det(a_{ij}) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}.$$

Observação 4.3 *Note que a expressão da curvatura gaussiana na equação depende dos coeficientes da primeira e da segunda forma fundamental. Estes são definidos por meio de produtos internos das derivadas parciais da parametrização da superfície. Porém, a escolha da parametrização não irá interferir no valor da curvatura gaussiana.*

Quanto à curvatura média, sabendo que dN tem os valores próprios $-\kappa_1$, $-\kappa_2$, então, κ_1 e κ_2 satisfazem a equação

$$dN(w) = -\kappa w = -\kappa I(w), \text{ para algum } w \in T_pS,\ w \neq 0,$$

onde I é a aplicação identidade. Resulta que a aplicação linear $dN + \kappa I$ é não invertível. Logo, o seu determinante é nulo, ou seja:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11}+\kappa & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}+\kappa \end{pmatrix}$$

o mesmo que

$$\kappa^2 + \kappa(a_{11}+a_{22}) + a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = 0$$

Essa equação quadrática tem raízes κ_1 e κ_2, o que nos leva a concluir que $a_{11}+a_{22} = -(\kappa_1+\kappa_2)$, isso implica que

$$H = \frac{1}{2}(\kappa_1+\kappa_2) = -\frac{1}{2}(a_{11}+a_{22}) = \frac{1}{2}\frac{Ge-2Ff+Eg}{EG-F^2}$$

sendo

$$\kappa^2 - 2H\kappa + K = 0,$$

e portanto

$$\kappa = H \pm \sqrt{H^2-K}$$

onde a Curvatura Gaussiana $K = \det(a_{ij}) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$.

Se considerarmos $\kappa_1 \geqslant \kappa_2$, temos

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= H + \sqrt{H^2-K} \\ \kappa_2 &= H - \sqrt{H^2-K} \end{aligned}$$

que são funções contínuas em S.

4.2 Classificação dos Pontos em uma Superfícies

Definição 4.7 *Um ponto p de uma superfície S é chamado*

1. *Elíptico, se* $\det(dN_p) > 0$.
2. *Hiperbólico, se* $\det(dN_p) < 0$.
3. *Parabólico, se* $\det(dN_p) = 0$, *com* $dN_p \neq 0$.
4. *Planar, se* $dN_p = 0$.

A classificação acima não depende da orientação escolhida para S.

Observação 4.4 *Num ponto elíptico, a curvatura Gaussiana é positiva e, portanto, as curvaturas principais têm o mesmo sinal. Assim, todas as curvas passando pelo ponto têm seus vetores normais apontando para um mesmo lado do plano tangente.*

Observação 4.5 *Em um ponto hiperbólico p, a curvatura Gaussiana é negativa. Assim, as curvaturas principais têm sinais opostos e, portanto, existem curvas passando pelo ponto p cujos vetores normais em p apontam para lados diferentes do plano tangente.*

Observação 4.6 *Em um ponto parabólico, a curvatura Gaussiana é nula, mas um das curvaturas principais é diferente de zero.*

Observação 4.7 *Em um ponto planar p, todas as curvaturas normais são nulas. portanto* $K(p) = H(p) = 0$.

Definição 4.8 *Um ponto p de uma superfície regular S é chamado umbílico se* $\kappa_1(p) = \kappa_2(p)$.

Observação 4.8 *Se p é um ponto umbílico, então* $K(p) \geqslant 0$. *Além disso,* $K(p) = 0$ *se, e só se, p é planar. Ou seja, um ponto umbílico é elíptico ou planar.*

Tipo de Ponto	Condição	Caracterização
Elíptico	$K(p) > 0$	κ_1 e κ_2 têm o mesmo sinal
Parabólico	$K(p) = 0$	Exatamente uma curvatura principal é nula
Hiperbólico	$K(p) < 0$	κ_1 e κ_2 têm sinais opostos
Planar (ou umbílico plano)	$\kappa_1 = \kappa_2 = 0$	Ambas as curvaturas principais são nulas

Uma maneira de caracterizar pontos umbílicos é através das curvaturas Gaussiana e Média, como mostra a seguinte proposição.

Proposição 4.2.1 *p é um ponto umbílico se e só se,* $H^2(p) = K(p)$.

Demonstração 4.2.1

$$H^2(p) - K(p) = \left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}\right)^2 - \kappa_1\kappa_2 = \frac{\kappa_1^2 + 2\kappa_1\kappa_2 + \kappa_2^2 - 4\kappa_1\kappa_2}{4} = \frac{(\kappa_1 - \kappa_2)^2}{4} \geqslant 0.$$

Logo, $H^2(p) = K(p)$ *se, e só se* $\kappa_1 = \kappa_2$.

□

A proposição seguinte dá outra caracterização de um ponto umbílico, desta vez em termos dos coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais.

Proposição 4.2.2 *Seja* $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *uma superfície regular. Um ponto* $q \in U$ *é umbílico, se e só se, existe um número real* λ *tal que*

$$e = \lambda E \quad f = \lambda F \quad g = \lambda G$$

onde E, F,G, e, f *e* g *indicam os coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais em q. Neste caso,* λ *é igual às curvaturas principais de X em q.*

Demonstração 4.2.2 *Se q é um ponto umbílico, então* $\forall\ w \in T_pX,\ w \neq 0$ *temos que* $\kappa_n(w) = \lambda$ *é constante. Isto é,* $\mathrm{II}_q(w) = \lambda \mathrm{I}_p(w)$.

Portanto, $w = aX_u(q) + bX_v(q)$, *então*

$$a^2e + 2abf + b^2g = a^2\lambda E + 2ab\lambda F + b^2\lambda G.$$

Em particular, se $w = X_u(q)$ *obtemos* $e = \lambda E$. *Analogamente, se* $w = X_v(q)$ *obtemos* $g = \lambda G$ *e finalmente, usando estas duas igualdades e considerando* $w = X_u(q) + X_v(q)$, *obtemos* $f = \lambda F$. *Reciprocamente, se os coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais são proporcionais então, para todo* $w \in T_pX$, $w \neq 0$, *temos*

$$\mathrm{II}_q(w) = \lambda \mathrm{I}_q(w),$$

consequentemente $\kappa_n(w) = \lambda$, *isto é, q é um ponto umbílico de X.*

4.3 Exemplos

Plano

Considere a parametrização do plano $X : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, definida por

$$X(u,v) = (u,v,0)$$

onde $(u,v) \in \mathbb{R}^2$.

