



Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Unidade Acadêmica de Física
Curso de Graduação em Bacharelado em Física

UM ESTUDO DE DINÂMICA NA MECÂNICA ANALÍTICA E O FORMALISMO DE “EISENHART LIFT”

Joaquim Cavalcanti de Moraes Segundo



Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Unidade Acadêmica de Física
Curso de Graduação em Bacharelado em Física

UM ESTUDO DE DINÂMICA NA MECÂNICA ANALÍTICA E O FORMALISMO DE “EISENHART LIFT”

por

Joaquim Cavalcanti de Moraes Segundo

Trabalho de Conclusão de Curso realizado sob orientação do Prof. Dr. João Rafael Lúcio dos Santos e co-orientação do Prof. Dr. Diego Alejandro Cogollo Aponte, apresentado à Unidade Acadêmica de Física em complementação aos requisitos para obtenção do título de **Bacharel em Física**.

Orientador: Prof. Dr. João Rafael Lúcio dos Santos

Co-orientador: Diego Alejandro Cogollo Aponte

Universidade Federal de Campina Grande - UFCG
Sistema de Bibliotecas - SISTEMOTECA
Catalogação de Publicação na Fonte. UFCG - Biblioteca Central

S456e Segundo, Joaquim Cavalcanti de Moraes.
Um estudo de dinâmica na mecânica analítica e o formalismo de
“Eisenhart Lift” / Joaquim Cavalcanti de Moraes Segundo. – 2025.
65 f. : il. color.

Monografia (bacharelado em Física) – Universidade Federal de
Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2025.
“Orientação: Prof. Dr. João Rafael Lúcio dos Santos, Prof. Dr. Diego
Alejandro Gogollo Aponte”.
Referências.

1. Dinâmica. 2. Mecânica Analítica. 3. Relatividade Geral. 4.
Geodésicas. 5. *Eisenhart lift*. I. Santos, Rafael Lúcio dos. II. Aponte,
Diego Alejandro Gogollo. III. Título.

UFCG/BC

CDU 53(04)

UM ESTUDO DE DINÂMICA NA MECÂNICA ANALÍTICA E O FORMALISMO DE “EISENHART LIFT”

por

Joaquim Cavalcanti de Moraes Segundo

Trabalho de conclusão de curso defendido e aprovado em
..... de de, pela Comissão Exam-
inadora constituída pelos examinadores:

Área de Concentração: **Física Teórica, Teoria de Campos e Partículas.**

Aprovada por:

Prof. Dr. _____ Coord. - Bacharelado em Física
Dra. Daisy Martins de Almeida

Prof. Dr _____ Orientador

Dr. _____ Co-Orientador

Banca examinadora

Dr. _____
Dr. Marcos Antônio Anacleto

Dr. _____
Dr. Leandro Oliveira Nascimento



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE

COORDENACAO DE GRADUACAO EM FISICA

Rua Aprigio Veloso, 882, - Bairro Universitario, Campina Grande/PB, CEP 58429-900

Site: <http://cct.ufcg.edu.br> - Telefone: (83) 2101-1100

REGISTRO DE PRESENÇA E ASSINATURAS

ATA DA DEFESA PARA CONCESSÃO DO GRAU DE BACHARELADO EM FÍSICA

Ao vigésimo quinto dia (25) do mês de agosto (08) de dois mil e vinte e dois (2022), às quinze horas (15h) compareceu perante a banca examinadora, numa sala virtual (<https://meet.google.com/mam-xzsb-qjf>), o estudante, **Joaquim Cavalcanti de Moraes**, matrícula n. 120110123, autor do TCC intitulado: **Um estudo de dinâmica na mecânica analítica e o formalismo de Eisenhart lift**. Sobre este trabalho, o autor foi arguido pela banca, em sessão pública, constituída Prof. o(a) professor(a) **João Rafael Lúcio dos Santos** (UAF-UFCG) (Orientador(a)), o(a) professor(a) **Diego Alejandro Cogollo Aponte** (UAF-UFCG) (Coorientador(a)), o(a) professor(a) **Marcos Antônio Anacleto** (UAF/UFCG) como membro interno, o(a) professor(a) **Leandro Oliveira Nascimento** (ICEN-FACFIS/UFPA) como membro externo, tendo recebido nota 9,0, sendo considerado aprovado. Assim, a aluna está apto para a colação de grau no Curso de Bacharelado em Física.

E por estar conformidade, eu, Coordenador do Curso de Bacharelado em Física lavrei a presente ata, que vai por mim assinada e pelos membros da banca.

Coordenador



Documento assinado eletronicamente por **EDUARDO MARCOS RODRIGUES DOS PASSOS, COORDENADOR(A) DE GRADUACAO**, em 02/09/2022, às 10:37, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 8º, caput, da [Portaria SEI nº 002, de 25 de outubro de 2018](#).



Documento assinado eletronicamente por **Leandro Oliveira do Nascimento, Usuário Externo**, em 12/09/2022, às 07:04, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 8º, caput, da [Portaria SEI nº 002, de 25 de outubro de 2018](#).



Documento assinado eletronicamente por **JOAO RAFAEL LUCIO DOS SANTOS, PROFESSOR 3 GRAU**, em 05/10/2022, às 11:39, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 8º, caput, da [Portaria SEI nº 002, de 25 de outubro de 2018](#).



Documento assinado eletronicamente por **MARCOS ANTONIO ANACLETO, PROFESSOR 3 GRAU**, em 05/10/2022, às 14:21, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 8º, caput, da [Portaria SEI nº 002, de 25 de outubro de 2018](#).



Documento assinado eletronicamente por **DIEGO ALEJANDRO COGOLLO APONTE, PROFESSOR(A) DO MAGISTERIO SUPERIOR**, em 29/11/2022, às 13:32, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 8º, caput, da [Portaria SEI nº 002, de 25 de outubro de 2018](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site <https://sei.ufcg.edu.br/autenticidade>, informando o código verificador **2689168** e o código CRC **0121F45E**.

"A monetização do êxito é o máximo insulto a Matemática"
Grigori Perelman (medalha Fields rejeitada)

Agradecimentos

- Agradeço ao professor Dr. João Rafael Lúcio dos Santos pelo acompanhamento na graduação desde a Iniciação Científica até a conclusão do curso. Como também ao professor Dr. Diego Alejandro Cogollo Aponto pela sugestão do tema e pelo interesse a mim gerado na área.
- A Professora Dra. Daisy de Almeida Martins pelo empenho na coordenação do curso de Bacharelado em Física, sempre atenta e prestativa na situação dos alunos.
- A todos os professores desta Unidade Acadêmica que contribuíram com a minha formação.
- Aos amigos Ana Rafely, Albanisa Felipe, César Rodrigues, Luís Felipe, José Bruno, Júlia Neves e Victor Hugo por me fazerem suportar a graduação.
- Ao meu amigo e colega de todas as horas de graduação Raiff Hugo dos Santos, não estaria nem cogitando terminar o curso se não fosse ele.
- Ao meu pai que me apoiou sempre a estudar e manteve durante a maior parte da minha vida.
- E por último mas não menos importante, agradeço a mim por acreditar em mim e saber que eu poderia realizar tudo que estou realizando.

Resumo

Este trabalho revisita a dinâmica de sistemas sob forças conservativas a partir de uma perspectiva geométrica. Partindo do arcabouço newtoniano e do limite fraco/lento da Relatividade Geral, mostramos como a aceleração newtoniana $\ddot{\vec{x}} = -\nabla\Phi$, com $\Phi = -GM/r$, emerge da geodésica relativística quando $g_{00} \simeq -(1 + 2\Phi/c^2)$. Nesse cenário, empregamos o *Eisenhart lift* para reinterpretar a evolução de uma partícula, originalmente descrita por uma lagrangiana com potencial, como uma geodésica em uma variedade com uma coordenada adicional. Essa reformulação introduz, no potencial efetivo do problema central, um termo corretivo $+C/(2r^2)$ que desloca a frequência radial e induz uma precessão leve do periastro, preservando o caso kepleriano na ausência da correção ($C=0$).

Desenvolvemos as equações de Euler–Lagrange passo a passo, identificamos as integrais primeiras (momento angular e constante associada à coordenada extra), construímos a energia efetiva e derivamos a equação de Binet, com a qual obtemos a previsão analítica da precessão e da forma quase senoidal de $r(t)$ ao redor de órbitas quase circulares. Integrações numéricas coerentes com as hipóteses exibem $r(t)$ regular e órbitas com a precessão esperada para $C > 0$, confirmando as expressões analíticas. O formalismo, além de compatível com o limite einsteiniano empregado neste estudo, fornece um parâmetro geométrico de controle sobre correções orbitais sem romper com a física clássica subjacente.

Palavras-chave: dinâmica; mecânica analítica; relatividade geral; geodésicas; *Eisenhart lift*.

Abstract

This work revisits the dynamics of conservative systems from a geometric viewpoint. Starting with the Newtonian framework and the weak/slow limit of General Relativity, we show how the Newtonian acceleration $\ddot{\vec{x}} = -\nabla\Phi$, with $\Phi = -GM/r$, arises from relativistic geodesics when $g_{00} \simeq -(1 + 2\Phi/c^2)$. In this setting, we employ the *Eisenhart lift* to reinterpret the evolution of a particle—originally governed by a Lagrangian with a potential—as a geodesic on a manifold endowed with one extra coordinate. This reformulation yields, in the effective potential of the central problem, a corrective term $+C/(2r^2)$ that shifts the radial frequency and induces a mild periapsis precession, while recovering the Kepler case when the correction is turned off ($C=0$).

We derive the Euler–Lagrange equations step by step, identify the first integrals (angular momentum and the constant associated with the extra coordinate), build the effective energy, and obtain Binet’s equation, from which we get the analytical prediction for both the periapsis precession and the near-sinusoidal form of $r(t)$ around nearly circular orbits. Numerically consistent integrations display a clean $r(t)$ and orbits with the expected precession for $C > 0$, in agreement with the analytical expressions. The formalism is compatible with the Einsteinian weak-field limit adopted here and provides a geometric control parameter for orbital corrections without departing from the underlying classical physics.

Keywords: dynamics; analytical mechanics; general relativity; geodesics; *Eisenhart lift*.

Sumário

Introdução	6
1 Mecânica Analítica	9
1.1 Formalismo Newtoniano	9
1.1.1 Vínculos	11
1.1.2 Exemplificação do formalismo newtoniano com sistema físico	12
1.2 Princípio de d'Alembert	13
1.3 Formalismo Lagrangiano	15
1.3.1 Análise de forças não conservativas e função de Rayleigh	18
1.3.2 Pêndulo simples como demonstração do formalismo lagrangiano	19
1.4 Princípio Variacional de Hamilton	20
1.4.1 Notação Variacional	21
1.5 Conservação de Energia e Teorema de Noether	22
1.5.1 Teorema de Noether	23
1.6 Dinâmica Hamiltoniana ou Formalismo Hamiltoniano	24
1.6.1 O problema do pêndulo esférico como exemplo de aplicação ao formalismo hamiltoniano	26
1.7 Transformações Canônicas e Funções Geradoras	27
1.7.1 Parênteses de Lagrange e Poisson	29
1.8 Teorema de Hamilton-Jacobi	30
1.8.1 O problema do oscilador harmônico como exemplo de aplicação da teoria de Hamilton-Jacobi	31
2 Formalismo de Eisenhart Lift	35
2.1 Gravidade Einsteiniana	35
2.1.1 Conexão com o formalismo do estudo (Eisenhart lift)	39
2.2 Formalismo (Eisenhart lift) e aplicação a força central	39
2.2.1 Métrica de Eisenhart e lagrangiana geodésica	40
2.2.2 Redução a duas dimensões e coordenadas polares	41
2.2.3 Equações de Euler-Lagrange	41
2.2.4 Energia efetiva e interpretação	42
2.2.5 Equação da órbita (Binet) e precessão	43
2.2.6 Órbita quase circular e forma de $r(t)$	43

2.2.7	Figuras (simulações numéricas)	44
2.2.8	Erros frequentes que distorcem a órbita	45
3	Conclusões	47
A	Da Lagrangiana relativística ao Eisenhart lift, órbitas e $r(t)$	50
B	Como gerar as figuras por código (Python)	56

Lista de Figuras

1.1	Sistema de polia, lado A e B com comprimento l	11
1.2	Máquina de Atwood com mola posta	12
1.3	Configuração dos sistemas virtuais e reais	13
1.4	Configuração dos sistemas virtuais e reais	19
1.5	Pêndulo esférico em coordenadas θ , ϕ e r	26
1.6	Sistema de oscilador harmônico simples	31
2.1	Raio $r(t)$ ajustado (oscilação harmônica limpa em torno de r_0).	44
2.2	Órbita no plano (x, y) com correção $+C/(2r^2)$: leve precessão do periastro.	45

Capítulo 1

Mecânica Analítica

1.1 Formalismo Newtoniano

Vamos introduzir o assunto, cabendo relembrar as formulações Newtonianas em princípio. Temos uma descrição de Newton que conseguiu descrever a dinâmica clássica utilizando equações prioritariamente vetoriais, a relação causa consequência disposta pode ser formulada nas 3 leis principais.

