UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG

Wilton dos Santos

Ensinando Matemática Através da Terra: Modelando Matematicamente Problemas do Cotidiano Agrícola

Campina Grande - PB
Agosto/2026

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG

Wilton dos Santos

Ensinando Matemática Através da Terra: Modelando Matematicamente Problemas do Cotidiano Agrícola

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Orientador: Prof. Dr. Romildo Nascimento de Lima

Campina Grande - PB
Agosto/2026

Universidade Federal de Campina Grande - UFCG
Sistema de Bibliotecas - SISTEMOTECA
Catalogação de Publicação na Fonte. UFCG - Biblioteca Central

S237e Santos, Wilton dos.
Ensinando Matemática através da terra: modelando matematicamente problemas do cotidiano agrícola / Wilton dos Santos. – 2026.
101 f. : il. color.

Dissertação (mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2026.
"Orientação: Prof. Dr. Romildo Nascimento de Lima".
Referências.

1. Modelagem Matemática. 2. Matemática - Ensino Básico. 3. Agricultura Familiar. 4. Ensino Fundamental. I. Lima, Romildo Nascimento de Lima. II. Título.

UFCG/BC CDU 51(043.3)

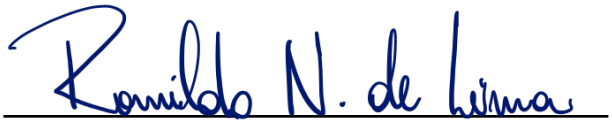
FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELO BIBLIOTECÁRIO GUSTAVO DINIZ DO NASCIMENTO CRB-15/515

Wilton dos Santos

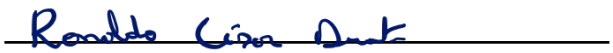
Ensinando Matemática Através da Terra: Modelando Matematicamente Problemas do Cotidiano Agrícola

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

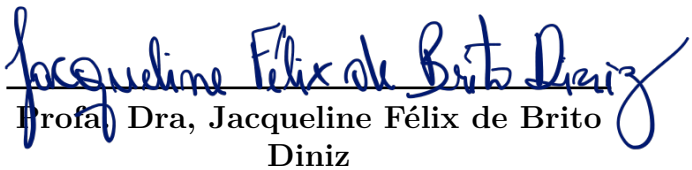
Trabalho aprovado. Campina Grande - PB, 21 de agosto de 2026:



Prof. Dr. Romildo Nascimento de Lima
Orientador



Prof. Dr. Ronaldo César Duarte
Membro externo - UFRN



Profa. Dra, Jacqueline Félix de Brito Diniz
Membro interno - UFCG

Campina Grande - PB
Agosto/2026

Agradecimentos

Em um momento como esse, muitas coisas passam pela mente, mas acredito que a principal é a sensação de dever cumprido e a gratidão. Concluir o mestrado representa a realização de um sonho que, em muitos momentos, acreditei não ser possível.

Para chegar até aqui muitas pessoas foram importantes e tenho muita gratidão a todos. Agradeço a toda minha família pelo apoio e entusiasmo desde a graduação até a conclusão do mestrado. Em especial, meus irmãos, Wellington e Wilma. Meus sobrinhos, Lucas e os pequenos Davi e Gabriel. Quantas vezes me vi estressado no quarto, estudando, e ao ouvir a voz deles me chamando fez eu me sentir mais relaxado. Aos meus pais, Aluízio e Maria da Guia, estes que tiveram pouca oportunidade de estudar mas sempre me incentivaram. Meu grande exemplo de homem, marido e pai, Aluízio, que em meio a todas as adversidades impostas em nossas vidas, mostrou e mostra uma força enorme, e segura toda barra sozinho para que eu possa continuar minha trajetória. Minha mãe, que não pode enxergar com os olhos o filho dela chegando tão longe, sei que isso é uma dor para ela, mas sei também que ela se sente muito orgulhosa de mim.

Dedico este parágrafo a uma única pessoa, Celine Ingrid, o meu amor. Tenho muito a agradecer a essa mulher extraordinária, ela segurou minha mão e me apoiou, não somente no mestrado, mas desde o início da graduação. Tenho plena convicção de que, sem o apoio dela, minhas chances de estar concluindo o PROFMat diminuiriam consideravelmente. Quantas vezes ela ouviu minhas inseguranças e me incentivou, me mostrou que eu era capaz. Muitas vezes ela pausou os seus estudos do mestrado acadêmico para me ajudar a estudar, me ajudou a entender conteúdos e superar obstáculos. Seriam necessárias muitas outras páginas para expressar a importância dessa mulher para minha trajetória, não só nos estudos, mas na vida. Enfim, muito obrigado, meu amor, essa conquista é nossa. Eu te amo.

Agradeço aos meus colegas de turma por todas as experiências trocadas, conhecimentos compartilhados e pelas risadas que trouxeram leveza para os momentos de tensão nas aulas. Ao meu orientador, Romildo, meu muito obrigado por todo apoio, desde o meu ingresso no mestrado até sua conclusão, toda paciência, disponibilidade e orientação, agradeço por todos os momentos que compreendeu minha intensa rotina como professor e muitas vezes adaptou os horários de nossos encontros. À banca, professor Ronaldo César, e a professora Jacqueline Félix, esta que me orientou na conclusão da graduação e hoje está na minha conclusão do mestrado, meus sinceros agradecimentos por aceitarem o convite e o trabalho de avaliar meu trabalho. Além de todos os professores que fizeram parte do mestrado, Leomaques, Arimateia, Luiz

Medeiros, Jaime, Daniel Cordeiro, Marcelo, Renan e Rodrigo Cohen.

Por fim, agradeço à Fundação de Apoio à Pesquisa do Estado da Paraíba – FAPESQ, pelo apoio financeiro que tanto contribuiu para que eu pudesse me dedicar ainda mais aos trabalhos e estudos desenvolvidos durante o mestrado.

Resumo

Trazemos nesta dissertação, uma pesquisa acerca da Modelagem Matemática, em particular investiga-se a contribuição da Modelagem Matemática para o ensino de Matemática no Ensino Básico. Inicialmente, são apresentados os principais fundamentos teóricos da Modelagem Matemática, destacando suas etapas, características e potencialidades para o processo de ensino e aprendizagem. Em seguida, é apresentado alguns modelos matemáticos de áreas distintas evidenciando diversas maneiras de se utilizar a Modelagem Matemática no ensino de Matemática, em especial destacamos os modelos aplicados à agricultura. Como parte desta dissertação, é apresentado uma proposta de recurso educacional, como uma sequência didática destinada aos anos finais do Ensino Fundamental, fundamentada na realidade da agricultura familiar, em que construímos um modelo que possibilita estimar a produção de feijão em territórios quaisquer com o auxílio da ferramenta digital Google Earth. A Modelagem Matemática surge como uma aliada do professor, possibilitando um ensino mais significativo para os alunos, este trabalho deve servir como um esclarecedor e também como um norte para aqueles que desejam desenvolver a Modelagem em suas aulas de Matemática.

Palavras-chave: Modelagem Matemática. Ensino Básico. Agricultura.

Abstract

This dissertation presents a study on Mathematical Modeling, with particular emphasis on its contribution to Mathematics teaching in Basic Education. Initially, the main theoretical foundations of Mathematical Modeling are discussed, highlighting its stages, characteristics, and potential to support the teaching and learning process. Subsequently, mathematical models from different fields are presented to illustrate various ways of applying Mathematical Modeling in Mathematics education, with special emphasis on models related to agriculture. As part of this research, an educational resource is proposed in the form of a didactic sequence designed for the final years of Elementary Education, based on the reality of family farming. The proposed activity develops a mathematical model capable of estimating bean production in agricultural areas using the digital tool Google Earth. The results indicate that Mathematical Modeling can serve as an effective ally for teachers by promoting more meaningful learning experiences. Furthermore, this work aims to provide guidance and support for educators interested in incorporating Mathematical Modeling into their Mathematics classes.

Keywords: Mathematical Modeling. Basic Education. Agriculture.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Número de dissertações sobre Modelagem Matemática 12
Figura 2 – Diagrama da Modelagem Matemática 13
Figura 3 – Canteiros de plantação 21
Figura 4 – Projeções do número de casos de COVID-19 no Brasil 26
Figura 5 – Representação das pontes 31
Figura 6 – Modelo Matemático para a solução do problema 31
Figura 7 – Vista superior da pipa de vinho 38
Figura 8 – Ilustração da pipa de vinho 39
Figura 9 – Projeção ortogonal de uma ripa 39
Figura 10 – Caminho da água no solo 55
Figura 11 – Representação de 1mm de água 56
Figura 12 – Representação da disponibilidade de água no solo 58
Figura 13 – Representação das camadas do solo 59
Figura 14 – Plantação de arroz 66
Figura 15 – Irrigação por gotejamento 66
Figura 16 – Irrigação subterrânea 67
Figura 17 – Exemplos de irrigação por aspersão 68
Figura 18 – Site do censo agro de 2027 77
Figura 19 – Fonte: Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (2026) 77
Figura 20 – Vista aérea do terreno 78
Figura 21 – Lerão 79
Figura 22 – Pé de feijão plantado 80
Figura 23 – Formato do terreno 81
Figura 24 – Print screen do Google Earth 83
Figura 25 – Print screen do Google Earth 84
Figura 26 – Print screen do Google Earth 84
Figura 27 – Print screen do Google Earth 84
Figura 28 – Print screen do Google Earth 85
Figura 30 – Imagem aérea do terreno A_1 88
Figura 31 – Imagem aérea do terreno A_1 89
Figura 32 – Imagem aérea do terreno A_2 90
Figura 33 – Imagem aérea do terreno A_2 91
Figura 34 – Imagem aérea do terreno A_3 92
Figura 35 – Imagem aérea do terreno A_3 93
Figura 36 – Plantação própria 94

Figura 37 – Plantação própria 95
Figura 38 – Plantação própria 96
Figura 39 – Plantação própria 97

Lista de tabelas

Tabela 1 – Relação entre o número de canteiros e o número de corredores. . . . 22
Tabela 2 – Lavouras permanentes 44
Tabela 3 – Lavouras temporárias 45
Tabela 4 – Produção da agricultura familiar em Lagoa de Roça 47
Tabela 5 – Produção da agricultura familiar em Lagoa de Roça 47
Tabela 6 – Produtividade de acordo com o espaço entre as plantas 48
Tabela 7 – Produtividade total 49
Tabela 8 – Produtividade total preenchida 50
Tabela 9 – Eficiênciade aplicação média dos sistemas de irrigação 60
Tabela 10 – Eficiência de aplicação média dos sistemas de irrigação 61
Tabela 11 – Coeficientes de cultura (Kc) e altura máxima 64
Tabela 12 – Descrição dos aspersores 70
Tabela 13 – Competências da BNCC contempladas pelo Produto Educacional . 74
Tabela 14 – Habilidades da BNCC relacionadas à proposta didática. 75

Sumário

1 INTRODUÇÃO 12
1.1 Objetivos 15
1.2 Organização 15

2 A MODELAGEM MATEMÁTICA COMO METODOLOGIA DE ENSINO 17
2.1 O elo entre a BNCC e a Modelagem Matemática 17
2.2 A modelagem na educação brasileira 19

3 ALGUNS EXEMPLOS DE MODELOS 25
3.1 Os modelos matemáticos aplicados à saúde 25
3.2 Os modelos para o crescimento populacional 27
3.3 Os modelos meteorológicos 29
3.4 O Problema das pontes de Königsberg 30
3.5 A coroa do Rei Hieron 32
3.6 Orçamento Familiar 34
3.7 Financiamento 36
3.8 As pipas de vinho 37

4 MATEMÁTICA E AGRICULTURA 42
4.1 O contexto local 42
4.2 Um modelo para otimizar o plantio de batatas 48
4.3 Matemática na irrigação 54
4.3.1 Disponibilidade de água no solo 56
4.3.2 Irrigação por aspersão 65

5 PRODUTO EDUCACIONAL 72
5.1 Uma proposta de aplicação em sala de aula de acordo com a realidade local 72
5.2 Sequência didática 75
5.2.1 Aula 1 75
5.2.2 Aulas 2, 3 e 4 77
5.2.3 Aula 5 78
5.2.4 Aulas 6 e 7 80

5.2.5 Aulas 8 e 9 - A utilização do Google Earth para obtenção de áreas e perímetros 83
5.2.6 Aulas 10, 11 e 12 85

6 CONCLUSÃO 98

REFERÊNCIAS 100

1 Introdução

A Modelagem Matemática é um ramo da Matemática que vem em crescente repercussão e estudo em nosso país. Muitos pesquisadores, sobretudo da área de Educação Matemática, estão buscando se aprofundar nessa temática. Com isso, já encontramos diversos trabalhos, dissertações e teses acerca desse tema. Segundo Ferreira, Silveira e Silva (2013, p. 2)

> "O fato de a modelagem matemática romper as barreiras entre as ciências propondo, de certa forma, uma multidisciplinaridade chamou a atenção dos pesquisadores em Educação Matemática, sendo atualmente uma grande área de pesquisa no processo de ensino-aprendizagem em matemática"

O que evidencia essa grande procura por estudos na área é o grande número de dissertações acerca da Modelagem Matemática no banco de dissertações do PROFMat, como mostra a imagem a seguir

Figura 1 – Número de dissertações sobre Modelagem Matemática



Fonte: Sociedade Brasileira de Matemática (2026).

ou seja, já são mais de 240 trabalhos sobre, e esse número tende a crescer ainda mais a cada ano.

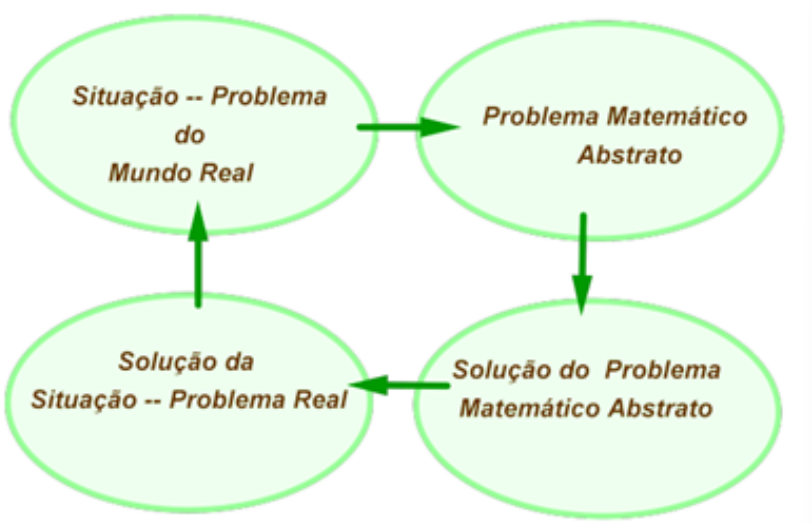
Desse modo, alguns nomes se destacaram por suas grandes contribuições para a área. Por exemplo, Aristides Camargo Barreto - responsável pela orientação das duas primeiras dissertações de modelagem da Pós-Graduação da PUC-RJ; Ubiratan D'Ambrósio - responsável pela criação do 1º Mestrado em ensino de Ciências e Matemática do Brasil, que deu origem a vários trabalhos sobre Modelagem; Rodney Carlos - que escreveu livros que detalham a Modelagem Matemática e é responsável pelo 1º curso de Pós-Graduação em Modelagem Matemática

Sob esse viés, existem muitas formas de definir o que é Modelagem Matemática. Segundo Bassanezi (2002, p. 16), "a Modelagem Matemática consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real". Dessa forma, por meio dela, podemos repensar os métodos de estudar e de ensinar Matemática, uma vez que essa pode

ser vista como um método científico e, também, como uma estratégia para o ensino-aprendizagem. Além disso, podemos definir o que é um modelo matemático segundo Bertone, Bassanezi e Jafelice (2014, p. 22) "chamamos de modelo matemático um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o objeto estudado".

Uma boa maneira de exemplificar o que é a Modelagem Matemática é observando o seguinte diagrama:

Figura 2 – Diagrama da Modelagem Matemática



Fonte: Bertone, Bassanezi e Jafelice (2014, p. 17).

Mas como esse diagrama pode ajudar? Em muitas situações, existem problemas da realidade que não é possível enxergar uma solução rápida. Através da Modelagem, buscamos transformar esse problema em algo matemático, que pode ser uma equação ou um sistema, uma função que modele certo comportamento, dentre outras possibilidades. Feito isso, consegue-se ver o problema com um novo olhar. Busca-se agora resolver o problema matematicamente, e, consequentemente, teremos a solução do problema inicial, é o que representa o diagrama.

Para entendermos como a modelagem pode estar presente em situações diversas, podemos observar o seguinte exemplo: um agricultor quer entender como a quantidade de fertilizante afeta a produção de milho em sua plantação. Ele percebe que, inicialmente, mais fertilizante aumenta a produção, mas depois de certo ponto, o excesso pode prejudicar a produtividade. A princípio, esse não é um problema Matemático e pode ser resolvido de maneiras diferentes, porém, podemos notar indícios de que podemos resolver esse problema de forma matemática, uma vez que, é falado que a produção cresce e em certo ponto começa a decrescer. Esse é o comportamento característico, por exemplo, de uma função quadrática. Logo, para solucionar o problema do agricultor

seria necessário analisar a produção e tentar modelar o problema de modo a chegar em uma função do tipo $p(x) = ax^2 + bx + c$, em que $a < 0$ pois a função representa o crescimento e em seguida o decrescimento, se $a > 0$, a função teria concavidade para cima, isto é, representaria um decrescimento e em seguida um crescimento, x é a quantidade de fertilizante utilizado, e $p(x)$ é a quantidade de toneladas colhidas, feito isso, bastaria encontrar o ponto de máximo dessa função o que representaria a quantidade máxima de fertilizante que poderá ser utilizado.

Além disso, de acordo com Ferreira, Silveira e Silva (2013, p. 12) , "A modelagem matemática, então, serviu e serve como a principal ferramenta para uso principalmente das outras ciências, promovendo uma inter-relação da matemática com as outras áreas do conhecimento humano". Desse modo, temos, também, a Matemática Aplicada. Essa última é uma área da Matemática que busca aplicar conceitos matemáticos à solução de problemas reais, e por muitas vezes através de modelos matemáticos que podem ser de grande complexidade e das mais diversas áreas das ciências, como a Física, Química, Astronomia, Engenharia, Medicina, entre outras. Conforme Bassanezi (2002, p. 32),"A Matemática Aplicada moderna pode ser considerada como a arte de aplicar a matemática a situações problemáticas, usando o processo comum a modelagem matemática".

É comum surgir a dúvida de como começaram as aplicações de modelos Matemáticos para solucionar problemas. No entanto, a resposta para essa pergunta não é tão precisa. Sabe-se que a Matemática evoluiu ao longo da história, por meio da necessidade de resoluções de situações reais das civilizações antigas e modernas, em que essas foram feitas através de modelagens. Desse modo, Bassanezi (2002, p. 44) afirma que "a atividade de aplicar matemática é tão antiga quanto a própria matemática". Ademais, Ferreira, Silveira e Silva (2013, p. 3) mencionam que

> "No século V a.C., por exemplo, os egípcios, segundo o grego Heródoto, usavam conceitos de geometria plana para que, após as enchentes do rio Nilo, os agrimensores determinassem a redução sofrida pelo terreno, passando o proprietário a pagar um tributo proporcional ao que restará."

Um exemplo bem simples disso são as evidências de como surgiu a contagem, que muitos acreditam ter surgido da necessidade dos pastores conseguirem ter controle da quantidade de ovelhas em seu rebanho. Para tanto, de acordo com Roque e Carvalho (2012), eles desenvolveram a estratégia de utilizar pedras, sendo uma pedrinha para representar cada ovelha. Dessa forma, podemos enxergar isso como um modelo matemático desenvolvido para resolver o problema do controle dos rebanhos, o qual associa uma pedrinha a cada bicho do rebanho.

Ademais, a utilidade dos modelos matemáticos se estende a diversas áreas. É possível encontrar aplicações da modelagem na compreensão do crescimento de uma popu-

lação, no mercado financeiro, no movimento dos planetas, no trânsito de uma grande cidade, na propagação de uma doença, e até mesmo na agrícultura, que será o foco de grande parte deste trabalho. Ao longo desse trabalho, será possível perceber que andamos sobre outras áreas, saímos dos materiais puramente matemáticos e nos arriscamos nos estudos como sobre agricultura, saúde e outros.

Para aplicação dos estudos desenvolvidos para esta dissertação, desenvolvemos um trabalho focado na realidade local, para isso utilizamos a cidade de São Sebastião de Lagoa de Roça, no interior paraíbano. Cidade essa com uma forte cultura agrícola, e que esse tema está presente na vida de grande parte da população.

1.1 Objetivos

Temos como objetivo geral nesse trabalho, investigar as contribuições da modelagem matemática, a partir de problemas do contexto local, para o ensino e a aprendizagem Matemática para o ensino básico, com um foco maior no 8º ano do ensino fundamental. Para isso, devemos estudar como a Modelagem Matemática pode contribuir com a agricultura. Além disso, queremos que os leitores possam entender o que é e como desenvolver uma atividade de modelagem,

Além disso apresentamos como objetivos específicos:

- Elaborar atividades de modelagem matemática baseadas em situações do cotidiano da cidade de S. S. de Lagoa de Roça;
- Analisar as estratégias utilizadas pelos alunos na resolução dos problemas;
- Identificar dificuldades e potencialidades apresentadas durante o desenvolvimento das atividades;
- Produzir um produto educacional que auxilie outros professores na implementação da modelagem matemática.

1.2 Organização

Este trabalho está organizado em 6 Capítulos, e do Capítulo 1 ao 5 temos subseções. Trazemos exemplos de modelos em todos os capítulos, exceto na conclusão, isso para mostrar a ampla variedade de possibilidades que a modelagem matemática nos possibilita.

Segue a ordem que os capítulos estão organizados:

- **Capítulo 1:** apresentamos a introdução, nela buscamos falar sobre a modelagem, trazendo os principais nomes que a pesquisam no Brasil e alguns fatos históricos;

- **Capítulo 2:** abordamos nesse capítulo a justificativa da modelagem como ferramenta de ensino aprendizagem junto a BNCC, trazendo a relação modelagem-BNCC, destacando as competências e habilidades desenvolvidas e utilizadas durante a utilização em sala de aula;
- **Capítulo 3:** trazemos diversos exemplos de modelos matemáticos, das mais diversas áreas e tipos, esse capítulo serve justamente para mostrar as amplas possibilidades de se utilizar modelagem matemática;
- **Capítulo 4:** enfatizamos a relação entre a Matemática e a agricultura, para isso realizamos pesquisas que apresentam diversos modelos que possibilitam uma boa plantação;
- **Capítulo 5:** desenvolvemos uma atividade para calcular a produtividade esperada para um plantio de feijão utililizando recursos digitais;
- **Capítulo 6:** apresentamos nossas opiniões e argumentações finais sobre a modelagem matemática.

2 A modelagem matemática como metodologia de ensino

2.1 O elo entre a BNCC e a Modelagem Matemática

A modelagem matemática possui uma forte ligação com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), pois ambas defendem um ensino mais significativo, contextualizado e voltado para a realidade dos estudantes. De acordo com a BNCC, a Matemática deve ir além da memorização de fórmulas e procedimentos, promovendo a capacidade de investigar, argumentar, resolver problemas e interpretar situações do cotidiano. Nesse contexto, a modelagem matemática surge como uma metodologia capaz de aproximar os conteúdos escolares das experiências vividas pelos alunos

Por meio dela, os estudantes analisam situações presentes em seu contexto social, econômico, ambiental ou cultural, transformando essas situações em modelos matemáticos. Esse processo favorece o desenvolvimento do pensamento crítico, da criatividade e da autonomia, aspectos fortemente valorizados pela BNCC.

A BNCC destaca, entre as competências gerais da Educação Básica, a necessidade de desenvolver o raciocínio científico, crítico e criativo, além da capacidade de argumentação e resolução de problemas. A modelagem matemática contribui diretamente para essas competências, pois incentiva os alunos a levantar hipóteses, coletar dados, interpretar informações e tomar decisões fundamentadas. Dessa forma, o estudante deixa de ser apenas receptor de conteúdos e passa a atuar como protagonista na construção do conhecimento.

Outro ponto importante é a interdisciplinaridade. A BNCC propõe uma educação integrada, em que os conhecimentos dialoguem entre si. A modelagem matemática favorece essa integração ao permitir o estudo de temas relacionados aos demais componentes curriculares. Assim, a Matemática passa a ser compreendida como uma ferramenta útil para interpretar e transformar a realidade. Segundo a BNCC (Brasil. Ministério da Educação, 2018, p. 16), é necessário

> contextualizar os conteúdos dos componentes curriculares, identificando estratégias para apresentá-los, representá-los, exemplificá-los, conectá-los e torná-los significativos, com base na realidade do lugar e do tempo nos quais as aprendizagens estão situadas.

e, para isso acontecer, é necessário que os professores:

> decidam sobre formas de organização interdisciplinar dos componentes curriculares e fortalecer a competência pedagógica das equipes

> escolares para adotar estratégias mais dinâmicas, interativas e colaborativas em relação à gestão do ensino e da aprendizagem (Brasil. Ministério da Educação, 2018, p. 16)

Além disso, a modelagem contribui para o desenvolvimento das competências gerais e específicas da Matemática previstas na BNCC, como:

- **Competência Geral 2:** Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas;
- **Competência específica 2:** Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo;
- **Competência específica 3:** Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções;
- **Competência específica 5:** Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados;
- **Competência específica 8:** Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles.

Além das competências citadas, podemos associar a modelagem com diversas habilidades, alguns exemplos são:

- **EF07MA29** - Resolver problemas que envolvam medidas de grandezas inseridos em contextos oriundos de situações cotidianas;
- **EF09MA06** - Compreender as funções como relações de dependência entre variáveis;
- **EF08MA25** - Obter valores de medidas de tendência central e interpretar dados.

Portanto, a Modelagem como metodologia de ensino apresenta uma forte ligação com a BNCC, uma vez que possibilita o desenvolvimento de competências relacionadas a pontos como a investigação, a resolução de problemas e a argumentação, tudo isso aplicado para situações do cotidiano dos estudantes. E ainda, favorece o desenvolvimento de habilidades presentes em diferentes unidades temáticas da BNCC como Álgebra, Grandezas e Medidas e Estatística promovendo um ensino contextualizado e significativo, como sugere a BNCC.

2.2 A modelagem na educação brasileira

O movimento da modelagem matemática na educação brasileira tem cerca de 40 anos. Segundo Burak (2004, p. 1),

> A Modelagem Matemática no Brasil começou a ser trabalhada, na década de 80 na Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP –com um grupo de professores, em Biomatemática, coordenados pelo Prof. Dr. Rodney Carlos - IMECC

Inicialmente foi utilizada nos cursos de especialização de professores na UNICENTRO, no Paraná. Com a implementação do Programa de Mestrado em Ensino de Matemática pela UNESP – Campus de Rio Claro, a modelagem ganhou muitos adeptos. Com a grande procura dos professores por pós-graduação acerca do tema, era evidente que a modelagem surgiria como instrumento de ensino.