As derivadas parciais da parametrização, são

$$X_u = \frac{\partial X}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u}(u,v,0) = \left(\frac{\partial u}{\partial u}, \frac{\partial v}{\partial u}, \frac{\partial 0}{\partial u}\right) = (1,0,0)$$

$$X_v = \frac{\partial X}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v}(u,v,0) = \left(\frac{\partial u}{\partial v}, \frac{\partial v}{\partial v}, \frac{\partial 0}{\partial v}\right) = (0,1,0)$$

Os coeficientes da primeira forma fundamental são dados pelos produtos escalares

$$E = \langle X_u, X_u \rangle = \langle (1,0,0), (1,0,0) \rangle = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 1$$

$$F = \langle X_u, X_v \rangle = \langle (1,0,0), (0,1,0) \rangle = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 0$$

$$G = \langle X_v, X_v \rangle = \langle (0,1,0), (0,1,0) \rangle = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 1$$

A primeira forma fundamental é a métrica induzida na superfície

$$\mathrm{I} = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 = 1 \cdot du^2 + 2 \cdot 0 \cdot du\,dv + 1 \cdot dv^2$$

Portanto

$$\boxed{\mathrm{I} = du^2 + dv^2}$$

que corresponde à métrica euclidiana usual do plano.

Observe que,

$$EG - F^2 = 1 \cdot 1 - 0^2 = 1$$

Calculamos o produto vetorial $X_u \times X_v$, temos

$$X_u \times X_v = \mathbf{i}(0) - \mathbf{j}(0) + \mathbf{k}(1) = (0,0,1)$$

A norma deste vetor é

$$\|X_u \times X_v\| = \sqrt{0^2+0^2+1^2} = \sqrt{1} = 1$$

Portanto, o vetor normal unitário é

$$N = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|} = \frac{(0,0,1)}{1} = \boxed{(0,0,1)}$$

Observação: O vetor normal é constante em todo o plano, o que caracteriza o plano como uma superfície com curvatura nula.

Calculando as derivadas parciais de segunda ordem

$$X_{uu} = \frac{\partial^2 X}{\partial u^2} = \frac{\partial}{\partial u}(1,0,0) = (0,0,0)$$

$$X_{uv} = \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} = \frac{\partial}{\partial v}(1,0,0) = (0,0,0)$$

$$X_{vu} = \frac{\partial^2 X}{\partial v \partial u} = \frac{\partial}{\partial u}(0,1,0) = (0,0,0)$$

$$X_{vv} = \frac{\partial^2 X}{\partial v^2} = \frac{\partial}{\partial v}(0,1,0) = (0,0,0)$$

Note que $X_{uv} = X_{vu}$ pela igualdade das derivadas mistas (Teorema de Schwarz).

Os coeficientes da segunda forma fundamental são dados por

$$e = \langle X_{uu}, N \rangle = \langle (0,0,0), (0,0,1) \rangle = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$$

$$f = \langle X_{uv}, N \rangle = \langle (0,0,0), (0,0,1) \rangle = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$$

$$g = \langle X_{vv}, N \rangle = \langle (0,0,0), (0,0,1) \rangle = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$$

A segunda forma fundamental é

$$\mathrm{II} = e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2 = 0 \cdot du^2 + 2 \cdot 0 \cdot du\,dv + 0 \cdot dv^2$$

Portanto

$$\boxed{\mathrm{II} = 0}$$

Interpretação geométrica: A segunda forma fundamental ser identicamente nula indica que não há curvatura normal em nenhuma direção tangente ao plano.

As curvaturas principais são as autovalores da forma de Weingarten, dados pelas raízes da equação característica

$$\det \begin{pmatrix} e-\kappa E & f-\kappa F \\ f-\kappa F & g-\kappa G \end{pmatrix} = 0$$

Substituindo os valores calculados ($e = f = g = 0$, $E = G = 1$, $F = 0$)

$$\det \begin{pmatrix} 0-\kappa\cdot 1 & 0-\kappa\cdot 0 \\ 0-\kappa\cdot 0 & 0-\kappa\cdot 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -\kappa & 0 \\ 0 & -\kappa \end{pmatrix} = 0$$

temos que,

$$\det \begin{pmatrix} -\kappa & 0 \\ 0 & -\kappa \end{pmatrix} = (-\kappa)\cdot(-\kappa) - 0\cdot 0 = \kappa^2 = 0$$

A equação característica é

$$\kappa^2 = 0$$

cuja solução é

$$\kappa = 0 \quad \text{(raiz dupla)}$$

Portanto, as curvaturas principais são

$$\boxed{\kappa_1 = 0, \quad \kappa_2 = 0}$$

Conclusão: Ambas as curvaturas principais são nulas em todos os pontos do plano.

Calculando a Curvatura de Gauss do Plano

$$K = \kappa_1 \cdot \kappa_2 = 0\cdot 0 = \boxed{0}$$

Alternativamente, usando a fórmula direta

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{0\cdot 0 - 0^2}{1\cdot 1 - 0^2} = \frac{0}{1} = 0$$

A curvatura média é definida por

$$H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} = \frac{0+0}{2} = \frac{0}{2} = \boxed{0}$$

Alternativamente, usando a fórmula

$$H = \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)} = \frac{0 \cdot 1 - 2 \cdot 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1}{2(1 - 0)} = \frac{0}{2} = 0$$

A matriz da aplicação de Weingarten (ou shape operator) $-dN_p$ na base $\{\mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v\}$ é dada por:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} eG - fF & fE - eF \\ fG - gF & gE - fF \end{pmatrix}$$

Substituindo os valores

$$= \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 - 0 \cdot 0 & 0 \cdot 1 - 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 1 - 0 \cdot 0 & 0 \cdot 1 - 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A matriz de Weingarten é a matriz nula, confirmando que todas as curvaturas são nulas.

Conclusão: Todos os pontos de um plano são pontos planar (ou umbílicos planos), caracterizados por $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$.

O plano ocupa uma posição especial na geometria diferencial.

1. É a superfície modelo para geometria euclidiana plana.
2. É o único (a menos de isometria) superfície com $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$ em todos os pontos.
3. Serve como referência para definir curvaturas (todas as curvaturas são medidas em relação ao plano).
4. É o espaço tangente T_pS em qualquer ponto p de qualquer superfície.
5. É a única superfície mínima completa que é também totalmente geodésica.

Definição 4.9 (Superfície Mínima) *Uma superfície $S \subset \mathbb{R}^3$ é dita mínima se sua curvatura média se anula identicamente:*

$$H = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2) = 0$$

onde κ_1 e κ_2 são as curvaturas principais de S.