1. Princípio da inércia, onde todo o corpo permanece em estado de repouso, ou em movimento uniforme em uma linha reta a menos que uma força aja sobre ele.
2. Uma força aplicada a um corpo poderá originar uma força resultante que ocasionará numa variação da quantidade de movimento na direção da força que foi aplicada

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}. \quad (1.1)$$

3. Todas as forças entre dois objetos existem em igual magnitude e em direção opostas[6]. Se um objeto A exerce uma força $\vec{F}_A$ em um objeto B, então B irá ao mesmo tempo exercer uma força $\vec{F}_B$ em A.

$$\vec{F}_B = -\vec{F}_A. \quad (1.2)$$

De forma geral podemos descrever desde pequenos corpos rígidos a grandes corpos deformáveis dentro das especificações newtonianas, o que seria representar um ponto no espaço sendo inflacionado pelas forças até um sistema complexo como um carro, barra ou pilastra.

Na mecânica newtoniana, o movimento descrito pelo sistema é dependente de seu espaço de configuração Euclidiano. O espaço de configuração é o conjunto de fatores e variáveis que descreve o comportamento de um sistema em determinado espaço de tempo t . É representado como o espaço de todas posições possíveis como também se expandido, pode vir a englobar todas as velocidades. As dimensões do espaço de configuração, que nomeamos graus de liberdade, será melhor explicado posteriormente [7].

O conjunto de posições possíveis no espaço em que a partícula consegue se mover é descrito como nosso sistema. Portanto, cada instante de tempo t corresponde a uma nova situação de posição da partícula.

Vamos fazer as devidas especificações de $\vec{r}(x, y, z)$, que é nosso vetor posição que tem a correspondência da movimentação nos 3 eixos de coordenadas e cuja forma é

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}, \quad (1.3)$$

onde $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ são nossos vetores canônicos. Devemos ressaltar que nosso vetor $\vec{r}$ é uma curva temporal onde todas as variações da curva se dão pela variação no instante t .

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)). \quad (1.4)$$

Por meio da curva de trajetória podemos obter o vetor tangente a cada instante da curva, de forma:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad (1.5)$$

$$\dot{\vec{r}}(t) = \frac{dx(t)}{dt}\hat{i} + \frac{dy(t)}{dt}\hat{j} + \frac{dz(t)}{dt}\hat{k}. \quad (1.6)$$

O vetor tangente é uma taxa de variação muito fundamental do cálculo e podemos da mesma forma achar a aceleração a partir dessa variação de forma a termos

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt}. \quad (1.7)$$

Com essas relações obtemos a segunda lei achando o conjunto de forças que estão sendo atuantes sobre a partícula em causa (atuação de um conjunto de forças sobre o sistema)

e consequência (movimento do sistema), dado por

$$m \frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2} - \vec{F}(\vec{r}(t), t) = 0, \quad (1.8)$$

onde temos o campo vetorial $\vec{F}$ com uma dependência explícita e implícita (na condição de $\vec{r}(t)$) do tempo. Em casos mais específicos também podemos considerar $\vec{F}$ como dependente da velocidade na partícula, mas não consideraremos neste documento.

1.1.1 Vínculos

Dentro dos modelos newtonianos devemos no atentar ao estudo dos vínculos, onde os consideramos nas formulações de nossos sistemas de equações vetoriais. Vínculos são limitadores à cinemática dos sistemas mecânicos, limitadores das possíveis velocidades e posições, sendo de fundamental relevância para caracterizar a dinâmica de um dado objeto. Existindo as variáveis x, y, z onde $r = (x, y, z)$ caracteriza um vetor do sistema, podemos estabelecer a condição fixa $f(r) = f(x, y, z) = 0$, caracterizando uma restrição ao sistema.

Considerando como exemplificação que se refere ao tamanho da corda na Fig.1, temos como representação de vínculos.

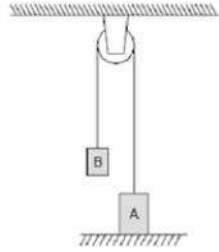


Figure 1.1: Sistema de polia, lado A e B com comprimento l

$$x_1 + x_2 = l \quad (1.9)$$

Chamamos de vínculos holônomos aqueles que dependem necessariamente das coordenadas do sistema, podendo ou não depender do tempo em forma explícita. Tais vínculos são caracterizados pela seguinte equação

$$f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_M, t) = 0. \quad (1.10)$$

1.1.2 Exemplificação do formalismo newtoniano com sistema físico

Trabalhando com o modelo newtoniano, temos uma representação da máquina de Atwood, com o formalismo já apresentado podemos colocar da seguinte forma a nossa distribuição para o problema em específico

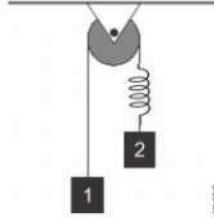


Figure 1.2: Máquina de Atwood com mola posta

Consideramos nesse sistema a ação das forças de vínculo e as forças aplicadas, dessa forma temos retorno das forças resultantes

$$\vec{T} - m_1\vec{g} = m_1\vec{a}. \quad (1.11)$$

$$m_2\vec{g} - (\vec{T} + \vec{F}_{el}) = m_2\vec{a}. \quad (1.12)$$

Nos atendo apenas à dinâmica dos corpos m_1 e m_2 , não iremos considerar a rotação da polia para este exemplo.

Considerando a adição das equações (2.7) e (2.8) temos para a aceleração de força resultante do sistema, a relação

$$\vec{a} = \frac{\vec{g}(m_2 - m_1) + \vec{F}_{el}}{(m_1 + m_2)}. \quad (1.13)$$

Aqui expõe-se a maior desvantagem desse formalismo, pelo caráter vetorial devemos considerar variáveis no plano tridimensional não necessárias para obter as soluções do sistema, caindo em redundância. A proposta de Newton sofreu diversas controvérsias ao longo do tempo e modelos de reformulação, veremos a seguinte o resultado de todas essas novas propostas chamadas de mecânica analítica que vai ser ponto chave para o entendimento dos campos escalares e nossas devidas aplicações.

1.2 Princípio de d'Alembert

Considerando a existência dos vínculos, que nos proporciona as várias posições possíveis em determinados instantes t em configurações infinitesimalmente próximas, nos leva ao entendimento dos deslocamentos virtuais entre estes cenários. Esse deslocamento pode ser exemplificado no gráfico da Figura 3. Precisamente, considerando um sistema de N partículas os deslocamentos serão estabelecidos como $\delta r_i, i = 1, 2, \dots, N$ das partículas localizadas nas respectivas posições $r_1, r_2, \dots, r_N$.

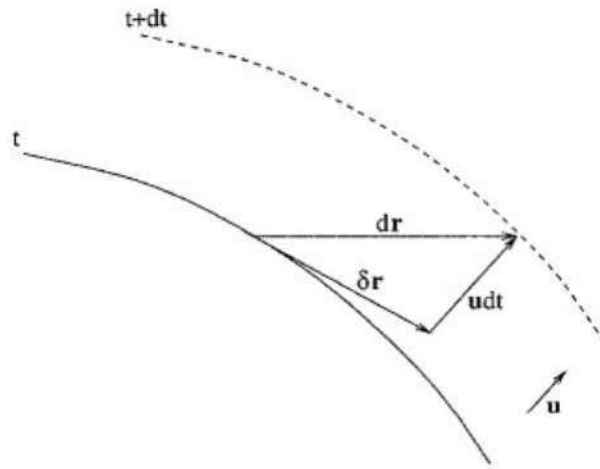


Figure 1.3: Configuração dos sistemas virtuais e reais

Considerando um sistema móvel em duas superfícies temporais t e $t + dt$, temos o deslocamento real representado por dr , que é perpendicular a tais superfícies, diferenciado do deslocamento virtual sempre tangente[8]. Nesse tipo de representação, averiguamos que os deslocamentos virtuais ocorrerão em um mesmo instante temporal. A força de vínculo, em superfícies lisas ao quais iremos trabalhar, é sempre normal à superfície e chegamos a algumas conclusões importantes em que

$$W = 0, \quad (1.14)$$

o trabalho da força de vínculo no sistema idealmente liso é zero, nesse caso os consideramos como vínculos ideais

Um vínculo mais forte envolvendo o trabalho associado aos deslocamentos virtuais, pode ser obtido a partir da segunda Lei Newton. Como sabemos, a segunda Lei de

Newton estabelece que

$$F_i = m_i \ddot{r}_i, \quad (1.15)$$

onde F_i são as forças atuando sobre cada uma das i partículas do sistema mecânico. Cada uma dessas forças, pode ser reescrita como a combinação

$$F_i = F_i^{(a)} + f_i, \quad (1.16)$$

onde $F_i^{(a)}$ são as forças aplicadas e f_i as forças de vínculo, totalizando as forças gerais no sistema. A grande dificuldade na equação é determinar as forças de vínculo, visto que estas são fruto das forças aplicadas ao sistema, onde pode-se dizer que são as verdadeiras causas do movimento do sistema, além da redundância de variáveis que já mencionamos[9]. Logo se faz desejável uma formulação que apenas envolva as forças aplicadas. Considerando uma situação estática e em equilíbrio, temos

$$\sum_i \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0, \quad (1.17)$$

e fazendo a decomposição de forças, ficamos com

$$\sum_i \vec{F}_i^{(a)} \cdot \delta \vec{r}_i + \sum_i \vec{f}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0. \quad (1.18)$$

É conhecido que o valor do trabalho da força de vínculo é zero, implicando na seguinte relação

$$\sum_i \vec{F}_i^{(a)} \cdot \delta \vec{r}_i = 0. \quad (1.19)$$

Segundo a interpretação de d'Alembert, cada partícula do sistema tem seu equilíbrio regido pela força real e seu correspondente invertido, uma força de reação de resposta do sistema. Deste modo, podemos reinterpretar a segunda Lei de Newton sob a perspectiva

$$\sum_i (\dot{\vec{p}}_i - \vec{F}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0, \quad (1.20)$$

resultando em um vínculo natural ao sistema dinâmico. A equação acima também é conhecida como princípio de d'Alembert [10]. Aqui analisamos o princípio como um avanço da forma que trabalhávamos com os problemas de sistemas clássicos, agora só

dependemos de entender as forças externas as quais o sistema está submetido, chegando aos mesmos resultados da mecânica newtoniana. O princípio de d'Alembert é um grande passo no entendimento do formalismo lagrangiano que o terá como base no uso do modelo de análise física do sistema.

Utilizando do mesmo exemplo anterior, temos de forma geral obtendo

$$m_1\vec{a} + m_2\vec{a} - (m_2\vec{g} - m_1\vec{g} - \vec{F}_{el}) = 0, \quad (1.21)$$

ou ainda

$$\vec{a} = \frac{\vec{g}(m_2 - m_1) + \vec{F}_{el}}{(m_1 + m_2)}. \quad (1.22)$$

Nos dando o mesmo resultado anterior.

1.3 Formalismo Lagrangiano

O princípio de d'Alembert ainda nos requisita trabalhar com um número indesejado de variáveis, não necessárias, pois os δr_i não são independentes como também em muitos casos, as posições r_i [9].

Logo nos limitamos a uma quantidade de variáveis N que chamamos de coordenadas generalizadas, que são coordenadas independentes, caracterizando univocamente as configurações do sistema e tornando os vínculos identicamente independentes. Considerando que trabalhemos com todos os vínculos holônomos temos as coordenadas[11],

$$r_i = r(q_1, q_2, \dots, q_N, t) \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (1.23)$$

Introduzida as coordenadas generalizadas, os deslocamentos virtuais podem ser expressos na forma independente,

$$\delta r_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial r_i}{\partial q_k} \delta q_k. \quad (1.24)$$

Aqui podemos nos situar dentro do espaço de fase ao qual o sistema se ocupa, espaço esse que se caracteriza por todos as coordenadas (não vamos considerar no trabalho o espaço de fase para as velocidades)[7]. Aplicando o considerado à equação , temos

$$\sum_i \sum_k m_i \dot{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k = \sum_i \sum_k \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \delta r_i, \quad (1.25)$$

a partir da qual podemos definir as chamadas forças generalizadas, cujas formas são

$$Q_k = \sum_{i=1}^N F_i \frac{\partial r_i}{\partial q_k}. \quad (1.26)$$

Agora manipularemos para algumas considerações do que seriam nossas forças generalizadas. Mas vamos primeiro nos atentar a nossa primeira parte da equação,

$$\sum_i \sum_k m_i \dot{\vec{v}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k, \quad (1.27)$$

trataremos de forma a obter termos que já reconhecemos. Temos ciência que pela regra do produto.

$$\frac{d}{dt} \left[\vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right] = \frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} + \vec{v}_i \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}, \quad (1.28)$$

voltando para o nosso termo que já possuíamos na equação (2.23):

$$\frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = \frac{d}{dt} \left[\vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right] - \vec{v}_i \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \quad (1.29)$$

substituímos então o resultado obtido em (2.28) na equação que possuíamos em (2.23):

$$\sum_i \sum_k \left[\frac{d}{dt} \left(m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) - m_i \vec{v}_i \cdot \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right] \right] \quad (1.30)$$

a derivada $\partial \vec{r}_i / \partial q_k$ com o vetor $\vec{r}_i$ dependente várias coordenadas e do tempo ($q_1, q_2, \dots, q_n, t$) sua derivada em relação as coordenadas também terá uma dependência em relação as coordenadas. de forma que se analisarmos

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) = \frac{d}{dt} f(q_1, q_2, \dots, q_n, t). \quad (1.31)$$