Consoante Bassanezi (2002), podemos dividir os modelos em dois tipos

- **Modelo Objeto**: é a representação de um objeto ou fato concreto, tem como característica a estabilidade e a homogeneidade das variáveis;
- **Modelo teórico:** é aquele vinculado a uma teoria geral, esse modelo é sempre construído em torno de um modelo objeto com um código de interpretação.

A construção de um modelo matemático eficaz requer a utilização de informações claras, precisas e consistentes, capazes de reduzir ambiguidades e representar adequadamente o problema investigado. Essa abordagem favorece a obtenção de resultados teóricos consistentes e possibilita a aplicação de diferentes métodos de resolução, sejam eles analíticos ou computacionais, de acordo com a natureza do problema.

Assim, podemos formular um modelo de acordo com o contexto das situações que o descrevem, com a matemática utilizada, ou de acordo com os fenômenos presentes em sua formulação.

Definimos que o modelo é:

- Linear: quando a relação entre as variáveis pode ser descrita por uma equação do primeiro grau;

- Não linear: ocorre quando a taxa de variação não é constante, ou seja, a representação gráfica não será uma reta. Esses modelos tendem a ser mais complexos que os lineares;

- Educacional: Esse tipo de modelo é marcado por ter um número pequeno ou simples de suposições, com as soluções, sendo na sua maioria, analíticas.

Os principais nomes da modelagem matemática defendem que a sua aplicação em sala de aula deve seguir uma sequência, Bassanezi (2002) sugere que a ordem seja: experimentação, abstração, resolução, validação e modificação, descritos a seguir:

- Experimentação: é o primeiro passo para uma atividade de modelagem, em que se é definido o tema a ser estudado. Nessa etapa é coletam-se os dados, levanta-se informações e o professor começa a traçar o caminho a ser seguido;

- Abstração: é o procedimento que deve levar à formulação dos modelos, e deve estabelecer a seleção de variáveis, a problematização ou formulação, formulação das hipóteses e a simplificação;

- Resolução: o momento de ultilizar os passos anteriores para resolver o roblema proposto;

- Validação/Avaliação: é o momento de testar os resultados obtidos, isto é, é o momento de analisar se os resultados produzidos pelo modelo fazem sentido quando comparados com a realidade;

- Modificação: nesse passo deve-se modificar o que não deu certo no modelo, é o momento de corrigir.

Além disso, podemos justificar a utilização da Modelagem no ensino por diversos motivos, Barbosa (2004) apresenta 5 pontos que a defendem: motivação, facilitação da aprendizagem, preparação para utilizar a matemática em diferentes áreas, desenvolvimento de habilidades gerais de exploração e compreensão do papel sócio-cultural da matemática.

Nessa perspectiva, vamos observar um exemplo de como se desenvolveria uma atividade de modelagem em uma turma de ensino básico:

Exemplo de construção de modelo matemático: o planejamento de um talhão de canteiros orgânicos

O exemplo a seguir ilustra a modelagem da disposição de uma área de cultivo composta por uma sequência linear de canteiros separados por corredores de circulação.

O nosso objetivo é determinar a extensão linear e, consequentemente, o perímetro e a quantidade de insumos de madeira (estacas e ripas) necessários para cercar completamente essa área de produção.

O processo se divide em uma etapa voltada à transição do pensamento concreto para o abstrato no Ensino Fundamental, e uma etapa de formalização analítica com o devido rigor matemático.

Contextualização do problema

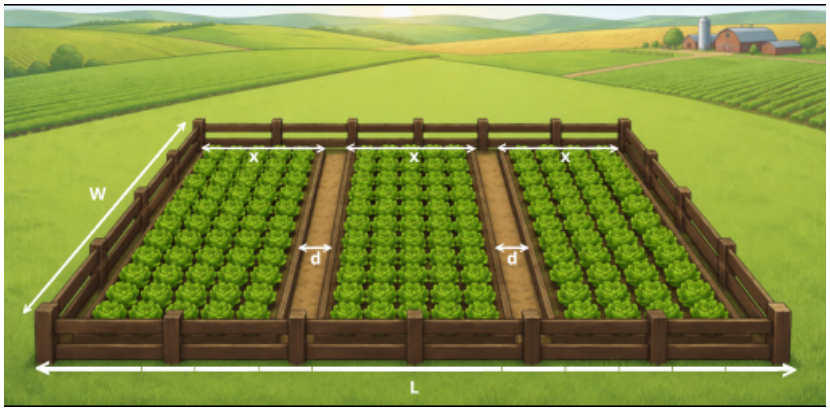
Um agricultor familiar deseja implantar uma sequência de n canteiros retangulares de alface dispostos em linha. Para viabilizar o manejo agronômico e a passagem com ferramentas (como carrinhos de mão), deve haver um corredor de circulação (espaço vazio) entre canteiros consecutivos. Para proteger a cultura contra a invasão de pequenos animais, o agricultor construirá uma *única cerca perimetral externa* que envolverá todo o bloco composto por canteiros e caminhos. Deseja-se obter um modelo matemático que determine o perímetro total da região a quantidade de material de cercamento necessário.

Primeiro momento: abordagem no ensino fundamental

Para introduzir o conceito em turmas de Ensino Fundamental, o problema é abordado de forma experimental e indutiva, por meio de atividades de desenho e contagem:

- **Desenho:** os alunos fazem representações visuais de canteiros (comprimento fixo x) e de espaços entre eles (largura fixa d).

Figura 3 – Canteiros de plantação



Fonte: gerada por IA. Plataforma ChatGPT (2026).

- **Investigação da recorrência:** os alunos analisam o comportamento do comprimento total da região à medida que adicionam mais canteiros à fileira, observando

a relação regular entre o número de canteiros e o número de corredores intermediários gerados.

Nesta etapa, os alunos constroem a Tabela 1 para estabelecer a lei de correspondência discretizada.

Tabela 1 – Relação entre o número de canteiros e o número de corredores.

Número de canteiros (n)	**Número de intervalos/corredores**
1	0
2	1
3	2
4	3
$\vdots$	$\vdots$
n	$n-1$

A partir da observação direta, os alunos deduzem que o número de intervalos é sempre uma unidade menor que o número de canteiros $(n-1)$. Com isso, estabelecem a regra estrutural para o comprimento linear total (L) do bloco de cultivo:

$$\text{Comprimento Total} = (n \times \text{comprimento do canteiro}) + ((n-1) \times \text{largura do corredor})$$

Segundo momento: a construção do modelo genérico

Hipóteses de modelagem

1. Todos os n canteiros são perfeitamente retangulares e possuem dimensões idênticas de comprimento (x) e largura (W);
2. Os canteiros estão dispostos em alinhamento linear perfeito (dispostos em série);
3. O espaço ou corredor entre dois canteiros consecutivos possui largura constante d;
4. A cerca externa contorna perfeitamente a união geométrica dos canteiros e dos corredores, formando um único grande retângulo de dimensões $L \times W$;
5. O espaçamento fixado entre as estacas da cerca é dado por d_e, e o perímetro total P é um múltiplo inteiro de d_e.

Definição das variáveis do problema

- n: número total de canteiros dispostos em série $(n \in \mathbb{N}^*)$;

- x: comprimento individual de cada canteiro ($x \in \mathbb{R}_+$);
- d: largura do corredor entre canteiros consecutivos ($d \in \mathbb{R}_+$);
- W: largura estável dos canteiros e do talhão total ($W \in \mathbb{R}_+$);
- L: comprimento total linear do talhão cercado ($L \in \mathbb{R}_+$);
- P: perímetro total da cerca externa ($P \in \mathbb{R}_+$);
- d_e: distância padrão entre duas estacas consecutivas da cerca ($d_e \in \mathbb{R}_+$);
- N_e: número total de estacas verticais necessárias ($N_e \in \mathbb{N}^*$);
- k: número de fileiras horizontais de ripas de madeira da cerca ($k \in \mathbb{N}^*$);
- R_{total}: comprimento linear total de ripas horizontais necessárias ($R_{\text{total}} \in \mathbb{R}_+$).

Parte algébrica do modelo

O comprimento total L ocupado pela justaposição intercalada de n canteiros de comprimento x e $(n-1)$ corredores de largura d é expresso analiticamente por:

$$L = nx + d(n-1).$$

Assim,

$$L = n(x+d) - d. \tag{2.1}$$

Uma vez determinado o comprimento total L do talhão, o perímetro P da região retangular delimitada pela cerca externa que engloba todo o sistema é dado por:

$$P = 2L + 2W. \tag{2.2}$$

Substituindo a Equação (2.1) na Equação (2.2), obtém-se a expressão geral do perímetro:

$$P = 2n(x+d) - 2d + 2W. \tag{2.3}$$

A partir do perímetro P, calcula-se o quantitativo de insumos físicos para a estrutura da cerca lateral. O número total de estacas (N_e) para um perímetro fechado poligonal, sob a hipótese de distribuição regular a uma distância d_e, é a razão direta entre o perímetro e o espaçamento:

$$N_e = \frac{P}{d_e} = \frac{2n(x+d) - 2d + 2W}{d_e}. \tag{2.4}$$

De modo análogo, o comprimento total das ripas horizontais (R_{total}) que circundam o talhão por k vezes é expresso por:

$$R_{\text{total}} = k \cdot P = k \cdot [2n(x+d) - 2d + 2W]. \tag{2.5}$$

dessa forma, como síntese do processo de modelagem, definimos o modelo matemático final estruturado pelo sistema de equações:

$$\begin{cases} N_e = \dfrac{2n(x+d) - 2d + 2W}{d_e} \\ \\ R_{\text{total}} = 2k[n(x+d) - d + W] \ , \end{cases} \tag{2.6}$$

com as condições de contorno assegurando que $n, k \in \mathbb{N}^*$, $x, d, W, d_e \in \mathbb{R}_+$ e $\frac{P}{d_e} \in \mathbb{N}^*$.

Algumas observações sobre o modelo

Com o modelo consolidado, abrem-se possibilidades de discussões sobre a flexibilização das hipóteses iniciais. Por exemplo, se o agricultor decidir que os corredores das extremidades (antes do primeiro canteiro e após o último) também devem existir dentro da área cercada para facilitar a manobra de maquinários, o número de intervalos passa a ser $n+1$. A equação do comprimento mudará para $L = n(x+d)+d$, alterando o termo independente do modelo.

Além disso, vemos que modelo permite investigar, por meio de simulações numéricas, qual a configuração ideal de n (número de canteiros) para maximizar a área útil de plantio ($A_{\text{útil}} = n \cdot x \cdot W$) minimizando o custo da cerca (P).

3 Alguns Exemplos de Modelos

Os modelos matemáticos contribuíram e contribuem para a evolução e melhoria de toda civilização. Alguns exemplos bem conhecidos são:

- O modelo de Ptolomeu no século II: Ptolomeu queria explicar o movimento dos planetas no céu, para isso ele propôs o modelo dos epiciclos, com planetas girando em pequenos círculos sobre órbitas circulares ao redor da Terra (modelo geocêntrico);
- Leis de Kepler (século XVII), que tinha como problema descrever com precisão o movimento dos planetas. Também descreve o movimento dos planetas, porém em seu modelo, Kepler mostra três leis que descrevem as órbitas dos planetas elípticas;
- Leis de Newton (1687): Newton encarou o problema de descrever e prever o movimento dos corpos de forma geral. Para isso ele formulou as leis do movimento e a lei da gravitação universal.

Além destes, apresentamos, de forma mais detalhada, alguns modelos que vêm contribuindo para a compreensão de muitos problemas para a vida humana.

3.1 Os modelos matemáticos aplicados à saúde

São diversos os estudos de cientistas que utilizam modelos matemáticos para combater ou evitar a proliferação de doenças contagiosas e, também, para buscar tratamentos eficazes. O que muitos talvez não saibam é a importância dos modelos para a saúde global e a relevância que tiveram durante a pandemia da Covid-19, em que muitos cientistas concentraram os seus esforços em entender como o vírus se comportava. Para isso, foram criados vários modelos matemáticos que buscavam trazer uma previsão do cenário futuro.

Nesse contexto, os modelos matemáticos ajudaram as autoridades a tomarem as decisões corretas para amenizar o número de mortes. Por meio desses, conseguiam trazer uma estimativa de quantos pacientes estariam infectados no pico de máxima incidência, quantas pessoas podem ser infectadas através de um único indivíduo doente e quais as regiões mais suscetíveis à proliferação, e a partir de qual quantidade de infectados teríamos a conhecida imunidade de rebanho, dentre muitas outras previsões.

Para tais necessidades, usa-se com mais frequência o modelo conhecido por SIR (Suscetíveis, Infectados, Recuperados ou Removidos).De acordo com Báez-Sánchez e Bobko (2020) esse modelo é descrito pelo conjunto de equações diferenciais

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \mu N - \lambda SI - \mu S \\ \frac{dI}{dt} = \lambda SI - \gamma I - \mu I \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I - \mu R \ , \end{cases}$$

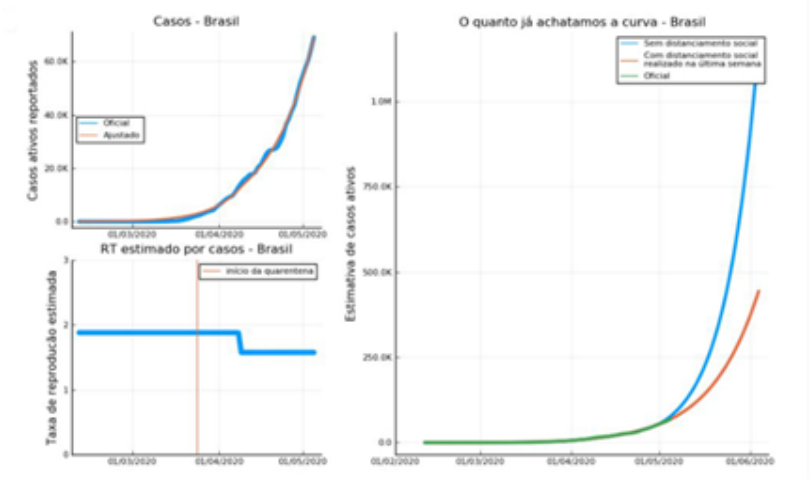
em que os parâmetros positivos μ, λ e γ representam as taxas de natalidade (e mortalidade), infecção e recuperação, respectivamente.

Ainda nessa perspectiva, Vieira (2020) afirma, em uma entrevista, que

> Para a Covid-19, a partir dos dados disponíveis, podemos fazer cálculos e estimar a taxa de reprodução do vírus, com os dados disponíveis. Repetindo o cálculo com o mesmo modelo matemático cada dia, conforme chegam os novos dados, podemos determinar a evolução dessa taxa. Mesmo sabendo que os números calculados ontem e hoje serão imprecisos, podemos compará-los e observar se há uma aceleração ou desaceleração na propagação do vírus.

Vale salientar que, nesses casos, a modelagem traz uma aproximação da realidade, não sendo possível a certeza total do que pode ocorrer. O modelo descrito acima, trouxe uma previsão da diminuição das mortes, como mostram os gráficos a seguir:

Figura 4 – Projeções do número de casos de COVID-19 no Brasil



Fonte: IMPA (2020)

Além disso, conforme Rosa (2020), um outro modelo matemático bastante conhecido e também aplicado à saúde é o de James Arthur Harris e Francis Gano Benedict, conhecido por Fórmula de Harris-Benedict. Esse foi desenvolvido no início do século XX, quando os médicos Harris e Benedict realizaram estudos com o objetivo de entender melhor o gasto energético humano. O modelo desenvolvido por eles mostra

uma maneira de calcular a quantidade de calorias que uma pessoa precisa para manter suas funções vitais, conhecida por TMB (Taxa Metabólica Basal). Para isso, deve-se considerar variáveis como idade, peso, altura e a quantidade de atividade física que o indivíduo pratica por semana. As fórmulas que eles desenvolveram são:

i) Para homens

$$TMB = 66 + 13,7p + 5a - 6,8i$$

ii) Para mulheres

$$TMB = 655 + 9,6p + 1,7a - 4,6i$$

em que p é o peso em kg, a é a altura em cm e i é a idade em anos. Além disso, é necessário levar em consideração o nível de atividade física do indivíduo. Multiplicamos o resultado por:

- 1,2 se o indivíduo for sedentário (não pratica atividades físicas);
- 1,375 se for levemente ativo (1 a 3 dias por semana);
- 1,55 se for moderadamente ativo (3 a 5 dias na semana);
- 1,725 se for muito ativo (6 a 7 dias na semana).

Então, por exemplo, se um homem com 24 anos de idade pesa 80kg e tem 175cm de altura e que costuma praticar exercícios físicos 3 vezes na semana terá uma Taxa Metabólica Basal de aproximadamente

$$TMB = (66 + 13,7 \times 80 + 5 \times 175 - 6,8 \times 20) \times 1,55 = 2.913,7kcal$$

Isso significa que um indivíduo com essas características gasta em média 2.913,7kcal por dia. A partir desse cálculo os profissionais de saúde, como o nutricionista, podem traçar dietas e estratégias para o condicionamento físico desejado para um paciente. Essa estimativa, desenvolvida no início do século passado, é utilizada até hoje por profissionais da saúde, na hora de montar uma dieta.

3.2 Os modelos para o crescimento populacional

É comum tentarmos entender por que a população de alguns lugares cresce de maneira diferente de outros. Pensando nisso, ao longo dos anos, estudos foram realizados para explicar essas situações. Com isso, surgiram os modelos de crescimento populacional.

Um dos modelos mais conhecidos é o do economista inglês Thomas Malthus, que foi apresentado em 1978, dado por

$$\frac{dP}{dt} = kP,$$

em que k é uma constante de proporcionalidade ($k > 0$). Se uma população cresce segundo o modelo malthusiano e $P(0) = P_0$, então

$$P = P_0 e^{tk},$$

desse modo, o modelo discreto de Malthus é dado por $P(t+1) - P(t) = \alpha P(t)$. Se $P(0) = P_0$, temos

$$P(t) = (1+\alpha)^t P_0. \tag{3.1}$$

com isso, podemos determinar a taxa de crescimento demográfico em t anos a partir de (3.1), obtemos, então:

$$(\alpha+1)^t = \frac{P_t}{P_0} \Rightarrow \alpha = \sqrt[t]{\frac{P_t}{P_0}} - 1 \tag{3.2}$$

Para exemplificar, vamos calcular a taxa na qual a população do Brasil cresceu entre os anos de 1940 e 1991. Segundo o IBGE em 1940 a população era de 41.236.315 habitantes, já em 1991 era de 146.825.475, temos então:

$$\alpha = \sqrt[51]{\frac{146.825.475}{41.236.315}} - 1 = 0,02521,$$

isto é, a população do Brasil cresceu a uma taxa média de aproximadamente $2,5\%$ ao ano nesses 51 anos.

Contudo, esse modelo é utilizado para o crescimento de pequenas populações e em um intervalo curto de tempo, uma vez que ele não leva em consideração muitos fatores e isso pode influenciar a população.

Para populações maiores, com mais fatores que podem influenciar sua população e para um período maior, temos outros modelos como o modelo de Verhulst – matemático belga que introduziu a equação de crescimento logístico em que a população cresce até o limite máximo sustentável, ou seja, ela deve se estabilizar. De acordo com Tavoni e Oliveira (2013), podemos dizer, ainda, que o modelo de Verhulst é o modelo de Malthus modificado.

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = rP(1 - \frac{P}{P_\infty}) \\ P(0) = P_, \qquad\qquad r > 0 \end{cases},$$

em que a população chega a sua capacidade máxima quando $P \to P_\infty$, quando $t \to \infty$. A resolução da equação diferencial, obtida pelo método de separação de variáveis, conduz à solução,

$$P(t) = \frac{P_0 P_\infty}{(P_\infty - P_0)e^{-rt} + P_0}.$$

Exemplo: Suponha que um lago seja povoado inicialmente com 500 peixes. Estudos indicam que, devido à disponibilidade limitada de alimento e espaço, a capacidade máxima de suporte do lago é de 5000 peixes. Além disso, estima-se que a taxa intrínseca de crescimento da população seja de $0,4$ por ano. Deseja-se determinar o número de peixes após 5 anos.

Os dados do problema são

$$P_0 = 500, \qquad P_\infty = 5000, \qquad r = 0,4.$$

Substituindo esses valores na solução do modelo de Verhulst,

$$P(t) = \frac{P_0 P_\infty}{(P_\infty - P_0)e^{-rt} + P_0},$$

obtém-se

$$P(5) = \frac{500 \cdot 5000}{(5000 - 500)e^{-0,4\cdot 5} + 500}.$$

Como

$$e^{-2} \approx 0,1353,$$

segue que

$$P(5) = \frac{2\,500\,000}{4500(0,1353) + 500} = \frac{2\,500\,000}{608,85 + 500} = \frac{2\,500\,000}{1108,85} \approx 2255.$$

Portanto, após cinco anos, estima-se que a população seja de aproximadamente 2255 peixes.

Observa-se que, embora a população continue crescendo, seu crescimento torna-se cada vez mais lento à medida que se aproxima da capacidade máxima de suporte do ambiente, igual a 5000 peixes. Esse resultado ilustra como o modelo de Verhulst representa de forma mais realista o crescimento populacional quando os recursos disponíveis são limitados.

3.3 Os modelos meteorológicos

Todos os dias, na palma de nossas mãos, temos acesso a informações sobre o tempo em nossa cidade, basta acessarmos o celular. No entanto, o que talvez não seja de conhecimento de grande parte da população é que as previsões do tempo só são possíveis devido aos Modelos Matemáticos, os quais podem ser numéricos ou estatísticos.

Atualmente, os modelos numéricos são mais avançados e mais utilizados. Esses consistem na utilização de supercomputadores que resolvem equações matemáticas complexas, em que descrevem comportamentos da atmosfera. Esse modelo ainda é subdividido em dois tipos: o modelo de previsão global e o modelo de previsão regional. O primeiro serve para previsões em longa escala, cobrindo todo o planeta, e tem uma previsão a longo prazo entre 3 a 15 dias. Já o modelo de previsão regional, cobre uma área geográfica menor, porém, consegue mais detalhes e suas previsões são em média para 48 horas.

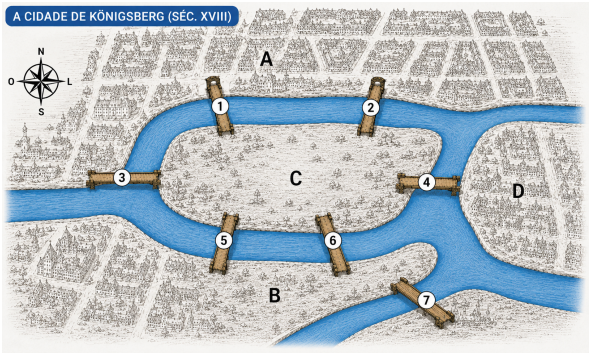
Já os modelos de previsões estatísticos consistem em utilizar dados históricos para realizar previsões. Para isso, os computadores têm acesso a um grande banco de dados históricos sobre o clima de uma determinada localidade e, com isso, podem observar padrões para o clima e a partir disso faz suas previsões.

Existem diversos modelos meteorológicos utilizados por centros de pesquisa ao redor do mundo. Entre os modelos numéricos mais utilizados destacam-se o *Global Forecast System* (GFS), o *European Centre for Medium-Range Weather Forecasts* (ECMWF) e o *Icosahedral Nonhydrostatic Model* (ICON), que, de acordo com Kalnay (2003), diferem quanto à resolução, aos métodos de assimilação de dados e ao horizonte de previsão. Cada um desenvolvido com características e finalidades específicas. O GFS, desenvolvido pelos Estados Unidos; o (ECMWF), reconhecido pela alta precisão em previsões de médio prazo; o (ICON), utilizado pelo serviço meteorológico da Alemanha. Cada um desses modelos apresenta vantagens e limitações, variando quanto à resolução espacial, ao horizonte de previsão e às técnicas de assimilação de dados. Dessa forma, para obter previsões mais confiáveis, é comum comparar os resultados de diferentes modelos ou utilizar aquele que melhor se adapta às características da região e ao objetivo da previsão.

3.4 O Problema das pontes de Königsberg

Observe a seguinte situação: Os habitantes de Königsberg na Prússia, hoje Kaliningrad, Rússia, costumavam passear atravessando as sete pontes que ligavam o Rio Pregel à cidade, como mostra a figura a seguir.

Figura 5 – Representação das pontes

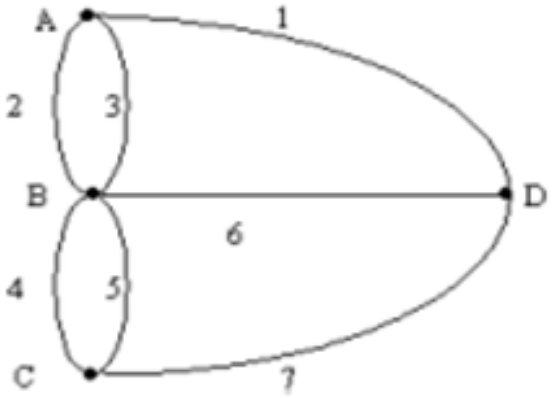


Fonte: Elaborada pelo autor com auxílio do ChatGPT (2026).

Surgiu uma dúvida a respeito dessas pontes que era a seguinte: seria possível, partindo de qualquer uma das regiões, das margens ou das ilhas, atravessar todas as 7 pontes, sem passar pela mesma ponte duas vezes e retornando ao ponto de partida? Esse problema, que por muitos é considerado uma charada matemática, ficou conhecido como o "o problema das pontes de Königsberg" e quem propôs uma solução para ela foi o grande matemático Leonhard Euler

Para resolver o problema, podemos dizer, em linguagem moderna que Euler criou um modelo matemático representado por um diagrama que se assemelha com o diagrama abaixo:

Figura 6 – Modelo Matemático para a solução do problema



Fonte: Ferreira, Silveira e Silva (2013, p. 10).

Nesse diagrama temos o seguinte: A, B, C e D representam às partes em que se tinha terra firme, de modo que B e D representam as ilhas e A e B são as duas margens. Já os números 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7 representam as sete pontes que ligam os pontos de terra firme, ou seja, ele representou cada uma das quatro regiões da cidade (as duas

ilhas e as duas margens) como um ponto (ou vértice) e cada uma das sete pontes como uma linha (ou aresta) que ligava esses pontos. Essa representação abstrata é o que hoje conhecemos como um grafo.

Agora, considerando que um vértice é par ou impar a depender se o número de arestas que estejam ligados a ele é par ou impar. A partir disso, Euler chegou as seguintes conclusões:

- Um diagrama pode ser atravessado começando e acabando num mesmo ponto sem passar duas vezes na mesma aresta se, e somente se, todos os vértices forem pares;
- Um diagrama que contém, no máximo, dois vértices ímpares também pode ser atravessado, entretanto sem voltar ao local de partida;
- Se o diagrama contém $2n$ vértices ímpares, onde n é um número inteiro qualquer, para atravessá-lo será necessário n passagens distintas por uma mesma linha.