Definição 4.10 (Superfície Mínima Completa) *Uma superfície mínima (S, g) é dita completa quando:*

1. *É sem fronteira: $\partial S = \emptyset$*
2. *Totalmente Geodésica: A segunda forma fundamental se anula identicamente em toda a superfície ($\mathrm{II} \equiv 0$).*

Cilindro

Consideremos o cilindro circular reto de raio $R > 0$ parametrizado por

$$X(u,v) = (R\cos u, R\,sen\,u, v), \quad u \in [0, 2\pi), \quad v \in \mathbb{R}$$

Calculamos as derivadas parciais da parametrização

$$X_u = \frac{\partial X}{\partial u} = (-R\,sen\,u, R\cos u, 0)$$
$$X_v = \frac{\partial X}{\partial v} = (0, 0, 1)$$

Os coeficientes da primeira forma fundamental são dados pelos produtos escalares.

$$E = \langle X_u, X_u \rangle = (-R\,sen\,u)^2 + (R\cos u)^2 + 0^2 = R^2\,sen^2\,u + R^2\cos^2 u = R^2$$
$$F = \langle X_u, X_v \rangle = (-R\,sen\,u)(0) + (R\cos u)(0) + (0)(1) = 0 + 0 + 0 = 0$$
$$G = \langle X_v, X_v \rangle = 0^2 + 0^2 + 1^2 = 1$$

A primeira forma fundamental é

$$\mathrm{I} = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 = R^2\,du^2 + 2\cdot 0\cdot du\,dv + 1\cdot dv^2$$

Portanto,

$$\boxed{\mathrm{I} = R^2\,du^2 + dv^2}$$

Observação: A métrica do cilindro é a mesma do plano (após a mudança de coordenadas $\tilde{u} = Ru$), o que indica que o cilindro é localmente isométrico ao plano.

Determinante da Primeira Forma Fundamental

$$EG - F^2 = R^2 \cdot 1 - 0^2 = R^2$$

Calculamos o produto vetorial $X_u \times X_v$, temos

$$X_u \times X_v = (R\cos u, R\,sen\,u, 0)$$

A norma deste vetor é

$$\|X_u \times X_v\| = \sqrt{(R\cos u)^2 + (R\,sen\,u)^2 + 0^2} = \sqrt{R^2(\cos^2 u + sen^2\,u)} = \sqrt{R^2} = R$$

Portanto, o vetor normal unitário é

$$N = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|} = \frac{(R\cos u,\, R\,sen\,u,\, 0)}{R}$$

Portanto,

$$\boxed{N = (\cos u,\, sen\,u,\, 0)}$$

Interpretação geométrica: O vetor normal unitário aponta radialmente para fora (no plano xy), perpendicular ao eixo z do cilindro. Note que N não depende de v, ou seja, é constante ao longo das retas verticais (geratrizes) do cilindro.

Calculando as derivadas parciais de segunda ordem.

$$X_{uu} = \frac{\partial}{\partial u}(-R\,sen\,u,\, R\cos u,\, 0) = (-R\cos u,\, -R\,sen\,u,\, 0)$$
$$X_{uv} = \frac{\partial}{\partial v}(-R\,sen\,u,\, R\cos u,\, 0) = (0,\, 0,\, 0)$$
$$X_{vv} = \frac{\partial}{\partial v}(0,\, 0,\, 1) = (0,\, 0,\, 0)$$

Os coeficientes da segunda forma fundamental são dados por

$$e = \langle X_{uu}, N\rangle = (-R\cos u)(\cos u) + (-R\,sen\,u)(sen\,u) + (0)(0) = -R(\cos^2 u + sen^2\, u) = -R$$
$$f = \langle X_{uv}, N\rangle = (0)(\cos u) + (0)(sen\,u) + (0)(0) = 0$$
$$g = \langle X_{vv}, N\rangle = (0)(\cos u) + (0)(sen\,u) + (0)(0) = 0$$

A segunda forma fundamental é

$$II = e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2 = -R\,du^2 + 2\cdot 0\cdot du\,dv + 0\cdot dv^2$$

Portanto

$$\boxed{II = -R\,du^2}$$

Observação importante: A segunda forma fundamental depende apenas de du^2, indicando que há curvatura apenas na direção circular (direção u), enquanto na direção vertical (direção v) a curvatura é nula. Isso caracteriza o cilindro como uma superfície **regrada desenvolvível**.

As curvaturas principais são as autovalores da forma de Weingarten, dados pelas raízes da equação característica

$$\det \begin{pmatrix} e - \kappa E & f - \kappa F \\ f - \kappa F & g - \kappa G \end{pmatrix} = 0$$

Substituindo os valores ($e = -R$, $f = 0$, $g = 0$, $E = R^2$, $F = 0$, $G = 1$)

$$\det \begin{pmatrix} -R - \kappa R^2 & 0 - \kappa \cdot 0 \\ 0 - k \cdot 0 & 0 - \kappa \cdot 1 \end{pmatrix} = 0$$

donde temos,

$$\det \begin{pmatrix} -R(1+\kappa R) & 0 \\ 0 & -\kappa \end{pmatrix} = 0$$

assim,

$$[-R(1+\kappa R)] \cdot [-\kappa] - 0 = R\kappa(1+\kappa R) = 0$$

A equação característica é

$$R\kappa(1+\kappa R) = 0$$

Como $R > 0$, temos

$$\kappa(1+\kappa R) = 0$$

As soluções são

$$\kappa = 0 \quad \text{ou} \quad 1 + \kappa R = 0 \implies \kappa = -\frac{1}{R}$$

Portanto, as curvaturas principais são

$$\boxed{\kappa_1 = -\frac{1}{R}, \quad \kappa_2 = 0}$$

Conclusão: As curvaturas principais são **constantes** em todos os pontos do cilindro: uma igual a $-\frac{1}{R}$ (na direção circular) e outra nula (na direção vertical).

Calculando Curvatura de Gauss do Cilindro

$$K = \kappa_1 \cdot \kappa_2 = \left(-\frac{1}{R}\right) \cdot 0 = \boxed{0}$$

Alternativamente, usando a fórmula direta

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{(-R)(0) - 0^2}{R^2 \cdot 1 - 0} = \frac{0}{R^2} = 0$$

Observação fundamental: A curvatura de Gauss do cilindro é identicamente nula em todos os pontos. Isso caracteriza o cilindro como uma **superfície desenvolvível**, localmente isométrica ao plano.

A curvatura média é definida por

$$H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} = \frac{-\frac{1}{R} + 0}{2} = \frac{-\frac{1}{R}}{2} = \boxed{-\frac{1}{2R}}$$

Alternativamente, usando a fórmula

$$H = \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)} = \frac{(-R)(1) - 2 \cdot 0 \cdot 0 + (0)(R^2)}{2R^2} = \frac{-R}{2R^2} = -\frac{1}{2R}$$

Observação: A curvatura média não é nula, indicando que o cilindro não é uma superfície mínima (exceto no limite degenerado $R \to \infty$, que corresponde ao plano).