Dessa forma, trabalharemos com a derivada total de forma:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) = \sum_l^n \frac{\partial f}{\partial q_l} \frac{dq_l}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t} \frac{dt}{dt}, \quad (1.32)$$

recuperando o termo já possuído na equação

$$\vec{v}_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) = \vec{v}_i \cdot \sum_l^n \frac{\partial}{\partial q_l} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) \dot{q}_l + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right), \quad (1.33)$$

e os seguintes termos são verídicos

$$\frac{\partial}{\partial q_l} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) = \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l} \right), \quad (1.34)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) = \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right), \quad (1.35)$$

dessa forma

$$\vec{v}_i \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) = \vec{v}_i \cdot \sum_l^n \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l} \right) \dot{q}_l + \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right), \quad (1.36)$$

colocando em evidência o termo $\partial/\partial q_k$, temos

$$\vec{v}_i \cdot \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\sum_l^n \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l} \right) \cdot \dot{q}_l + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right). \quad (1.37)$$

Sabendo que o produto $\partial/\partial q_k \cdot \dot{q}_l$ geraria um resultado nulo pela não dependência q_l das coordenadas q_k sobrando apenas

$$\vec{v}_i \cdot \frac{\partial}{\partial q_k} \vec{v}_i. \quad (1.38)$$

Voltando para os termos anteriores então possuímos

$$\sum_i^N \sum_k^n \left[\frac{d}{dt} \left(m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) - m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_k} \right] \delta q_k. \quad (1.39)$$

Como demonstramos, tratamos de forma geral os qs e $\dot{q}s$ como independentes do tempo. A situação então, já nos apontava o resultado:

$$\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_k} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}. \quad (1.40)$$

Analisando a propriedade do produto para derivada:

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} (m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i) = \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_k} \cdot \vec{v}_i = 2 \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_k}. \quad (1.41)$$

Então chegamos no passo final para esse primeiro termo, com

$$\sum_i^N \sum_k^n \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(\frac{\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i}{2} \right) \right) - \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(\frac{\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i}{2} \right) \right] \delta q_k. \quad (1.42)$$

Como os vetores $\vec{v}_i$ são paralelos temos que o produto escalar entre ambos é o módulo de

seu produto $\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i = v_i^2$

$$\sum_k^n \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(\frac{d}{dt} \sum_i^N \frac{m_i v_i^2}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{d}{dt} \sum_i^N \frac{m_i v_i^2}{2} \right) \right] \delta q_k. \quad (1.43)$$

Conseguimos obter o primeiro termo de energia para a montagem do formalismo, a Energia Cinética como modeladora do movimento. Cujas forma é

$$\sum_k^n \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} \right] \delta q_k = Q_k \delta q_k. \quad (1.44)$$

Agora devemos trabalhar com o nosso outro lado da equação, as forças generalizadas que representamos como Q_k podem ser ou não representados por potenciais generalizados. Dividiremos aqui como $Q_k = Q_k^U + Q_k^{nU}$, As forças que derivam desse potencial analisaremos a seguir e os que não derivam podem ser expressos como forças de resistência do sistema. Abrindo nossa definição de Q_k e considerando $Q_k^{nU} = 0$ temos

$$Q_k = \sum_i F_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = \sum_i \left(F_{ix} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + F_{iy} \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + F_{iz} \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right), \quad (1.45)$$

onde sabemos por definição matemática que uma força que deriva de um potencial generalizado se expressa da forma $\vec{F} = -\nabla U$, assim ficamos com

$$Q_k = \sum_i F_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = - \sum_i \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \frac{\partial U}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + \frac{\partial U}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right) = - \frac{\partial U}{\partial q_k}. \quad (1.46)$$

Colocando isso na função original, chegamos a um resultado dependente também da energia potencial que seria denominada equação de Eüler Lagrange, cuja forma explícita é

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial (T - V)}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial (T - V)}{\partial q_k} = 0; \quad L = T - V. \quad (1.47)$$

1.3.1 Análise de forças não conservativas e função de Rayleigh

Para a análise junto aos Q_k^{nU} , que são forças geralmente dependente das velocidades de forma $\vec{F} = -k\vec{v}$:

$$Q_k^{nU} = \sum_{i=1}^N F_i^U \frac{\partial r_i}{\partial q_k}, \quad (1.48)$$

e seguindo a função de dissipação de Rayleigh para facilitar o tratamento de tais situações que se comporta de forma

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \sum_i^N (k_{ix} v_{ix}^2 + k_{iy} v_{iy}^2 + k_{iz} v_{iz}^2), \quad (1.49)$$

com isso

$$F_i = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v_i}, \quad (1.50)$$

$$Q_k^U = -\sum_i \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v_{ix}} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v_{iy}} \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v_{iz}} \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right) = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_k}, \quad (1.51)$$

transportando para a equação final temos

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial(T - V)}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial(T - V)}{\partial q_k} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_k} = 0; \quad L = T - V. \quad (1.52)$$

As equações de Lagrange oferecem a forma que nos requisitam o mínimo de informação do sistema em termos de coordenadas, além de eliminarem referências aos vínculos. É notável que agora diferentemente da forma newtoniana, trabalhamos com um sistema escalar de n equações diferenciais de segunda ordem que determinam univocamente as formas de movimento.

1.3.2 Pêndulo simples como demonstração do formalismo lagrangiano

Consideraremos o exemplo do pêndulo simples, um dos sistemas clássicos mais conhecidos, para exemplificar o formalismo lagrangiano.

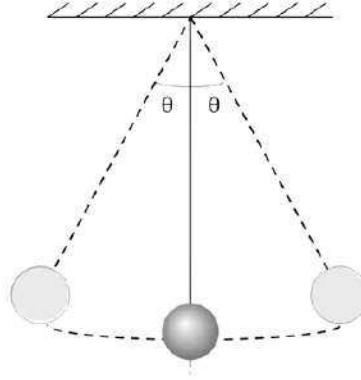


Figure 1.4: Configuração dos sistemas virtuais e reais

Esquematizando geometricamente, teremos:

$$x = r \sin(\theta) \quad (1.53)$$

$$y = -l \cos(\theta) \quad (1.54)$$

tendo a lagrangiana (sabendo que nosso potencial é de forma $U = -mgy$)

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgy; \quad (1.55)$$

$$L = \frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2 + mgl \cos(\theta). \quad (1.56)$$

Logo, vamos obter nossas equações Euler-Lagrange para θ , dados por

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0; \quad (1.57)$$

$$\frac{d}{dt} (ml^2 \dot{\theta}) - mgl \sin(\theta) = 0. \quad (1.58)$$

resultamos em:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin(\theta) = 0. \quad (1.59)$$

Que é a equação geral para o pendulo newtoniano.

1.4 Princípio Variacional de Hamilton

Uma introdução ao variacional de Hamilton requer um estudo inicial do Cálculo variacional.

O cálculo variacional é usado para determinar máximos ou mínimos de um funcional, sendo este uma função real com o domínio sendo um espaço de funções, ele retorna ou associa a função a um número do conjunto dos números reais. A representação explícita de um funcional é dada por

$$J[y] = \int_{x_1}^{x_2} f(y(x), y'(x), x) dx, \quad (1.60)$$

onde considerando um funcional genérico, a função $f : R^3 \rightarrow R$ maximiza ou minimiza o funcional J , extremizando-o.

Para determinarmos que funções $y(x)$ extremizam o funcional J , utilizaremos do artifício de utilizar uma outra função no plano. Deste modo, podemos reescrever a função y como

$$y = y(x) + \epsilon \eta(x) \quad ; \quad \eta(x_1) = \eta(x_2) = 0, \quad (1.61)$$

que possui os mesmos valores iniciais e finais da função em princípio. Atribuindo essa nova função ao funcional resultaria em uma função apenas dependente do número real ϵ , nos levando à

$$J[y] = \int_{x_1}^{x_2} f(y(x), y'(x), x) dx = \Phi(\epsilon). \quad (1.62)$$

Como em casos extremos temos que ϵ é igual a zero, resultaríamos no valor extremo do funcional $J[y]$ em máximo ou mínimo. Assim, teremos o valor máximo ou mínimo em $\frac{d\Phi(\epsilon)}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} = 0$.

Após um certo algebrismo, é possível mostrar que a variação do funcional $J[y]$, assumido constante sob todo o intervalo de integração, resulta na equação

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{df}{dy} - \frac{d}{dx} \left(\frac{df}{dy'} \right) \right] \eta dx = 0. \quad (1.63)$$

Assim, se $M(x)$, $x_1 \leq x \leq x_2$, é uma função contínua tal que $\int_{x_1}^{x_2} M(x) \eta(x) dx = 0$ sendo qualquer função contínua $\eta(x)$ com $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$, então $M(x) = 0$ em $[x_1, x_2]$. [12]

Este lema aplicado a condição da equação de euler- conduz a equação de Eüler, cuja forma é

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0. \quad (1.64)$$

1.4.1 Notação Variacional

O princípio de Hamilton enuncia que, partindo de um ponto a trajetória física pelo sistema mecânico no espaço de configuração é a trajetória mínima ou que minimiza a ação. Considerando que uma ação clássica pode ser escrita segundo

$$S[q_1, \dots, q_n, t] = \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t) dt, \quad (1.65)$$

sendo S o funcional do sistema, e que a coordenada q_i pode ser reescrita como

$$q_i(t) = q_i(t) + \epsilon \eta_i(t) = q_i(t) + \delta q_i(t), \quad (1.66)$$

então, a variação δS é a variação em primeira ordem de S quando q_i e $\dot{q}_i$ estão submetidos as variações δq_i e $\delta \dot{q}_i$, respectivamente. Consequentemente,

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right); \quad \delta S = S[q] - S[q]. \quad (1.67)$$

Como nesse caso, cada δq é independente, os δS são iguais a zero, nos permitindo encontrar as equações de Lagrange do sistema. Assim, podemos então enunciar o princípio de Hamilton a partir da ação

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt. \quad (1.68)$$

Dada a lagrangiana L , a ação é tal que torna a trajetória entre os pontos inicial e final mínima.

1.5 Conservação de Energia e Teorema de Noether

Existe um caso geral que na maior parte dos sistemas físicos reduz-se à conservação total da energia do sistema.

Teorema $\rightarrow$ sejam $q_1, \dots, q_n$ coordenadas generalizadas e $L(q, \dot{q}, t)$ a lagrangiana de um sistema mecânico. Se L não depende explicitamente do tempo a quantidade h é definida por

$$h = \sum \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - L, \quad (1.69)$$

e é constante de movimento. Se dispusermos de uma lagrangiana do tipo $L = T - V$ com V independente das velocidades, temos

$$h = \sum \dot{q}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - L. \quad (1.70)$$

Se as coordenadas generalizadas não envolvem explicitamente o tempo, ficamos com

$$h = 2T - T + V = T + V = \text{Energia Total}. \quad (1.71)$$

Assim, um dado sistema pode ser caracterizado por:

- (i) $\rightarrow h$ ser constante de movimento, mas $h \neq E$.
- (ii) $\rightarrow h$ ser igual a energia total, mas h não ser constante de movimento.

(iii) $\rightarrow h$ ser igual a energia total, e h ser constante de movimento.

1.5.1 Teorema de Noether

A invariância e simetria foram muito bem encaixados finalmente por Emmy Noether (1918). Nesta seção apresentaremos uma breve revisão de seu tão famoso teorema.

Suponha o sistema descrito pela ação

$$L(q, \dot{q}, t) \rightarrow S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt, \quad (1.72)$$

considere a transformação infinitesimal

$$t \rightarrow t' = t + \epsilon X(q, t), \quad (1.73)$$

e

$$q_i(t) \rightarrow q'_i(t) = q_i(t) + \epsilon \psi_i(q, t). \quad (1.74)$$

O teorema de Noether então diz que, supondo que a ação S seja invariante, não mudando sobre a transformação infinitesimal, então, há uma quantidade conservada sob essa invariância da ação relativa à transformação considerada.

Como vimos anteriormente, ao variarmos a ação, obtemos

$$\Delta S = \int_{t_1}^{t_2} L \left(q'(t'), \frac{dq'(t')}{dt'}, t' \right) dt - \int_{t_1}^{t_2} L \left(q(t), \frac{dq(t)}{dt}, t \right) dt, \quad (1.75)$$

uma vez que, $\Delta S = 0$, então, a quantidade

$$C = \sum^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} (\dot{q}_i x - \psi_i) - Lx, \quad (1.76)$$

é conservada, e se configura como constante de movimento.

1.6 Dinâmica Hamiltoniana ou Formalismo Hamiltoniano

O formalismo hamiltoniano consiste numa simplificação da resolução da equação de movimento de um dado sistema. Como anteriormente já citado, a partir de uma lagrangiana constituída por n coordenadas generalizadas, obtemos n equações diferenciais de 2º ordem. Aqui trataremos de um grupo de $2n$ equações ordinárias de 1º ordem, conhecidas como equações de Hamilton. Assim, partindo do conjunto

$$(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n), \quad (1.77)$$

veremos como é possível obter as equações

$$H(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t). \quad (1.78)$$

As equações de Hamilton na dinâmica consistem na formulação mais poderosa da mecânica clássica e permitem estudar os aspectos mais estruturais da mesma. A mecânica quântica e a mecânica estatística se baseiam nessa formulação para seu proceder, logo se deixa explícito a sua importância no estudo[8].