Analisando o diagrama da Figura 6, podemos notar que todos os vértices são ímpares, consequentemente, de acordo com as informações constatadas por Euler, pode-se concluir que não é possível efetuar todo o percurso, retornando ao local de partida, sem passar mais de uma vez por cada ponte. Conforme Ferreira, Silveira e Silva (2013, p. 11), "Este resultado, formulado nos dias atuais com maior elegância, é conhecido como Teorema de Euler e considerado como marco inicial da Teoria dos Grafos."

Esse problema nos mostra um outro ponto importante da modelagem matemática: através da solução de um problema, o matemático busca generalizar a situação, não fica restrito apenas a resolver apenas o problema em questão, com isso, pode-se ampliar os resultados e desenvolver novas teorias, que nesse exemplo, a partir da solução proposta por Euler, iniciou-se a Teoria dos Grafos.

3.5 A coroa do Rei Hieron

Foi atribuída a Arquimedes a tarefa de verificar se a coroa encomendada pelo rei Hieron havia sido confeccionada inteiramente em ouro ou se o ourives havia substituído parte desse metal por prata. Como a coroa não poderia ser danificada, Arquimedes precisava encontrar um método que permitisse analisar sua composição sem destruí-la.

Ao observar que um corpo imerso em um fluido desloca um volume de líquido igual ao seu próprio volume, Arquimedes desenvolveu um procedimento baseado no empuxo, princípio que posteriormente recebeu seu nome. Esse problema pode ser descrito por meio de um modelo matemático simples.

Seja M a massa da coroa e suponha que ela seja composta por uma quantidade x de ouro e uma quantidade y de prata. Assim,

$$M = x + y.$$

Considere que a densidade do ouro seja tomada como unidade e que a densidade relativa da prata seja dada por d, com $0 < d < 1$. Nessas condições, o volume da coroa pode ser expresso por

$$V = \frac{x}{1} + \frac{y}{d}.$$

Como $d < 1$, observa-se que $\frac{y}{d} > y$. Dessa forma, para uma mesma massa total, a presença de prata aumenta o volume da coroa em relação ao volume de uma coroa constituída exclusivamente por ouro.

Considere agora um bloco maciço de ouro com a mesma massa da coroa, isto é,

$$A = M = x + y.$$

Ao mergulhar esse bloco em água, ele sofre a ação do empuxo. Seja E_1 o empuxo exercido sobre o bloco de ouro e E_2 o empuxo exercido sobre a coroa. Como o empuxo depende do volume de líquido deslocado, ele é proporcional ao volume do corpo imerso.

Assim, podem ocorrer duas situações:

1. Se a coroa fosse inteiramente de ouro, ela teria o mesmo volume do bloco de ouro. Nesse caso,

   $$E_1 = E_2,$$

   e, consequentemente, ambos apresentariam o mesmo peso aparente quando imersos na água.

2. Se parte do ouro tivesse sido substituída por prata, o volume da coroa seria maior do que o volume do bloco de ouro de mesma massa. Portanto,

   $$E_2 > E_1,$$

   fazendo com que a coroa apresentasse um peso aparente menor do que o bloco de ouro.

Comparando os pesos aparentes do bloco de ouro e da coroa quando imersos em água, Arquimedes pôde concluir se havia ocorrido fraude na fabricação da coroa. Esse raciocínio ilustra como um problema prático pode ser traduzido em um modelo matemático por meio das relações entre massa, volume e empuxo, permitindo solucionar a situação sem danificar o objeto analisado.

3.6 Orçamento Familiar

Considere uma familia na qual a renda mensal r_n é proveniente de um salário fixo r_0 mais o rendimento da caderneta de poupança p_n do mês anterior. Além disso, vamos supor que o consumo mensal c_n dessa família seja proporcional à sua renda mensal.

Para iniciar, considere a recorrência do tipo

$$\begin{cases} y_n = \alpha y_{n-1} \\ y_0 \text{ dado} \end{cases}.$$

Aplicando um processo recursivo, temos:

$$\begin{aligned} y_1 &= \alpha y_0 \\ y_2 &= \alpha y_1 = \alpha^2 y_0 \\ &\vdots \\ y_n &= \alpha y_{n-1} = \alpha^n y_0 \ , \end{aligned}$$

desse modo

$$y_n = y_0 \alpha^n. \tag{3.3}$$

Podemos verificar que a solução da recorrência linear

$$y_{n+1} = a y_n + b \tag{3.4}$$

com y_0 dado é

$$\begin{cases} y_n = y_0 + bn, \text{ se } a = 1 \\ y_n = y_0 a^n + b\frac{1-a^n}{1-a}, \text{se } a \neq 1 \end{cases}. \tag{3.5}$$

De fato, para o caso $a = 1$, a recorrência se torna

$$y_{n+1} = y_n + b,$$

ou seja, aumenta sempre b de um termo para o seguinte, logo, é uma Progressão Aritmética. Desse modo,

$$y_n = y_0 + bn.$$

Para o caso $a \neq 1$, de acordo com Morgado e Carvalho (2022) podemos verificar que a solução geral da recorrência é dada por:

$$y_n = Ca^n + \frac{b}{1-a},$$

Assim, utilizando a condição inicial y_0, temos

$$y_n = C + \frac{b}{1-a} \implies C = y_0 - \frac{b}{1-a}.$$

Substituindo, temos

$$y_n = \left(y_0 - \frac{b}{1-a}\right) a^n + \frac{b}{1-a}.$$

Reorganizando, obtemos

$$y_n = y_0 a^n + b\frac{1-a^n}{1-a}.$$

O modelo que estabelece relações entre as variáveis renda, poupança e consumo, dependentes do tempo e tomados em meses, é obtido da seguinte maneira:

Considere as notações

r_n = sendo a renda familiar;
r_0 = o salário fixo;
p_n = caderneta de poupança (mês anterior);
c_n = consumo da família.

Além disso, fixemos

i) poupança: p_{n+1} = (poupança do mês anterior n)+(sobra do mês $n+1$)

$$p_{n+1} = p_n + (r_{n+1} - c_{n+1}); \tag{3.6}$$

ii) renda: r_{n+1} = (salário) + (rendimento da poupança do mês anterior)

$$r_{n+1} = r_0 + \alpha p_n, \tag{3.7}$$

em que α é o juro da poupança;

iii) consumo

$$c_{n+1} = \beta r_{n+1}, \tag{3.8}$$

com $0 < \beta < 1$ sendo β representa a porcentagem de quanto foi consumido do mês anterior.

A partir das três equações, obtemos

$$\begin{aligned}
p_{n+1} &= p_n + (r_{n+1} - c_{n+1}) \\
&= p_n + [(r_0 + \alpha p_n) - \beta r_{n+1}] \\
&= p_n + [(r_0 + \alpha p_n) - \beta(r_0 + \alpha p_n)] \\
&= p_n + (r_0 + \alpha p_n - \beta r_0 - \beta\alpha p_n] \\
&= p_n + r_0 - \beta r_0 + \alpha p_n - \beta\alpha p_n \\
&= p_n + r_0(1-\beta) + \alpha p_n(1-\beta) \\
&= r_0(1-\beta) + p_n[(1-\beta)\alpha + 1]
\end{aligned}$$

considerando $a = [(1-\beta)\alpha + 1]$ e $b = r_0(1-\beta)$, chegamos em

$$p_{n+1} = ap_n + b$$

que é da forma de (3.4), então podemos usar (3.5) para determinar as soluções

$$p_n = p_0 a^n + b\frac{1-a^n}{1-a} = [(1-\beta)\alpha + 1]^n p_0 + (1-\beta)r_0\frac{1-[(1-\beta)\alpha+1]^n}{1-[(1-\beta)\alpha+1]}. \tag{3.9}$$

Analogamente obtemos,

$$r_n = r_0 + \alpha p_0 a^{n-1} + \alpha b\frac{1-a^{n-1}}{1-a} \tag{3.10}$$

e

$$c_n = \beta r_0 + \alpha\beta p_0 a^{n-1} + \alpha\beta\frac{1-a^{n-1}}{1-a}. \tag{3.11}$$

3.7 Financiamento

Na compra de uma casa, é feito um financiamento do valor c_0, que deve ser pago em 15 anos, em parcelas mensais fixas e iguais a k. Devemos determinar o juro mensal α cobrado nesse empreendimento.

Seja c_0 a dívida inicial. Então, a dívida c_n em um mês n é dada pela dívida corrigida do mês anterior menos a parcela k paga no mês, isto é,

$$c_{n+1} = c_n + \alpha c_n - k = (1+\alpha)c_n - k. \tag{3.12}$$

Podemos encontrar a solução de (3.12) por recorrência, da forma

$$\begin{aligned}
c_1 &= (1+\alpha)c_0 - k \\
c_2 &= (1+\alpha)c_1 - k = (1+\alpha)^2 c_0 - (1+\alpha)k - k \\
c_3 &= (1+\alpha)c_2 - k = (1+\alpha)^3 c_0 - (1+\alpha)^2 k - (1+\alpha)k - k \\
&\vdots \\
c_n &= (1+\alpha^n c_0 - k[1 + (1+\alpha) + (1+\alpha)^2 + \cdots + (1+\alpha)^{n-1}]).
\end{aligned}$$

Observe que o termo dentro dos colchetes é a soma de uma progressão geométrica. Portanto,

$$c_n = (1+\alpha)^n c_0 - k\frac{1-(1+\alpha)^n}{-\alpha}. \tag{3.13}$$

Se considerarmos que a dívida estará quitada em t meses, devemos ter em (3.13) que $c_t = 0$. Desse modo,

$$(1+\alpha)^t c_0 = k\frac{1-(1+\alpha)^t}{-\alpha},$$

ou

$$\frac{\alpha c_0}{k} = \frac{(1+\alpha)^t - 1}{(1+\alpha)^t} = 1 - \frac{1}{(1+\alpha)^t}.$$

Conhecidos os valores da dívida inicial c_0, do pagamento parcelado k e do tempo necessário t para a liquidação dessa dívida, o cálculo de α pode ser feito usando algum método numérico. Considere, por exemplo, $c_0 = 30.000, k = 500$ e $t = 15$ anos (180 meses).

Portanto,

$$60\alpha = 1 - \frac{1}{(1+\alpha)^{180}}. \tag{3.14}$$

Para determinar o valor de α em (3.14), vamos utilizar o método da bisseção.

Sejam $y = 60\alpha$ e $z = 1 - \frac{1}{(1+\alpha)^{180}}$. Então, devemos encontrar α de modo que $y = z$:

$$\alpha = 0.01 \Rightarrow y = 0.6 \text{ e } z = 0.833 \Rightarrow z > y$$
$$\alpha = 0.02 \Rightarrow y = 1.2 \text{ e } z = 0.97 \Rightarrow z < y$$
$$\alpha = \frac{0.01 + 0.02}{2} = 0.015 \Rightarrow y = 0.9 \text{ e } z = 0.93 \Rightarrow z > y.$$

Então, α deve estar entre 0.015 e 0.02. Continuando o processo, obtemos $\alpha \simeq 0.0156$ ou 1.56% ao mês.

3.8 As pipas de vinho

O modelo a ser apresentado nessa seção foi um modelo desenvolvido em uma fazenda do Rio Grande do Sul. Segundo Bassanezi (2002), alunos de um curso de especialização em Matemática realizaram uma visita a uma fazenda produtora de vinho, pertencente a seu Joaquim.

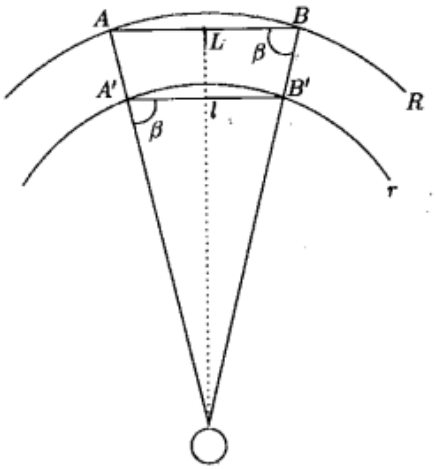
Ao chegar na fazenda, os estudantes se depararam com grandes reservatórios de vinho, que são conhecidos como pipas de vinhos. O que chamou mais atenção foi o

fato de que essas pipas eram construidas pelo próprio seu Joaquim, que não tinha um grande conhecimento em Matemática, porém, os reservatórios construidos por ele, utilizam bastantes conceitos matemáticos e foram herdados de seus ancestrais.

Dessa forma, os estudantes decidiram estudar o que seu Joaquim desenvolveu e mostrar toda a Matemática utilizada por ele. Com isso, os estudantes desenvolvem um modelo que pode auxiliar na confecção de novos reservatórios.

Para construir uma pipa com um volume preestabelecido, seu Joaquim deve cortar as ripas de modo que se encaixem perfeitamente. Vejamos a vista superior da pipa

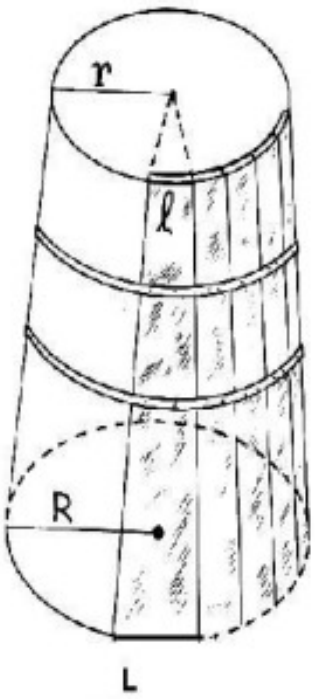
Figura 7 – Vista superior da pipa de vinho



Fonte: Bassanezi (2002, p. 47).

Na figura, a circunferência maior representa a base da pipa e, a menor, sua tampa. O reservatório terá o formato de um tronco de cone, como mostra a figura a seguir.

Figura 8 – Ilustração da pipa de vinho



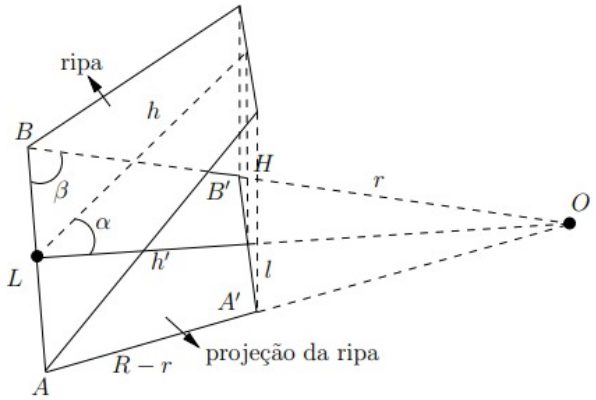
Fonte: Bassanezi (2002, p. 48).

note que a Figura 7 é uma projeção ortogonal de uma ripa da pipa da Figura 8.

O ângulo de encaixe β, entre duas ripas, é obtido considerando: R (raio da base), L (largura da ripa na base); todas as ripas justapostas devem formar, na base da pipa, uma circunferência.

Observe a seguinte figura

Figura 9 – Projeção ortogonal de uma ripa



Fonte: Bassanezi (2002, p. 49).

o triângulo OAB é isosceles, então

$$\beta = \arccos \frac{L/2}{R}. \tag{3.15}$$

Para exemplificar, se o diâmetro da base tiver $98cm$ e a largura maior de cada ripa é $7cm$, então

$$\beta = \arccos \frac{3,5}{49} = 85,9°.$$

Para determinar a forma da ripa cortada, dados R, L e β e também o raio r da tampa, devemos ter o mesmo ângulo de encaixe na tampa, isto é,

$$cos\ \beta = \frac{l/2}{r} \Rightarrow l = 2r \cos \beta.$$

Portanto,

$$\frac{l/2}{r} = \frac{L/2}{R} \Rightarrow l = \frac{rL}{R}. \tag{3.16}$$

Da Figura 9, temos

$$h' = (R - r) \cos \beta.$$

Usando as expressões (3.15) e (3.16) temos h' em função de L **e** l, ou seja,

$$h' = \frac{L - l}{2}. \tag{3.17}$$

Como H é a altura da pipa, aplicando o Teorema de Pitágoras, temos

$$h^2 = H^2 + (h')^2 \Rightarrow H = \sqrt{h^2 - (h')^2} \tag{3.18}$$

$$\Rightarrow H = \sqrt{h^2 - \frac{(L - l)^2}{4}}. \tag{3.19}$$

Sabemos, ainda, que o volume do tronco de cone é dado por

$$V = \frac{1}{3}\pi H(R^2 + rR + r^2). \tag{3.20}$$

Para entendermos melhor a utilidade do modelo, vamos ver o seguinte problema: construir uma pipa de 1000 l, com uma altura de $1,5$ m e diâmetro da base igual a 1 m.

Solução:

Suponhamos que as ripas sejam regulares (formato retangular) e tenham largura de 10 cm. Vamos converter todos os dados para a unidade dm (decímetro):

- $V = 1000\ dm^3$;

- $H = 15\ dm$;
- $R = 5\ dm$;
- $L = 1\ dm$.

Usando a expressão (3.20) do volume, obtemos o seguinte

$$r = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 - 4(R^2 - \frac{3V}{\pi H})}}{2}.$$

Sabendo que r deve ser positivo, utilizando os dados, obtemos que

$$r = 4,20\ dm.$$

Para obter o valor de l (parte superior da ripa), vamos utilizar (3.16). Então,

$$l = \frac{rL}{R} = \frac{4 \times 2}{5} = 0,84\ dm.$$

Com relação ao valor de h, de (3.18), temos

$$h = \sqrt{15^2 + \frac{(1 - 0,48)^2}{4}} = 15,0002\ dm,$$

serão utilizadas n ripas. Desse modo,

$$n \approx \frac{C}{L},$$

em que C é o comprimento da circunferência da base. Desta forma,

$$n \approx \frac{2\pi R}{L} = \frac{2\pi 5}{1} = 31,4\ \textbf{ripas}.$$

Se quisermos que todas as ripas utilizadas sejam iguais, devemos usar 32 ripas. Então,

$$32 \approx \frac{2\pi R}{L'} \Rightarrow L' = 0.98175\ dm$$

e

$$l' = \frac{rL'}{R} \Rightarrow l' = 0,82467\ dm.$$

Por fim, o ângulo de encaixe deve ser

$$\beta = \arccos\ \frac{l'/2}{r} = \arccos(0,098175) = 84,366°.$$

4 Matemática e Agricultura

O Brasil é internacionalmente conhecido por ser um grande produtor agrícola, com o cultivo de diversas culturas. O que pouco se sabe é que grande parte da produção brasileira é feita por agricultores de pequeno porte. Essas produções menores são conhecidas como agricultura familiar. Segundo o último Censo agropecuário realizado pelo IBGE em 2017, a agricultura familiar é responsável por cerca de 90% da economia dos municípios com até 20 mil habitantes.

A Matemática está presente em praticamente todas as atividades humanas, e na agricultura não é diferente. Desde o planejamento da plantação até a colheita, os cálculos e raciocínios matemáticos orientam decisões que podem garantir maior produtividade e melhor aproveitamento dos recursos disponíveis. Em grandes fazendas, em que a produção é em grande escala, todas essas etapas são realizadas com a utilização de diversos aparatos tecnológicos, o que demanda muito conhecimento e investimento financeiro, o que não é uma realidade acessível para boa parte dos produtores brasileiros.

Na agricultura familiar, é fácil enxergar esse vínculo entre Matemática e cultivo. Muitos produtores rurais, mesmo sem terem tido acesso à escola formal ou sendo analfabetos, utilizam, no dia a dia, raciocínios matemáticos de forma intuitiva. Ao medir a quantidade de sementes necessárias para um terreno, ao estimar a produção que conseguirá naquela área de cultivo, ao calcular o tempo certo de irrigação ou ao estimar o valor da venda dos produtos na feira, dentre tantas outras possibilidades. O agricultor está sempre aplicando algum conceito matemático como de proporção, divisão, porcentagem e até mesmo de geometria.

Esses conhecimentos matemáticos, ainda que informais, são fundamentais para a sobrevivência e o sucesso da agricultura familiar. Eles permitem que o agricultor otimize seus recursos, evite desperdícios e organize melhor sua produção. Além disso, quando esses saberes do campo se unem ao conhecimento escolar, o produtor ganha ainda mais autonomia, ampliando sua capacidade de planejamento e negociação.

4.1 O contexto local

São Sebastião de Lagoa de Roça (popularmente chamada apenas de Lagoa de Roça) é uma pequena cidade do interior da paraíba que está situada a uma distância de 130 km da capital paraibana, João Pessoa e a apenas 16 km de Campina Grande, fazendo parte da região metropolitana da Rainha da Borborema. Segundo o último senso do

IBGE, realizado em 2022, a cidade tem uma população de aproximadamente 11.040 habitantes, além disso tem uma área territórial de aproximadamente 50 km^2 e uma densidade demográfica de 238 hab/km^2. A cidade ainda é conhecida por ter uma grande parte de sua população ainda morando na zona rural, segundo consta nas informações oficiais do site municipal da Prefeitura Municipal de São Sebastião de Lagoa de Roça (2026), no senso do IBGE de 2010, a população rural equivalia a 57,8% da papulação total da cidade.

A cidade fica localizada nas próximidades da conhecida cidade de Campina Grande, no Brejo paraíbano. Ao observar o nome desse município, podemos notar uma palavra que remete a um tema desta dissertação, a "Roça". Como o nome já nos indica, a roça, que indica agricultura, é muito forte na cidade. Segundo a história local, antes de se formar como vilarejo e, posteriormente, cidade, Lagoa de Roça era o que literalmente o nome diz, uma lagoa que, em volta, eram feitas plantações. Com o passar dos anos, a cidade foi se formando e aumentando, graças ao crescimento da agricultura local. Atualmente, a agricultura é responsável por boa parte da economia, "A economia local baseia-se na agricultura, com destaque para as culturas de milho, feijão, mandioca, batatinha e batata doce"(Prefeitura Municipal de S.S. de Lagoa de Roça, 2026, p. 6).

Em pequenas cidades do interior, como é o caso do município, a agricultura tem um forte papel na sociedade, seja ele no desenvolvimento social como também no econômico. Em municípios desse porte, a geração de empregos ainda é pequena, as oportunidades são menores, dessa forma a agricultura se sobressai como o ramo que mais gera emprego e assim movimenta a econômia local. Além da importância econômica, a agricultura nessas localidades moldam e fortalecem a cultura. O trabalho no campo está profundamente ligado às tradições locais, ao modo de vida das comunidades e à transmissão de conhecimentos entre gerações.

A agricultura em cidades pequenas vão além da ajuda econômica. Ela ajuda pessoas a sobreviverem. Através de um programa federal chamado PAA (Programa de Aquisição de Alimentos). De acordo com Brasil, Ministério do Desenvolvimento e Assistência Social, Família e Combate à Fome (2026) o Programa de Aquisição de Alimentos

> Realiza a compra direta de alimentos de agricultores familiares, sem necessidade de licitação e os destina a pessoas em situação de insegurança alimentar e nutricional, bem como à rede socioassistencial, equipamentos públicos de segurança alimentar e nutricional e à rede pública e filantrópica de ensino. O PAA tem como objetivo fortalecer a agricultura familiar, gerando emprego, renda e desenvolvendo a economia local, e de promover o acesso aos alimentos, contribuindo para reduzir a insegurança alimentar e nutricional. (gov.br, 2024)

Esse programa fortalece a enonômia, pois compra o alimento dos pequenos agricultores locais e também ajuda aqueles que não possuem condições financeiras de comprar sequer os alimentos suficientes para se manterem saudáveis.

Em 2017 foi realizado o último censo agropecuário do Brasil, nele podemos obter dados e informações acerca de qualquer munícipio brasileiro. Para entender um pouco da importância da agricultura para Lagoa de Roça, vamos analisar alguns dados. Segundo o IBGE, o município dispunha de 3.586 ha de estabelecimentos agropecuários (lembrando que agropecuária engloba produção agrícola com criação animal) e esse território está dividido entre 1.376 estabelecimentos agropecuários.

Vejamos os dados colhidos e divulgados pelo IBGE. Primeiramente, vamos apresentar a tabela que apresenta as lavouras permanentes, isto é, cultivos agrícolas de longa duração (superior a um ano) que, após plantados, produzem colheitas sucessivas durante vários anos, sem a necessidade de novo plantio a cada safra.

Tabela 2 – Lavouras permanentes

Cultura	Nº de estabelecimentos com 50 pés ou mais	Qtd. produzida (t)	Nº de pés existentes (×1000)	Área nos estabelecimentos com +50 pés (ha)	Área colhida (ha)	Valor da produção (×1000 R$)
Acerola	2					
Banana	9	24	9	12	10	21,5
Cajú (castanha)	2					
Cajú (fruto)	7	1	2	6	2	2,700
Coco-da-Baía	1					
Goiaba	1					
Graviola	1					
Jabuticaba	3	12	1	4	4	5,85
Laranja	66	321	46	65	51	186,8
Limão	11	17	2	6	5	22,534
Manga	1					
Maracujá	3	3		1		6,62
Tangerina	7	64	12	38	26	24,1

Fonte: IBGE (2026)

Agora, os dados sobre as lavouras temporárias:

Tabela 3 – Lavouras temporárias

Lavoura	Número de Estabelecimentos	Quantidade produzida (t)	Área colhida (ha)	Valor da Produção (×1000R$)
Abóbora, Jerimum	260	128	20	143,45
Algodão	1			
Cana-de--açúcar	1			
Fava	919	100	171	205,64
Feijão Cor	559	101	196	186
Feijão Fradinho	698	84	202	161,59
Feijão Preto	202	26	54	46,961
Feijão Verde	313	56	132	111,33
Mandioca	257	167	67	183,49
Milho	616	201	203	227,04
Milho forrageiro	26	7	3	0,57
Tomate rasteiro	1			
Palma forrageira	53	38	3	4,33

Fonte: IBGE (2026)

Dando prosseguimento à pesquisa sobre a agricultura local, decidimos falar com especialistas da cidade sobre o tema:

- Robson Pereira de Oliveira: Secretário municipal de agricultura. Está na sua terceira passagem como secretário, tem grande experiência no ramo, é técnico em agronomia e possui graduação em agroecologia. Daqui em diante, ao citar o secretário, chamaremos apenas de "Robson";
- Cícero Pereira Cordão Terceiro Neto: Extensionista Rural II da EMPAER: Engenheiro agrônomo, Mestre em solos e nutrição de plantas e Doutor em irrigação e drenagem de plantas.

Foram realizados alguns encontros com estes, nos quais conversamos sobre o atual cenário da agricultura no município, principalmente a agricultura familiar, que é uma

realidade presente na vida da população. Além disso, buscamos saber a opinião deles sobre a relação entre a Matemática e a Agricultura.

A Secretaria Municipal de Lagoa de Roça mantém um importante papel para auxílio da manutenção das plantações locais, segundo o secretário de agricultura, eles auxiliam no preparo do solo, disponibilizando maquinário necessário, além de prestar outros serviços solicitados pelos locais. Ainda segundo Robson, a agricultura familiar presente no munícipio é muito importante para a sustentação da economia da cidade, sendo a atividade desenvolvida no sítio ainda mais importante que as atividades urbanas.