A matriz da aplicação de Weingarten $-dN_p$ na base $\{X_u, X_v\}$ é dada por

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} eG - fF & fE - eF \\ fG - gF & gE - fF \end{pmatrix}$$

Substituindo os valores

$$a_{11} = \frac{eG - fF}{EG - F^2} = \frac{(-R)(1) - 0}{R^2} = \frac{-R}{R^2} = -\frac{1}{R}$$

$$a_{12} = \frac{fE - eF}{EG - F^2} = \frac{0 \cdot R^2 - (-R) \cdot 0}{R^2} = 0$$

$$a_{21} = \frac{fG - gF}{EG - F^2} = \frac{0 \cdot 1 - 0 \cdot 0}{R^2} = 0$$

$$a_{22} = \frac{gE - fF}{EG - F^2} = \frac{0 \cdot R^2 - 0}{R^2} = 0$$

Portanto

$$-dN_p = \begin{pmatrix} -\frac{1}{R} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Interpretação: A matriz de Weingarten é diagonal com autovalores $-\frac{1}{R}$ e 0, confirmando as curvaturas principais. A direção X_u (circular) tem curvatura não nula, enquanto a direção X_v (vertical) tem curvatura nula.

Conclusão: Todos os pontos de um cilindro circular reto de raio R são pontos parabólicos, caracterizados por $\kappa_1 = -\frac{1}{R}$, $\kappa_2 = 0$ e $K = 0$.

O cilindro ocupa uma posição intermediária na geometria diferencial.

1. É o modelo clássico de superfície com curvatura de Gauss nula mas curvatura média não nula.
2. É uma superfície regrada desenvolvível, gerada por retas (geratrizes) paralelas a um eixo fixo.
3. Serve como exemplo fundamental de que $K = 0$ não implica ser plano: existem muitas superfícies desenvolvíveis não planas.
4. É utilizado em engenharia (cilindros hidráulicos, tubulações) pela propriedade de desenvolvibilidade (pode ser fabricado a partir de chapas planas).
5. Generalizações: superfícies de curvatura média constante com $K = 0$ são cilindros circulares ou planos.
6. Em relatividade geral, o cilindro representa uma geometria com curvatura extrínseca mas sem curvatura intrínseca.

Observação 4.9

Uma superfície regrada é uma superfície gerada pelo movimento de uma linha reta no espaço.

Uma superfície é desenvolvível quando pode ser "desenvolvida"(achatada) sobre um plano sem distorção - ou seja, sem esticar ou rasgar. Geometricamente, isso significa que a curvatura gaussiana K é zero em todos os pontos ($K \equiv 0$).

Esfera

Parametrizamos a esfera usando coordenadas esféricas

$$X(\theta,\varphi) = (R\,sen\,\theta\cos\varphi,\, R\,sen\,\theta\,sen\,\varphi,\, R\cos\theta)$$

onde $\theta \in (0,\pi)$ é a colatitude (ângulo com o eixo z) e $\varphi \in (0,2\pi)$ é a longitude (ângulo no plano xy).

Calculamos as derivadas parciais da parametrização

$$X_\theta = \frac{\partial X}{\partial \theta} = (R\cos\theta\cos\varphi,\, R\cos\theta\,sen\,\varphi,\, -R\,sen\,\theta)$$
$$X_\varphi = \frac{\partial X}{\partial \varphi} = (-R\,sen\,\theta\,sen\,\varphi,\, R\,sen\,\theta\cos\varphi,\, 0)$$

Os coeficientes da primeira forma fundamental são dados pelos produtos escalares

$$\begin{aligned}
E &= (R\cos\theta\cos\varphi)^2 + (R\cos\theta\,sen\,\varphi)^2 + (-R\,sen\,\theta)^2 \\
&= R^2\cos^2\theta(\cos^2\varphi + sen^2\varphi) + R^2\,sen^2\,\theta = R^2(\cos^2\theta + sen^2\,\theta) = R^2 \\
F &= (R\cos\theta\cos\varphi)(-R\,sen\,\theta\,sen\,\varphi) + (R\cos\theta\,sen\,\varphi)(R\,sen\,\theta\cos\varphi) + (-R\,sen\,\theta)(0) \\
&= -R^2\cos\theta\,sen\,\theta\cos\varphi\,sen\,\varphi + R^2\cos\theta\,sen\,\theta\cos\varphi\,sen\,\varphi = 0 \\
G &= (-R\,sen\,\theta\,sen\,\varphi)^2 + (R\,sen\,\theta\cos\varphi)^2 + 0^2 \\
&= R^2\,sen^2\,\theta\,sen^2\,\varphi + R^2\,sen^2\,\theta\cos^2\varphi = R^2\,sen^2\,\theta(sen^2\,\varphi + \cos^2\varphi) = R^2\,sen^2\,\theta
\end{aligned}$$

A primeira forma fundamental é

$$\mathrm{I} = E\,d\theta^2 + 2F\,d\theta\,d\varphi + G\,d\varphi^2 = R^2\,d\theta^2 + R^2\,sen^2\,\theta\,d\varphi^2$$

Portanto

$$\boxed{\mathrm{I} = R^2\,d\theta^2 + R^2\,sen^2\,\theta\,d\varphi^2}$$

Donde temos,

$$EG - F^2 = R^2 \cdot R^2\,sen^2\,\theta - 0^2 = R^4\,sen^2\,\theta$$

Observação: O determinante se anula quando $sen\,\theta = 0$, ou seja, nos polos $\theta = 0$ e $\theta = \pi$. Estes são os únicos pontos onde a parametrização é singular (os meridianos se encontram).

Calculamos o produto vetorial $X_\theta \times X_\varphi$, temos

$$X_\theta \times X_\varphi = \left(R^2\, sen^2\,\theta \cos\varphi,\, R^2\, sen^2\,\theta\, sen\,\varphi,\, R^2\, sen\,\theta \cos\theta\right) = R^2\, sen\,\theta\,(sen\,\theta\cos\varphi,\, sen\,\theta\, sen\,\varphi,\, \cos\theta)$$

A norma deste vetor é

$$\begin{aligned}\|X_\theta \times X_\varphi\| &= R^2\, sen\,\theta\sqrt{sen^2\,\theta\cos^2\varphi + sen^2\,\theta\, sen^2\,\varphi + \cos^2\theta} \\ &= R^2\, sen\,\theta\sqrt{sen^2\,\theta(\cos^2\varphi + sen^2\,\varphi) + \cos^2\theta} = R^2\, sen\,\theta\sqrt{sen^2\,\theta + \cos^2\theta} = R^2\, sen\,\theta\end{aligned}$$

Portanto, o vetor normal unitário é

$$N = \frac{X_\theta \times X_\varphi}{\|X_\theta \times X_\varphi\|} = \frac{R^2\, sen\,\theta\,(sen\,\theta\cos\varphi,\, sen\,\theta\, sen\,\varphi,\, \cos\theta)}{R^2\, sen\,\theta}$$

Portanto,

$$\boxed{N = (sen\,\theta\cos\varphi,\, sen\,\theta\, sen\,\varphi,\, \cos\theta) = \frac{1}{R}X(\theta,\varphi)}$$

Interpretação geométrica: O vetor normal unitário na esfera aponta na mesma direção do vetor posição, confirmando que a esfera é uma superfície onde a normal é radial.