A base da formulação de Hamilton está justamente na lagrangiana, o uso da variável adicional p não foi por mero detalhe[6]. Para a redução da ordem das equações de Lagrange utilizamos a definição de momentos conjugados p_k , que como vimos é

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.79)$$

Ao substituírmos as velocidades generalizadas pelos momentos conjugados, teremos como resultado a diminuição da ordem das equações de movimento, o que facilita sua integração e solução.

A função de Hamilton, pode ser obtida a partir do seguinte mapeamento

$$H(q, p, t) = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L(q, \dot{q}, t), \quad (1.80)$$

também conhecido como transformada de Legendre.

Um resultado imediato que pode ser obtido de H é,

$$dH = \sum_{i=1}^n (\dot{q}_i p_i + \dot{p}_i q_i) - \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \right) + \frac{\partial L}{\partial t} dt \right]. \quad (1.81)$$

Substituindo o vínculo da equação de movimento da relação anterior, encontramos

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad (1.82)$$

e como subproduto

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \quad (1.83)$$

Essa última equação demonstra a dependência temporal explícita entre a hamiltoniana e a lagrangiana. Se uma depende explicitamente do tempo a outra também dependerá e vice-versa

A hamiltoniana possui diferentemente da lagrangiana, que tem caráter mais algébrico, um importante significado físico. Considerando a forma geral da lagrangiana $L = T - V$ sendo V independente das velocidades e T dependente quadraticamente destas, então, $\sum \dot{q}_i \partial T / \partial \dot{q}_i = \sum \dot{q}_i \partial T / \partial \dot{q}_i = 2T$ em consequência

$$H = T + V = E, \quad (1.84)$$

o que significa que a hamiltoniana é, na maioria dos problemas físicos que iremos tratar, correspondente à energia total do sistema mecânico.

As leis de conservação já estudadas na seção 2.5 podem ser reformuladas para o conceito da hamiltoniana. Uma coordenada q_j cíclica, como mencionado em decorrência da descrição matemática, não aparece também na hamiltoniana, resultando em

$$\dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} = 0. \quad (1.85)$$

Revelando o seguinte teorema: se a hamiltoniana não depende explicitamente do tempo, então, H é constante de movimento. Em casos excepcionas, pode acontecer de H se conservar sem ser a energia total, ou inversamente, de H ser a energia total e não se conservar.

1.6.1 O problema do pêndulo esférico como exemplo de aplicação ao formalismo hamiltoniano

Considerando a geometria do sistema

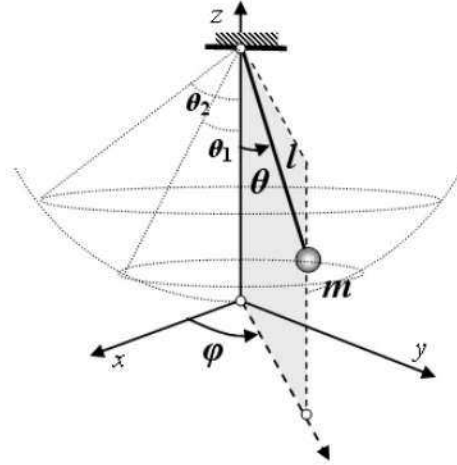


Figure 1.5: Pêndulo esférico em coordenadas θ , ϕ e r

$$x = l \cos(\theta) \sin(\phi), \quad (1.86)$$

$$y = l \sin(\theta) \sin(\phi), \quad (1.87)$$

$$z = l \cos(\phi). \quad (1.88)$$

A única força que age no pêndulo (além do ponto do suporte) é a gravidade, e definimos o potencial zero como estando no ponto de conexão do pêndulo.

$$U = -mgl \cos(\theta), \quad (1.89)$$

dessa forma, representamos a lagrangiana primeiramente

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2); \quad (1.90)$$

$$L = \frac{m}{2} (l^2 \dot{\theta}^2 + \sin^2(\theta) \dot{\phi}^2) + mgl \cos(\theta). \quad (1.91)$$

As quantidade de movimento generalizada são

$$p_{\theta} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2 \dot{\theta}; \quad (1.92)$$

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = m \sin(\theta)^2 \dot{\phi}, \quad (1.93)$$

assim podemos determinar a hamiltoniana tanto por $H(q, p, t) = \sum_i^n \dot{q}_i p_i - L(q, \dot{q}, t)$ ou $H = T + V$, temos então

$$H = T + V = \frac{m}{2} l^2 \frac{p_\theta^2}{(ml^2)^2} + \frac{ml^2 \sin(\theta)^2 p_\phi^2}{2(ml^2 \sin(\theta)^2)^2} - mgl \cos(\theta); \quad (1.94)$$

$$H = \frac{p_\theta^2}{2ml^2} + \frac{p_\phi^2}{2ml^2 \sin(\theta)^2} - mgl \cos(\theta), \quad (1.95)$$

e daí obtemos as seguintes equações de movimento

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{ml^2}; \quad (1.96)$$

$$\dot{\phi} = \frac{\partial H}{\partial p_\phi} = \frac{p_\phi}{ml^2 \sin(\theta)^2}; \quad (1.97)$$

$$\dot{\phi} = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = \frac{p_\phi^2 \cos(\theta)}{ml^2 \sin(\theta)^3}; \quad (1.98)$$

$$\dot{p}_\phi = -\frac{\partial H}{\partial \phi} = 0. \quad (1.99)$$

Visto que ϕ é cíclico, a quantidade de movimento p_ϕ sobre o eixo de simetria é constante.

1.7 Transformações Canônicas e Funções Geradoras

Diferentemente da lagrangiana que é invariante sob a escolha de várias coordenadas, a hamiltoniana, por ter coordenadas generalizadas independente dos momentos, nos permite uma mudança de variáveis no espaço de fase que simplifique a aplicação de alguns modelos físicos específicos. Também existe a diferença que no espaço de configuração, mudanças de variáveis mantém a forma geral da lagrangiana. Isso, em geral, não ocorre no espaço de configuração da hamiltoniana, não preservando a forma das equações de movimento. Logo, nos restringiremos as mudanças de variáveis que mantém a forma hamiltoniana. Considere as funções

$$Q_i = Q_i(q, p, t), \quad (1.100)$$

e

$$P_i = P_i(q, p, t). \quad (1.101)$$

Como queremos que as novas variáveis mantenham a forma da hamiltoniana, queremos que exista uma função K das novas variáveis canônicas e do tempo $K(Q, P, t)$, tal que K desempenha o papel da nova hamiltoniana. Assim, podemos escrever que

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i}. \quad (1.102)$$

Sabemos que as equações canônicas do movimento originais são geradas a partir de um princípio variacional. O mesmo se aplica para as equações canônicas das novas variáveis. Logo, ambos os princípios variacionais devem ser válidos ao mesmo tempo. Uma forma coerente de validar isso é que ambos os integrandos difiram de uma derivada total com relação ao tempo da função $\phi(q, p, t)$, ou seja,

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\phi}{dt} dt = \delta\phi_2 - \delta\phi_1 = 0. \quad (1.103)$$

Assumindo que $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$ e $\delta p_i(t_1) = \delta p_i(t_2) = 0$, ficamos com

$$\sum_{i=1}^n (p_i dq_i - P_i dQ_i) + (K - H) dt = d\phi, \quad (1.104)$$

que representa a forma geral da transformação canônica.

Com a definição apresentada nos permite criar meios de produzir ou gerar transformações canônicas, para isso analisando a equação podemos utilizar o conjunto independente $[q, Q]$ de $2n$ variáveis, e assim considerar os momentos transformados em termos de (q, Q, t) . Assim, teríamos

$$p_i = f_i(q, Q, t), \quad (1.105)$$

supondo que para todos os casos isso seja possível. Assim ao definimos uma função F_1

$$F_1 = (q, Q, t) = \phi(q, p(q, Q, t), t), \quad (1.106)$$

logo, ficamos com

$$\sum_{i=1}^n (p_i dq_i - P_i dQ_i) + (K - H) dt = dF_1, \quad (1.107)$$

e

$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i}; \quad P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i}; \quad K(Q, P, t) = H(q, p, t) + \frac{\partial F_1}{\partial t}. \quad (1.108)$$

Com a função F_1 é diferenciável, podemos gerar transformações ao sistema. Pode também não ser possível utilizar o conjunto $[q, Q]$ como variáveis independentes, mas podemos utilizar $[q, P]$ como um conjunto de $2n$ variáveis independentes, onde existiria a função $F_2(q, P, t)$, cuja forma é

$$F_2 = \sum_i Q_i P_i + F_1, \quad (1.109)$$

resultando em

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}; \quad Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i}; \quad K(Q, P, t) = H(q, p, t) = \frac{\partial F_2}{\partial t}. \quad (1.110)$$

1.7.1 Parênteses de Lagrange e Poisson

Podemos pensar nos parênteses de Poisson como um critério que consegue testar a canonicidade de uma transformação. Com a definição que já temos de Transformação canônica que responde a equação 2.103, sabemos que podemos realizar um teste (não direto exigindo a inversão de muitas equações) a partir das funções geradoras. Para obter um conjunto de $2n$ variáveis independentes (n variáveis antigas, n variáveis novas) que permite obter um critério direto sobre canonicidade, utilizaremos os parênteses de Poisson.

Se estabelece por definição a $(\eta, \xi) \rightarrow 2n$ variáveis canônicas, que por sua vez, representam os n q 's e p 's da formulação, e que eles dependam dos parâmetros $[u, v]$, de tal forma que:

$$[u, v]_{(\eta, \xi)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial \eta_k}{\partial u} \frac{\partial \xi_k}{\partial v} - \frac{\partial \eta_k}{\partial v} \frac{\partial \xi_k}{\partial u} \right). \quad (1.111)$$

Então seguindo o teorema 8.2.1 de [8], a transformação é canônica se e somente se

$$[q_i, q_j]_{(Q, P)} = 0, \quad [p_i, p_j]_{(Q, P)} = 0, \quad [q_i, p_j]_{(Q, P)} = \delta_{ij}. \quad (1.112)$$

Os parênteses de Poisson aparecem nas equações que regem o movimento de uma variável dinâmica qualquer, uma função das variáveis canônicas e do tempo. Deste modo, ao considerarmos a derivada primeira da função F em relação ao tempo, obtemos

$$\frac{dF}{dt} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial F}{\partial p_k} \dot{p}_k \right) + \frac{\partial F}{\partial t} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial F}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial q_k} \right) + \frac{\partial F}{\partial t}, \quad (1.113)$$

na qual utilizamos as equações de Hamilton. Consequentemente, os parênteses de Poisson

podem ser definidos como

$$[F, G] = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial q_k} \frac{\partial G}{\partial p_k} - \frac{\partial F}{\partial p_k} \frac{\partial G}{\partial q_k} \right), \quad \frac{dF}{dt} = [F, G] + \frac{\partial F}{\partial t}. \quad (1.114)$$

A partir das definições acima, podemos reescrever as equações do formalismo hamiltoniano em termos dos parênteses de Poisson, como pode ser visto em

$$\dot{q}_i = [[q_i, H], \quad \dot{p}_i = [p_i, H], \quad (1.115)$$

1.8 Teorema de Hamilton-Jacobi

O método agora discutido é o mais bem elaborado e mais poderoso na resolução das equações de movimento. Ele se baseia primeiramente em uma transformação canônica capaz de tornar a hamiltoniana transformada identicamente nula, que algebricamente é representada por

$$(q, p) \rightarrow (Q, P) : K(Q, P, t) = 0. \quad (1.116)$$

Por consequência as equações de Hamilton transformadas são

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i} = 0 \rightarrow Q_i = \beta_i, \quad (1.117)$$

e

$$\dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i} = 0 \rightarrow P_i = \alpha_i. \quad (1.118)$$

Aplicando a transformação canônica inversa temos

$$q_i = q(Q, P, t) \rightarrow q_i = q(\beta, \alpha, t), \quad (1.119)$$

e

$$p_i = p(Q, P, t) \rightarrow p_i = p(\beta, \alpha, t), \quad (1.120)$$

sendo estas as equações de Hamilton para as variáveis originais. Assim, devemos nos preocupar em encontrar uma função geradora do tipo $F_2(q, P, t)$, a qual chamaremos aqui de $S(q, P, t)$. Essa função tem como propósito anular a nova hamiltoniana $K(Q, P, t)$ e

estas estarão relacionadas através do mapeamento

$$K(Q, P, t) = H + \frac{\partial S}{\partial t}. \quad (1.121)$$

Considerando que a nova hamiltoniana deve ser nula, temos

$$H + \frac{\partial S}{\partial t} = 0, \quad (1.122)$$

e usando os resultados obtidos das novas equações de Hamilton, ficamos com

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}; \quad Q_i = \frac{\partial S}{\partial P_i}. \quad (1.123)$$

Assim, temos

$$H(q_1, \dots, q_n, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_n}, t) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \quad (1.124)$$

A equação anterior é denominada equação de Hamilton-Jacobi, onde passamos de uma representação das equações Hamilton em $2n$ equações diferenciais de primeira ordem para uma única equação parcial de primeira ordem de $n + 1$ variáveis.