A EMPAER (Empresa Paraibana de Pesquisa, Extensão Rural e Regularização Fundiária) é uma empresa pública do governo da Paraíba, vinculada à SEDAP (Secretária do desenvolvimento da agricultura e da pesca), que visa promover o desenvolvimento sustentável da agricultura familiar. Ela oferece assistência técnica, pesquisa agropecuária e regularização fundiária. Em parceria também com a secretária de agricultura, esse órgão mantém controle do que é produzido no munícipio e ainda pode prestar uma espécie de acessoria, dando todo suporte para o agricultor.

É dever da EMPAER manter o controle da agricultura familiar, para isso eles tem o CAF (Cadastro de agricultura familiar), segundo dados obtidos da EMPAER, em 2026 existem aproximadamente 500 CAF's ativos. Para ser considerado um agricultor familiar é necessário que se cumpra algumas condições como: a área não pode ser maior que 4 módulos fiscais (em Lagoa de Roça cada módulo vale 30ha), além disso, responsável da plantação tem que residir nas imediações do terreno, e a mão de obra tem que ser majoritariamente de familiares.

Através de informações da EMPAER, podemos ter informações mais precisas sobre tudo que é produzido pela agricultura familiar no município. Atualmente, existe uma grande variedade de culturas cultivadas em todo territótio da cidade, sendo elas: milho, feijão vigna, feijão de corda, feijão preto, macaxeira, mandioca, batata doce, hortaliças e também algumas frutas como limão, tangerina, laranja e banana. Na tabela a seguir, apresentaremos os dados da área de cultivo do município, esses dados foram repassados por Cícero, através dos encontros que foram realizados para entender mais sobre a agricultura municipal.

Tabela 4 – Produção da agricultura familiar em Lagoa de Roça

Culturas	Área de Plantio (ha)
Milho	300
Feijão de corda	230
Feijão preto	20
Feijão vigna	120
Batata doce	200
Macaxeira	150
Mandioca	80
Limão	50
Tangerina	130
Laranja	50
Banana	10
Hortaliças	40

Fonte: EMPAER(2026)

Além disso, a produção de cada cultura será: :

Tabela 5 – Produção da agricultura familiar em Lagoa de Roça

Culturas	Produção por ha	Produção anual
Milho	8	2400
Feijão	0,6	72
Batata doce	9	1350
Macaxeira	9	1350
Mandioca	9	720
Limão	9	450
Tangerina	9	1170
Laranja	9	450
Banana	11	110
Hortaliças	3,5	130

Fonte: EMPAER (2026)

Com todos os dados apresentados até então, conseguimos entender a dimensão que a agricultura tem no município além da forte importância de se relacionar o tema com a Matemática.

4.2 Um modelo para otimizar o plantio de batatas

Na obra, "Ensino e aprendizagem com Modelagem Matemática", Bassanezi (2002) destaca a importância de atrair o conteúdo para realidade do aluno. Ele apresenta um exemplo de uma turma de cálculo em que se notava o desinteresse dos calouros com a disciplina. Buscando contextualizar, foi perguntado sobre temas diversos, dentre os questionamentos veio o seguinte "meu pai planta batatas, colocando cada semente a uma distância de 30 cm, queria saber porque ele faz dessa maneira".

A partir deste questionamento, podemos realizar um estudo e assim chegar em modelos que possibilitam compreender e otimizar uma produção. Para isso, precisamos de algumas informações como:

- O espaçamento entre duas linhas dever ter no mínimo 80 cm;
- Cada planta produz, em média, 8,25 batatas;
- O peso de 8 batatas, de uma mesma planta é 639 gramas;
- Os bancos de investimentos consideram como produção normal, 800 sacas de 60 kg por alqueire plantado (um alqueire paulista mede 24200 m^2).

Os dados da tabela a seguir trazem a relação entre o espaçamento de plantas da mesma linha e a quantidade média de batatas por planta:

Tabela 6 – Produtividade de acordo com o espaço entre as plantas

Espaçamento (cm)	**Produção**
25	4,5
30	6,5
35	7,5
40	8,0

Fonte: Bassanezi (2002)

A partir desses dados foi elaborado o seguinte problema: Determinar o espaçamento entre duas plantas (mesma linha) de modo que a produção de um alqueire seja máxima.

Resolução

Vamos resolver de duas maneiras. Para a primeira, precisamos preencher a seguinte tabela:

Tabela 7 – Produtividade total

Espaçamento entre as plantas (cm)	**Quant. de batata por planta**	**Plantas**	**Produção/planta**	**Produção Total (sacas)**
d	b	p	-	P
25	4,5			
30	6,5			
35	7,5			
40	8,0		0,639	800
45*	8,25*			

Fonte: Autoria própria (2026)

Observe que o terreno em questão tem formato quadrangular com uma área de 24.200 m^2. Desse modo, cada lado terá medida aproximada de 155,6 m. Com isso, o número de linhas será:

$$\frac{155,56}{0,8} = 194 \text{ ruas.}$$

Precisamos, agora, determinar o número de plantas por linha, o total de plantas, a produção por planta e a produção total. Para isso, podemos obter expressões que nos permitem modelar o comportamento da plantação:

- Número de plantas por linha (N_p) em função do distanciamento (d) em cm entre as plantas:
$$N_p = \frac{\text{Comprimento}}{\text{Espaçamento}} = \frac{155,56}{\frac{d}{100}} = \frac{15556}{d};$$
- Total de plantas (T_p) em função do distanciamento (d) entre as plantas:
$$T_p = N_p \cdot 194 = \frac{15556}{d} \cdot 194 = \frac{3.017.864}{d};$$
- Produção por plantas PR_p: é dito inicialmente que 8 batatas pesam em 639 g, então cada batata pesará $79,875$ g $= 0,079875$ kg e a produção por planta será dada por:
$$PR_p = b \cdot 0,079875;$$
- Produção total (P_t):
$$P_t = p \cdot b \cdot \frac{0,079875}{60}.$$

Observe que está sendo dividido por 60, pois queremos a produção em sacas e cada saca pesa 60 kg.

Agora, a partir das equações, podemos preencher a tabela:

Tabela 8 – Produtividade total preenchida

Espaçamento entre as plantas (cm)	**Quant. de batata por planta**	**Plantas**	**Produção/planta**	**Produção Total (sacas)**
d	b	p	-	P
25	4,5	120.995	0,359	726
30	6,5	100.829	0,519	872
35	7,5	86.425	0,599	863
40	8,0	75.622	0,639	800
45*	8,25*	67.219	0,659	738

Fonte: Autoria própria (2026)

Podemos constatar, analisando a Tabela 8, que a maior produção em sacas é obtida quando a distância entre duas plantas consecutivas de uma mesma linha é de, aproximadamente, 30 cm.

Agora, podemos fazer uma abordagem mais detalhada, utilizando outros conceitos matemáticos. A produção em sacas pode ser descrita como uma função de duas variáveis: a distância e a quantidade de batatas na mesma fila (d e b respectivamente), isto é:

$$P(d,b) = \left(\frac{0,639}{8}\, b\right)\left(\frac{155}{d}\cdot 194\right)\frac{1}{60} \approx \frac{40b}{d}.$$

Note que a produção é diretamente proporcional à quantidade de batatas por planta e é inversamente proporcional à distância entre duas plantas consecutivas da mesma linha. Observe, ainda, que as variáveis d e b são dependentes. Assim podemos expressar P em função de uma variável.

Precisamos determinar a relação entre b e d. Para isso vamos utilizar os dados da primeira tabela e vamos compará-lo com o resultado do processo feito para obter os resultados da Tabela 6. Agora consideremos

$$b_0 = f(d_0), b_1 = f(d_1), \cdots, b_n = f(d_n).$$

Queremos encontrar uma função contínua $b = f(d)$. Daí, vejamos que,

$$\begin{aligned} f(d_1) - f(d_0) &= 6,5 - 4,5 = 2 \\ f(d_2) - f(d_1) &= 7,5 - 6,5 = 1 \\ f(d_3) - f(d_2) &= 8,0 - 7,5 = \frac{1}{2} \\ f(d_4) - f(d_3) &= 8,25 - 8,0 = \frac{1}{4} \\ &\vdots \\ f(d_n) - f(d_{n-1}) &= \cdots = \frac{1}{2^{n-2}}. \end{aligned}$$

Somando ambos os lados das igualdades, obtemos

$$f(d_n) - f(d_0) = 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-2}}.$$

Note que do lado direito da igualdade temos a soma dos termos de uma PG com razão $\frac{1}{2}$, o primeiro termo 2 e com $n-2$ termos, assim

$$f(d_n) - f(d_0) = 4 - 2^{2-n},$$

como $f(d_0) = 4,5$, temos

$$b_n = f(d_n) = 8,5 - 2^{2-n}.$$

A relação entre n e d é dada pela reta: $n = 20d - 5$

Utilizando essa equação, claramente

$$b = f(d) = 8,5 - 2^{2-(20d-5)} = 8,5 - 2^{7-20d}.$$

Podemos agora substituir essa expressão em $P(d, b)$, que dá a produção em sacas, desta forma, fica claro que

$$P(d) = \frac{40}{d}(8,5 - 2^{7-20d}).$$

Essa expressão nos permite calcular a produção de um alqueire em função do espaçamento entre as plantas. A função produção obtida anteriormente é dada por:

$$P(d) = \frac{40}{d}\left(8.5 - 2^{7-20d}\right), d > 0, \tag{4.1}$$

em que d representa a distância (em metros) entre duas plantas consecutivas da mesma rua, e $P(d)$ é a produção em sacas de 60 kg. A variável $n = 20d - 5$ corresponde a um índice inteiro não negativo nos dados originais. Considerando a continuidade do modelo, temos

$$n \geq 0 \implies 20d - 5 \geq 0 \implies d \geq 0.25 \text{ m}.$$

Além disso, valores típicos da tabela original sugerem $d \leq 0,6$ m. Portanto, buscamos o máximo no intervalo $[0.25; 0.6]$.

Para maximizar $P(d)$, derivamos em relação a d. Escrevemos da seguinte forma

$$P(d) = 40 \cdot d^{-1} \cdot \left(8.5 - 2^{7-20d}\right).$$

A derivada da função exponencial 2^{7-20d} é dada por

$$\frac{d}{dd}\left(2^{7-20d}\right) = 2^{7-20d} \cdot \ln 2 \cdot (-20) = -20 \ln 2 \cdot 2^{7-20d}.$$

consequentemente, aplicando a regra do produto e a regra da cadeia, chegamos a

$$\begin{aligned} P'(d) &= 40\left[-d^{-2}\left(8.5 - 2^{7-20d}\right) + d^{-1}\left(-(-20 \ln 2) \cdot 2^{7-20d}\right)\right] \\ &= 40\left[-\frac{8.5 - 2^{7-20d}}{d^2} + \frac{20 \ln 2 \cdot 2^{7-20d}}{d}\right]. \end{aligned}$$

Igualando $P'(d) = 0$, temos

$$-\frac{8.5 - 2^{7-20d}}{d^2} + \frac{20 \ln 2 \cdot 2^{7-20d}}{d} = 0.$$

Multiplicando ambos os lados por d^2

$$-8.5 + 2^{7-20d} + 20 \ln 2 \cdot d \cdot 2^{7-20d} = 0,$$

e assim

$$2^{7-20d}\left(1 + 20 \ln 2 \cdot d\right) = 8.5. \tag{4.2}$$

A equação (4.2) pode ser reescrita como:

$$2^{7-20d} = \frac{8.5}{1 + 20 \ln 2 \cdot d},$$

daí, aplicando $\log_2$ em ambos os lados:

$$7 - 20d = \log_2\left(\frac{8.5}{1 + 20 \ln 2 \cdot d}\right)$$

Esta equação não possui solução analítica simples, necessitando de métodos numéricos.

Definamos a função auxiliar

$$f(d) = 2^{7-20d}\left(1 + 20 \ln 2 \cdot d\right) - 8.5.$$

A raiz de $f(d) = 0$ corresponde ao ponto crítico. Realizamos iterações:

- Para $d = 0,30$:
  $2^{7-6} = 2^1 = 2$
  $1 + 20 \cdot 0,693147 \cdot 0,30 = 1 + 4,15888 = 5,15888$
  Produto: $2 \times 5,15888 = 10,31776$
  $f(0,30) = 10,31776 - 8,5 = 1,81776 > 0$

- Para $d = 0,40$:
  $2^{7-8} = 2^{-1} = 0,5$
  $1 + 20 \cdot 0,693147 \cdot 0,40 = 1 + 5,54518 = 6,54518$
  Produto: $0,5 \times 6,54518 = 3,27259$
  $f(0,40) = 3,27259 - 8,5 = -5,22741 < 0$

Há uma raiz no intervalo $(0.3, 0.4)$. Refinamos:

- $d = 0,31$: $f(0,31) \approx 0,722 > 0$
- $d = 0,32$: $f(0,32) \approx -0,261 < 0$
- $d = 0,315$: $f(0,315) \approx 0,218 > 0$
- $d = 0,317$: $f(0,317) \approx 0,012 \approx 0$.

Portanto, o ponto crítico é:

$$d^* \approx 0,317 \text{ m}(31,7 \text{ cm}).$$

Analisamos o sinal da derivada nas vizinhanças do ponto crítico:

- Para $d = 0,31\,\text{m}$: $P'(0,31) > 0$ (função crescente);
- Para $d = 0,32\,\text{m}$: $P'(0,32) < 0$ (função decrescente).

Como $P'(d)$ passa de positiva para negativa em d^*, este ponto é um máximo local. Para garantir que se trata do máximo global no intervalo $[0,25;\ 0,6]$, comparamos o valor da função nos extremos com o valor no ponto crítico:

$$P(0,25) = \frac{40}{0,25}\left(8,5 - 2^{7-5}\right) = 160 \times (8,5 - 4) = 720,$$
$$P(0,6) = \frac{40}{0,6}\left(8,5 - 2^{7-12}\right) \approx 66,67 \times (8,5 - 0,03125) \approx 564,58,$$
$$P(0,317) \approx 873,3.$$

Como $P(0,317) > P(0,25)$ e $P(0,317) > P(0,6)$, concluímos que $d^* \approx 0,317\,\text{m}$ (ou $31,7\,\text{cm}$) é o ponto de máximo global da produção. Portanto, a distância entre as plantas que maximiza a produção é de aproximadamente **31,7 cm**.

Logo, o espaçamento ótimo entre plantas consecutivas na mesma rua é de aproximadamente **0,317 m** (ou 31,7 cm). Nessa configuração, a produção máxima atinge cerca de **873 sacas** de 60 kg.

$$d_{\text{ótimo}} \approx 0,317 \text{ m}, P_{\text{máx}} \approx 873 \text{ sacas}$$

Observe ainda que chegamos praticamente no mesmo valor para as duas formas que calculamos. Isso nos mostra que podemos modelar problemas de maneiras distintas, algumas maneiras são mais básicas e outras são mais complicadas e podem necessitar do conhecimento de conteúdos mais avançados de Matemática. Além disso, podemos notar que é possível simplificar um problema com modelagem, o que permite uma aplicação no ensino básico também.

4.3 Matemática na irrigação

Vários fatores influenciam a produtividade de uma cultura, a qualidade do solo, os cuidados com as pragas, o manejo correto, porém, o que talvez mais interfira para uma boa colheita, seja o clima, excesso ou falta de chuva. No contexto da região nordeste, sabemos que o maior problema é justamente a falta de chuva em muitas épocas do ano,

Para dar início ao nosso estudo, precisamos entender primeiramente como funciona o caminho da água ao cair no solo através das chuvas ou de irrigação. Nem toda água que cai no solo é absorvida, uma parte escoa, outra parte é introzida ao solo. O diagrama a seguir ilustra todo o processo que ocorre

Figura 10 – Caminho da água no solo



Fonte: Elaborada pelo autor com auxílio do ChatGPT (2026)

Como podemos notar, uma parte da água não é absorvida pelo solo, ela escoa pela superficie até que encontre algo que impeça seu escoamento, como os barreiros, barragens, açudes poços, dentre outros. A outra parte da água é absorvida pelo solo e assim fica armazenada no sub-solo.

Além disso, um outro ponto que precisamos entender é a unidade de medida mais utilizada quando falamos em volume de água de preciptações, que é o milímetros. É estranho para algumas pessoas utilizar o milímetro para se referir a volume, uma vez que na escola aprendemos que as unidades de volume são denotadas, em sua maioria por cm^3 e mm^3.

Quantas vezes já assistimos noticiários e vimos informações do tipo: "A chuva esperada é de 30 mm". Mas quanto isso realmente significa? Ao utilizar o milímetro (mm) para falar sobre volume de água em uma determinada área, estamos nos referindo à lâmina d'água para medir a quantidade de água que foi despejada na área.

Dizer que choveu um milímetro de água, significa dizer que se a água estivesse caindo dentro de um reservatório cúbico com 1 m de aresta, a lâmina d'água chegaria a uma altura de 1 mm. Mas como sabemos então a quantidade exata de água? Vamos observar a solução para essa pergunda:

Resolução: Considere um cubo com aresta medindo 1 m, podemos calcular seu volume através da fórmula

$$V = A_b \times h.$$

Como temos um cubo com arestas medindo 1 m, a $A_b = 1 \times 1 = 1$ m^2. Queremos determinar o volume quando a altura da água for de 1 mm $= 0,001$ m, desse modo temos

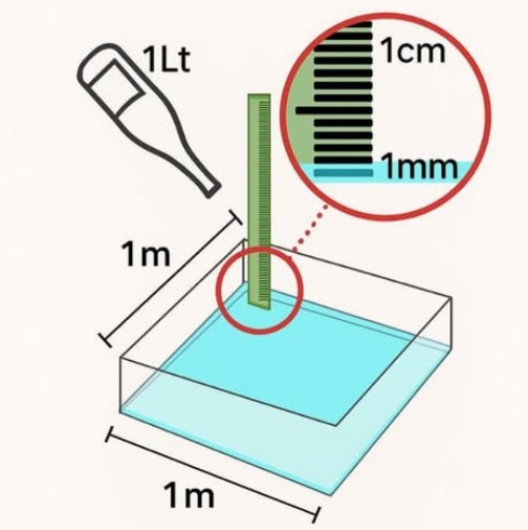
$$V = 1 \times 0,001 = 0,0001 \text{ m}^3,$$

sabendo que 1 m^3 = 1000 L, temos que

$$V = 0,0001 \text{ m}^3 = 1 \text{ L}.$$

Logo, 1 mm de chuva equivale a 1 litro de água por metro quadrado.

Figura 11 – Representação de 1mm de água



Fonte: Elaborada pelo autor com auxílio do ChatGPT (2026)

4.3.1 Disponibilidade de água no solo

Para muitos é desconhecida a Matemática por trás de um sistema de irrigação, em que alguns acreditam que basta irrigar uma ou duas vezes no dia ou então esperar a chuva e a produção será satisfatória. Porém, para um bom plantio, para ter uma produtividade eficiente é necessário que se tenha conhecimento de algumas variáveis, e estas podem ser descritas em um modelo através de algumas equações. Os modelos desenvolvidos e aplicados que serão apresentados aqui, além da Matemática terá forte uso de outras ciências como Física, Química e Biologia e são frutos de uma pesquisa bibliográfica no livro Mantovani, Bernardo e Palaretti (2009).

Primeiramente, vamos definir alguns parâmetros que utilizaremos daqui para frente:

- Densidade aparente

$$d_a = \frac{m_s}{v_s},$$

em que
d_a = densidade aparente;
m_s = massa do solo seco;
v_s = volume do solo.

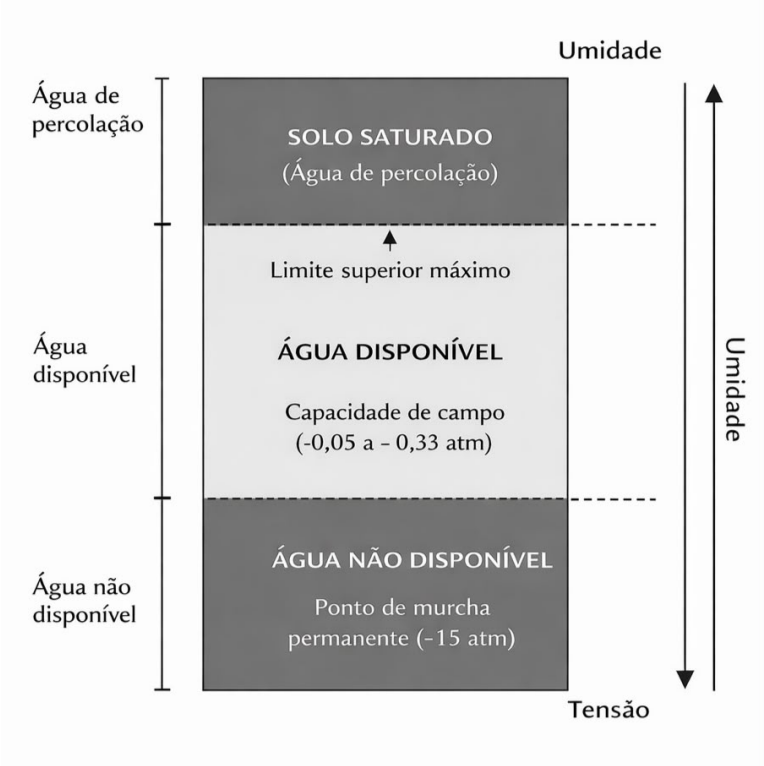
- Capacidade de campo (c_c): é o limite superior de água no solo, sendo a quantidade máxima de água que o solo vai conseguir armazenar sem causar danos ao sistema. É um parâmetro bastante importante para o fins de quantificação do armazenamento e é crucial para o manejo da irrigação e produtividade agrícola. Pode ser descrita pela equação:

$$c_c = \frac{a_s}{v_s} \times 100,$$

em que
c_c = capacidade de campo do solo, em porcentagem de volume de solo utilizado;
a_s = água retida no solo;
v_s = volume de solo na amostra .

- Ponto de murcha permanente (p_m): é definido como o limite inferior de armazenamento de água no solo. Dizemos que nesse ponto a água já não está mais disponível às plantas, pois a força de retenção que o solo exerce sobre a água é maior do que a capacidade da planta em absorvê-la.

Figura 12 – Representação da disponibilidade de água no solo



Fonte: Elaborada pelo autor com auxílio do ChatGPT (2026)

Podemos partir agora para o modelo que possibilita calcular a disponibilidade de água no solo.

- Disponibilidade Total de água no solo

É considerada a parte da água total armazenada no solo que esta disponível para as plantas e está definida entre a Capacidade do Campo e o Ponto de murcha permanente. Neste trabalho, a capacidade de campo (c_c) e o ponto de murcha permanente (p_m) são expressos em porcentagem em peso. Essa forma de representação relaciona a massa de água presente no solo com a massa de solo seco. Assim, por exemplo, um teor de água de 20% em peso significa que, para cada 100 g de solo seco, há 20 g de água retida. Essa relação é importante para a determinação da quantidade de água disponível no solo, sendo posteriormente convertida em uma lâmina de água por meio da densidade aparente do solo. Para realizar esses cálculos, contamos com a equação utilizada na engenharia agrícola

$$D_t = \frac{c_c - p_m}{10} \times d_a,$$

em que
D_t = disponibilidade total da água no solo em mm/cm;

c_c = capacidade de campo % em peso;
p_m = ponto de murcha permanente % em peso;
d_a = densidade aparente do solo, em g/cm^3.

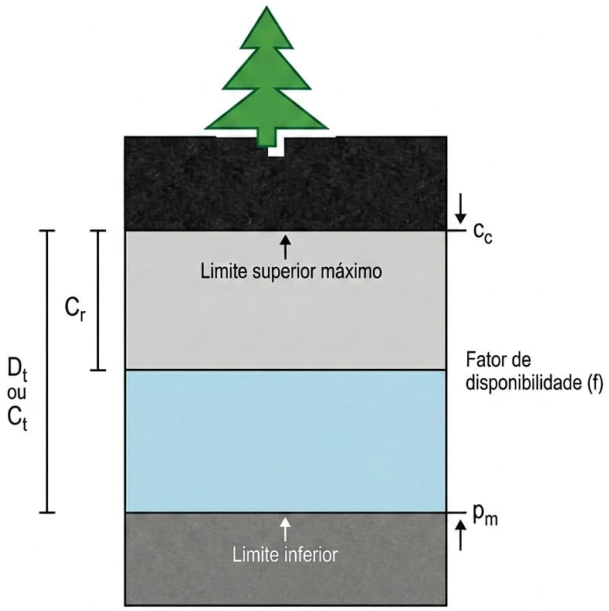
- Capacidade total de água no solo (C_t)

Chamamos de zona radicular, a zona em que a raiz da planta pode chegar (em centímetros). A CTA representa a quantidade total de água armazenada nesta zona. Daí, descrevemos o cálculo da CTA pela equação

$$C_t = D_t \times z,$$

em que z é a profundidade efetiva do sistema das raízes, em centímetros. A zona de profundidade efetiva é definida como a profundidade em que a maioria das raízes das plantas estão localizadas.

Figura 13 – Representação das camadas do solo



Fonte: Elaborada pelo autor com auxílio do ChatGPT (OpenAI, 2026)

- Capacidade real de água no solo (C_r)

Define-se um limite entre c_c e p_m, denominado ponto f, que representa quanto do valor total será utilizado. Com isso, descrevemos pela seguinte equação

$$C_r = C_t \times f.$$

- Fator de disponibilidade de água no solo (f)

Esse fator é um parâmetro que limita a parte da água disponível do solo que a planta pode utilizar, sem causar danos a produtividade.

A seguir apresentaremos uma tabela que apresenta as faixas de algumas culturas. Quando dizemos que o fator de uma cultura é $0,6$, significa que se deve utilizar 60% da água disponível.

Tabela 9 – Eficiênciade aplicação média dos sistemas de irrigação

Grupos de culturas	**Fator f - Faixa comum**
Verduras e legumes	0,2 a 0,4
Frutas e forrageiras	0,3 a 0,5
Grãos e algodão	0,4 a 0,6

fonte: Mantovani, Bernardo e Palaretti (2009)

- Irrigação Real Necessária

A irrigação real necessária indica a quantidade de água que a planta necessita para se desenvolver bem naquele determinado solo. Observamos que ela deve ser sempre menor ou igual a capacidade real de água no solo, isto é,

$$I_r \leq C_r.$$

A inequação que descreve esse parâmetro é a seguinte

$$I_r \leq \frac{c_c - p_m}{10} \times d_a \times z \times f.$$

- Irrigação total necessária I_t

A equação anterior descreve a quantidade de água necessária para a planta, porém, nela não se considera as perdas que ocorrem durante o processo, como a evaporação, escorrimento, ou outros tipos de perdas. Para compensar essa perda, precisamos acrescentar uma quantidade, desse modo, divide-se a I_r pela eficiencia de irrigação Ea, o que nos fornece a expressão:

$$I_t = \frac{I_r}{E_a}.$$

Os valores médios de E_a para os sistemas mais comuns de irrigação estão propostos na tabela a seguir.