Calculando as derivadas parciais de segunda ordem

$$X_{\theta\theta} = \frac{\partial}{\partial\theta}(R\cos\theta\cos\varphi,\, R\cos\theta\, sen\,\varphi,\, -R\, sen\,\theta) = (-R\, sen\,\theta\cos\varphi,\, -R\, sen\,\theta\, sen\,\varphi,\, -R\cos\theta)$$

$$X_{\theta\varphi} = \frac{\partial}{\partial\varphi}(R\cos\theta\cos\varphi,\, R\cos\theta\, sen\,\varphi,\, -R\, sen\,\theta) = (-R\cos\theta\, sen\,\varphi,\, R\cos\theta\cos\varphi,\, 0)$$

$$X_{\varphi\varphi} = \frac{\partial}{\partial\varphi}(-R\, sen\,\theta\, sen\,\varphi,\, R\, sen\,\theta\cos\varphi,\, 0) = (-R\, sen\,\theta\cos\varphi,\, -R\, sen\,\theta\, sen\,\varphi,\, 0)$$

Os coeficientes da segunda forma fundamental são dados por

$$\begin{aligned}e &= \langle X_{\theta\theta}, N\rangle = (-R\, sen\,\theta\cos\varphi)(sen\,\theta\cos\varphi) + (-R\, sen\,\theta\, sen\,\varphi)(sen\,\theta\, sen\,\varphi) + (-R\cos\theta)(\cos\theta) \\ &= -R\, sen^2\,\theta\cos^2\varphi - R\, sen^2\,\theta\, sen^2\,\varphi - R\cos^2\theta = -R\, sen^2\,\theta - R\cos^2\theta = R \\ f &= (-R\cos\theta\, sen\,\varphi)(sen\,\theta\cos\varphi) + (R\cos\theta\cos\varphi)(sen\,\theta\, sen\,\varphi) + (0)(\cos\theta) \\ &= -R\cos\theta\, sen\,\theta\, sen\,\varphi\cos\varphi + R\cos\theta\, sen\,\theta\cos\varphi\, sen\,\varphi + 0 = 0 \\ g &= (-R\, sen\,\theta\cos\varphi)(sen\,\theta\cos\varphi) + (-R\, sen\,\theta\, sen\,\varphi)(sen\,\theta\, sen\,\varphi) + (0)(\cos\theta) \\ &= -R\, sen^2\,\theta\cos^2\varphi - R\, sen^2\,\theta\, sen^2\,\varphi = -R\, sen^2\,\theta(\cos^2\varphi + sen^2\,\varphi) = -R\, sen^2\,\theta\end{aligned}$$

A segunda forma fundamental é

$$\mathrm{II} = e\,d\theta^2 + 2f\,d\theta\,d\varphi + g\,d\varphi^2 = -R\,d\theta^2 - R\, sen^2\,\theta\,d\varphi^2$$

Portanto

$$\boxed{\mathrm{II} = -R\,d\theta^2 - R\,sen^2\,\theta\,d\varphi^2}$$

Observação importante: Note que $\mathrm{II} = -\frac{1}{R}\mathrm{I}$, ou seja, a segunda forma fundamental é proporcional à primeira com constante $-\frac{1}{R}$.

As curvaturas principais são as autovalores da forma de Weingarten, dados pelas raízes da equação característica

$$\det \begin{pmatrix} e - \kappa E & f - \kappa F \\ f - \kappa F & g - \kappa G \end{pmatrix} = 0$$

Substituindo os valores ($e = -R$, $f = 0$, $g = -R\,sen^2\,\theta$, $E = R^2$, $F = 0$, $G = R^2\,sen^2\,\theta$)

$$\det \begin{pmatrix} -R - \kappa R^2 & 0 - \kappa \cdot 0 \\ 0 - \kappa \cdot 0 & -R\,sen^2\,\theta - \kappa R^2\,sen^2\,\theta \end{pmatrix} = 0$$

donde temos,

$$[-R(1+\kappa R)] \cdot [-R\,sen^2\,\theta(1+\kappa R)] - 0 = R^2\,sen^2\,\theta(1+\kappa R)^2 = 0$$

A equação característica é

$$R^2\,sen^2\,\theta(1+\kappa R)^2 = 0 \tag{4.4}$$

Para $sen\,\theta \neq 0$ (ou seja, fora dos polos):

$$(1+\kappa R)^2 = 0 \implies 1 + \kappa R = 0 \implies \kappa = -\frac{1}{R}$$

Portanto, as curvaturas principais são

$$\boxed{\kappa_1 = -\frac{1}{R}, \quad \kappa_2 = -\frac{1}{R}}$$

Conclusão: Ambas as curvaturas principais são iguais e constantes em todos os pontos da esfera. A esfera é uma superfície totalmente umbílica.

Calculando a curvatura de Gauss.

$$K = \kappa_1 \cdot \kappa_2 = \left(-\frac{1}{R}\right) \cdot \left(-\frac{1}{R}\right) = \boxed{\frac{1}{R^2}}$$

Alternativamente, usando a fórmula direta

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{(-R)(-R\,sen^2\,\theta) - 0^2}{R^2 \cdot R^2\,sen^2\,\theta - 0} = \frac{R^2\,sen^2\,\theta}{R^4\,sen^2\,\theta} = \frac{1}{R^2}$$

Observação fundamental: A curvatura de Gauss da esfera é constante e positiva, igual a $\frac{1}{R^2}$ em todos os pontos.

A curvatura média é definida por

$$H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} = \frac{-\frac{1}{R} + (-\frac{1}{R})}{2} = \frac{-\frac{2}{R}}{2} = \boxed{-\frac{1}{R}}$$

Alternativamente, usando a fórmula

$$H = \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)} = \frac{(-R)(R^2 sen^2\theta) - 2\cdot 0\cdot 0 + (-R sen^2\theta)(R^2)}{2R^4 sen^2\theta}$$
$$= \frac{-R^3 sen^2\theta - R^3 sen^2\theta}{2R^4 sen^2\theta} = \frac{-2R^3 sen^2\theta}{2R^4 sen^2\theta} = -\frac{1}{R}$$

A matriz da aplicação de Weingarten $-dN_p$ na base $\{X_\theta, X_\varphi\}$ é dada por

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} eG - fF & fE - eF \\ fG - gF & gE - fF \end{pmatrix}$$

Substituindo os valores

$$a_{11} = \frac{eG - fF}{EG - F^2} = \frac{(-R)(R^2 sen^2\theta) - 0}{R^4 sen^2\theta} = \frac{-R^3 sen^2\theta}{R^4 sen^2\theta} = -\frac{1}{R}$$

$$a_{12} = \frac{fE - eF}{EG - F^2} = \frac{0\cdot R^2 - (-R)\cdot 0}{R^4 sen^2\theta} = 0$$

$$a_{21} = \frac{fG - gF}{EG - F^2} = \frac{0\cdot R^2 sen^2\theta - (-R sen^2\theta)\cdot 0}{R^4 sen^2\theta} = 0$$

$$a_{22} = \frac{gE - fF}{EG - F^2} = \frac{(-R sen^2\theta)(R^2) - 0}{R^4 sen^2\theta} = \frac{-R^3 sen^2\theta}{R^4 sen^2\theta} = -\frac{1}{R}$$

Portanto,

$$-dN_p = \begin{pmatrix} -\frac{1}{R} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R} \end{pmatrix} = -\frac{1}{R}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{R} I_2$$

Interpretação: A matriz de Weingarten é um múltiplo da identidade, confirmando que todas as direções são principais e a esfera é totalmente umbílica.