1.8.1 O problema do oscilador harmônico como exemplo de aplicação da teoria de Hamilton-Jacobi

O hamiltoniano para um oscilador harmônico unidimensional é representado na Fig. 6

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{kq^2}{2}. \quad (1.125)$$

Para este caso a equação de Hamilton-Jacobi tem a forma

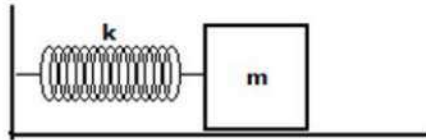


Figure 1.6: Sistema de oscilador harmônico simples

$$\mathcal{H}\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \quad (1.126)$$

Substituindo p por $\frac{\partial S}{\partial q}$ no hamiltoniano, temos

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial q} \right)^2 + \frac{kq^2}{2} + \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \quad (1.127)$$

Uma solução para (2.126) pode ser obtida por separação de variáveis na forma de soma [1]:

$$S = W(q) + T(t). \quad (1.128)$$

Introduzindo esta relação resulta em

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial W}{\partial q} \right)^2 + \frac{kq^2}{2} = -\frac{dT}{dt}. \quad (1.129)$$

Ambos os lados desta equação são iguais a uma mesma constante positiva, que chamaremos de α . Ficamos então, com as duas equações diferenciais ordinárias:

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial W}{\partial q} \right)^2 + \frac{kq^2}{2} = \alpha, \quad (1.130)$$

e

$$\frac{dT}{dt} = -\alpha. \quad (1.131)$$

A constante α coincide com o valor constante do hamiltoniano, pois $dW/dq = \partial S/\partial q = p$.

A parte de S independente do tempo será

$$W = \sqrt{mk} \int dq \sqrt{\frac{2\alpha}{k} - q^2}, \quad (1.132)$$

consequentemente, com $T(t) = -\alpha t$, temos

$$S(q, \alpha, t) = -\alpha t + \sqrt{mk} \int dq \sqrt{\frac{2\alpha}{k} - q^2}. \quad (1.133)$$

A solução da equação de movimento para q obtém-se de

$$\beta = \frac{\partial S}{\partial \alpha} = \sqrt{\frac{m}{k}} \int \frac{dq}{\sqrt{\frac{2\alpha}{k} - q^2}} - t. \quad (1.134)$$

Integrando, obtemos a expressão

$$t + \beta = \sqrt{\frac{m}{k}} \arccos q \sqrt{\frac{k}{2\alpha}}, \quad (1.135)$$

que pode ser resolvida para q , ou seja:

$$q = \sqrt{\frac{2\alpha}{k}} \cos \omega(t + \beta), \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (1.136)$$

Esta é a bem conhecida solução do problema do oscilador harmônico. Supomos que em $t = 0$ a partícula esteja parada, $p_0 = 0$, mas deslocada da posição de equilíbrio de uma quantidade q_0 . Podemos determinar α resolvendo a Eq. 2.134 para dW/dq e depois calcular em $t = 0$. Assim, neste caso

$$\frac{dW}{dq} = \sqrt{2m} \sqrt{\alpha - \frac{kq^2}{2}} \quad (1.137)$$

Calculando em $t = 0$, ficamos com :

$$\left(\frac{dW}{dq} \right)_{t=0} = p_0 = 0 = \sqrt{2m} \sqrt{\alpha - \frac{kq_0^2}{2}}, \quad (1.138)$$

portanto, temos

$$\alpha = \frac{kq_0^2}{2}, \quad (1.139)$$

que é a energia inicial total do sistema. Este fato pode também ser visto com a relação

$$\mathcal{H} + \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \quad (1.140)$$

De $S = W - \alpha t$, temos $\frac{\partial S}{\partial t} = -\alpha$, então

$$\mathcal{H} = \alpha. \quad (1.141)$$

A solução q em termos de seu valor inicial q_0 será

$$q = q_0 \cos \omega(t + \beta), \quad (1.142)$$

e, das condições iniciais obtemos $\beta = 0$. Substituindo $\alpha = kq_0^2/2$ em (2.125), escrevemos a função principal de Hamilton como:

$$S = \sqrt{mk} \int dq \sqrt{q_0^2 - q^2} - \frac{kq_0^2}{2}t, \quad k = m\omega^2. \quad (1.143)$$

Mas $\sqrt{q_0^2 - q^2} = (1/\sqrt{mk})(\partial S/\partial q) = p/m\omega = \dot{q}/\omega = -q_0 \sin \omega t$, então

$$S = m\omega^2 q_0^2 \int \left(\sin^2 \omega t - \frac{1}{2} \right) dt. \quad (1.144)$$

Portanto, S é a integral do lagrangiano em relação ao tempo, pois

$$\mathcal{L} = \frac{m\dot{q}^2}{2} - \frac{m\omega^2 q^2}{2} = m\omega^2 q_0^2 \left(\sin^2 \omega t - \frac{1}{2} \right). \quad (1.145)$$

Este resultado pode ser visto se tomarmos a derivada total de S em relação ao tempo:

$$\frac{dS}{dt} = \sum_i \frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial S}{\partial t}. \quad (1.146)$$

Com $p_i = \partial S/\partial q_i$ e $\mathcal{H} + \partial S/\partial t = 0$, teremos

$$\frac{dS}{dt} = \sum_i p_i \dot{q}_i - \mathcal{H} = \mathcal{L}. \quad (1.147)$$

Portanto, temos

$$S = \int \mathcal{L} dt + \text{constante}. \quad (1.148)$$

O resultado que buscávamos obter.

Capítulo 2

Formalismo de Eisenhart Lift

Dentro do que trabalhamos na dinâmica da mecânica analítica, especificamente no formalismo lagrangiano, fizemos uma análise sobre moldarmos o sistema utilizando os vínculos determinístico para a cinemática e as forças adicionais para referenciais não inerciais.

Trataremos agora sobre um outro formalismo, que já foi explorado dentro de estudos da Relatividade Geral, proposto por Luther Eisenhart[13] (1876 - 1965), onde o objetivo seria tratar o sistema de forma a considerar uma partícula livre em um novo espaço de configuração. Considerando as forças que chamamos de adicionais em sentido que aparecem em sistemas não inerciais, trataremos agora de forças "fictícias" como fala o autor em artigo [14]. Como essas forças conservativas agem dentro do movimento, gerando potenciais conservativos. Podemos analisar de uma forma a se considerar apenas um novo espaço ao qual esta partícula se encontra tornando-se uma partícula livre. Analisaremos a construção histórica do modelo e sua motivação para entendermos seu uso.

2.1 Gravidade Einsteiniana

Nesta seção recordamos os elementos mínimos da Relatividade de Einstein necessários para o restante do trabalho. A gravidade é tratada como geometria do espaço-tempo: partículas livres seguem geodésicas de uma métrica $g_{\mu\nu}$. No regime de campos fracos e velocidades baixas (limite newtoniano), recuperamos a dinâmica sob o potencial $\Phi = -GM/r$, exatamente o cenário que exploramos ao reinterpretar o movimento orbital via *Eisenhart lift* como geodésicas em uma variedade com coordenada extra[15]. Essa ponte justifica por que os resultados orbitais clássicos (e suas correções) aparecem naturalmente

no formalismo geométrico usado no capítulo.

Relatividade Especial

Para contextualizar as ideias que culminam no *Eisenhart lift* e, mais adiante, na formulação geométrica da gravidade, recordamos os pontos essenciais da Relatividade Especial (RE).

Princípio de relatividade e transformações. Em mecânica clássica (Galileu), as leis têm a mesma forma em todos os referenciais inerciais. As transformações entre dois referenciais S e S' com velocidade relativa V ao longo do eixo x são

$$x' = x - Vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t,$$

de onde o tempo é absoluto. Contudo, a eletrodinâmica de Maxwell prediz que a luz se propaga no vácuo com velocidade c *independentemente* da fonte. Para compatibilizar esse fato com a invariância das leis físicas, Einstein postula:

1. As leis da física têm a mesma forma em todos os referenciais inerciais;
2. A velocidade da luz no vácuo é a mesma c em todos os referenciais inerciais.

Disso decorrem as **transformações de Lorentz**. Para um movimento relativo ao longo de x :

$$x' = \gamma(x - Vt), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \gamma\left(t - \frac{V}{c^2}x\right), \quad \gamma := \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \quad (2.1)$$

Espaço-tempo de Minkowski e intervalo invariante. A estrutura geométrica subjacente é o *espaço de Minkowski*, cuja métrica (com assinatura $(-, +, +, +)$) é

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (\eta_{\mu\nu}) = \text{diag}(-1, 1, 1, 1). \quad (2.2)$$

O intervalo ds^2 é invariante sob as transformações de Lorentz

$$x' = \gamma(x - Vt), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \gamma\left(t - \frac{V}{c^2}x\right), \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

Escrevendo o intervalo como

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

em unidades naturais ($c = 1$) ele reduz-se a

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

como adotado em partes do capítulo.

Quatro-vetores e dinâmica. Definindo o quatro-vetor posição $x^\mu = (ct, \vec{x})$ e a quatro-velocidade $u^\mu = dx^\mu/d\tau$ (com $d\tau$ o tempo próprio), temos $u^\mu u_\mu = -c^2$. A conservação de quatro-momento $p^\mu = mu^\mu$ encapsula a dinâmica relativística em ausência de forças.

Relatividade Geral

Do princípio da equivalência à geometria. A observação empírica de que *todas* as massas caem com a mesma aceleração em um mesmo campo gravitacional motiva identificar massa inercial m_I e massa gravitacional m_G :

$$F = m_I a, \quad F = m_G g \Rightarrow a = \frac{m_G}{m_I} g \stackrel{m_G=m_I}{=} g.$$

No pensamento einsteiniano, isto sugere que a gravidade pode ser *removida localmente* escolhendo-se um referencial em queda livre: num pequeno laboratório que cai, as leis voltam à forma da RE. Essa é a forma operacional do **Princípio da Equivalência**.

Métrica, conexão e geodésicas. A descrição geral passa a ser *geométrica*: toda a física localmente inercial é colada por uma métrica lorentziana $g_{\mu\nu}(x)$ em uma variedade de dimensão 4. A derivada compatível com g e sem torção é a conexão de Levi-Civita, cujos símbolos de Christoffel são

$$\Gamma^\rho{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} (\partial_\mu g_{\sigma\nu} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}). \quad (2.3)$$

Partículas *livres* (sem forças não-gravitacionais) movem-se ao longo de **geodésicas**:

$$\frac{d^2 x^\rho}{d\tau^2} + \Gamma^\rho_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad u^\mu \nabla_\mu u^\rho = 0. \quad (2.4)$$

Curvatura e equações de campo. A curvatura de Riemann $R^\rho_{\sigma\mu\nu}$ mede a não comutatividade da derivada covariante; suas contrações dão o tensor de Ricci $R_{\mu\nu} = R^\rho_{\mu\rho\nu}$ e o escalar $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ [16, 17]. As **equações de Einstein** ligam geometria e conteúdo material:

$$G_{\mu\nu} := R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (2.5)$$

com $T_{\mu\nu}$ o tensor energia-momento. As identidades de Bianchi ($\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$) implicam a conservação covariante da matéria, $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$.

Limite fraco (newtoniano). Para recuperar a gravitação clássica que usaremos no capítulo do lift, considere um campo fraco e quase estacionário:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1, \quad g_{00} \simeq - \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2} \right),$$

onde Φ é o potencial gravitacional newtoniano. No regime de baixas velocidades ($|\vec{v}| \ll c$) e campos lentos, a equação geodésica fornece, para a aceleração espacial,

$$\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} \simeq -\nabla \Phi(\vec{x}).$$

Além disso, as equações de campo de Einstein reduzem, nesse limite, à **equação de Poisson**:

$$\nabla^2 \Phi(\vec{x}) = 4\pi G \rho(\vec{x}).$$

com ρ a densidade de massa-energia apropriada. Assim, o termo $-\nabla \Phi$ que aparece no seu capítulo (força central) é precisamente o limite de baixa energia de uma métrica com $g_{00} \approx -(1 + 2\Phi/c^2)$.

Exemplo canônico (estático e esfericamente simétrico). Para uma massa central isolada, a solução externa é a métrica de Schwarzschild; no regime $r \gg r_s$ ($r_s = 2GM/c^2$) temos $\Phi(r) \approx -GM/r$, isto é, o potencial de Kepler que você utiliza. Perturbações da órbita elíptica (precessão) emergem quando se considera correções além do limite

estritamente newtoniano — mecanismo análogo ao termo adicional $+C/(2r^2)$ induzido pelo lift no seu formalismo.

2.1.1 Conexão com o formalismo do estudo (Eisenhart lift)

No capítulo, re-interpretamos a dinâmica de uma partícula sob potencial estacionário $V(\vec{x})$ como *geodésica* em uma variedade com uma coordenada extra. Em termos de RG, isso corresponde a embutir a aceleração $-\nabla\Phi$ (isto é, no limite fraco/lento em que

$$\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} \simeq -\nabla\Phi(\vec{x}), \quad \Phi(\vec{x}) = -\frac{GM}{r},$$

) em uma métrica estendida cuja projeção reproduz as equações newtonianas. No caso central newtoniano ($\Phi = -GM/r$), a lagrangiana efetiva leva a

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{2m r^2} - \frac{k}{r} + \frac{C}{2r^2}.$$

onde o termo $+C/(2r^2)$ é o *rastro geométrico* da coordenada extra (seção anterior do capítulo), modificando a frequência radial e induzindo precessão (equações de Binet apresentadas no formalismo)[18, 19, 20, 21, 22, 23].