Tabela 10 – Eficiência de aplicação média dos sistemas de irrigação

Sistema de irrigação	**Eficiência de Aplicação média %**
Irrigação localizada	90 a 95
Pivô Central	85 a 95
Aspersão convencional	80 a 90
Irrigação por sulcos	50 a 70

Fonte: Mantovani, Bernardo e Palaretti (2009)

Veremos agora exemplos que mostram a aplicação dos modelos descritos anteriormente:

Exemplo 1

Considere o plantio de feijão, a partir das informações descritas até aqui, determine D_t, C_t, C_r, I_r e I_t

Resolução: para a cultura escolhida, nós temos:

$$\begin{aligned} c_c &= 33\% \\ p_m &= 16\% \\ d_a &= 1,2 \text{ g/cm}^3 \\ f &= 0,5 \\ E_a &= 85\% \end{aligned}$$

A partir das equações apresentadas, temos

$$\begin{aligned} D_t &= \frac{33-16}{10} \times 1,2 = 2,04 \text{ mm/cm solo} \\ \Rightarrow C_t &= 2,04 \times 40 = 81,6 \text{ mm} \\ \Rightarrow C_r &= 81,6 \times 0,5 = 40,8 \text{ mm.} \end{aligned}$$

Fazendo $I_r = C_r$

$$\begin{aligned} I_r &= 40,80 \text{ mm} \\ I_t &= \frac{40,8}{0,85} = 48 \text{ mm.} \end{aligned}$$

A partir dos cálculos realizados, verificou-se que a capacidade total de água no solo (C_t) é de 81,6 mm, representando o volume máximo de água disponível entre

a capacidade de campo e o ponto de murcha permanente ao longo da profundidade radicular considerada.

Entretanto, nem toda essa água é efetivamente utilizada pela cultura, sendo adotado um fator de disponibilidade ($f = 0{,}5$), o que resulta em uma capacidade real de água (C_r) de 40,8 mm. Esse valor corresponde à quantidade de água que pode ser consumida pela planta sem que haja prejuízo ao seu desenvolvimento.

Assim, a lâmina líquida de irrigação (I_r) foi considerada igual à CRA, isto é, 40,8 mm, indicando que a irrigação deve ser realizada quando esse volume de água for consumido pelo sistema solo-planta.

Considerando a eficiência do sistema de irrigação por aspersão (85%), determinou-se uma lâmina bruta de irrigação (I_t) de aproximadamente 48 mm, valor necessário para compensar as perdas durante a aplicação e garantir que a lâmina líquida requerida seja efetivamente disponibilizada à cultura.

Dessa forma, conclui-se que o manejo da irrigação deve ser realizado de modo a repor 40,8 mm de água no solo, mediante a aplicação de 48 mm, assegurando o uso eficiente da água e o adequado desenvolvimento da cultura.

Exemplo 2

Considere o plantio de milho. A partir das informações descritas até aqui, determine D_t, C_t, C_r, I_r e I_t

Resolução: Considerando o plantio de milho, temos as informações:

$$\begin{aligned} &c_c = 36,1\%; \\ &p_m = 21\% \\ &d_a = 1,25 \text{ g/cm}^3; \\ &f = 0,6; \\ &E_a = 80\%. \end{aligned}$$

Utilizando as equações, obtemos os resultados:

$$\begin{aligned} D_t &= \frac{36,1 - 21}{10} = 1,51 \text{ mm/cm solo}; \\ C_t &= 1,51 \times 50 = 75,50 \text{ mm}; \\ C_r &= 75,50 \times 0,6 = 45,30 \text{ mm}. \end{aligned}$$

Consequentemente $I_r = 45,3$ mm.

- Evapotranspiração

  Evapotranspiração é a soma de dois processos naturais que fazem com que a água retorne para a atmosfera, a **evaporação** que é a água que sai diretamente do solo (ou da água na superfície) e a **transpiração** que é a água liberada pelas plantas através das folhas. A determinação desse valor é muito importante para um sistema de irrigação pois, a partir dele, será conhecida a quantidade de água perdida pela plantação e assim será possível saber a quantidade de água necessária a ser aplicada. Temos ainda dois casos de evapotranspiração:

$$\begin{cases} ET_o = \text{evaporação de referência (mm/dia);} \\ ET_c = \text{evapotranspiração da cultura (mm/dia).} \end{cases}$$

  A evaporação de referência representa um valor mais "padrão"que varia de acordo com cada região, ela depende das condições climáticas do local.

  Existem alguns modelos que podem ser utilizados para o calculo da ET_o que podem ser encontrados em Mantovani, Bernardo e Palaretti (2009). O modelo a seguir é conhecido por *Equação de Hargreaves* e é descrito por

$$ET_o = 0,0023 R_a (T_{max} - T_{min})^{0,5} (T_{med} + 17,8),$$

  sendo,

  ET_o é a evapotranspiração de referência, (mm/d);

  R_a é a radiação solar incidente no topo da atmosfera, expressa em equivalente de lâmina de á

  T_{max} é a temperatura máxima (°C);

  T_{min} é a temperatura mínima (°C);

  T_{med} é a temperatura média diária (°C).

  Os dados sobre radiação podem ser encontrados para cada localidade através de sites especializados como o INMET.

  Já a evapotranspiração da cultura é o valor específico para uma determinada cultura, e é obtida a partir da evapotranspiração de referência multiplicado pelo coeficiente da cultura,

$$ET_c = K_c \times ET_o.$$

  Os valores para esse coeficiente são disponibilizados em tabelas de acordo com o tipo de planta e a sua fase de crescimento. kc_1 representa o início do ciclo, kc_2 é quando a planta está no meio do ciclo e o kc_3 representa o período mais próximo da colheita. como na tabela a seguir de Albuquerque e Coelho (2021).

Tabela 11 – Coeficientes de cultura (Kc) e altura máxima

Cultura	Kc1	Kc3	Kc5	Altura (m)
Amendoim		1,15	0,60	0,4
Ervilha		1,15	1,10–0,30	0,5
Feijão	0,40	1,05–1,15	0,90–0,35	0,4
Feijão-caupi		1,05	0,60–0,35	0,4
Grão-de-bico		1,00	0,35	0,4
Lentilha		1,10	0,30	0,5
Soja		1,15	0,50	0,5–1,0
Algodão		1,15–1,20	0,70–0,50	1,2–1,5
Girassol		1,00–1,15	0,35	2,0
Mamona		1,15	0,55	2,0
Arroz	1,05	1,20	0,90–0,60	1,0
Aveia		1,15	0,25	1,0
Cevada		1,15	0,25	1,0
Milheto		1,00	0,30	1,5
Milho		1,20	0,60–0,35	2,0
Sorgo		1,00–1,10	0,55	1,0–2,0
Trigo		1,15	0,25–0,40	1,0
Cana-de-açúcar	0,40	1,25	0,75	3,0

Fonte: Albuquerque e Coelho (2021)

Exemplo 3

Calcular a evapotranspiração da cultura (ETc) para uma plantação de feijão, utilizando a equação de Hargreaves para estimar a evapotranspiração de referência (ETo).

Considerando um dia típico em Campina Grande - PB:

- Temperatura máxima (T_{max}): 30°C
- Temperatura mínima (T_{min}): 20°C

Calculando a temperatura média, temos: :

$$T_m = \frac{T_{max} + T_{min}}{2} = \frac{30 + 20}{2} = 25°C.$$

Os valores de radiação extraterrestre (R_a) podem ser obtidos a partir de tabelas da FAO, conforme Allen (1998), ajustadas para as coordenadas de Campina Grande - PB.

$$R_a = 15,2 \text{ mm/dia}.$$

Agora, fazendo o Cálculo da Evapotranspiração de Referência (ETo) pela Equação de Hargreaves, temos

$$ET_o = 0,0023 \cdot (T_m + 17,8) \cdot (T_{max} - T_{min})^{0,5} \cdot R_a.$$

Substituindo os valores, chegamos que

$$\begin{aligned} ET_o &= 0,0023 \cdot (25 + 17,8) \cdot (30 - 20)^{0,5} \cdot 15,2 \\ ET_o &= 0,0023 \cdot 42,8 \cdot 3,16 \cdot 15,2 \\ ET_o &\approx 4,8 \text{ mm/dia.} \end{aligned}$$

Considerando a cultura do Feijão sabemos que o coeficiente de cultura na fase de desenvolvimento é $K_c = 1,05$.

Por fim, cálculando da evapotranspiração da cultura

$$ET_c = K_c \cdot ET_o \implies ET_c = 1,05 \cdot 4,8 \implies ET_c \approx 5,04 \text{ mm/dia.}$$

Com isso, concluímos que a cultura perde aproximadamente 5,04 litros de água por metro quadrado por dia. Supondo que essa plantação seria em uma área de 1 hectare, obteríamos

$$1 \text{ hectare} = 10.000\, m^2 \implies 5,04 \times 10.000 = 50.400 \text{ litros/dia.}$$

4.3.2 Irrigação por aspersão

Existem diferentes maneiras de se irrigar, segundo Mantovani, Bernardo e Palaretti (2009) alguns exemplos são:

- Superfície: nesse método a água é aplicada diretamente na superfície do solo e pode cobrir todo o solo ou uma parte dele e a gravidade fará o papel de espalhar a água pelo restante da área plantada. Esse método de irrigação tem como principal exemplo o arroz, em que todo o plantio fica submerso.

Figura 14 – Plantação de arroz



Fonte:(AGRO em DIA, 2024)

- Localizada: para esse método, a água é aplicada em uma área limitda da superficie, não mais espalhada por toda área cultivada e preferencialmente próximo as raízes da planta. Esse método é conhecido pelo sistema de gotejamento e ele proporciona economia de água.

Figura 15 – Irrigação por gotejamento



Fonte: (Agristar do Brasil, 2019)

- Subterrânea: como o nome sugere, para esse sistema de irrigação, a água é espalhada abaixo da superfície, diretamente na zona das raízes (radicular).

Figura 16 – Irrigação subterrânea



Fonte: Elaborada pelo autor com auxílio do ChatGPT (2026)

Todos esses modelos de irrigação tem suas pecularidades, e uma forte importância da Matemática para melhor eficiência. Porém, além destes, existe um outro método de irrigação, talvez o mais conhecido e o primeiro que vem à mente quando pensamos em irrigação, é a irrigação por aspersão. Escolhemos aqui descrever um pouco melhor como funciona esse método e descrever uma parte da Matemática que possibilita a sua aplicação.

Antes de mostrarmos como a Matemática auxilia nesse método de irrigação, vamos conhecê-lo melhor. Irrigar pelo método da aspersão é, na verdade, simular uma chuva e é o método mais utilizado na atualidade. Segundo Mantovani, Bernardo e Palaretti (2009, p. 111)

> os sistemas de irrigação por aspersão convencional permitem muitas possibilidades de adaptações, visando à economia no uso de mão de obra, melhoria na eficiencia de irrigação e adequação às distintas situações de campo.

Além disso, podemos classificar os sistemas mais comuns segundo a sua movimentação, como:

1. Pórtatil: toda tubulação é móvel;
2. Semiportátil: a linha principal é fixa e as laterais são móveis;
3. Fixo: semelhante ao semiportátil, em que a rede de tubulação é fixa (pode ser enterrada ou não);
4. Malha: Sistema fixo e enterrado, com um aspersor por malha;
5. Canhão hidráulico: sistema semiportátil, com aspersores de grande alcance;

6. Mangueira: sistema semifixo, em que os aspersores são instalados em tripés e conectados com mangueiras à linha lateral.

Figura 17 – Exemplos de irrigação por aspersão



Fonte: Elaborada pelo autor com auxílio do ChatGPT (OpenAI, 2026)

Mas como podemos identificar a Matemática por trás desse sistema de irrigação? A resposta é, de várias maneiras. É necessário saber calcular áreas, volumes, dentre outros dados. Por exemplo, pela forma que funciona um aspersor, a água é distribuída em uma região circular, com isso, é necessário ter um conhecimento de área do círculo, e assim distribuir uma quantidade certa de equipamentos de acordo com a área total do terreno ou mesmo criar uma estratégia de manejo correto para os casos em que o sistema é móvel. Além disso, é necessário calcular a vazão de água que sai do equipamento para saber o tempo que deve deixá-lo ligado.

Além dos cálculos descritos anteriormente, podemos ir mais além, existem equações que modelam diversas situações da irrigação por aspersão:

- **Itensidade de Aplicação**: A intensidade de aplicação (I_a) na irrigação por aspersão é a taxa com que a água é aplicada ao solo, medida em milímetros por hora, e pode ser calculada por:

$$I_a = \frac{Q}{E_{LL} \times E_A} \times 1000$$

em que,

I_a = intensidade de aplicação, mm/h;
Q = vazão, m^3/h;
E_{LL} = espaçamento entre linhas laterais em metros;
E_A = espaçamento entre aspersores, em metros.

A vazão Q pode ser calculada por:

$$Q = C_d \times A \times V,$$

em que,
Q = vazão em m^3/s;
C_d = o coeficiente de descarga (adimensional);
A = área de saída de água m^2;
V = velocidade de saída do jado, m/s.

O valor de C_d varia dependendo das características do aspersor. Quanto melhor for o dimensionamento, mais ele se aproxima de 1, sendo o mais comum encontrar aspersores com valor na faixa de $0,65$ à $0,9$. Sabendo ainda que A pode ser determinada medindo o diâmetro de cada um dos bocais e assim calculando a área da seção circular e que a velocidade pode ser determinada em função da pressão de serviço do aspersor, podemos obter uma nova expressão para o cáculo da vazão, que será:

$$Q = C_d \times \frac{\pi D^2}{4} \times \sqrt{2gP_s}, \tag{4.3}$$

em que,
Q = vazão em m^3/s;
C_d = coeficiente de descarga (adimensional);
D = diâmetro de saída do bocal;
g = aceleração da gravidade $(9,87m/s^2)$
P_s = pressão de serviço (mca).

Se tivermos mais de um bocal, devemos repetir o cálculo para cada um deles e somá-los. Para esse modelo, temos:

$$Q = K \times D^2 \times \sqrt{P_s},$$

com,
Q a vazão em m^3/s;
K é o coeficiente que envolve C_d, π, g e constantes D é o diâmetro de saída do bocal;
P_s é a pressão de serviço (mca).

Por fim, para relacionar a vazão entre dois aspersores em uma linha lateral, partimos das equação de vazão de cada aspersor, e depois de simplificada chegamos em:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{\sqrt{PS_1}}{\sqrt{PS_2}},$$

em que,
Q_1 = vazão do aspersor 1;
Q_2 = vazão do aspersor 2;
PS_1 = pressão de serviço do aspersor 1;
PS_2 = pressão de serviço do aspersor 2;

Vamos agora ver como seria a aplicação dessas equações.

Exemplo 3:

Considere dois aspersores descritos na tabela a seguir. Analise-os e conclua qual dos dois pode ser utilizado em um solo no qual possui uma Velocidade de Infiltração Básica (VIB) de 10 mm/h.

Tabela 12 – Descrição dos aspersores

Características	**Aspersor 1**	**Aspersor 2**
Bocals (mm)	14 x 6	5 x 5
Pressão (mca)	30	20
Vazão (m^3/h)	10,6	2,10
Espaçamento	30 x 30	18 x 18

Fonte: Mantovani, Bernardo e Palaretti (2009)

Resolução: Note que precisamos calcular a intensidade de aplicação de cada aspersor.

Para o aspersor 1, temos

$$I_a = \frac{10,6}{30 \times 30} \times 1.000 = 11,8 \text{ mm/h}.$$

E, para o aspersor 2, temos

$$I_a = \frac{2,10}{18 \times 18} \times 1.000 = 6,48 \text{ mm/h}.$$

Analisando os resultados, observemos que o único aspersor que pode ser utilizado é o aspersor 2, pois sua intensidade de aplicação é menor que o valor de infiltração do

solo na área a ser ser irrigada, já o aspersor 1 tem a intensidade maior que o valor de infiltração.

Exemplo 4:

Considere um aspersor com as seguintes condições:

$$Q = 2 \text{ m}^3/h = 0,0006 \text{ m}^3/s, D = 6 \text{ mm e } P_s = 30 \text{ mca}.$$

Determine a nova vazão, considerando a troca do diâmetro do bocal de 6 para 8 mm e que o C_d não se modifique.

Resolução
Utilizando a equação 1, temos:

$$0,0006 = C_d \times \frac{\pi(6 \times 10^{-3})^2}{4} \times \sqrt{2 \times 9,81 \times 30} \Rightarrow C_d = 0,81.$$

Desse modo, teremos

$$Q = 0,81 \times \frac{3,1416(8 \times 10^{-3})^2}{4} \times \sqrt{2 \times 9,81 \times 30} \Rightarrow Q = 0,00098 \text{ m}^3/\text{s} = 3,56\text{m}^3/\text{h}.$$

Vimos nesse capítulo o tamamho da importância da Matemática na agricultura, ela surge como uma forte aliada a uma boa produção possibilitando a otimização dos recursos, a projeção de produtividade, maximizando assim a produção e até mesmo amenizando danos.

5 Produto Educacional

5.1 Uma proposta de aplicação em sala de aula de acordo com a realidade local

A decisão de estudar essa temática surgiu da vontade de aproximar o conteúdo da realidade das pessoas, uma vez que é algo presente no contexto local e que não somente de pessoas com conhecimento matemático conseguem entender. Para tanto, buscamos entender qual seria um tema considerado forte para a região, algo que está na cultura local e que atraísse a atenção das pessoas.

Nessa perspectiva, observamos que uma possibilidade relevante seria a aplicação da Modelagem Matemática à agricultura, uma vez que esta é uma realidade bastante presente na vida da grande maioria dos estudantes do município de São Sebastião de Lagoa de Roça - PB. Não seria exagero dizer que toda população local tem algum contato com a agricultura, seja diretamente, por meio dos familiares, ou mesmo por algum conhecido que vive nesse meio.

Desse modo, desenvolvemos esse Produto Educacional visando aplicar uma atividade de Modelagem Matemática, e, assim, promover a interdisciplinaridade, a resolução de problemas, a análise de dados aliados ao estudo e o conhecimento local. Vale salientar que, esse produto foi desenvolvido para uma realidade local, porém, é possível sua aplicação em outros contextos. Para isso, basta adequar os dados.

Seguindo os procedimentos sugeridos por Bassanezi (2002), vamos apresentar, neste Produto Educacional, uma proposta de atividade de aplicação da Modelagem Matemática em sala de aula (para o ensino básico) seguindo os cinco passos descritos por ele:

- experimentação;
- abstração;
- resolução do problema;
- avaliação dos resultados;
- modificação.

Esse Produto Educacional está elaborado em uma proposta com 12 aulas, sendo cada aula com duração de 50 minutos. A seguir vamos apresentar a sequência didática recomendada para a sua aplicação. A atividade de modelagem consiste em modelar

o plantio de feijão em uma determinada área agrícola, considerando o terreno a ser utilizado, dados históricos da cultura obtidos a partir do site da EMBRAPA e dados locais relevantes. Além disso, serão utilizados *softwares* para visualização e cálculo de áreas, contribuindo para a análise e o desenvolvimento do modelo matemático.

A proposta que foi desenvolvida para esta atividade pode ser aplicada em qualquer série do Ensino Fundamental 2 ou do Ensino Médio, desde que adaptada ao conteúdo matemático que a BNCC propõe para a série, por exemplo, para o caso do 6º ano do Ensino Fundamental, recomendamos a utilização de áreas com medidas inteiras, pois nesse ano estuda-se o conjunto nos números naturais e suas operações. Desse modo, pensamos essa atividade voltada para ser aplicada no 8º ano do Ensino Fundamental. Nessa série estuda-se o conjunto dos números racionais isso contribui para que possamos utilizar as medidas mais precisas, considerando as casas decimais, obtendo assim resultados mais fieis.

A sequência didática que desenvolvemos está amplamente ligada à BNCC. A seguir listaremos as habilidades utilizadas e as competências que espera-se que sejam alcançadas:

Tabela 13 – Competências da BNCC contempladas pelo Produto Educacional

Competências Gerais da BNCC	
Competência Geral 1	Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos para compreender e explicar a realidade, colaborando para a construção de uma sociedade justa e sustentável.
Competência Geral 2	Exercitar a curiosidade intelectual e utilizar a investigação, a reflexão e a análise crítica para compreender e resolver problemas.
Competência Geral 4	Utilizar diferentes linguagens verbal, matemática, gráfica, digital e científica para expressar e compartilhar informações.
Competência Geral 5	Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de forma crítica, significativa e ética.
Competência Geral 7	Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis para formular e defender ideias e decisões.
Competências Específicas de Matemática	
Competência Específica 1	Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas.
Competência Específica 2	Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos consistentes.
Competência Específica 4	Fazer observações sistemáticas, investigações e construir modelos para resolver problemas em diferentes contextos.
Competência Específica 5	Utilizar processos e ferramentas matemáticas para modelar e resolver problemas.
Competência Específica 6	Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, aplicando conhecimentos matemáticos na tomada de decisões.

Tabela 14 – Habilidades da BNCC relacionadas à proposta didática.

Habilidades de Matemática (8º Ano)		
Álgebra	EF08MA06	Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculo de porcentagens.
Álgebra	EF08MA07	Associar situações-problema a expressões algébricas e representá-las matematicamente.
Álgebra	EF08MA09	Resolver e elaborar problemas que possam ser representados por expressões algébricas.
Geometria	EF08MA18	Resolver e elaborar problemas envolvendo cálculo de área de figuras planas.
Geometria	EF08MA19	Resolver problemas envolvendo medidas de superfícies em contextos reais.
Grandezas e Medidas	EF08MA20	Resolver problemas envolvendo medidas de comprimento, área e outras grandezas.
Probabilidade e Estatística	EF08MA23	Coletar, organizar e interpretar dados provenientes de pesquisas e levantamentos.
Probabilidade e Estatística	EF08MA25	Interpretar e analisar informações apresentadas em tabelas, gráficos e outras representações.

5.2 Sequência didática

5.2.1 Aula 1

Segundo Zabala (1998), as Sequências Didáticas podem ser entendidas como "um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos". Nessa perspectiva, a Sequência Didática configura-se como uma estratégia pedagógica organizada de forma que cada atividade desempenha um papel específico no processo de ensino e aprendizagem.

Dessa forma, é importante reservar um momento para investigar as percepções dos estudantes. Conhecer suas opiniões acerca do ensino de Matemática e compreender, sob sua perspectiva, o problema de enfrentarmos tantas dificuldades na aprendizagem da Matemática durante o Ensino Básico. Para esse momento, recomenda-se a aplicação de um questionário a ser respondido pelos estudantes. É fundamental que as respostas sejam anônimas, de modo que os participantes possam expressar livremente suas opiniões, sem receio de julgamentos ou advertências.

Questionário Diagnóstico

Instruções: Este questionário é anônimo. Não é necessário informar seu nome. Responda às questões com sinceridade, expressando livremente suas opiniões e experiências.

1. Dizer que a Matemática é abstrata significa dizer que ela não existe fisicamente no mundo real. Você acredita que isso de fato é verdade?

2. Você acredita que a Matemática é apenas uma disciplina da escola e não tem outras utilidades?

3. Qual sua opinião sobre frases do tipo: "Eu não vou usar essas contas para nada na minha vida"?

4. Na sua realidade, você enxerga a utilização da Matemática para algo seu ou de seus familiares?

5. Em uma escala de 0 a 10, você diria que seu interesse pela Matemática está em qual número?

6. Na sua opinião, o que poderia ser feito para que seu interesse na Matemática aumentasse?

7. Se o professor conseguisse dar aulas dos conteúdos aplicados a temas conhecidos como esporte, música, agricultura ou situações do cotidiano, você se sentiria mais estimulado(a) a participar e estudar Matemática? Justifique sua resposta.

Após a aplicação desse questionário, é importante que o professor analise as respostas. Para isso, o professor deve dedicar um tempo para a leitura e compreensão das opiniões expostas pelos alunos. É de se esperar que as respostas dos alunos remetam a uma abstração da Matemática que a afaste da realidade, o que dificulta a sua compreensão e até mesmo não desenvolva o interesse em aprender.

5.2.2 Aulas 2, 3 e 4

Para essas aulas, devemos preparar dois momentos. Primeiramente, precisamos apresentar o que seria a Modelagem Matemática para eles, vale a pena destacar a importância dos modelos para a evolução da sociedade, tudo que foi desenvolvido através de modelos e tudo que ainda pode ser desenvolvido. Para isso, o professor deve desenvolver uma apresentação, com resursos visuais que possa apresentar exemplos de modelos conhecidos e ilustrações que possibilitem uma boa compreensão. A partir dessa apresentação, os alunos verão a importência de desenvolver modelos, e com isso, podem desenvolver ainda mais interesse pela atividade.

Para o segundo momento, já damos início a atividade de modelagem, pois devemos mostrar o motivo da escolha do tema, essa etapa é a etapa da experimentação. Para esse momento, devemos contexualizar a motivação para a escolha da agricultura para ser estudada, vamos apresentar dados concretos sobre a cidade, como os apresentados na Tabela 1 e também podemos realizar o estudo dos dados do site oficial do IBGE, que traz um grande detalhamento de tudo que é produzido na cidade

Figura 18 – Site do censo agro de 2027

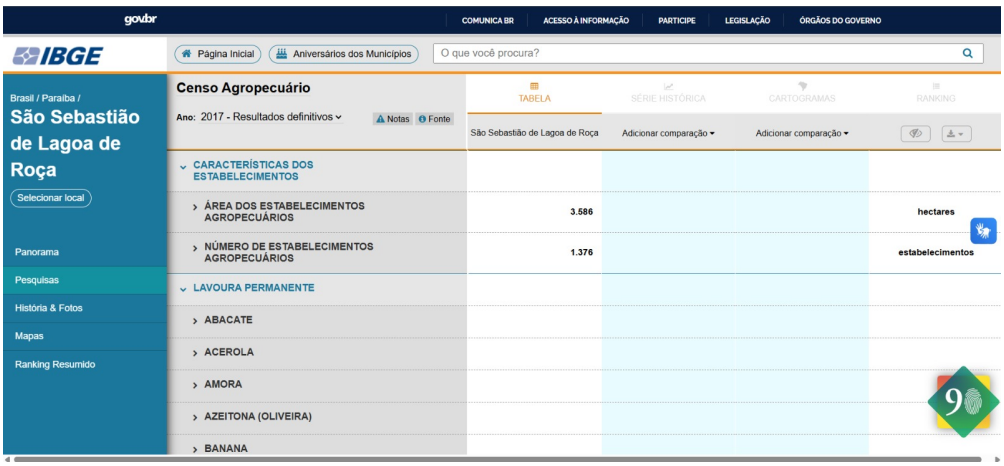


Figura 19 – Fonte: Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (2026)

Com isso, devemos mostrar a importância da agricultura para a cidade e também para regiões do interior, em que a agricultura surge com a principal atividade econômica. Para finalizar essa etapa, devemos mostrar como podemos relacionar a Matemática com a agricultura, mostrando em que ela é diretamente utilizada e também indiretamente, ressaltando também o saber popular dos agricultores, os quais muitas vezes são capazes de realizar cálculos mesmo quando não tiveram a oportunidade de estudar ao longo da vida.