Conclusão: Todos os pontos de uma esfera de raio R são pontos elípticos umbílicos, caracterizados por $\kappa_1 = \kappa_2 = -\frac{1}{R}$ e $K = \frac{1}{R^2} > 0$.

A esfera ocupa uma posição central na geometria diferencial.

1. É o modelo clássico de superfície com curvatura positiva constante.
2. É a única (a menos de isometria) superfície compacta com $K = \text{constante} > 0$.
3. Serve como modelo para a geometria esférica (ou elíptica), onde a soma dos ângulos de um triângulo excede π.
4. É a superfície de área mínima que envolve um volume fixo (problema isoperimétrico).
5. Aplicações em cosmologia: o universo com curvatura positiva tem geometria esférica.

Paraboloide Hiperbólico

O paraboloide hiperbólico é a superfície quadrática definida por:

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

Sem perda de generalidade qualitativa, consideramos $a = b = 1$

$$z = x^2 - y^2$$

Parametrizamos a superfície $S \subset \mathbb{R}^3$ por

$$X(u,v) = \left(u,\, v,\, u^2 - v^2\right), \quad (u,v) \in \mathbb{R}^2$$

Calculamos as derivadas parciais

$$X_u = \frac{\partial X}{\partial u} = (1,\, 0,\, 2u)$$
$$X_v = \frac{\partial X}{\partial v} = (0,\, 1,\, -2v)$$

Os coeficientes da primeira forma fundamental são

$$E = \langle X_u, X_u \rangle = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 2u \cdot 2u = 1 + 4u^2$$
$$F = \langle X_u, X_v \rangle = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 2u \cdot (-2v) = -4uv$$
$$G = \langle X_v, X_v \rangle = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + (-2v) \cdot (-2v) = 1 + 4v^2$$

A primeira forma fundamental é

$$\mathrm{I} = (1 + 4u^2)\, du^2 - 8uv\, du\, dv + (1 + 4v^2)\, dv^2$$

O determinante da primeira forma fundamental é:

$$EG - F^2 = (1 + 4u^2)(1 + 4v^2) - (-4uv)^2 = 1 + 4v^2 + 4u^2 + 16u^2v^2 - 16u^2v^2$$
$$= 1 + 4u^2 + 4v^2$$

Denotamos $\Delta = EG - F^2 = 4u^2 + 4v^2 + 1$.

Calculamos o produto vetorial

$$X_u \times X_v = (-2u,\, 2v,\, 1)$$

A norma deste vetor é

$$\|X_u \times X_v\| = \sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1} = \sqrt{\Delta}$$

Portanto, o vetor normal unitário é

$$N = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|} = \frac{(-2u, 2v, 1)}{\sqrt{\Delta}}$$

Calculando as segundas derivadas

$$X_{uu} = \frac{\partial^2 X}{\partial u^2} = (0, 0, 2)$$
$$X_{uv} = \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} = (0, 0, 0)$$
$$X_{vv} = \frac{\partial^2 X}{\partial v^2} = (0, 0, -2)$$

Os coeficientes da segunda forma fundamental são

$$e = \langle X_{uu}, N \rangle = \frac{(0,0,2) \cdot (-2u, 2v, 1)}{\sqrt{\Delta}} = \frac{2}{\sqrt{\Delta}}$$
$$f = \langle X_{uv}, N \rangle = \frac{(0,0,0) \cdot (-2u, 2v, 1)}{\sqrt{\Delta}} = 0$$
$$g = \langle X_{vv}, N \rangle = \frac{(0,0,-2) \cdot (-2u, 2v, 1)}{\sqrt{\Delta}} = \frac{-2}{\sqrt{\Delta}}$$

A segunda forma fundamental é

$$\mathrm{II} = \frac{2}{\sqrt{\Delta}} du^2 - \frac{2}{\sqrt{\Delta}} dv^2$$

As curvaturas principais são as raízes da equação característica

$$\det \begin{pmatrix} e - \kappa E & f - \kappa F \\ f - \kappa F & g - \kappa G \end{pmatrix} = 0$$

Substituindo os valores

$$\det \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{\Delta}} - \kappa(1 + 4u^2) & 4\kappa uv \\ 4\kappa uv & \frac{-2}{\sqrt{\Delta}} - \kappa(1 + 4v^2) \end{pmatrix} = 0$$

Expandindo o determinante

$$\left(\frac{2}{\sqrt{\Delta}} - \kappa(1 + 4u^2) \right) \left(\frac{-2}{\sqrt{\Delta}} - \kappa(1 + 4v^2) \right) - (4\kappa uv)^2 = 0$$

Multiplicando e simplificando

$$-\frac{4}{\Delta} - \frac{2k(1 + 4v^2)}{\sqrt{\Delta}} + \frac{2k(1 + 4u^2)}{\sqrt{\Delta}} + k^2(1 + 4u^2)(1 + 4v^2) - 16k^2u^2v^2 = 0$$

Donde temos

$$-\frac{4}{\Delta}+\frac{8k(u^2-v^2)}{\sqrt{\Delta}}+k^2\Delta=0$$

Multiplicando por Δ e fazendo a mudança $w=\kappa\Delta$

$$w^2+\frac{8(u^2-v^2)}{\sqrt{\Delta}}w-4=0$$

Resolvendo pela fórmula quadrática

$$w=\frac{-\frac{8(u^2-v^2)}{\sqrt{\Delta}}\pm\sqrt{\frac{64(u^2-v^2)^2}{\Delta}+16}}{2}$$

O discriminante é

$$\sqrt{\frac{64(u^2-v^2)^2}{\Delta}+16}=\frac{4\sqrt{4(u^2-v^2)^2+\Delta}}{\sqrt{\Delta}}$$

Portanto:

$$w=\frac{-4(u^2-v^2)\pm2\sqrt{4(u^2-v^2)^2+\Delta}}{\sqrt{\Delta}}$$

As curvaturas principais são

$$\boxed{\kappa_{1,2}=\frac{-4(u^2-v^2)\pm2\sqrt{4(u^2-v^2)^2+4u^2+4v^2+1}}{(4u^2+4v^2+1)^{3/2}}}$$