2.2 Formalismo (Eisenhart lift) e aplicação a força central

O Princípio da Equivalência da Relatividade Geral (RG) sustenta que, localmente, os efeitos de um campo gravitacional podem ser *removidos* por uma escolha apropriada de referencial em queda livre. Isso frequentemente leva à pergunta: a gravidade seria uma força fictícia? A resposta geométrica de Einstein é que a gravidade é a manifestação da curvatura do espaço-tempo quadridimensional; as partículas livres seguem geodésicas, e a “força” gravitacional é substituída pela *geodésica em uma variedade curva*[24, 25, 26, 27, 28].

Historicamente, ideias de dimensões extras (como em Kaluza–Klein[3, 4]) sugerem aumentar o número de graus de liberdade do espaço-tempo para codificar outras interações. Nesse espírito, o *Eisenhart lift* mostra que a dinâmica newtoniana de uma partícula sujeita

a um potencial estacionário pode ser re-interpretada como **geodésicas** de uma métrica em dimensão maior. Assim, “removemos” o potencial da lagrangiana original, trabalhando com uma partícula livre em uma variedade pseudo/riemanniana adequadamente escolhida.

2.2.1 Métrica de Eisenhart e lagrangiana geodésica

No caso riemanniano mais simples (coordenadas espaciais x^i e uma coordenada extra y), tomamos

$$(g_{IJ}) = \begin{pmatrix} \delta_{ij} & 0 \\ 0 & \frac{M^2}{m V(x)} \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

onde $V(x)$ é o potencial *positivo* associado à força conservativa e M é uma constante com dimensão de massa que torna homogêneas as unidades. A lagrangiana geodésica correspondente é

$$L_g = \frac{1}{2} m \delta_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j + \frac{1}{2} \frac{M^2}{V(x)} \dot{y}^2. \quad (2.7)$$

Atenção ao sinal do potencial newtoniano: no problema gravitacional de Kepler, o potencial físico é *atrativo*,

$$U(r) = -\frac{k}{r}, \quad k := G m M > 0,$$

de modo que, na lagrangiana usual de mecânica clássica, $L_{\text{newt}} = T - U = T + \frac{k}{r}$. No arranjo geométrico adotado, a lagrangiana geodésica é

$$L_{\text{geo}} = \frac{m}{2} g_{IJ}(x) \dot{X}^I \dot{X}^J, \quad (g_{IJ}) = \begin{pmatrix} \delta_{ij} & 0 \\ 0 & \frac{\alpha^2}{m V(r)} \end{pmatrix},$$

e tomamos $V(r) = +\frac{k}{r} > 0$ na métrica extra, mantendo o sinal *atrativo* correto quando retornamos à forma newtoniana (isto é, com $U(r) = -\frac{k}{r}$ na energia efetiva do sistema físico).

2.2.2 Redução a duas dimensões e coordenadas polares

Consideremos um movimento planar com coordenadas polares (r, θ) :

$$x = r \cos \theta, \quad y_{\text{plano}} = r \sin \theta.$$

A contribuição cinética plana é $T = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2)$. Tomando $V(r) = \frac{k}{r}$ na métrica extra

$$(g_{IJ}) = \begin{pmatrix} \delta_{ij} & 0 \\ 0 & \frac{\alpha^2}{mV(r)} \end{pmatrix},$$

a lagrangiana geodésica correspondente é

$$L_{\text{geo}} = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} \frac{\alpha^2}{V(r)} \dot{Y}^2,$$

e, portanto, com $V(r) = \frac{k}{r}$, obtemos

$$L = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + \frac{k}{r} + \frac{1}{2} \frac{\alpha^2}{k/r} \dot{Y}^2 = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + \frac{k}{r} + \frac{1}{2} \frac{\alpha^2 r}{k} \dot{Y}^2. \quad (2.8)$$

onde renomeamos a coordenada extra por Y e escrevemos $M \equiv \alpha$ apenas para enfatizar a constante de escala da dimensão extra.

2.2.3 Equações de Euler–Lagrange

Coord. angular θ .

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2 \dot{\theta} \Rightarrow \frac{d}{dt}(mr^2 \dot{\theta}) = 0 \Rightarrow mr^2 \dot{\theta} = \ell \quad (\text{constante}).$$

Portanto,

$$\dot{\theta} = \frac{\ell}{m r^2}. \quad (2.9)$$

Coord. extra Y .

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{Y}} = \frac{\alpha^2 r}{k} \dot{Y} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\alpha^2 r}{k} \dot{Y} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\alpha^2 r}{k} \dot{Y} = B \quad (\text{constante}),$$

isto é,

$$\dot{Y} = \frac{k B}{\alpha^2} \frac{1}{r}. \quad (2.10)$$

Definimos, para conveniência,

$$C := \frac{k B^2}{\alpha^2} > 0. \quad (2.11)$$

Coord. radial r .

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \Rightarrow \frac{d}{dt}(m\dot{r}) = m\ddot{r}.$$

Além disso,

$$\frac{\partial L}{\partial r} = m r \dot{\theta}^2 - \frac{k}{r^2} + \frac{1}{2} \frac{\alpha^2}{k} \dot{Y}^2.$$

Logo, a E-L radial é

$$m\ddot{r} - \left(m r \dot{\theta}^2 - \frac{k}{r^2} + \frac{1}{2} \frac{\alpha^2}{k} \dot{Y}^2 \right) = 0 \Rightarrow m\ddot{r} = m r \dot{\theta}^2 - \frac{k}{r^2} + \frac{1}{2} \frac{\alpha^2}{k} \dot{Y}^2.$$

Usando as integrais primeiras

$$\dot{\theta} = \frac{\ell}{m r^2} \quad \text{e} \quad \dot{Y} = \frac{k B}{\alpha^2} \frac{1}{r},$$

obtemos

$$\boxed{m\ddot{r} = \frac{\ell^2}{m r^3} - \frac{k}{r^2} + \frac{C}{r^3}} \quad \text{com} \quad C = \frac{k B^2}{\alpha^2}.$$

2.2.4 Energia efetiva e interpretação

A energia mecânica associada é

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \underbrace{\frac{\ell^2}{2m r^2}}_{\text{centrífuga}} - \frac{k}{r} + \underbrace{\frac{C}{2r^2}}_{\text{correção do lift}} = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + U_{\text{eff}}(r). \quad (2.12)$$

Isto é, o *Eisenhart lift* adiciona um termo $+\frac{C}{2r^2}$ ao potencial efetivo do problema de Kepler.

Quando $C = 0$, recuperamos o caso kepleriano padrão.

2.2.5 Equação da órbita (Binet) e precessão

Defina $u(\theta) = 1/r(\theta)$. Para uma força central $F(r) = -\frac{d}{dr}\left(-\frac{k}{r} + \frac{C}{2r^2}\right) = -\frac{k}{r^2} + \frac{C}{r^3}$, a equação de Binet dá

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = -\frac{m}{\ell^2 u^2} F(r) = \frac{mk}{\ell^2} - \frac{mC}{\ell^2} u.$$

Logo,

$$u'' + \lambda u = \frac{mk}{\ell^2}, \quad \lambda := 1 + \varepsilon, \quad \varepsilon := \frac{mC}{\ell^2}. \quad (2.13)$$

A solução é

$$u(\theta) = \frac{mk}{\lambda \ell^2} \left[1 + e \cos(\sqrt{\lambda}(\theta - \theta_0)) \right], \quad (2.14)$$

com excentricidade $e \in [0, 1)$ e fase θ_0 . O fator $\sqrt{\lambda} \neq 1$ implica **precessão do periastro**.

Para $|\varepsilon| \ll 1$,

$$\Delta\varpi = 2\pi \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}} - 1 \right) \simeq -\pi \varepsilon = -\pi \frac{mC}{\ell^2} \quad (\text{retrógrada se } C > 0). \quad (2.15)$$

2.2.6 Órbita quase circular e forma de $r(t)$

O raio circular r_0 satisfaz $U'_{\text{eff}}(r_0) = 0$, isto é,

$$-\frac{\ell^2 + C}{m r_0^3} + \frac{k}{r_0^2} = 0 \Rightarrow r_0 = \frac{\ell^2 + C}{m k}.$$

Linearizando $r(t) = r_0 + \delta r(t)$, obtemos

$$m \ddot{\delta r} + U''_{\text{eff}}(r_0) \delta r = 0, \quad U''_{\text{eff}}(r_0) = \frac{m^3 k^4}{(\ell^2 + C)^3}.$$

Daí a frequência radial

$$\omega_r^2 = \frac{U''_{\text{eff}}(r_0)}{m} = \frac{m^2 k^4}{(\ell^2 + C)^3} \Rightarrow \omega_r = \frac{m k^2}{(\ell^2 + C)^{3/2}}. \quad (2.16)$$

Assim, para excentricidade pequena $e \ll 1$,

$$r(t) \approx r_0 \left[1 - e \cos(\omega_r t + \phi) \right], \quad (2.17)$$

uma “quase senoide” limpa, com frequência radial dada por

$$\omega_r = \frac{m k^2}{(\ell^2 + C)^{3/2}}.$$

A frequência angular no círculo é

$$\omega_\theta = \dot{\theta} \Big|_{r=r_0} = \frac{\ell}{m r_0^2} = \frac{\ell m k^2}{(\ell^2 + C)^2},$$

onde $r_0 = \frac{\ell^2 + C}{m k}$.

e a diferença $\omega_r \neq \omega_\theta$ é outra forma de enxergar a precessão.

2.2.7 Figuras (simulações numéricas)

A integração numérica da equação radial

$$m \ddot{r} = \frac{\ell^2}{m r^3} - \frac{k}{r^2} + \frac{C}{r^3},$$

com parâmetros adimensionais $m = 1$, $k = 1$, $\ell = 1.2$, $C = 0.10$ e condições quase circulares ($e \approx 0.06$) produz:

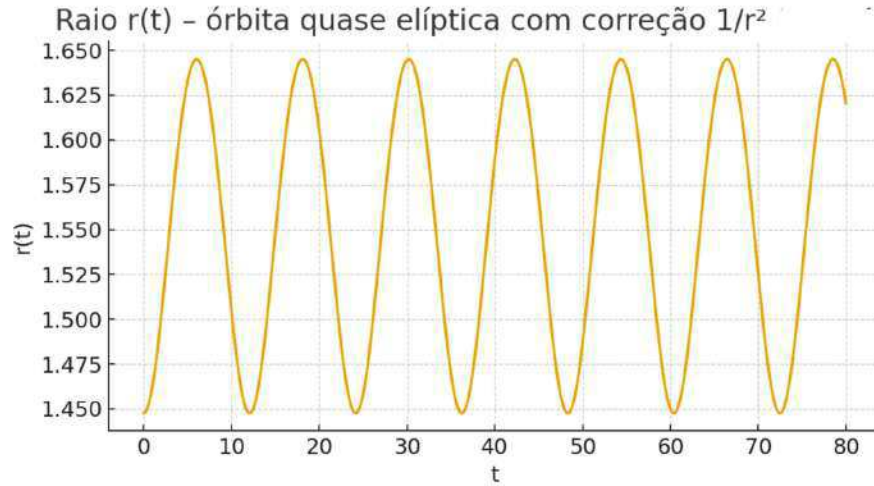


Figure 2.1: Raio $r(t)$ ajustado (oscilação harmônica limpa em torno de r_0).

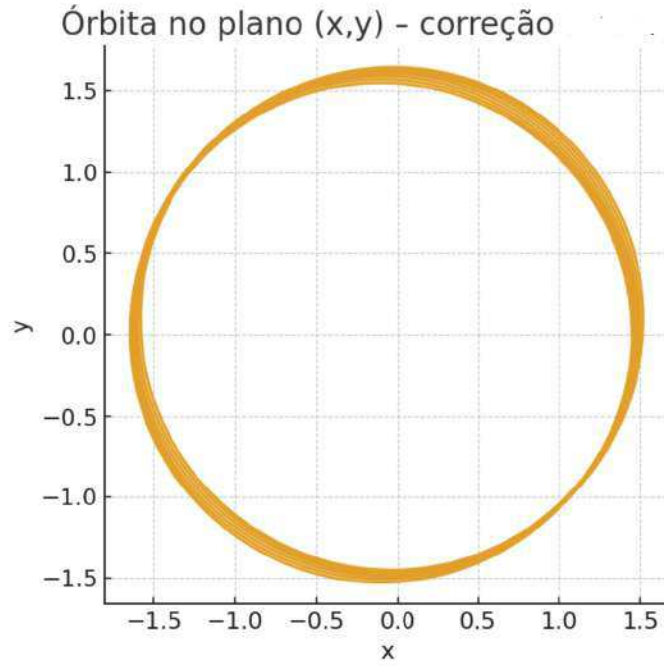


Figure 2.2: Órbita no plano (x, y) com correção $+C/(2r^2)$: leve precessão do periastro.

2.2.8 Erros frequentes que distorcem a órbita

1. **Sinal do potencial de Kepler:** usamos $U(r) = -k/r$ no problema físico e, portanto, $L_{\text{newt}} = T + k/r$. Se U entrar com sinal $+k/r$ em $L = T - U$, o termo radial atrativo $-k/r^2$ fica com sinal errado, gerando artefatos (senoides aceleradas e órbitas aberrantes).
2. **Coerência entre V da métrica e U físico:** na métrica estendida use

$$(g_{IJ}) = \begin{pmatrix} \delta_{ij} & 0 \\ 0 & \frac{\alpha^2}{m V(r)} \end{pmatrix}.$$

com $V(r) = +\frac{k}{r} > 0$, enquanto na energia efetiva do sistema físico mantenha o potencial *atrativo* $U(r) = -\frac{k}{r}$. Essa distinção evita inversões de sinal na força radial.