5.2.3 Aula 5

Ainda dentro da etapa da experimentação, nessa aula precisamos ressaltar conteúdos ou tópicos que serão importantes para o desenvolvimento da atividade, como cálculo de áreas, operações básicas, porcentagem, se necessário, o professor deve dedicar uma aula de revisão dos tópicos citados ou de quaisquer outros que venham a ser importantes para desenvolvimento da atividade.

Para iniciar, precisamos apresentar terrenos para que os estudantes possam, em um primeiro momento, calcular as suas áreas, além disso, os terrenos apresentados não devem ser necessáriamente retangulos perfeitos, é importante que os estudantes desenvolvam o raciocínio e possam entender que, em caso de terrenos sem um formato retangular, é possível dividir a região em áreas menores com o cálculo mais simples e após isso, basta somar os resultados para obter o resultado total.

Vamos mostrar um terreno como exemplo, esse terreno se trata do sítio que pertence ao autor e fica localizado na zona rural do município de São Sebastião de Lagoa de Roça, na Paraíba.

Figura 20 – Vista aérea do terreno



Fonte: Google Earth (2026)

Faremos os seguintes questionamentos para os alunos:

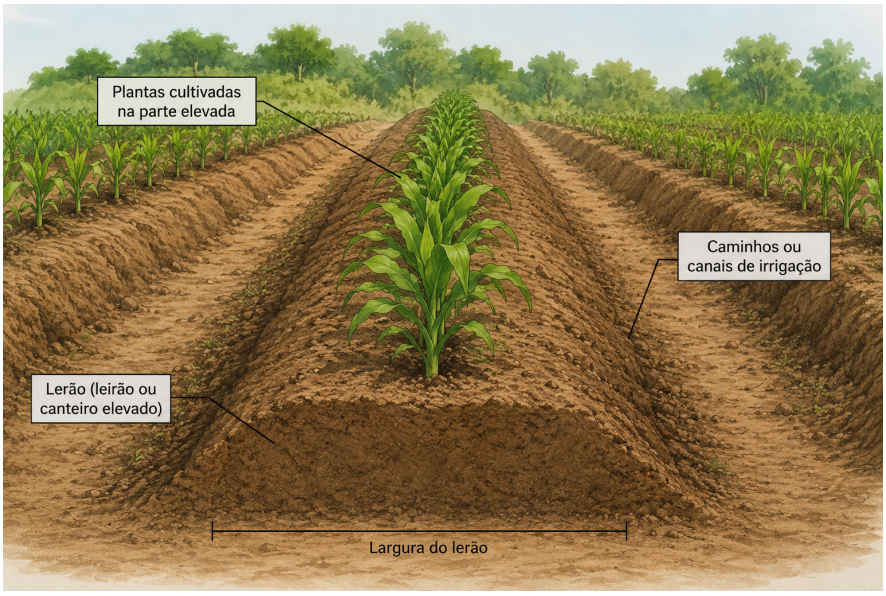
- Qual vai ser a área plantada?

- Quanto vamos colher?
- Quanto vamos gastar?
- De onde foi tirada essa imagem?

Para finalizar a aula, precisamos deixar claro alguns dados e informações que serão utilizados ao longo do trabalho, como:

- **lerão**: como é bastante conhecido entre a população do interior, chamaremos de lerão o canteiro elevado em que se é plantado as sementes.

Figura 21 – Lerão



Fonte: Gerada por IA. Plataforma Chat GPT (2026)

- **Produtividade:** Vamos considerar que um "pé de feijão"produz, em média, 15 vagens e que isso gera cerca de 25 gramas de feijão.

Figura 22 – Pé de feijão plantado



Fonte: Gerada por IA. Plataforma Chat GPT (2026)

- **Rendimento:** espera-se que para cada quilo plantado, isso renderá cerca de 10 kg de feijão.

Por fim, deixamos os seguintes desafios para os alunos:

(a) Em um lerão com 50 m de extensão, se distanciarmos os pés de feijão em 30 cm, qual é a produtividade esperada? .

(b) E se tivermos mais 20 lerões iguais a esse, quanto será colhido?

Com a resolução ou discussão dos estudantes acerca das perguntas, concluímos essa aula. Após respondidas essas perguntas, é esperado que surjam na mente dos estudantes maneiras de se calcular a colheita em uma quantidade qualquer de lerões.

5.2.4 Aulas 6 e 7

Nessa aula, vamos entrar em mais uma etapa do processo de Modelagem Matemática, a abstração, isto é, precisamos transformar o que temos em uma linguagem matemática para que assim possamos resolver os problemas.

Dado um terreno, para os nossos fins, será necessário calcular a sua área, para isso, denotaremos a área total por A. Porém, nem sempre teremos um terreno com

formato retangular, nesses casos vamos dividir o terreno em áreas menores, as quais denotaremos por $A_1, A_2, \ldots, A_n$, desse modo,

$$A = A_1 + A_2 + \cdots + A_n.$$

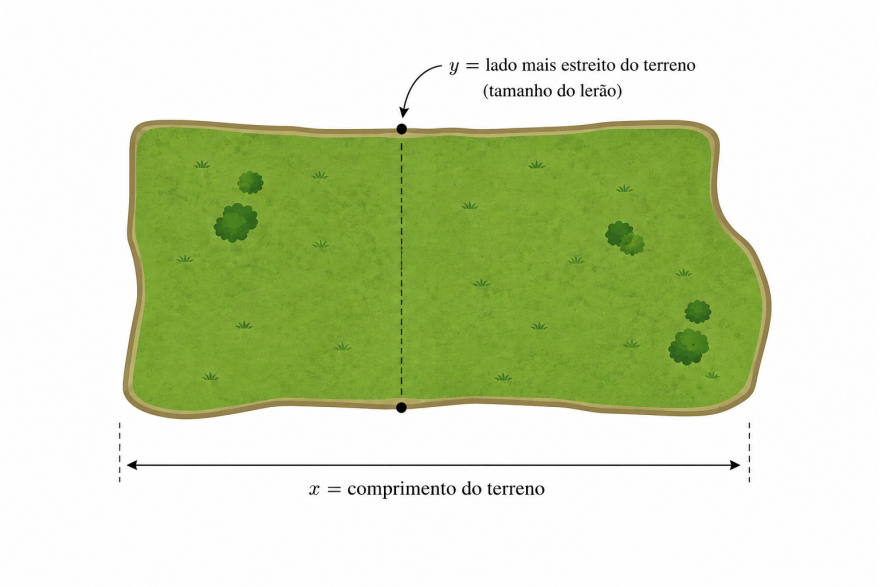
Nem toda área de um terreno deverá ser utilizada para o plantio, então, devemos desconsiderar partes do terreno como casas, reservatórios ou outros espaços que serão destinados a outras finalidades.

Vamos definir as notações que utilizaremos:

- P_l = Produção por lerão;
- y = Comprimento do lerão;
- Q_l = Quantidade de lerão em cada terreno;
- E_p = Espaçamento entre as plantas;
- E_l = Espaçamento entre os lerões;
- l = Largura de cada lerão;
- Q_p = Quantidade de pés de feijão em um lerão;
- Q_t = Quantidade total de pés de feijão na área;
- P = Produção de feijão em kg.

Vamos considerar que um lerão vai de uma extremidade a outra do lado mais estreito do terreno, denotaremos o tamanho do lerão por y e o comprimento do terreno por x.

Figura 23 – Formato do terreno



Fonte: Gerada por IA. Plataforma Chat GPT (2026).

A partir das informações dadas e com as notações definidas, podemos modelar algumas situações que nos fornecerão a estimativa que queremos: estimar a produção da colheita em uma área de plantação qualquer.

Quantidade de plantas por lerão

Para determinar a quantidade de plantas em um lerão, precisamos dividir o tamanho do lerão pelo espaçamento entre as plantas. Dessa maneira, a quantidade de plantas será determinada por:

$$Q_f = \frac{y}{E_p}. \tag{5.1}$$

Quantidade de lerões no terreno

A quantidade de lerões em um terreno dependerá do comprimento do terreno, do espaçamento entre os lerões e da largura dos lerões. Assim:

$$Q_l = \frac{x}{E_l + l}. \tag{5.2}$$

Produção

A quantidade total de plantas no terreno será dada pela quantidade de plantas de um lerão multiplicada pela quantidade de lerões, isto é:

$$Q_t = Q_p \cdot Q_l = \frac{y}{E_p} \cdot \frac{x}{(E_l + l)}. \tag{5.3}$$

Esse valor será a quantidade de plantas, queremos a quantidade em quilogramas de feijão, como foi dado no início, a produção média de cada planta é de 25g de feijão e 25g equivale a 0,025 kg, desse modo, para obter a produção em kg, teremos:

$$P = \frac{y}{E_p} \cdot \frac{x}{(E_l + l)} \cdot 0,025. \tag{5.4}$$

Sendo assim

$$P = \frac{xy}{40E_p \cdot (E_l + l)}. \tag{5.5}$$

Observe que a equação (5.5) é uma expressão que nos possibilita estimar a produção no terreno sabendo as medidas da largura e do comprimento, uma vez que o espaçamento e a largura de cada lerão normalmente é pré-definido.

5.2.5 Aulas 8 e 9 - A utilização do Google Earth para obtenção de áreas e perímetros

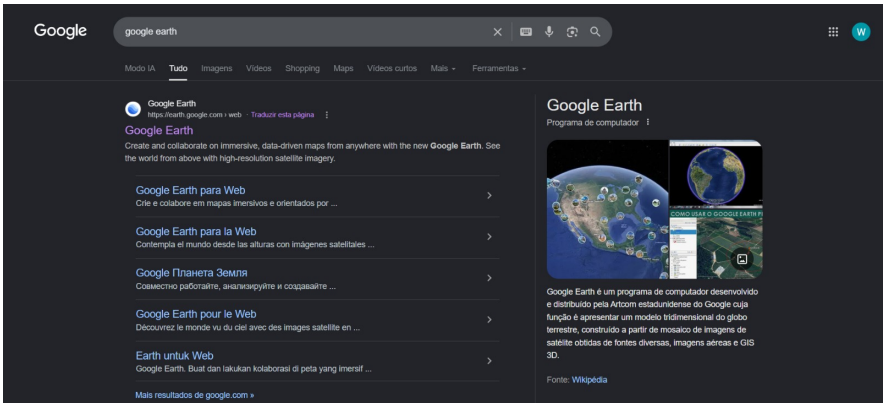
Para fins de exemplificar essa aplicação, utilizaremos o terreno citado anteriormente, porém, essa atividade pode ser desenvolvida como uma atividade de ensino digital associado ao ensino de Matemática. Sugerimos a seguir uma aula que apresenta e ensina os estudantes a utilizarem ferramentas de GPS, que são tão utilizadas atualmente. Para isso, o professor deve dedicar algumas aulas, de preferencia em uma sala de informática ou em computadores disponibilizados pela escola para realizar um minicurso sobre essas ferramentas. A utilização dessa tecnologia associado ao tema pode gerar um interesse ainda maior dos estudantes, de modo que os estudantes terão a chance de modelar e estimar uma produção em um terreno que eles próprios conhecem, seja de um familiar, de algum amigo ou mesmo de algum local que já tenha passado.

Para saber as medidas de qualquer terreno, podemos utilizar uma ferramenta bem conhecida e que pode estar presente em qualquer smartphone, o Google Earth. A partir dele, conseguimos ter uma visão aérea, por meio dos satélites, dos terrenos e daí conseguimos obter as medidas dos lados desse terreno e assim obtemos o perímetro e a área.

A seguir, os passos a serem seguidos:

Passo 1: No navegador do computador digite "Google Earth";

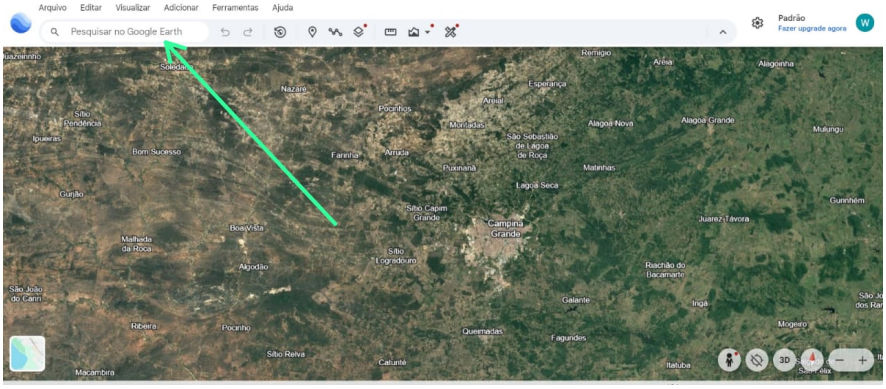
Figura 24 – Print screen do Google Earth



Fonte: Google Earth (2026).

Passo 2: localize o munícipio do terreno que deseja utilizar e em seguida encontre o local desejado;

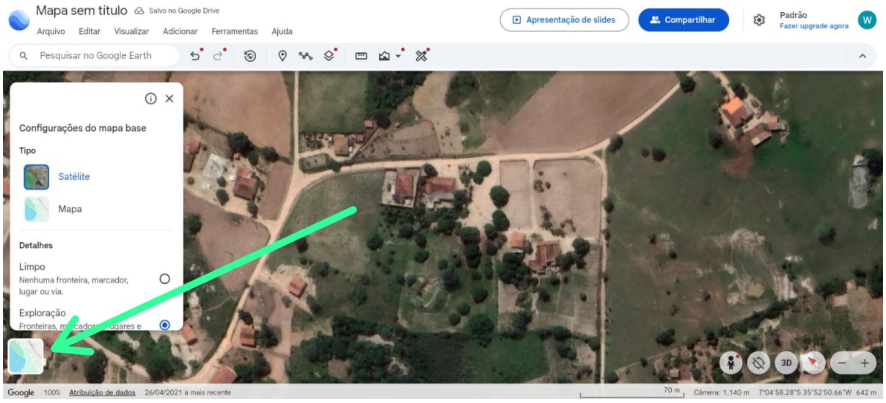
Figura 25 – Print screen do Google Earth



Fonte: Google Earth (2026).

Passo 3: Mude a visualização do mapa para o modo satélite;

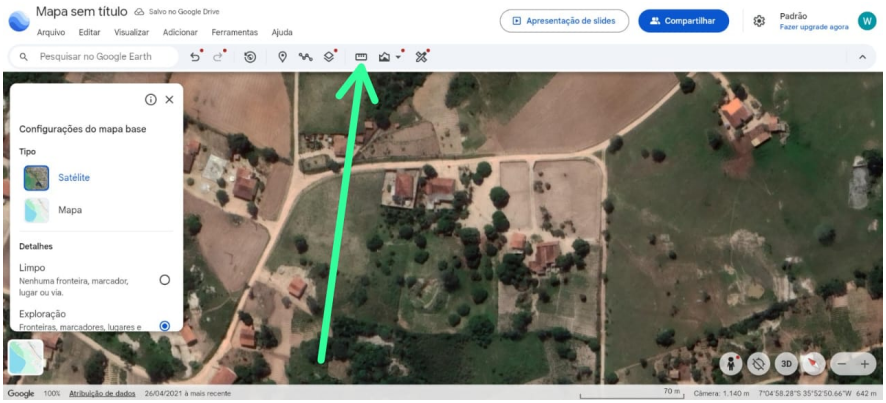
Figura 26 – Print screen do Google Earth



Fonte: Google Earth(2026).

Passo 4: Na parte superior da tela, selecione o ícone de régua;

Figura 27 – Print screen do Google Earth



Fonte: Google Earth (2026).

Passo 5: Clique nos vértices do terreno até fechar a área.

Figura 28 – Print screen do Google Earth



Fonte: Google Earth (2026).

Ao concluir esses passos, o próprio programa nos dará o valor do perímetro e a área do terreno. Com os alunos sabendo utilizar o programa e já tendo os conhecimentos passados nas aulas anteriores, podemos partir para a etapa da resolução.

5.2.6 Aulas 10, 11 e 12

Relembrando o que desejamos: vamos determinar um estimativa do que seria colhido em uma plantação de feijão no terreno a seguir (pertencente ao professor), utilizando o que foi estudado nas aulas anteriores. Antes de iniciar, precisamos definir algumas medidas que tomaremos como padrão, Consideremos o espaçamento entre as plantas sendo de 15 cm e o espaçamento entre os lerões sendo 40 cm como sugere a EMBRAPA (2026) e a largura de cada lerão será de 40 cm. Dessa forma, a equação (5.5), nas condições pré-definidas, será:

$$P = \frac{xy}{40E_p \cdot (E_l + l)}$$
$$P = \frac{xy}{40 \cdot 15 \cdot (40 + 40)}$$
$$P = \frac{xy}{48.000} \text{ kg.}$$

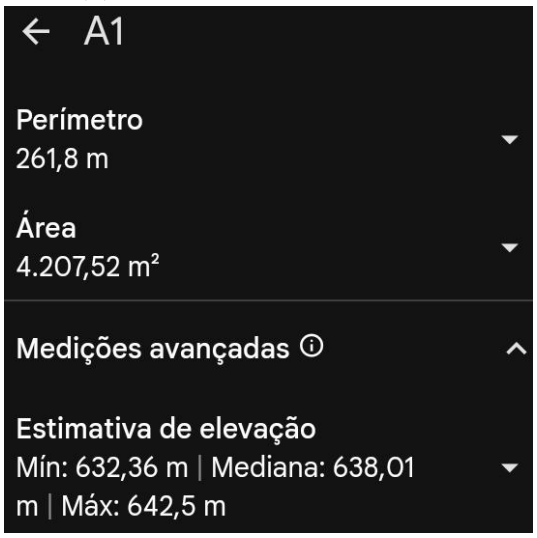
Vamos seguir alguns passos:

Passo 1 - Delimitando a área de plantio: Como foi dito, nem todo terreno será utilizado unicamente para o plantio, existem construções no meio do sítio que ocupam uma boa parte da área. A figura a seguir realça os espaços que serão utilizados para a plantação. Observe que dividimos o terreno em 3 áreas retangulares, então chamaremos de A_1, A_2 e A_3. Dessa forma a nossa área total será dada por

$$A = A_1 + A_2 + A_3. \tag{5.6}$$

Realizando o procedimento no Google Earth descrito anteriormente chegamos nas informações:

(a) Dados do primeiro terreno



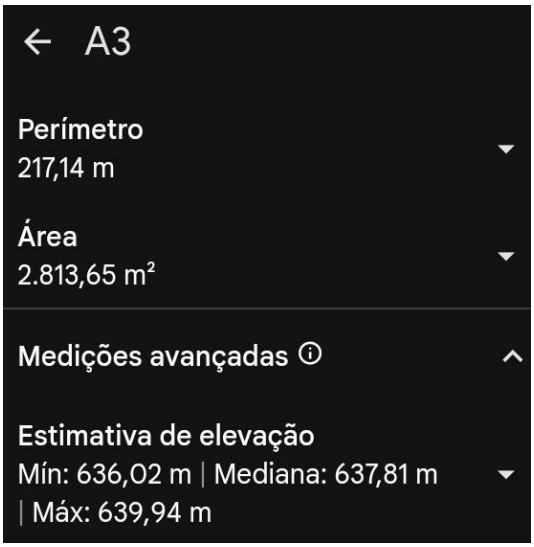
Fonte: Google Earth (2026).

(b) Dados do segundo terreno



Fonte: Google Earth (2026).

(c) Dados do terceiro terreno



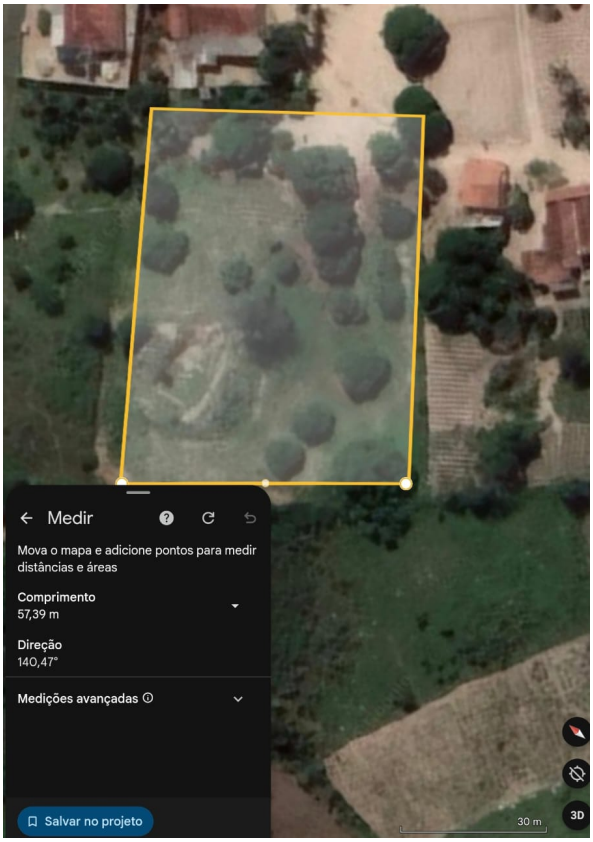
Fonte: Google Earth (2026).

Partindo agora para os cálculos que nos levarão a estimativa da produção no sítio, teremos:

Para A_1

Considere o terreno com os dados medidos a partir do GPS

Figura 30 – Imagem aérea do terreno A_1



Fonte: Google Earth (2026).

Analisando os dados obtidos e os dados no início, como o espaçamento entre as plantas (E_p) e o espaçamento entre os lerões (E_l), obtemos os dados:

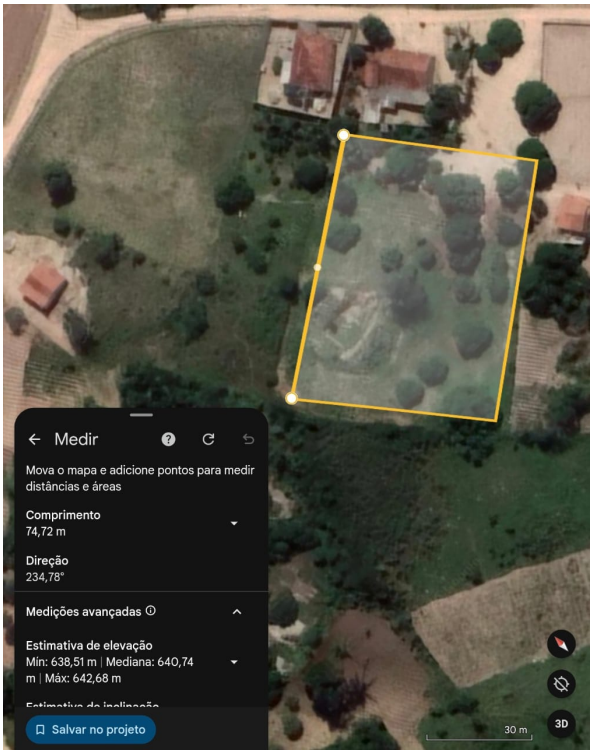
$$y = 57,39 \text{ m};\ E_p = 15 \text{ cm};\ E_l = 40 \text{ cm}.; l = 40 \text{ cm}$$

Desse modo, a partir da equação (5.1), calculamos a quantidade de plantas por lerão, isto é

$$Q_p = \frac{5.739}{15} = 382 \text{ plantas}.$$

A quantidade de lerões será de acordo com o tamanho do terreno. Observemos a imagem a seguir

Figura 31 – Imagem aérea do terreno A_1



Fonte: Google Earth (2026).

Nesse caso, temos $x = 74,72$ m, que, convertendo para centímetros, temos $x = 7.472$ cm. A partir de (5.2), temos

$$Q_l = \frac{7.472}{80} = 93 \text{ lerões},$$

podemos calcular então o valor esperado, em kg, para a produção através de (**??**)

$$P = \frac{5.737 \cdot 7.472}{48.000} = 893,37 \text{ kg}.$$

Para A_2

Seguindo a mesma linha de raciocínio calculemos a produção esperada para A_2

Figura 32 – Imagem aérea do terreno A_2



Fonte: Google Earth (2026).

Desse modo, $y = 3.707$ cm, então a quantidade de plantas será de

$$Q_p = \frac{3.701}{15} = 246 \text{ plantas},$$

Observando as dimensões expostas na figura a seguir, podemos determinar a quantidade de lerões.

Figura 33 – Imagem aérea do terreno A_2



Fonte: Google Earth (2026)

Observando que $x = 6.504$, a quantidade de locais de plantação será

$$Q_l = \frac{6.504}{80} = 81 \text{ lerões.}$$

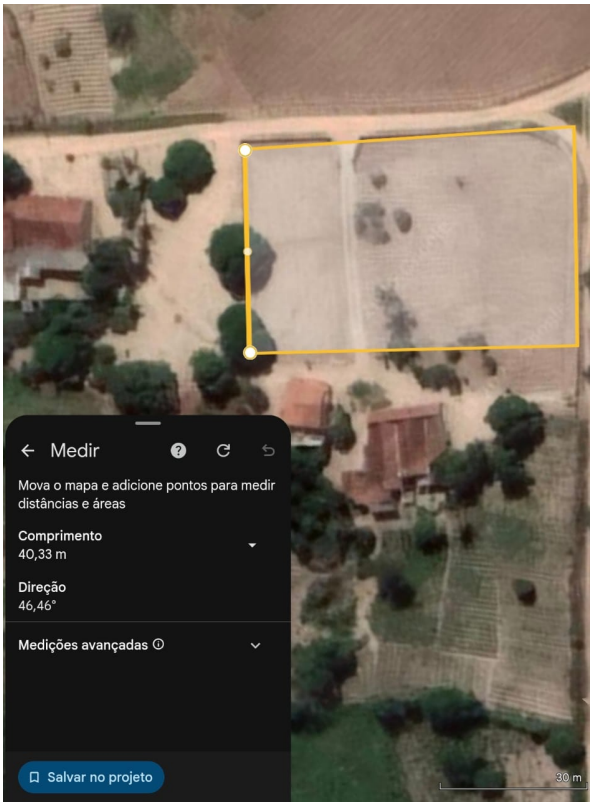
A produção será

$$P = \frac{6.504 \cdot 3.707}{48.000} = 502,3 \text{ kg.}$$

Para A_3

Na terceira área, temos os seguintes dados

Figura 34 – Imagem aérea do terreno A_3

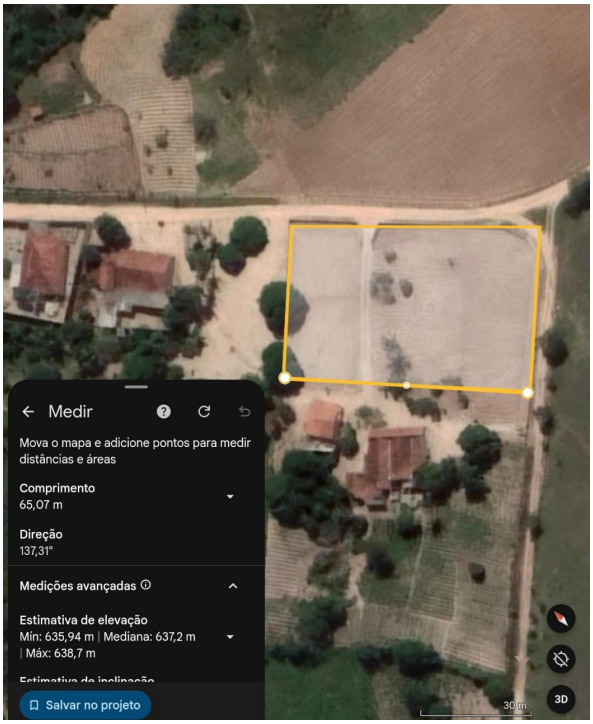


Fonte: Google Earth (2026)

o que nos dá $y = 4.033$ cm. Então

$$Q_p = \frac{4033}{15} = 268 \text{ plantas.}$$

Figura 35 – Imagem aérea do terreno A_3



Fonte: Google Earth (2026)

Sendo $x = 6.507$,

$$Q_l = \frac{6.507}{80} = 81 \text{ lerões},$$

o que nos leva a uma produção de

$$P = \frac{6.507 \cdot 4.033}{48.000} = 546,72 \text{ kg}.$$

Obtemos os valores individuais de cada terreno, porém queremos o valor total, desse modo, somamos os valores e obtemos toda a produção esperada

$$Q_t = 893,37 + 502,3 + 546,72 = 1,942,39 \text{ kg}.$$

Vale ressaltar que a partir desses dados obtidos ainda é possível seguir outras abordagens como por exemplo calcular as despesas e os lucros, porcentagem de aproveitamento, a precificação para comercializar, ou podemos utilizar a mesma estratégia para desenvolver outros tipos de modelos como realizar um projeto de irrigação utilizando conceitos descritos ao longo da dissertação, enfim a modelagem abre um leque muito grande de possibilidades e se torna um grande aliado do professor que busca tornar o seu ensino cada vez mais próximo dos estudantes.