Calculando a curvatura de Gauss

$$K=\kappa_1\cdot\kappa_2=\frac{[-4(u^2-v^2)]^2-[2\sqrt{4(u^2-v^2)^2+\Delta}]^2}{\Delta^3}=\frac{16(u^2-v^2)^2-4[4(u^2-v^2)^2+\Delta]}{\Delta^3}$$

$$=\frac{16(u^2-v^2)^2-16(u^2-v^2)^2-4\Delta}{\Delta^3}=\frac{-4\Delta}{\Delta^3}=-\frac{4}{\Delta^2}$$

A curvatura de Gauss pode ser calculada diretamente pela fórmula

$$K=\frac{eg-f^2}{EG-F^2}$$

Substituindo os valores calculados

$$K=\frac{\left(\frac{2}{\sqrt{\Delta}}\right)\left(\frac{-2}{\sqrt{\Delta}}\right)-0^2}{\Delta}=\frac{-\frac{4}{\Delta}}{\Delta}$$

$$\boxed{K=-\frac{4}{(4u^2+4v^2+1)^2}}$$

A curvatura média é definida por

$$H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} = \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)}$$

Substituindo

$$H = \frac{\frac{2}{\sqrt{\Delta}}(1+4v^2) - 0 + \frac{-2}{\sqrt{\Delta}}(1+4u^2)}{2\Delta} = \frac{\frac{2(1+4v^2)-2(1+4u^2)}{\sqrt{\Delta}}}{2\Delta} = \frac{2(4v^2-4u^2)}{2\Delta^{3/2}}$$

$$\boxed{H = \frac{4(v^2-u^2)}{(4u^2+4v^2+1)^{3/2}}}$$

Conclusão: Todos os pontos do paraboloide hiperbólico $z = x^2 - y^2$ são pontos hiperbólicos, caracterizados por $K(p) < 0$.

O paraboloide hiperbólico ocupa uma posição especial na geometria diferencial.

1. É o modelo clássico de superfície com curvatura negativa constante (localmente).
2. É localmente isométrico ao plano hiperbólico (geometria de Lobachevsky).
3. É uma superfície regrada duplamente: contém duas famílias de retas.
4. Serve como modelo para sela de montaria (saddle point) em otimização.
5. É utilizado em arquitetura (ex: Saddle Dome em Calgary) pela estabilidade estrutural.

Observação 4.10 *Dizer que duas superfícies (ou variedades riemannianas) são localmente isométricas significa que, em uma vizinhança suficientemente pequena de qualquer ponto, existe uma transformação que preserva todas as distâncias intrínsecas.*

Portanto, temos

Superfície	κ_1	κ_2	K	**Tipo**
Esfera (raio R)	$-\frac{1}{R}$	$-\frac{1}{R}$	$\frac{1}{R^2} > 0$	Elíptico (umbílico)
Cilindro (raio R)	$-\frac{1}{R}$	0	0	Parabólico
Paraboloide Hiperbólico	$\frac{-4(u^2-v^2) \pm 2\sqrt{\Delta}}{\Delta^{3/2}}$	(oposto)	$-\frac{4}{\Delta^2} < 0$	Hiperbólico
Planar	0	0	0	Plano (umbílico)

4.4 Teorema principal

Mostraremos agora o fato interessante de que as únicas superfícies constituidas inteiramente de pontos umbílicos são essencialmente esferas e planos.

Teorema 4.4.1 *[do Carmo, Prop. 4, p. 173]*

Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular conexa tal que todo ponto $p \in S$ é umbílico. Então S está contida em um plano ou em uma esfera.

Demonstração 4.4.1 *Todo $p \in S$ é umbílico, ou seja, existe $\lambda(p) \in \mathbb{R}$ tal que*

$$dN_p(w) = \lambda(p) \cdot w, \quad \forall\, w \in T_pS$$

Afirmação 1: *$\lambda : S \to \mathbb{R}$ é diferenciável.*

De fato, seja $X : U \to X(U) \subset S$ uma parametrização local, com $U \subset \mathbb{R}^2$ conexo. Definimos $\overline{N} = N \circ X$.

Pela definição de ponto umbílico

$$\overline{N}_u = dN_{X(u,v)}(X_u) = \lambda(X(u,v)) \cdot X_u(u,v) \tag{4.5}$$

$$\overline{N}_v = dN_{X(u,v)}(X_v) = \lambda(X(u,v)) \cdot X_v(u,v) \tag{4.6}$$

Tomando o produto interno de (4.5) com X_u, obtemos

$$\langle \overline{N}_u, X_u \rangle = \lambda(X(u,v)) \cdot \langle X_u, X_u \rangle = \lambda(X(u,v)) \cdot E$$

Portanto, na parametrização

$$\boxed{\overline{\lambda}(u,v) = \lambda(X(u,v)) = \frac{\langle \overline{N}_u, X_u \rangle}{\langle X_u, X_u \rangle} = \frac{\langle \overline{N}_u, X_u \rangle}{E}}$$

- *Numerador: $\langle \overline{N}_u, X_u \rangle$ é diferenciável (pois X é diferenciável e N é diferenciável)*
- *Denominador: $E = \langle X_u, X_u \rangle > 0$ (métrica é definida positiva)*

Logo, $\overline{\lambda}$ é diferenciável em U, e como X é difeomorfismo, λ é diferenciável em S.

Afirmação 2: $\lambda : S \to \mathbb{R}$ *é constante.*

Como S é conexa e λ *é contínua, basta mostrar que* λ *é localmente constante. Derivando* (4.5) *e* (4.6) *(onde* $\overline{\lambda} = \lambda \circ X$*)*

$$\overline{N}_{uv} = \frac{\partial}{\partial v}(\overline{\lambda} X_u) = \overline{\lambda}_v X_u + \overline{\lambda} X_{uv}$$
$$\overline{N}_{vu} = \frac{\partial}{\partial u}(\overline{\lambda} X_v) = \overline{\lambda}_u X_v + \overline{\lambda} X_{vu}$$

Como $\overline{N}$ *é de classe* C^2 *(pois S é regular), temos* $\overline{N}_{uv} = \overline{N}_{vu}$*. Além disso,* $X_{uv} = X_{vu}$*.*
Logo

$$\overline{\lambda}_v X_u + \overline{\lambda} X_{uv} = \overline{\lambda}_u X_v + \overline{\lambda} X_{vu} \Longrightarrow \quad \overline{\lambda}_v X_u - \overline{\lambda}_u X_v = 0$$