3. **Constantes de movimento:** checamos dimensões e defina $\ell := mr^2\dot{\theta}$ e $C := kB^2/\alpha^2 > 0$. Qualquer ambiguidade em B, α afeta diretamente o termo $+C/(2r^2)$.

4. **Condições iniciais quase circulares:** para comparar com a forma temporal

$$r(t) \approx r_0 \left[1 - e \cos(\omega_r t + \phi) \right], \quad r_0 = \frac{\ell^2 + C}{m k}, \quad \omega_r = \frac{m k^2}{(\ell^2 + C)^{3/2}},$$

tome $r(0) \approx r_0$ e $\dot{r}(0) \approx 0$. Isso evita *beats* numéricos que mascaram ω_r .

5. **Integração estável:** usamos tolerâncias rígidas (p.ex. `rtol` $\sim 10^{-9}$) e passo adaptativo; passos grandes podem induzir precessão numérica espúria.

O *Eisenhart lift* fornece uma forma geométrica de incorporar forças conservativas como componentes métricas em dimensão extra. No problema central, a assinatura principal é a correção $+C/(2r^2)$ no potencial efetivo, que altera a frequência radial e induz precessão do periastro, enquanto $C \rightarrow 0$ recupera Kepler. De forma analítica, a equação de Binet modificada é

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + \lambda u = \frac{m k}{\ell^2}, \quad \lambda = 1 + \varepsilon, \quad \varepsilon = \frac{m C}{\ell^2},$$

cuja solução pode ser escrita como

$$u(\theta) = \frac{m k}{\lambda \ell^2} \left[1 + e \cos(\sqrt{\lambda}(\theta - \theta_0)) \right], \quad r(\theta) = \frac{1}{u(\theta)}.$$

Para $|\varepsilon| \ll 1$, a precessão por volta é

$$\Delta\varpi \simeq -\pi \varepsilon = -\pi \frac{m C}{\ell^2}.$$

Além disso, no regime quase circular, a frequência radial e a forma temporal do raio são

$$\omega_r = \frac{m k^2}{(\ell^2 + C)^{3/2}}, \quad r(t) \approx r_0 \left[1 - e \cos(\omega_r t + \phi) \right], \quad r_0 = \frac{\ell^2 + C}{m k}.$$

Essas expressões permitem controlar analiticamente (e verificar numericamente) a forma de $r(t)$ e a taxa de precessão em função de (m, k, ℓ, C) .

Conclusões

Podemos concluir, reafirmando o espírito que guiou este estudo, que a dinâmica permanece um eixo central para compreender o mundo físico em múltiplas escalas e, mesmo amparada por séculos de resultados, ela ainda oferece terreno fértil para releituras conceituais e aprimoramentos técnicos. Partindo do arcabouço newtoniano que está longe de ser um ponto final, mas sim um ponto de partida exemplar, este trabalho reinterpretou o movimento sob forças conservativas por meio do *Eisenhart lift*, isto é, recodificando um sistema com potencial como uma geodésica em uma variedade munida de uma coordenada adicional. Essa passagem permite enxergar a trajetória de uma partícula, originalmente sujeita a um campo, como movimento livre em um espaço métrico adequadamente escolhido, sem romper com a física subjacente e, ao contrário, tornando explícitas as estruturas geométricas que já estavam implícitas na formulação clássica.

Ao longo do texto, consolidamos os cuidados necessários de consistência física e matemática para que os resultados numéricos e analíticos reflitam o problema correto. Em particular, fixamos o sinal atrativo do potencial gravitacional newtoniano $U(r) = -k/r$ e mostramos como, no formalismo adotado, surge no potencial efetivo o termo adicional $+C/(2r^2)$, fruto direto da presença da coordenada extra. Com esse ajuste, a equação radial assume a forma

$$m\ddot{r} = \frac{\ell^2}{m r^3} - \frac{k}{r^2} + \frac{C}{r^3},$$

garantindo a recuperação do caso kepleriano quando $C \rightarrow 0$ e eliminando distorções artificiais nas integrações. No entorno de órbitas quase circulares, a solução temporal de $r(t)$ aparece como uma oscilação limpa em torno do raio $r_0 = (\ell^2 + C)/(mk)$, com frequência radial dada pela curvatura do potencial efetivo nesse ponto. Em linguagem

geométrica, a diferença entre a frequência radial e a frequência angular do movimento gera naturalmente precessão do periastro, exatamente como prevê a equação de Binet quando se inclui a correção $+C/(2r^2)$; e é essa precessão, de pequena magnitude controlada por C , que explica a não-fechadura perfeita da órbita observada nas simulações.

Esses resultados se alinham, de modo transparente, com o limite fraco e lento da Relatividade de Einstein. No regime em que $g_{00} \simeq -(1 + 2\Phi/c^2)$ com $\Phi = -GM/r$, a geodésica relativística projeta-se na lei newtoniana $\ddot{\vec{x}} = -\nabla\Phi$. Dessa forma, a estratégia adotada aqui não se afasta do quadro einsteiniano; ao contrário, ela explora uma modelagem geométrica auxiliar que “embute” o potencial em dimensão extra e preserva a física orbital central pertinente às situações estudadas. Quando $C = 0$, recuperamos a órbita kepleriana convencional; quando $C > 0$, obtemos uma órbita levemente precessionante, em acordo tanto com a análise analítica quanto com as integrações numéricas realizadas, que exibem um $r(t)$ regular e a curva no plano com o avanço esperado do periastro.

Mantivemos, por clareza e foco, o movimento planar e um potencial puramente central, opção que se mostrou adequada para isolar o papel da coordenada extra na forma do potencial efetivo e na fenomenologia de precessão. Esse recorte não é uma limitação do método, mas uma escolha consciente para fazer emergir o mecanismo essencial sem ruídos adicionais. Ainda assim, ele deixa portas abertas a extensões naturais: a passagem ao caso tridimensional, em que a rotação em ϕ dialoga com a constante associada à coordenada extra, e a exploração de potenciais distintos do kepleriano, com especial interesse nos regimes em que termos adicionais competem com a correção $1/r^2$ induzida pelo lift. Também fica delineada a comparação fina com correções relativísticas pós-newtonianas, permitindo distinguir quando uma precessão observada deve ser atribuída ao conteúdo geométrico adicional do modelo estendido ou à curvatura inerente de soluções da Relatividade Geral como a de Schwarzschild.

Em síntese, o formalismo aqui discutido não substitui a descrição tradicional: ele a ilumina. Ao converter o problema de uma partícula sob campo em um problema de geodésicas, ganhamos um quadro unificado em que a dinâmica clássica se deixa ler de modo geométrico, compatível com o limite einsteiniano e dotado de parâmetros que controlam, de maneira transparente, correções qualitativas e quantitativas nas órbitas. As figuras e integrações numéricas serviram como contraprova desses fatos, enquanto as expressões analíticas amarram a interpretação física aos objetos centrais do cálculo. Revisitar a

dinâmica com esse olhar não apenas reforça a robustez do edifício clássico, mas também o conecta de forma elegante às ideias geométricas que sustentam a gravitação moderna, apontando trilhas nítidas para investigações futuras.

Apêndice A

Da Lagrangiana relativística ao Eisenhart lift, órbitas e $r(t)$

Lagrangiana geodésica na Relatividade Geral e limite newtoniano

Começamos do princípio variacional para geodésicas em uma variedade lorentziana $(\mathcal{M}, g)$:

$$S[x] = \frac{m}{2} \int g_{\mu\nu}(x) \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} d\lambda, \quad L_{\text{geo}} = \frac{m}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu, \quad (\text{A.1})$$

onde λ é um parâmetro afim e o ponto denota derivada por $d/d\lambda$. A variação $\delta S = 0$ dá a equação geodésica

$$\ddot{x}^\rho + \Gamma^\rho_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0, \quad \Gamma^\rho_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} (\partial_\mu g_{\sigma\nu} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}). \quad (\text{A.2})$$

Para recuperar o regime orbital clássico, tomamos o **limite fraco e lento**:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1, \quad g_{00} \simeq -\left(1 + \frac{2\Phi(\vec{x})}{c^2}\right), \quad g_{0i} \simeq 0, \quad g_{ij} \simeq \delta_{ij} \left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right).$$

Escolhendo o *tempo coordenado* t como parâmetro ($\lambda = t$) e impondo velocidades baixas ($|\dot{\vec{x}}| \ll c$), a lagrangiana geodésica

$$L_{\text{geo}} = \frac{m}{2} g_{\mu\nu}(x) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu$$

reduz, até $O(v^2/c^2)$, a

$$L_{\text{NR}} \simeq \frac{m}{2} \dot{\vec{x}}^2 + m \Phi(\vec{x}), \quad \Phi(\vec{x}) = -\frac{GM}{r}. \quad (\text{A.3})$$

As equações de Euler–Lagrange dão $\ddot{\vec{x}} = -\nabla\Phi$, isto é, a dinâmica newtoniana sob potencial central de Kepler. Em polares no plano orbital,

$$L_{\text{NR}} = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + \frac{k}{r}, \quad k := GMm > 0. \quad (\text{A.4})$$

Eisenhart lift (métrica estendida e lagrangiana geodésica)

Para reescrever esta dinâmica como geodésica em dimensão maior (aqui, $n = 2$ espacial $\rightarrow n + 1 = 3$ com uma coordenada extra), adotamos a métrica *riemanniana* estendida

$$(g_{IJ}) = \begin{pmatrix} \delta_{ij} & 0 \\ 0 & \frac{\alpha^2}{m V(\vec{x})} \end{pmatrix}, \quad V(\vec{x}) > 0.$$

onde V é uma função positiva relacionada ao potencial físico, e α (constante de massa) garante homogeneidade dimensional. Tomaremos

$$V(r) = \frac{k}{r} \quad (> 0), \quad (\text{A.5})$$

enquanto o *potencial físico* na energia efetiva permanece $U(r) = -k/r$ (sinal atrativo). Usando a métrica estendida

$$(g_{IJ}) = \begin{pmatrix} \delta_{ij} & 0 \\ 0 & \frac{\alpha^2}{m V(r)} \end{pmatrix}. \quad V(\vec{x}) > 0,$$

a lagrangiana geodésica associada é

$$L_{\text{lift}} = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} \frac{\alpha^2}{V(r)} \dot{Y}^2 = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} \frac{\alpha^2 r}{k} \dot{Y}^2, \quad (\text{A.6})$$

onde, no caso central de interesse, $V(r) = \frac{k}{r} > 0$.

onde Y é a coordenada extra.

Euler–Lagrange: integrais primeiras e equação radial

Para θ :

$$\frac{d}{dt}(\partial_{\dot{\theta}} L_{\text{lift}}) = \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = 0 \Rightarrow mr^2\dot{\theta} = \ell \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{\ell}{mr^2}, \quad (\text{A.7})$$

com ℓ constante (momento angular).

Para Y :

$$\frac{d}{dt}(\partial_{\dot{Y}} L_{\text{lift}}) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\alpha^2 r}{k} \dot{Y}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\alpha^2 r}{k} \dot{Y} = B \Rightarrow \dot{Y} = \frac{kB}{\alpha^2} \frac{1}{r}, \quad (\text{A.8})$$

onde B é constante. Definimos

$$C := \frac{k B^2}{\alpha^2} > 0. \quad (\text{A.9})$$

Para r , escrevemos

$$\partial_r L_{\text{lift}} = m\dot{r}, \quad \partial_{\dot{r}} L_{\text{lift}} = mr\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \frac{\alpha^2}{k} \dot{Y}^2.$$

A E–L radial é

$$\frac{d}{dt}(m\dot{r}) - \left(mr\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \frac{\alpha^2}{k} \dot{Y}^2 \right) = 0. \quad (\text{A.10})$$

Substituindo as integrais primeiras

$$mr^2\dot{\theta} = \ell \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{\ell}{mr^2}, \quad \frac{\alpha^2 r}{k} \dot{Y} = B \Rightarrow \dot{Y} = \frac{kB}{\alpha^2} \frac{1}{r},$$

na equação radial

$$\frac{d}{dt}(m\dot{r}) - \left(mr\dot{\theta}^2 - \frac{k}{r^2} + \frac{1}{2} \frac{\alpha^2}{k} \dot{Y}^2 \right) = 0,$$

obtemos

$$m\ddot{r} = mr\dot{\theta}^2 - \frac{k}{r^2} + \frac{1}{2} \frac{\alpha^2}{k} \dot{Y}^2 = \frac{\ell^2}{mr^3} - \frac{k}{r^2} + \frac{C}{r^3}, \quad (\text{A.11})$$

onde $C = \frac{kB^2}{\alpha^2} > 0$.

Isto é, a coordenada extra induz a *correção* $+C/r^3$ na equação radial e, portanto, um termo $+C/(2r^2)$ no potencial efetivo (ver abaixo). Para $C \rightarrow 0$, recuperamos Kepler.