Por fim, para concluir a atividade de modelagem descrita no início, devemos avaliar os resultados, observar se a atividade foi eficiente para o ensino, ver o que deu certo

e principalmente o que deu errado para realizar as modificações necessárias e assim poder reaplicar com maior eficiência.

Em suma, chegamos ao fim desta proposta, com ela esperamos que os estudantes se interessem e sintam-se motivados para estudar a Matemática envolvida, e mais, esperamos que os alunos desenvolvam o senso crítico para avaliar e analisar dados concretos e possivelmente aplicar em situações cotidianas de familiares ou amigos além de ver a importância que a Matemática pode ter em situações mais diversas.

Figura 36 – Plantação própria



Fonte: Autoria própria (2026).

Figura 37 – Plantação própria



Fonte: Autoria própria (2026).

Figura 38 – Plantação própria



Fonte: Autoria própria (2026).

Figura 39 – Plantação própria



Fonte: Autoria própria (2026).

6 Conclusão

Ao longo desta pesquisa, buscou-se compreender as contribuições da Modelagem Matemática para o ensino de Matemática no Ensino Básico, foi abordado de maneira geral o que é a modelagem, trazendo diversos exemplos das mais diversas áreas, mas para tornar o trabalho mais próximo do público estudantil, foi escolhido aprofundar os estudos em algo próximo da realidade local, desse modo, foi realizado um estudo sobre modelos que auxiliam na produção agrícola. Apresentamos aqui a Modelagem Matemática como um método científico e, além disso, como uma ferramenta de ensino-aprendizagem possibilitando a relação entre conceitos matemáticos a outras áreas do conhecimento como Química, Física e Biologia, ou seja, graças a Modelagem Matemática, conseguimos desenvolver uma interdisciplinaridade..

Ao longo do trabalho, a modelagem foi sendo mostrada de diversas maneiras, algumas vezes com conceitos mais avançados, exigindo conhecimento mais avançados de Matemática, outras vezes foram apresentadas maneiras de se modelar com conceitos básicos, o que mostra a possibilidade de desenvolver atividades de modelagem em todos os níveis

As pesquisas feitas para a escrita desta dissertação evidenciaram o tamanho da importância da Matemática para a agricultura. Diversas equações que modelam uma plantação foram descritas aqui, com os conhecimentos necessários, os cálculos são, muitas vezes, simples, podendo ser aplicado em plantações de agricultura familiar. Ressaltamos aqui a importância do saber histórico dos agricultores, que muitas vezes desenvolvem seus próprios métodos para cultivarem e acabam utilizando conceitos matemáticos de maneira indireta.

Buscou-se também desenvolver uma proposta de aplicação, por meio do Produto Educacional, envolvendo um pouco de tudo que foi apresentado. Ressaltamos que, desde o início, a ideia para este trabalho foi fazer algo que fosse dentro da realidade local, algo que não fosse tão abstrato para quem não fosse da área e a Modelagem Matemática possibilitou conseguirmos alcançar essa meta. Vale salientar que o Produto foi desenvolvido dentro das especifidades locais, dentro de uma cultura muito produzida no município que é o feijão, porém ele pode ser adaptado para outras realidades, outras culturas, tudo a depender da realidade e do bioma local. Este trabalho pode servir como um guia para novas aplicações uma vez que podemos modelar diversos fatores em uma produção como a precificação dos cultivos, o gasto de água, a forma de plantar para que o cultivo seja máximo dentre tantos outros.

Por fim, esperamos que os leitores deste trabalho possam se interessar e se aprofundar acerca da Modelagem Matemática, vendo a sua ampla possibilidade de aplicação.

Sobretudo os professores de Matemática que o lerem, que possam aliar a Modelagem à sua prática docente, tornando seu ensino mais significativo para os estudantes.

Referências

Agristar do Brasil. *Hidroponia e gotejamento: técnicas otimizam a utilização da água*. 2019. Publicado em 26 ago. 2019. Disponível em: <https://agristar.com.br/topseed-premium/noticias/detalhe/hidroponia-e-gotejamento-tecnicas-otimizam-a-utilizacao-da-agua-1>. Citado na página 66.

AGRO em DIA. *Cenário é favorável para o plantio de arroz irrigado em Tocantins*. 2024. Disponível em: <https://agroemdia.com.br/2024/07/16/cenario-e-favoravel-para-o-plantio-de-arroz-irrigado-em-tocantins/>. Citado na página 66.

ALBUQUERQUE, P. E. P.; COELHO, E. C. Planilha para obtenção de coeficiente de cultura (kc) para culturas de ciclo anual, segundo método fao, para as condições climáticas brasileiras. *Embrapa*, 2021. Citado 2 vezes nas páginas 63 e 64.

ALLEN, R. G. e. a. *Evapotranspiração da cultura: diretrizes para calcular as necessidades hídricas das culturas*. Roma: FAO, 1998. 326 p. Citado na página 64.

BÁEZ-SÁNCHEZ, A. D.; BOBKO, N. On equilibria stability in an epidemiological sir model with recovery-dependent infection rate. *Tendências em Matemática Aplicada e Computacional*, Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional, v. 21, n. 3, p. 409–424, 2020. Disponível em: <https://www.scielo.br/tema>. Citado na página 26.

BARBOSA, J. C. A modelagem matemática na sala de aula. *VIII Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM)*, Anais do ENEM, 2004. Citado na página 20.

BASSANEZI, R. C. *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática*. São Paulo: Editora Contexto, 2002. 188 p. Citado 9 vezes nas páginas 12, 14, 19, 20, 37, 38, 39, 48 e 72.

BERTONE, A. M.; BASSANEZI, R. C.; JAFELICE, R. S. M. *Modelagem Matemática*. Uberlândia: Universidade Federal de Uberlândia, 2014. 187 p. Citado na página 13.

Brasil. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, DF: MEC, 2018. Disponível em: <https://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 18.

Brasil, Ministério do Desenvolvimento e Assistência Social, Família e Combate à Fome. *Programa de Aquisição de Alimentos*. 2026. Disponível em: <https://www.gov.br/mds/pt-br/acoes-e-programas/acesso-a-alimentos-e-a-agua/programa-de-aquisicao-de-alimentos>. Citado na página 43.

BURAK, D. Modelagem matemática e a sala de aula. *I Encontro Paranaense de Modelagem Matemática*, 2004. Citado na página 19.

EMBRAPA, E. B. de P. A. *Cultivos*. 2026. Acesso em: 19 jun. 2026. Disponível em: <https://www.embrapa.br/web/ageitec/arvores-de-conhecimento/cultivos>. Citado na página 85.

FERREIRA, G. P.; SILVEIRA, A.; SILVA, L. A. A modelagem matemática ao longo da história e o surgimento da modelação matemática no brasil. *XI Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM)*, Anais do ENEM, 2013. Citado 4 vezes nas páginas 12, 14, 31 e 32.

IMPA. *Isolamento pode salvar um brasileiro a cada 4 minutos, diz estudo*. 2020. Disponível em: <https://impa.br/notices/isolamento-pode-salvar-um-brasileir-a-cada-4-minutos-diz-estudo/>. Acesso em: 20 jun. 2026. Citado na página 26.

Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. *Produção Agrícola Municipal: São Sebastião de Lagoa de Roça (PB)*. Rio de Janeiro, 2026. Acesso em: 19 jun. 2026. Disponível em: <https://cidades.ibge.gov.br/brasil/pb/sao-sebastiao-de-lagoa-de-roca/pesquisa/24/76693>. Citado 2 vezes nas páginas 7 e 77.

KALNAY, E. *Atmospheric Modeling, Data Assimilation and Predictability*. 1. ed. [S.l.]: Cambridge University Press, 2003. Citado na página 30.

MANTOVANI, E. C.; BERNARDO, S.; PALARETTI. *Irrigação: princípios e métodos*. Viçosa: UFV, 2009. 187 p. Citado 7 vezes nas páginas 56, 60, 61, 63, 65, 67 e 70.

MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. P. *Matemática Discreta*. 3. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2022. v. 12. (Coleção PROFMAT, v. 12). ISBN 978-85-8337-178-6. Citado na página 34.

Prefeitura Municipal de São Sebastião de Lagoa de Roça. *História*. 2026. Disponível em: <https://lagoaderoca.pb.gov.br/municipio/historia/>. Citado na página 43.

ROQUE, T.; CARVALHO, J. P. *Tópicos de História da Matemática*. Rio de Janeiro: SBM, 2012. 452 p. Citado na página 14.

ROSA, R. L. da. *Nutrição Humana*. Indaial: UNIASSELVI, 2020. 209 p. Citado na página 26.

Sociedade Brasileira de Matemática. *Dissertações e Recursos Educacionais do PROFMAT*. 2026. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/busca_tcc.php>. Citado na página 12.

TAVONI, R.; OLIVEIRA, R. Z. Os modelos de crescimento populacional de malthus e verhulst - uma motivação para o ensino de logarítmos e exponenciais. *C.Q.D - Revista Eletrônica Paulista de Matemática*, 2013. Citado na página 28.

VIEIRA, R. *Equação de vida: como a matemática modela a pandemia?* 2020. Acesso em: 19 jun. 2026. Disponível em: <https://jornal.usp.br/universidade/equacao-de-vida-como-a-matematica-modela-a-pandemia/>. Citado na página 26.

ZABALA, A. *A prática educativa: como ensinar*. Porto Alegre: Artmed, 1998. 224 p. Citado na página 75.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG

Wilton dos Santos

Ensinando Matemática Através da Terra: Modelando Matematicamente Problemas do Cotidiano Agrícola

Campina Grande - PB
Agosto/2026

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG

Wilton dos Santos

Ensinando Matemática Através da Terra: Modelando Matematicamente Problemas do Cotidiano Agrícola

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Orientador: Prof. Dr. Romildo Nascimento de Lima

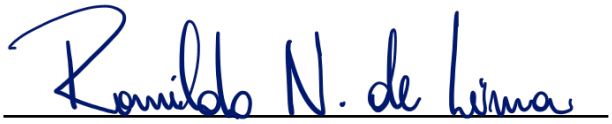
Campina Grande - PB
Agosto/2026

Wilton dos Santos

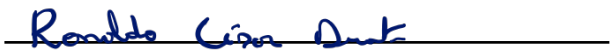
Ensinando Matemática Através da Terra: Modelando Matematicamente Problemas do Cotidiano Agrícola

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

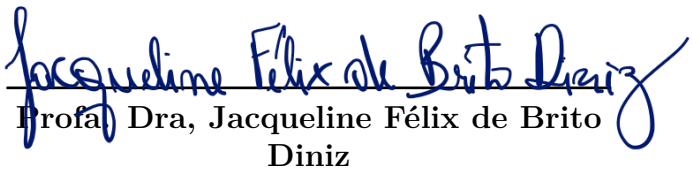
Trabalho aprovado. Campina Grande - PB, 21 de agosto de 2026:



Prof. Dr. Romildo Nascimento de Lima
Orientador



Prof. Dr. Ronaldo César Duarte
Membro externo - UFRN



Profa. Dra, Jacqueline Félix de Brito Diniz
Membro interno - UFCG

Campina Grande - PB
Agosto/2026

Agradecimentos

Em um momento como esse, muitas coisas passam pela mente, mas acredito que a principal é a sensação de dever cumprido e a gratidão. Concluir o mestrado representa a realização de um sonho que, em muitos momentos, acreditei não ser possível.

Para chegar até aqui muitas pessoas foram importantes e tenho muita gratidão a todos. Agradeço a toda minha família pelo apoio e entusiasmo desde a graduação até a conclusão do mestrado. Em especial, meus irmãos, Wellington e Wilma. Meus sobrinhos, Lucas e os pequenos Davi e Gabriel. Quantas vezes me vi estressado no quarto, estudando, e ao ouvir a voz deles me chamando fez eu me sentir mais relaxado. Aos meus pais, Aluízio e Maria da Guia, estes que tiveram pouca oportunidade de estudar mas sempre me incentivaram. Meu grande exemplo de homem, marido e pai, Aluízio, que em meio a todas as adversidades impostas em nossas vidas, mostrou e mostra uma força enorme, e segura toda barra sozinho para que eu possa continuar minha trajetória. Minha mãe, que não pode enxergar com os olhos o filho dela chegando tão longe, sei que isso é uma dor para ela, mas sei também que ela se sente muito orgulhosa de mim.

Dedico este parágrafo a uma única pessoa, Celine Ingrid, o meu amor. Tenho muito a agradecer a essa mulher extraordinária, ela segurou minha mão e me apoiou, não somente no mestrado, mas desde o início da graduação. Tenho plena convicção de que, sem o apoio dela, minhas chances de estar concluindo o PROFMat diminuiriam consideravelmente. Quantas vezes ela ouviu minhas inseguranças e me incentivou, me mostrou que eu era capaz. Muitas vezes ela pausou os seus estudos do mestrado acadêmico para me ajudar a estudar, me ajudou a entender conteúdos e superar obstáculos. Seriam necessárias muitas outras páginas para expressar a importância dessa mulher para minha trajetória, não só nos estudos, mas na vida. Enfim, muito obrigado, meu amor, essa conquista é nossa. Eu te amo.

Agradeço aos meus colegas de turma por todas as experiências trocadas, conhecimentos compartilhados e pelas risadas que trouxeram leveza para os momentos de tensão nas aulas. Ao meu orientador, Romildo, meu muito obrigado por todo apoio, desde o meu ingresso no mestrado até sua conclusão, toda paciência, disponibilidade e orientação, agradeço por todos os momentos que compreendeu minha intensa rotina como professor e muitas vezes adaptou os horários de nossos encontros. À banca, professor Ronaldo César, e a professora Jacqueline Félix, esta que me orientou na conclusão da graduação e hoje está na minha conclusão do mestrado, meus sinceros agradecimentos por aceitarem o convite e o trabalho de avaliar meu trabalho. Além de todos os professores que fizeram parte do mestrado, Leomaques, Arimateia, Luiz

Medeiros, Jaime, Daniel Cordeiro, Marcelo, Renan e Rodrigo Cohen.

Por fim, agradeço à Fundação de Apoio à Pesquisa do Estado da Paraíba – FAPESQ, pelo apoio financeiro que tanto contribuiu para que eu pudesse me dedicar ainda mais aos trabalhos e estudos desenvolvidos durante o mestrado.

Resumo

Trazemos nesta dissertação, uma pesquisa acerca da Modelagem Matemática, em particular investiga-se a contribuição da Modelagem Matemática para o ensino de Matemática no Ensino Básico. Inicialmente, são apresentados os principais fundamentos teóricos da Modelagem Matemática, destacando suas etapas, características e potencialidades para o processo de ensino e aprendizagem. Em seguida, é apresentado alguns modelos matemáticos de áreas distintas evidenciando diversas maneiras de se utilizar a Modelagem Matemática no ensino de Matemática, em especial destacamos os modelos aplicados à agricultura. Como parte desta dissertação, é apresentado uma proposta de recurso educacional, como uma sequência didática destinada aos anos finais do Ensino Fundamental, fundamentada na realidade da agricultura familiar, em que construímos um modelo que possibilita estimar a produção de feijão em territórios quaisquer com o auxílio da ferramenta digital Google Earth. A Modelagem Matemática surge como uma aliada do professor, possibilitando um ensino mais significativo para os alunos, este trabalho deve servir como um esclarecedor e também como um norte para aqueles que desejam desenvolver a Modelagem em suas aulas de Matemática.

Palavras-chave: Modelagem Matemática. Ensino Básico. Agricultura.

Abstract

This dissertation presents a study on Mathematical Modeling, with particular emphasis on its contribution to Mathematics teaching in Basic Education. Initially, the main theoretical foundations of Mathematical Modeling are discussed, highlighting its stages, characteristics, and potential to support the teaching and learning process. Subsequently, mathematical models from different fields are presented to illustrate various ways of applying Mathematical Modeling in Mathematics education, with special emphasis on models related to agriculture. As part of this research, an educational resource is proposed in the form of a didactic sequence designed for the final years of Elementary Education, based on the reality of family farming. The proposed activity develops a mathematical model capable of estimating bean production in agricultural areas using the digital tool Google Earth. The results indicate that Mathematical Modeling can serve as an effective ally for teachers by promoting more meaningful learning experiences. Furthermore, this work aims to provide guidance and support for educators interested in incorporating Mathematical Modeling into their Mathematics classes.

Keywords: Mathematical Modeling. Basic Education. Agriculture.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Número de dissertações sobre Modelagem Matemática 12
Figura 2 – Diagrama da Modelagem Matemática 13
Figura 3 – Canteiros de plantação 21
Figura 4 – Projeções do número de casos de COVID-19 no Brasil 26
Figura 5 – Representação das pontes 31
Figura 6 – Modelo Matemático para a solução do problema 31
Figura 7 – Vista superior da pipa de vinho 38
Figura 8 – Ilustração da pipa de vinho 39
Figura 9 – Projeção ortogonal de uma ripa 39
Figura 10 – Caminho da água no solo 55
Figura 11 – Representação de 1mm de água 56
Figura 12 – Representação da disponibilidade de água no solo 58
Figura 13 – Representação das camadas do solo 59
Figura 14 – Plantação de arroz 66
Figura 15 – Irrigação por gotejamento 66
Figura 16 – Irrigação subterrânea 67
Figura 17 – Exemplos de irrigação por aspersão 68
Figura 18 – Site do censo agro de 2027 77
Figura 19 – Fonte: Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (2026) 77
Figura 20 – Vista aérea do terreno 78
Figura 21 – Lerão 79
Figura 22 – Pé de feijão plantado 80
Figura 23 – Formato do terreno 81
Figura 24 – Print screen do Google Earth 83
Figura 25 – Print screen do Google Earth 84
Figura 26 – Print screen do Google Earth 84
Figura 27 – Print screen do Google Earth 84
Figura 28 – Print screen do Google Earth 85
Figura 30 – Imagem aérea do terreno A_1 88
Figura 31 – Imagem aérea do terreno A_1 89
Figura 32 – Imagem aérea do terreno A_2 90
Figura 33 – Imagem aérea do terreno A_2 91
Figura 34 – Imagem aérea do terreno A_3 92
Figura 35 – Imagem aérea do terreno A_3 93
Figura 36 – Plantação própria 94

Figura 37 – Plantação própria 95
Figura 38 – Plantação própria 96
Figura 39 – Plantação própria 97

Lista de tabelas

Tabela 1 – Relação entre o número de canteiros e o número de corredores. . . . 22
Tabela 2 – Lavouras permanentes 44
Tabela 3 – Lavouras temporárias 45
Tabela 4 – Produção da agricultura familiar em Lagoa de Roça 47
Tabela 5 – Produção da agricultura familiar em Lagoa de Roça 47
Tabela 6 – Produtividade de acordo com o espaço entre as plantas 48
Tabela 7 – Produtividade total 49
Tabela 8 – Produtividade total preenchida 50
Tabela 9 – Eficiênciade aplicação média dos sistemas de irrigação 60
Tabela 10 – Eficiência de aplicação média dos sistemas de irrigação 61
Tabela 11 – Coeficientes de cultura (Kc) e altura máxima 64
Tabela 12 – Descrição dos aspersores 70
Tabela 13 – Competências da BNCC contempladas pelo Produto Educacional . 74
Tabela 14 – Habilidades da BNCC relacionadas à proposta didática. 75

Sumário

1 INTRODUÇÃO 12
1.1 Objetivos 15
1.2 Organização 15

2 A MODELAGEM MATEMÁTICA COMO METODOLOGIA DE ENSINO 17
2.1 O elo entre a BNCC e a Modelagem Matemática 17
2.2 A modelagem na educação brasileira 19

3 ALGUNS EXEMPLOS DE MODELOS 25
3.1 Os modelos matemáticos aplicados à saúde 25
3.2 Os modelos para o crescimento populacional 27
3.3 Os modelos meteorológicos 29
3.4 O Problema das pontes de Königsberg 30
3.5 A coroa do Rei Hieron 32
3.6 Orçamento Familiar 34
3.7 Financiamento 36
3.8 As pipas de vinho 37

4 MATEMÁTICA E AGRICULTURA 42
4.1 O contexto local 42
4.2 Um modelo para otimizar o plantio de batatas 48
4.3 Matemática na irrigação 54
4.3.1 Disponibilidade de água no solo 56
4.3.2 Irrigação por aspersão 65

5 PRODUTO EDUCACIONAL 72
5.1 Uma proposta de aplicação em sala de aula de acordo com a realidade local 72
5.2 Sequência didática 75
5.2.1 Aula 1 75
5.2.2 Aulas 2, 3 e 4 77
5.2.3 Aula 5 78
5.2.4 Aulas 6 e 7 80

5.2.5 Aulas 8 e 9 - A utilização do Google Earth para obtenção de áreas e perímetros 83
5.2.6 Aulas 10, 11 e 12 85

6 CONCLUSÃO 98

REFERÊNCIAS 100

1 Introdução

A Modelagem Matemática é um ramo da Matemática que vem em crescente repercussão e estudo em nosso país. Muitos pesquisadores, sobretudo da área de Educação Matemática, estão buscando se aprofundar nessa temática. Com isso, já encontramos diversos trabalhos, dissertações e teses acerca desse tema. Segundo Ferreira, Silveira e Silva (2013, p. 2)

> "O fato de a modelagem matemática romper as barreiras entre as ciências propondo, de certa forma, uma multidisciplinaridade chamou a atenção dos pesquisadores em Educação Matemática, sendo atualmente uma grande área de pesquisa no processo de ensino-aprendizagem em matemática"

O que evidencia essa grande procura por estudos na área é o grande número de dissertações acerca da Modelagem Matemática no banco de dissertações do PROFMat, como mostra a imagem a seguir

Figura 1 – Número de dissertações sobre Modelagem Matemática



Fonte: Sociedade Brasileira de Matemática (2026).

ou seja, já são mais de 240 trabalhos sobre, e esse número tende a crescer ainda mais a cada ano.

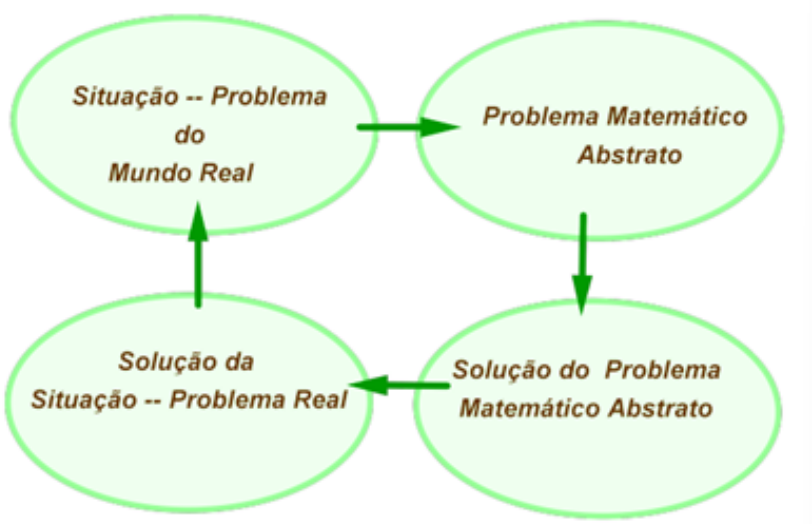
Desse modo, alguns nomes se destacaram por suas grandes contribuições para a área. Por exemplo, Aristides Camargo Barreto - responsável pela orientação das duas primeiras dissertações de modelagem da Pós-Graduação da PUC-RJ; Ubiratan D'Ambrósio - responsável pela criação do 1º Mestrado em ensino de Ciências e Matemática do Brasil, que deu origem a vários trabalhos sobre Modelagem; Rodney Carlos - que escreveu livros que detalham a Modelagem Matemática e é responsável pelo 1º curso de Pós-Graduação em Modelagem Matemática

Sob esse viés, existem muitas formas de definir o que é Modelagem Matemática. Segundo Bassanezi (2002, p. 16), "a Modelagem Matemática consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real". Dessa forma, por meio dela, podemos repensar os métodos de estudar e de ensinar Matemática, uma vez que essa pode

ser vista como um método científico e, também, como uma estratégia para o ensino-aprendizagem. Além disso, podemos definir o que é um modelo matemático segundo Bertone, Bassanezi e Jafelice (2014, p. 22) "chamamos de modelo matemático um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o objeto estudado".

Uma boa maneira de exemplificar o que é a Modelagem Matemática é observando o seguinte diagrama:

Figura 2 – Diagrama da Modelagem Matemática



Fonte: Bertone, Bassanezi e Jafelice (2014, p. 17).

Mas como esse diagrama pode ajudar? Em muitas situações, existem problemas da realidade que não é possível enxergar uma solução rápida. Através da Modelagem, buscamos transformar esse problema em algo matemático, que pode ser uma equação ou um sistema, uma função que modele certo comportamento, dentre outras possibilidades. Feito isso, consegue-se ver o problema com um novo olhar. Busca-se agora resolver o problema matematicamente, e, consequentemente, teremos a solução do problema inicial, é o que representa o diagrama.