Temos o sistema

$$\overline{\lambda}_v X_u - \overline{\lambda}_u X_v = 0$$

Como $\{X_u, X_v\}$ *são linearmente independentes (base do espaço tangente), obtemos:*

$$\boxed{\overline{\lambda}_u \equiv 0 \quad e \quad \overline{\lambda}_v \equiv 0 \ \ em\ U}$$

Como U é conexo, $\overline{\lambda}$ *é constante em U.*

Portanto, λ *é constante em cada* $X(U)$*, ou seja,* λ *é localmente constante. Como S é conexa,* λ *é globalmente constante em S.*

Caso 1: $\lambda \equiv 0$ *em toda a superfície S.*

De (4.5) *e* (4.6)*, temos*

$$\overline{N}_u = 0 \quad e \quad \overline{N}_v = 0$$

Logo $\overline{N} = N \circ X$ *é constante em cada U conexo.*

Como $N : S \to S^2$ *é contínua, S é conexa, e N é localmente constante*

$$\boxed{N \equiv N_0 \text{ (vetor constante unitário) em todo } S}$$

Afirmação: *$f(p) = \langle p, N_0 \rangle$ é constante em S.*

Na parametrização $\overline{f}(u,v) = f(X(u,v)) = \langle X(u,v), N_0 \rangle$

$$\overline{f}_u = \langle X_u, N_0 \rangle = 0, \quad \overline{f}_v = \langle X_v, N_0 \rangle = 0$$

pois $X_u, X_v \perp N$ *e* $N \equiv N_0$.

Como $\overline{f}_u = \overline{f}_v = 0$ *e* U *é conexo, existe* $d \in \mathbb{R}$ *tal que*

$$\overline{f}(u,v) = d, \quad \forall\ (u,v) \in U$$

Portanto, para todo $p \in S$ *temos* $\langle p, N_0 \rangle = d$. *E*

$$S \subset \pi = \{p \in \mathbb{R}^3 \mid \langle p, N_0 \rangle = d\}$$

onde π *é um plano perpendicular a* N_0.

Caso 2: $\lambda \equiv \lambda_0 \neq 0$ *em toda a superfície* S.

Afirmação: *A função* $f : S \to \mathbb{R}^3$ *dada por*

$$f(p) = p - \frac{N(p)}{\lambda_0}$$

é constante em S.

De fato, na parametrização $X : U \to S$

$$\overline{f}(u,v) = f(X(u,v)) = X(u,v) - \frac{\overline{N}(u,v)}{\lambda_0}$$

Derivando e usando (4.5) *e* (4.6)

$$\overline{f}_u = X_u - \frac{\overline{N}_u}{\lambda_0} = X_u - \frac{\lambda_0 X_u}{\lambda_0} = \boxed{0}$$

$$\overline{f}_v = X_v - \frac{\overline{N}_v}{\lambda_0} = X_v - \frac{\lambda_0 X_v}{\lambda_0} = \boxed{0}$$

Como $\overline{f}_u = \overline{f}_v = 0$ *e* U *é conexo,* $\overline{f}$ *é constante.*

Logo existe $A \in \mathbb{R}^3$ *tal que*

$$f(p) = p - \frac{N(p)}{\lambda_0} = A, \quad \forall p \in S$$

Rearranjando,

$$p - A = \frac{N(p)}{\lambda_0}$$

Tomando a norma (lembrando que $\|N(p)\| = 1$*):*

$$\|p - A\| = \left\| \frac{N(p)}{\lambda_0} \right\| = \frac{1}{|\lambda_0|}$$

E,

$$S \subset S_{1/|\lambda_0|}(A) = \left\{ p \in \mathbb{R}^3 \mid \|p - A\| = \frac{1}{|\lambda_0|} \right\}$$

ou seja, S está contida na esfera de centro A e raio $\frac{1}{|\lambda_0|}$.

□

5 CONCLUSÕES

Neste trabalho, demonstramos e exploramos o teorema que caracteriza as **superfícies totalmente umbílicas** como sendo precisamente os planos e as esferas — resultados que, à primeira vista, podem parecer intuitivos, mas cuja demonstração rigorosa exige ferramentas sofisticadas da geometria diferencial local.

Através do estudo das **linhas de curvatura**, da **equação de Ricci** e da análise das direções principais, estabelecemos que a condição de umbilicalidade total — onde todo ponto é ponto umbílico, isto é, as curvaturas principais coincidem em todas as direções — impõe restrições tão severas à geometria da superfície que apenas duas possibilidades geométricas fundamentais permanecem: a **curvatura nula em todos os pontos** (plano) ou a **curvatura constante e não-nula** (esfera).

Este resultado ilustra uma característica marcante da geometria diferencial: **condições infinitesimais (locais) podem determinar completamente a forma global de uma superfície**. A conexidade e a orientabilidade, hipóteses aparentemente técnicas, são essenciais para garantir que a "propagação" da umbilicalidade de ponto a ponto resulte numa estrutura uniforme em toda a superfície.

Além de seu valor teórico em si, este resultado posiciona-se como **pedra angular** para a compreensão de teoremas mais amplos, como a classificação das superfícies de curvatura constante e o estudo das superfícies mínimas. A caracterização das totalmente umbílicas também fornece insights valiosos em aplicações físicas, particularmente na teoria da elasticidade e na descrição de interfaces líquidas, onde tensões isotrópicas naturalmente conduzem a formas esféricas ou planas.

Assim, concluímos que o teorema das superfícies totalmente umbílicas não apenas responde a uma questão geométrica elegante, mas também revela a **interação profunda entre análise local e topologia global** que define a essência da geometria diferencial clássica.

REFERÊNCIAS

BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo: Edgard Blücher, 1974. Tradução da obra original em inglês: *A History of Mathematics* (1968).

CARMO, M. P. d. **Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2010.

DELGADO, J.; FRENSEL, K. **Notas de Aula – Geometria Diferencial**. [*S. l.*: *s. n.*], 2010. Notas de aula.

EUCLIDES. **Os elementos**. São Paulo: Editora UNESP, 2009.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Campinas, SP: UNICAMP, 2004. Tradução da obra original em inglês: *An Introduction to the History of Mathematics*. ISBN 978-85-268-0657-2.

GAUSS, C. F. **General Investigations of Curved Surfaces of 1827 and 1825**. Princeton: The Princeton University Library, 1902.

LIMA, E. L. **Álgebra Linear**. 6. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014. (Coleção Matemática Universitária).

LIMA, E. L. **Curso de Análise**. Rio de Janeiro: IMPA, 2016. v. 2. (Coleção Projeto Euclides, v. 2).

RIEMANN, B. Ueber die hypothesen, welche der geometrie zu grunde liegen. **Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen**, v. 13, p. 133–152, 1867. Hrsg. von Richard Dedekind.

TENENBLAT, K. **Introdução à Geometria Diferencial**. 2. ed. São Paulo: Editora Blucher, 2008. ISBN 978-85-212-0520-4.