Energia efetiva e primeiros resultados orbitais

A *energia* associada à lagrangiana geodésica do lift,

$$L_{\text{lift}} = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} \frac{\alpha^2 r}{k} \dot{Y}^2,$$

com o potencial físico *atrativo* $U(r) = -k/r$ reintroduzido, é

$$E = \frac{m}{2} \dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{2m r^2} - \frac{k}{r} + \frac{C}{2r^2} = \frac{m}{2} \dot{r}^2 + U_{\text{eff}}(r). \quad (\text{A.12})$$

com

$$U_{\text{eff}}(r) = \frac{\ell^2}{2m r^2} - \frac{k}{r} + \frac{C}{2r^2}.$$

O raio circular r_0 satisfaz $U'_{\text{eff}}(r_0) = 0$:

$$-\frac{\ell^2 + C}{m r_0^3} + \frac{k}{r_0^2} = 0 \Rightarrow r_0 = \frac{\ell^2 + C}{m k}. \quad (\text{A.13})$$

A curvatura do potencial no círculo é

$$U''_{\text{eff}}(r_0) = \frac{m^3 k^4}{(\ell^2 + C)^3}. \quad (\text{A.14})$$

Linearizando $r(t) = r_0 + \delta r(t)$, obtemos a frequência radial

$$\omega_r^2 = \frac{U''_{\text{eff}}(r_0)}{m} = \frac{m^2 k^4}{(\ell^2 + C)^3}, \quad r(t) \approx r_0 \left[1 - e \cos(\omega_r t + \phi) \right], \quad (\text{A.15})$$

que explica a “**senoide**” limpa observada numericamente. Já a frequência angular no círculo é

$$\omega_\theta = \dot{\theta}|_{r_0} = \frac{\ell}{m r_0^2} = \frac{\ell m k^2}{(\ell^2 + C)^2}. \quad (\text{A.16})$$

Como $\omega_r \neq \omega_\theta$ quando $C \neq 0$, a órbita não fecha e surge *precessão do periastro*.

Equação de Binet e precessão analítica

A força radial efetiva correspondente à energia efetiva

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{2m r^2} - \frac{k}{r} + \frac{C}{2r^2}$$

é

$$F(r) = -\frac{d}{dr}\left(-\frac{k}{r} + \frac{C}{2r^2}\right) = -\frac{k}{r^2} + \frac{C}{r^3}.$$

Com $u(\theta) = 1/r(\theta)$, a equação de Binet é

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{m}{\ell^2 u^2} F\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{mk}{\ell^2} - \frac{mC}{\ell^2} u. \quad (\text{A.17})$$

Rearranjando,

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + \lambda u = \frac{mk}{\ell^2}, \quad \lambda := 1 + \varepsilon, \quad \varepsilon := \frac{mC}{\ell^2}. \quad (\text{A.18})$$

A solução é

$$u(\theta) = \frac{mk}{\lambda \ell^2} \left[1 + e \cos(\sqrt{\lambda}(\theta - \theta_0)) \right], \quad r(\theta) = \frac{1}{u(\theta)}. \quad (\text{A.19})$$

O avanço angular por revolução é

$$\Delta\varpi = 2\pi \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}} - 1 \right) \simeq -\pi \varepsilon = -\pi \frac{mC}{\ell^2} \quad \text{para} \quad |\varepsilon| \ll 1, \quad (\text{A.20})$$

isto é, precessão retrógrada quando $C > 0$ na convenção acima. Para $C = 0$ ($\lambda = 1$), recupera-se a elipse kepleriana fechada.

Coerência com o limite relativístico e observações finais

No limite fraco/lento da RG, $g_{00} \simeq -(1 + 2\Phi/c^2)$ com $\Phi = -GM/r$ reproduz $\ddot{\vec{x}} = -\nabla\Phi$, o que coincide com a dinâmica obtida a partir da lagrangiana newtoniana

$$L_{\text{NR}} \simeq \frac{m}{2} \dot{\vec{x}}^2 + m \Phi(\vec{x}) \quad \text{com} \quad \Phi(\vec{x}) = -\frac{GM}{r}.$$

O *Eisenhart lift* implementado aqui, ao introduzir $V(r) = \frac{k}{r}$ na métrica estendida

$$(g_{IJ}) = \begin{pmatrix} \delta_{ij} & 0 \\ 0 & \frac{\alpha^2}{mV(r)} \end{pmatrix}.$$

e ao manter $U(r) = -\frac{k}{r}$ na energia efetiva,

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{2mr^2} - \frac{k}{r} + \frac{C}{2r^2},$$

evita a inversão de sinais na força radial. A dinâmica resultante contém, além do termo centrífugo usual, a correção $+\frac{C}{2r^2}$ que desloca a frequência radial,

$$\omega_r = \frac{m k^2}{(\ell^2 + C)^{3/2}},$$

gera a oscilação quase senoidal

$$r(t) \approx r_0 \left[1 - e \cos(\omega_r t + \phi) \right], \quad r_0 = \frac{\ell^2 + C}{m k},$$

e induz a precessão do periastro

$$\Delta\varpi \simeq -\pi \frac{mC}{\ell^2}.$$

Todos os resultados numéricos do capítulo são, assim, explicados por estas expressões analíticas.

Onde erros arruinam a órbita

Dois pontos costumam corromper $r(t)$ e a órbita:

- (i) usar $U = +k/r$ em $L = T - U$, o que troca o sinal do termo $-\frac{k}{r^2}$ na *equação radial*

$$m\ddot{r} = \frac{\ell^2}{m r^3} - \frac{k}{r^2} + \frac{C}{r^3},$$

gerando oscilações espúrias e órbitas aberrantes;

- (ii) confundir o $V(r)$ *positivo* usado na métrica do lift,

$$(g_{IJ}) = \begin{pmatrix} \delta_{ij} & 0 \\ 0 & \frac{a^2}{m V(r)} \end{pmatrix}, \quad V(r) = \frac{k}{r} > 0,$$

com o $U(r)$ *físico negativo* que entra na *energia efetiva*,

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{2m r^2} - \frac{k}{r} + \frac{C}{2r^2}.$$

Manter $V(r) > 0$ na métrica e $U(r) = -k/r$ na energia evita a inversão de sinais na força radial.

Apêndice B

Como gerar as figuras por código (Python)

Figura senoidal $r(t)$

```
1 import numpy as np
2 from scipy.integrate import solve_ivp
3 import matplotlib.pyplot as plt
4
5 # Parâmetros adimensionais
6 m, k, ell, C, e = 1.0, 1.0, 1.2, 0.10, 0.06
7
8 # Raio circular aproximado e CIs quase circulares
9 r0 = (ell**2 + C)/(m*k)
10 r_init = r0*(1 - e)
11 rdot_init = 0.0
12
13 def radial_ode(t, y):
14     r, rdot = y
15     r = max(r, 1e-12) # evita divisão por zero numérica
16     rddot = (ell**2)/(m**2 * r**3) - (k/m)/r**2 + (C/m)/r**3
17     return [rdot, rddot]
18
19 t_eval = np.linspace(0.0, 200.0, 4000)
```

```

20 sol = solve_ivp(radial_ode, (t_eval[0], t_eval[-1]), [r_init, rdot_init],
21                 t_eval=t_eval, method='DOP853', rtol=1e-9, atol=1e-12)
22
23 # Figura: r(t)
24 plt.figure(figsize=(7,3.2))
25 plt.plot(sol.t, sol.y[0], lw=1.5)
26 plt.xlabel('t'); plt.ylabel('r(t)')
27 plt.title('Raio r(t) - solução quase senoidal')
28 plt.tight_layout()
29 plt.savefig('senoides.png', dpi=300)
30 plt.close()

```

Órbita xy

```
1 import numpy as np
2 from scipy.integrate import solve_ivp
3 import matplotlib.pyplot as plt
4
5 # Parâmetros dimensionais
6 m, k, ell, C, e = 1.0, 1.0, 1.2, 0.10, 0.06
7
8 # Raio circular e condições iniciais quase circulares
9 r0 = (ell**2 + C)/(m*k)
10 r_init = r0*(1 - e)
11 rdot_init = 0.0
12 theta_init = 0.0
13
14 def full_ode(t, y):
15     r, rdot, theta = y
16     r = max(r, 1e-12)
17     rddot = (ell**2)/(m**2 * r**3) - (k/m)/r**2 + (C/m)/r**3
18     thetad = ell/(m * r**2)
19     return [rdot, rddot, thetad]
20
21 t_eval = np.linspace(0.0, 1200.0, 20000) # mais longo p/ ver precessão
22 sol = solve_ivp(full_ode, (t_eval[0], t_eval[-1]),
23                 [r_init, rdot_init, theta_init],
24                 t_eval=t_eval, method='DOP853', rtol=1e-9, atol=1e-12)
25
26 r, theta = sol.y[0], sol.y[2]
27 x, y = r*np.cos(theta), r*np.sin(theta)
28
29 plt.figure(figsize=(4.8,4.8))
30 plt.plot(x, y, lw=1.0)
31 plt.scatter([0],[0], s=16, label='centro')
32 plt.scatter([x[0]],[y[0]], s=16, label='início')
33 plt.gca().set_aspect('equal', adjustable='box')
```

```
34 plt.xlabel('x'); plt.ylabel('y')
35 plt.title('Órbita no plano (C>0: leve precessão)')
36 plt.tight_layout()
37 plt.savefig('orbita.png', dpi=300)
38 plt.close()
```


Referências

- 1 ROSS, A. A rudimentary history of dynamics. 11 2009.
Citado na página 6.
- 2 NEWTON, I. *Philosophiae naturalis principia mathematica*. [S.l.]: G. Brookman, 1833. v. 1.
Citado na página 7.
- 3 KALUZA, T. Zum unitätsproblem der physik. *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften*, p. 966–972, 1921.
Citado 2 vezes nas páginas 8 e 39.
- 4 KLEIN, O. Quantentheorie und fünfdimensionale relativitätstheorie. *Zeitschrift für Physik*, v. 37, p. 895–906, 1926.
Citado 2 vezes nas páginas 8 e 39.
- 5 MURRAY, C. D.; DERMOTT, S. F. *Solar System Dynamics*. Cambridge: Cambridge University Press, 1999.
Citado na página 8.
- 6 GOLDSTEIN, H.; POOLE, C.; SAFKO, J. *Classical Mechanics*. 3. ed. San Francisco: Addison Wesley, 2002.
Citado 2 vezes nas páginas 9 e 24.
- 7 LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. *Mechanics*. 3. ed. Oxford: Pergamon, 1976. (Course of Theoretical Physics, Vol. 1).
Citado 2 vezes nas páginas 10 e 15.
- 8 LEMOS, N. A. *Mecânica analítica*. 2. ed. Rio de Janeiro: Livraria da Física, 2007.
Citado 3 vezes nas páginas 13, 24 e 29.
- 9 WHITTAKER, E. T. *A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies*. 4. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1937.
Citado 2 vezes nas páginas 14 e 15.
- 10 ARNOLD, V. I. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. 2. ed. New York: Springer, 1989.
Citado na página 14.
- 11 MARSDEN, J. E.; RATIU, T. S. *Introduction to Mechanics and Symmetry*. 2. ed. New York: Springer, 1999.
Citado na página 15.
- 12 ARFKEN, G. B.; WEBER, H. J. *Mathematical methods for physicists*. [S.l.]: American Association of Physics Teachers, 1999.
Citado na página 21.
- 13 FINN, S. K. K.; PILAFTSIS, A. Quantizing the eisenhart lift. 02 2021;.

Citado na página 35.

14 FINN, S. K. K.; PILAFTSIS, A. Eisenhart lift for field theories. 07 2018;.

Citado na página 35.

15 MISNER, C. W.; THORNE, K. S.; WHEELER, J. A. *Gravitation*. San Francisco: W. H. Freeman, 1973.

Citado na página 35.

16 EINSTEIN, A. Die grundlage der allgemeinen relativitätstheorie. *Annalen der Physik*, v. 49, p. 769–822, 1916.

Citado na página 38.

17 LOVELOCK, D. The einstein tensor and its generalizations. *Journal of Mathematical Physics*, v. 12, p. 498–501, 1971.

Citado na página 38.

18 CARROLL, S. M. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. San Francisco: Addison Wesley, 2004.

Citado na página 39.

19 SCHUTZ, B. F. *A First Course in General Relativity*. 2. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2009.

Citado na página 39.

20 WALD, R. M. *General Relativity*. Chicago: University of Chicago Press, 1984.

Citado na página 39.

21 WEINBERG, S. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. New York: John Wiley & Sons, 1972.

Citado na página 39.

22 HAWKING, S. W.; ELLIS, G. F. R. *The Large Scale Structure of Space-Time*. Cambridge: Cambridge University Press, 1973.

Citado na página 39.

23 HOBSON, M. P.; EFSTATHIOU, G. P.; LASENBY, A. N. *General Relativity: An Introduction for Physicists*. Cambridge: Cambridge University Press, 2006.

Citado na página 39.

24 EISENHART, L. P. Dynamical trajectories and geodesics. *Annals of Mathematics*, v. 30, p. 591–606, 1928.

Citado na página 39.

25 DUVAL, C. et al. Bargmann structures and newton–cartan theory. *Physical Review D*, v. 31, p. 1841–1853, 1985.

Citado na página 39.

26 CARIGLIA, M. Hidden symmetries of dynamics in classical and quantum physics. *Reviews of Modern Physics*, v. 86, p. 1283–1333, 2014.

Citado na página 39.

27 CARIGLIA, M. The eisenhart–duval lift and symmetries of the geodesic flow. *Journal of Mathematical Physics*, v. 56, n. 5, p. 053509, 2015.

Citado na página 39.

28 GIBBONS, G. W. The jacobi metric for timelike geodesics in static spacetimes. *Classical and Quantum Gravity*, v. 33, p. 025004, 2016.

Citado na página 39.