Para entendermos como a modelagem pode estar presente em situações diversas, podemos observar o seguinte exemplo: um agricultor quer entender como a quantidade de fertilizante afeta a produção de milho em sua plantação. Ele percebe que, inicialmente, mais fertilizante aumenta a produção, mas depois de certo ponto, o excesso pode prejudicar a produtividade. A princípio, esse não é um problema Matemático e pode ser resolvido de maneiras diferentes, porém, podemos notar indícios de que podemos resolver esse problema de forma matemática, uma vez que, é falado que a produção cresce e em certo ponto começa a decrescer. Esse é o comportamento característico, por exemplo, de uma função quadrática. Logo, para solucionar o problema do agricultor

seria necessário analisar a produção e tentar modelar o problema de modo a chegar em uma função do tipo $p(x) = ax^2 + bx + c$, em que $a < 0$ pois a função representa o crescimento e em seguida o decrescimento, se $a > 0$, a função teria concavidade para cima, isto é, representaria um decrescimento e em seguida um crescimento, x é a quantidade de fertilizante utilizado, e $p(x)$ é a quantidade de toneladas colhidas, feito isso, bastaria encontrar o ponto de máximo dessa função o que representaria a quantidade máxima de fertilizante que poderá ser utilizado.

Além disso, de acordo com Ferreira, Silveira e Silva (2013, p. 12) , "A modelagem matemática, então, serviu e serve como a principal ferramenta para uso principalmente das outras ciências, promovendo uma inter-relação da matemática com as outras áreas do conhecimento humano". Desse modo, temos, também, a Matemática Aplicada. Essa última é uma área da Matemática que busca aplicar conceitos matemáticos à solução de problemas reais, e por muitas vezes através de modelos matemáticos que podem ser de grande complexidade e das mais diversas áreas das ciências, como a Física, Química, Astronomia, Engenharia, Medicina, entre outras. Conforme Bassanezi (2002, p. 32),"A Matemática Aplicada moderna pode ser considerada como a arte de aplicar a matemática a situações problemáticas, usando o processo comum a modelagem matemática".

É comum surgir a dúvida de como começaram as aplicações de modelos Matemáticos para solucionar problemas. No entanto, a resposta para essa pergunta não é tão precisa. Sabe-se que a Matemática evoluiu ao longo da história, por meio da necessidade de resoluções de situações reais das civilizações antigas e modernas, em que essas foram feitas através de modelagens. Desse modo, Bassanezi (2002, p. 44) afirma que "a atividade de aplicar matemática é tão antiga quanto a própria matemática". Ademais, Ferreira, Silveira e Silva (2013, p. 3) mencionam que

> "No século V a.C., por exemplo, os egípcios, segundo o grego Heródoto, usavam conceitos de geometria plana para que, após as enchentes do rio Nilo, os agrimensores determinassem a redução sofrida pelo terreno, passando o proprietário a pagar um tributo proporcional ao que restará."

Um exemplo bem simples disso são as evidências de como surgiu a contagem, que muitos acreditam ter surgido da necessidade dos pastores conseguirem ter controle da quantidade de ovelhas em seu rebanho. Para tanto, de acordo com Roque e Carvalho (2012), eles desenvolveram a estratégia de utilizar pedras, sendo uma pedrinha para representar cada ovelha. Dessa forma, podemos enxergar isso como um modelo matemático desenvolvido para resolver o problema do controle dos rebanhos, o qual associa uma pedrinha a cada bicho do rebanho.

Ademais, a utilidade dos modelos matemáticos se estende a diversas áreas. É possível encontrar aplicações da modelagem na compreensão do crescimento de uma popu-

lação, no mercado financeiro, no movimento dos planetas, no trânsito de uma grande cidade, na propagação de uma doença, e até mesmo na agrícultura, que será o foco de grande parte deste trabalho. Ao longo desse trabalho, será possível perceber que andamos sobre outras áreas, saímos dos materiais puramente matemáticos e nos arriscamos nos estudos como sobre agricultura, saúde e outros.

Para aplicação dos estudos desenvolvidos para esta dissertação, desenvolvemos um trabalho focado na realidade local, para isso utilizamos a cidade de São Sebastião de Lagoa de Roça, no interior paraíbano. Cidade essa com uma forte cultura agrícola, e que esse tema está presente na vida de grande parte da população.

1.1 Objetivos

Temos como objetivo geral nesse trabalho, investigar as contribuições da modelagem matemática, a partir de problemas do contexto local, para o ensino e a aprendizagem Matemática para o ensino básico, com um foco maior no 8º ano do ensino fundamental. Para isso, devemos estudar como a Modelagem Matemática pode contribuir com a agricultura. Além disso, queremos que os leitores possam entender o que é e como desenvolver uma atividade de modelagem,

Além disso apresentamos como objetivos específicos:

- Elaborar atividades de modelagem matemática baseadas em situações do cotidiano da cidade de S. S. de Lagoa de Roça;
- Analisar as estratégias utilizadas pelos alunos na resolução dos problemas;
- Identificar dificuldades e potencialidades apresentadas durante o desenvolvimento das atividades;
- Produzir um produto educacional que auxilie outros professores na implementação da modelagem matemática.

1.2 Organização

Este trabalho está organizado em 6 Capítulos, e do Capítulo 1 ao 5 temos subseções. Trazemos exemplos de modelos em todos os capítulos, exceto na conclusão, isso para mostrar a ampla variedade de possibilidades que a modelagem matemática nos possibilita.

Segue a ordem que os capítulos estão organizados:

- **Capítulo 1:** apresentamos a introdução, nela buscamos falar sobre a modelagem, trazendo os principais nomes que a pesquisam no Brasil e alguns fatos históricos;

- **Capítulo 2:** abordamos nesse capítulo a justificativa da modelagem como ferramenta de ensino aprendizagem junto a BNCC, trazendo a relação modelagem-BNCC, destacando as competências e habilidades desenvolvidas e utilizadas durante a utilização em sala de aula;
- **Capítulo 3:** trazemos diversos exemplos de modelos matemáticos, das mais diversas áreas e tipos, esse capítulo serve justamente para mostrar as amplas possibilidades de se utilizar modelagem matemática;
- **Capítulo 4:** enfatizamos a relação entre a Matemática e a agricultura, para isso realizamos pesquisas que apresentam diversos modelos que possibilitam uma boa plantação;
- **Capítulo 5:** desenvolvemos uma atividade para calcular a produtividade esperada para um plantio de feijão utililizando recursos digitais;
- **Capítulo 6:** apresentamos nossas opiniões e argumentações finais sobre a modelagem matemática.

2 A modelagem matemática como metodologia de ensino

2.1 O elo entre a BNCC e a Modelagem Matemática

A modelagem matemática possui uma forte ligação com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), pois ambas defendem um ensino mais significativo, contextualizado e voltado para a realidade dos estudantes. De acordo com a BNCC, a Matemática deve ir além da memorização de fórmulas e procedimentos, promovendo a capacidade de investigar, argumentar, resolver problemas e interpretar situações do cotidiano. Nesse contexto, a modelagem matemática surge como uma metodologia capaz de aproximar os conteúdos escolares das experiências vividas pelos alunos

Por meio dela, os estudantes analisam situações presentes em seu contexto social, econômico, ambiental ou cultural, transformando essas situações em modelos matemáticos. Esse processo favorece o desenvolvimento do pensamento crítico, da criatividade e da autonomia, aspectos fortemente valorizados pela BNCC.

A BNCC destaca, entre as competências gerais da Educação Básica, a necessidade de desenvolver o raciocínio científico, crítico e criativo, além da capacidade de argumentação e resolução de problemas. A modelagem matemática contribui diretamente para essas competências, pois incentiva os alunos a levantar hipóteses, coletar dados, interpretar informações e tomar decisões fundamentadas. Dessa forma, o estudante deixa de ser apenas receptor de conteúdos e passa a atuar como protagonista na construção do conhecimento.

Outro ponto importante é a interdisciplinaridade. A BNCC propõe uma educação integrada, em que os conhecimentos dialoguem entre si. A modelagem matemática favorece essa integração ao permitir o estudo de temas relacionados aos demais componentes curriculares. Assim, a Matemática passa a ser compreendida como uma ferramenta útil para interpretar e transformar a realidade. Segundo a BNCC (Brasil. Ministério da Educação, 2018, p. 16), é necessário

> contextualizar os conteúdos dos componentes curriculares, identificando estratégias para apresentá-los, representá-los, exemplificá-los, conectá-los e torná-los significativos, com base na realidade do lugar e do tempo nos quais as aprendizagens estão situadas.

e, para isso acontecer, é necessário que os professores:

> decidam sobre formas de organização interdisciplinar dos componentes curriculares e fortalecer a competência pedagógica das equipes

> escolares para adotar estratégias mais dinâmicas, interativas e colaborativas em relação à gestão do ensino e da aprendizagem (Brasil. Ministério da Educação, 2018, p. 16)

Além disso, a modelagem contribui para o desenvolvimento das competências gerais e específicas da Matemática previstas na BNCC, como:

- **Competência Geral 2:** Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas;
- **Competência específica 2:** Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo;
- **Competência específica 3:** Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções;
- **Competência específica 5:** Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados;
- **Competência específica 8:** Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles.

Além das competências citadas, podemos associar a modelagem com diversas habilidades, alguns exemplos são:

- **EF07MA29** - Resolver problemas que envolvam medidas de grandezas inseridos em contextos oriundos de situações cotidianas;
- **EF09MA06** - Compreender as funções como relações de dependência entre variáveis;
- **EF08MA25** - Obter valores de medidas de tendência central e interpretar dados.

Portanto, a Modelagem como metodologia de ensino apresenta uma forte ligação com a BNCC, uma vez que possibilita o desenvolvimento de competências relacionadas a pontos como a investigação, a resolução de problemas e a argumentação, tudo isso aplicado para situações do cotidiano dos estudantes. E ainda, favorece o desenvolvimento de habilidades presentes em diferentes unidades temáticas da BNCC como Álgebra, Grandezas e Medidas e Estatística promovendo um ensino contextualizado e significativo, como sugere a BNCC.

2.2 A modelagem na educação brasileira

O movimento da modelagem matemática na educação brasileira tem cerca de 40 anos. Segundo Burak (2004, p. 1),

> A Modelagem Matemática no Brasil começou a ser trabalhada, na década de 80 na Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP –com um grupo de professores, em Biomatemática, coordenados pelo Prof. Dr. Rodney Carlos - IMECC

Inicialmente foi utilizada nos cursos de especialização de professores na UNICENTRO, no Paraná. Com a implementação do Programa de Mestrado em Ensino de Matemática pela UNESP – Campus de Rio Claro, a modelagem ganhou muitos adeptos. Com a grande procura dos professores por pós-graduação acerca do tema, era evidente que a modelagem surgiria como instrumento de ensino.

Consoante Bassanezi (2002), podemos dividir os modelos em dois tipos

- **Modelo Objeto**: é a representação de um objeto ou fato concreto, tem como característica a estabilidade e a homogeneidade das variáveis;
- **Modelo teórico:** é aquele vinculado a uma teoria geral, esse modelo é sempre construído em torno de um modelo objeto com um código de interpretação.

A construção de um modelo matemático eficaz requer a utilização de informações claras, precisas e consistentes, capazes de reduzir ambiguidades e representar adequadamente o problema investigado. Essa abordagem favorece a obtenção de resultados teóricos consistentes e possibilita a aplicação de diferentes métodos de resolução, sejam eles analíticos ou computacionais, de acordo com a natureza do problema.

Assim, podemos formular um modelo de acordo com o contexto das situações que o descrevem, com a matemática utilizada, ou de acordo com os fenômenos presentes em sua formulação.

Definimos que o modelo é:

- Linear: quando a relação entre as variáveis pode ser descrita por uma equação do primeiro grau;

- Não linear: ocorre quando a taxa de variação não é constante, ou seja, a representação gráfica não será uma reta. Esses modelos tendem a ser mais complexos que os lineares;

- Educacional: Esse tipo de modelo é marcado por ter um número pequeno ou simples de suposições, com as soluções, sendo na sua maioria, analíticas.

Os principais nomes da modelagem matemática defendem que a sua aplicação em sala de aula deve seguir uma sequência, Bassanezi (2002) sugere que a ordem seja: experimentação, abstração, resolução, validação e modificação, descritos a seguir:

- Experimentação: é o primeiro passo para uma atividade de modelagem, em que se é definido o tema a ser estudado. Nessa etapa é coletam-se os dados, levanta-se informações e o professor começa a traçar o caminho a ser seguido;

- Abstração: é o procedimento que deve levar à formulação dos modelos, e deve estabelecer a seleção de variáveis, a problematização ou formulação, formulação das hipóteses e a simplificação;

- Resolução: o momento de ultilizar os passos anteriores para resolver o roblema proposto;

- Validação/Avaliação: é o momento de testar os resultados obtidos, isto é, é o momento de analisar se os resultados produzidos pelo modelo fazem sentido quando comparados com a realidade;

- Modificação: nesse passo deve-se modificar o que não deu certo no modelo, é o momento de corrigir.

Além disso, podemos justificar a utilização da Modelagem no ensino por diversos motivos, Barbosa (2004) apresenta 5 pontos que a defendem: motivação, facilitação da aprendizagem, preparação para utilizar a matemática em diferentes áreas, desenvolvimento de habilidades gerais de exploração e compreensão do papel sócio-cultural da matemática.

Nessa perspectiva, vamos observar um exemplo de como se desenvolveria uma atividade de modelagem em uma turma de ensino básico:

Exemplo de construção de modelo matemático: o planejamento de um talhão de canteiros orgânicos

O exemplo a seguir ilustra a modelagem da disposição de uma área de cultivo composta por uma sequência linear de canteiros separados por corredores de circulação.

O nosso objetivo é determinar a extensão linear e, consequentemente, o perímetro e a quantidade de insumos de madeira (estacas e ripas) necessários para cercar completamente essa área de produção.

O processo se divide em uma etapa voltada à transição do pensamento concreto para o abstrato no Ensino Fundamental, e uma etapa de formalização analítica com o devido rigor matemático.

Contextualização do problema

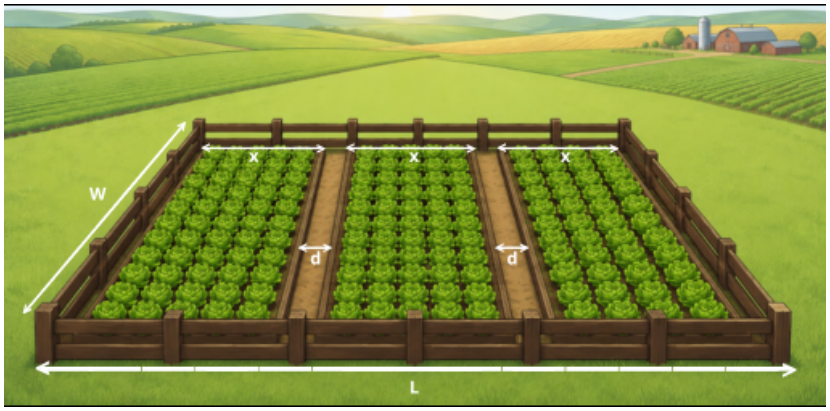
Um agricultor familiar deseja implantar uma sequência de n canteiros retangulares de alface dispostos em linha. Para viabilizar o manejo agronômico e a passagem com ferramentas (como carrinhos de mão), deve haver um corredor de circulação (espaço vazio) entre canteiros consecutivos. Para proteger a cultura contra a invasão de pequenos animais, o agricultor construirá uma *única cerca perimetral externa* que envolverá todo o bloco composto por canteiros e caminhos. Deseja-se obter um modelo matemático que determine o perímetro total da região a quantidade de material de cercamento necessário.

Primeiro momento: abordagem no ensino fundamental

Para introduzir o conceito em turmas de Ensino Fundamental, o problema é abordado de forma experimental e indutiva, por meio de atividades de desenho e contagem:

- **Desenho:** os alunos fazem representações visuais de canteiros (comprimento fixo x) e de espaços entre eles (largura fixa d).

Figura 3 – Canteiros de plantação



Fonte: gerada por IA. Plataforma ChatGPT (2026).

- **Investigação da recorrência:** os alunos analisam o comportamento do comprimento total da região à medida que adicionam mais canteiros à fileira, observando

a relação regular entre o número de canteiros e o número de corredores intermediários gerados.

Nesta etapa, os alunos constroem a Tabela 1 para estabelecer a lei de correspondência discretizada.

Tabela 1 – Relação entre o número de canteiros e o número de corredores.

Número de canteiros (n)	**Número de intervalos/corredores**
1	0
2	1
3	2
4	3
$\vdots$	$\vdots$
n	$n-1$

A partir da observação direta, os alunos deduzem que o número de intervalos é sempre uma unidade menor que o número de canteiros $(n-1)$. Com isso, estabelecem a regra estrutural para o comprimento linear total (L) do bloco de cultivo:

$$\text{Comprimento Total} = (n \times \text{comprimento do canteiro}) + ((n-1) \times \text{largura do corredor})$$

Segundo momento: a construção do modelo genérico

Hipóteses de modelagem

1. Todos os n canteiros são perfeitamente retangulares e possuem dimensões idênticas de comprimento (x) e largura (W);
2. Os canteiros estão dispostos em alinhamento linear perfeito (dispostos em série);
3. O espaço ou corredor entre dois canteiros consecutivos possui largura constante d;
4. A cerca externa contorna perfeitamente a união geométrica dos canteiros e dos corredores, formando um único grande retângulo de dimensões $L \times W$;
5. O espaçamento fixado entre as estacas da cerca é dado por d_e, e o perímetro total P é um múltiplo inteiro de d_e.

Definição das variáveis do problema

- n: número total de canteiros dispostos em série $(n \in \mathbb{N}^*)$;

- x: comprimento individual de cada canteiro ($x \in \mathbb{R}_+$);
- d: largura do corredor entre canteiros consecutivos ($d \in \mathbb{R}_+$);
- W: largura estável dos canteiros e do talhão total ($W \in \mathbb{R}_+$);
- L: comprimento total linear do talhão cercado ($L \in \mathbb{R}_+$);
- P: perímetro total da cerca externa ($P \in \mathbb{R}_+$);
- d_e: distância padrão entre duas estacas consecutivas da cerca ($d_e \in \mathbb{R}_+$);
- N_e: número total de estacas verticais necessárias ($N_e \in \mathbb{N}^*$);
- k: número de fileiras horizontais de ripas de madeira da cerca ($k \in \mathbb{N}^*$);
- R_{total}: comprimento linear total de ripas horizontais necessárias ($R_{\text{total}} \in \mathbb{R}_+$).

Parte algébrica do modelo

O comprimento total L ocupado pela justaposição intercalada de n canteiros de comprimento x e $(n-1)$ corredores de largura d é expresso analiticamente por:

$$L = nx + d(n-1).$$

Assim,

$$L = n(x+d) - d. \tag{2.1}$$

Uma vez determinado o comprimento total L do talhão, o perímetro P da região retangular delimitada pela cerca externa que engloba todo o sistema é dado por:

$$P = 2L + 2W. \tag{2.2}$$

Substituindo a Equação (2.1) na Equação (2.2), obtém-se a expressão geral do perímetro:

$$P = 2n(x+d) - 2d + 2W. \tag{2.3}$$

A partir do perímetro P, calcula-se o quantitativo de insumos físicos para a estrutura da cerca lateral. O número total de estacas (N_e) para um perímetro fechado poligonal, sob a hipótese de distribuição regular a uma distância d_e, é a razão direta entre o perímetro e o espaçamento:

$$N_e = \frac{P}{d_e} = \frac{2n(x+d) - 2d + 2W}{d_e}. \tag{2.4}$$

De modo análogo, o comprimento total das ripas horizontais (R_{total}) que circundam o talhão por k vezes é expresso por:

$$R_{\text{total}} = k \cdot P = k \cdot [2n(x+d) - 2d + 2W]. \tag{2.5}$$

dessa forma, como síntese do processo de modelagem, definimos o modelo matemático final estruturado pelo sistema de equações:

$$\begin{cases} N_e = \dfrac{2n(x+d) - 2d + 2W}{d_e} \\ \\ R_{\text{total}} = 2k[n(x+d) - d + W] \ , \end{cases} \tag{2.6}$$

com as condições de contorno assegurando que $n, k \in \mathbb{N}^*$, $x, d, W, d_e \in \mathbb{R}_+$ e $\frac{P}{d_e} \in \mathbb{N}^*$.

Algumas observações sobre o modelo

Com o modelo consolidado, abrem-se possibilidades de discussões sobre a flexibilização das hipóteses iniciais. Por exemplo, se o agricultor decidir que os corredores das extremidades (antes do primeiro canteiro e após o último) também devem existir dentro da área cercada para facilitar a manobra de maquinários, o número de intervalos passa a ser $n+1$. A equação do comprimento mudará para $L = n(x+d)+d$, alterando o termo independente do modelo.

Além disso, vemos que modelo permite investigar, por meio de simulações numéricas, qual a configuração ideal de n (número de canteiros) para maximizar a área útil de plantio ($A_{\text{útil}} = n \cdot x \cdot W$) minimizando o custo da cerca (P).

3 Alguns Exemplos de Modelos

Os modelos matemáticos contribuíram e contribuem para a evolução e melhoria de toda civilização. Alguns exemplos bem conhecidos são:

- O modelo de Ptolomeu no século II: Ptolomeu queria explicar o movimento dos planetas no céu, para isso ele propôs o modelo dos epiciclos, com planetas girando em pequenos círculos sobre órbitas circulares ao redor da Terra (modelo geocêntrico);
- Leis de Kepler (século XVII), que tinha como problema descrever com precisão o movimento dos planetas. Também descreve o movimento dos planetas, porém em seu modelo, Kepler mostra três leis que descrevem as órbitas dos planetas elípticas;
- Leis de Newton (1687): Newton encarou o problema de descrever e prever o movimento dos corpos de forma geral. Para isso ele formulou as leis do movimento e a lei da gravitação universal.

Além destes, apresentamos, de forma mais detalhada, alguns modelos que vêm contribuindo para a compreensão de muitos problemas para a vida humana.

3.1 Os modelos matemáticos aplicados à saúde

São diversos os estudos de cientistas que utilizam modelos matemáticos para combater ou evitar a proliferação de doenças contagiosas e, também, para buscar tratamentos eficazes. O que muitos talvez não saibam é a importância dos modelos para a saúde global e a relevância que tiveram durante a pandemia da Covid-19, em que muitos cientistas concentraram os seus esforços em entender como o vírus se comportava. Para isso, foram criados vários modelos matemáticos que buscavam trazer uma previsão do cenário futuro.

Nesse contexto, os modelos matemáticos ajudaram as autoridades a tomarem as decisões corretas para amenizar o número de mortes. Por meio desses, conseguiam trazer uma estimativa de quantos pacientes estariam infectados no pico de máxima incidência, quantas pessoas podem ser infectadas através de um único indivíduo doente e quais as regiões mais suscetíveis à proliferação, e a partir de qual quantidade de infectados teríamos a conhecida imunidade de rebanho, dentre muitas outras previsões.

Para tais necessidades, usa-se com mais frequência o modelo conhecido por SIR (Suscetíveis, Infectados, Recuperados ou Removidos).De acordo com Báez-Sánchez e Bobko (2020) esse modelo é descrito pelo conjunto de equações diferenciais

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \mu N - \lambda SI - \mu S \\ \frac{dI}{dt} = \lambda SI - \gamma I - \mu I \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I - \mu R \ , \end{cases}$$

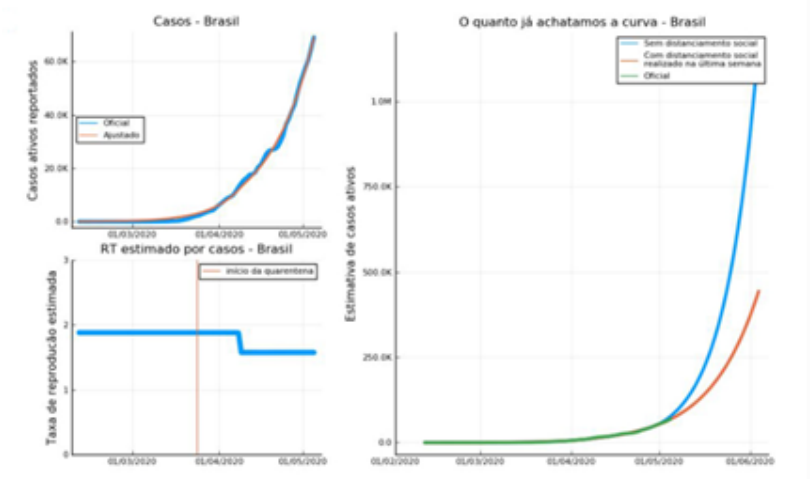
em que os parâmetros positivos μ, λ e γ representam as taxas de natalidade (e mortalidade), infecção e recuperação, respectivamente.

Ainda nessa perspectiva, Vieira (2020) afirma, em uma entrevista, que

> Para a Covid-19, a partir dos dados disponíveis, podemos fazer cálculos e estimar a taxa de reprodução do vírus, com os dados disponíveis. Repetindo o cálculo com o mesmo modelo matemático cada dia, conforme chegam os novos dados, podemos determinar a evolução dessa taxa. Mesmo sabendo que os números calculados ontem e hoje serão imprecisos, podemos compará-los e observar se há uma aceleração ou desaceleração na propagação do vírus.

Vale salientar que, nesses casos, a modelagem traz uma aproximação da realidade, não sendo possível a certeza total do que pode ocorrer. O modelo descrito acima, trouxe uma previsão da diminuição das mortes, como mostram os gráficos a seguir:

Figura 4 – Projeções do número de casos de COVID-19 no Brasil



Fonte: IMPA (2020)

Além disso, conforme Rosa (2020), um outro modelo matemático bastante conhecido e também aplicado à saúde é o de James Arthur Harris e Francis Gano Benedict, conhecido por Fórmula de Harris-Benedict. Esse foi desenvolvido no início do século XX, quando os médicos Harris e Benedict realizaram estudos com o objetivo de entender melhor o gasto energético humano. O modelo desenvolvido por eles mostra

uma maneira de calcular a quantidade de calorias que uma pessoa precisa para manter suas funções vitais, conhecida por TMB (Taxa Metabólica Basal). Para isso, deve-se considerar variáveis como idade, peso, altura e a quantidade de atividade física que o indivíduo pratica por semana. As fórmulas que eles desenvolveram são:

i) Para homens

$$TMB = 66 + 13,7p + 5a - 6,8i$$

ii) Para mulheres

$$TMB = 655 + 9,6p + 1,7a - 4,6i$$

em que p é o peso em kg, a é a altura em cm e i é a idade em anos. Além disso, é necessário levar em consideração o nível de atividade física do indivíduo. Multiplicamos o resultado por:

- 1,2 se o indivíduo for sedentário (não pratica atividades físicas);
- 1,375 se for levemente ativo (1 a 3 dias por semana);
- 1,55 se for moderadamente ativo (3 a 5 dias na semana);
- 1,725 se for muito ativo (6 a 7 dias na semana).

Então, por exemplo, se um homem com 24 anos de idade pesa 80kg e tem 175cm de altura e que costuma praticar exercícios físicos 3 vezes na semana terá uma Taxa Metabólica Basal de aproximadamente

$$TMB = (66 + 13,7 \times 80 + 5 \times 175 - 6,8 \times 20) \times 1,55 = 2.913,7kcal$$

Isso significa que um indivíduo com essas características gasta em média 2.913,7kcal por dia. A partir desse cálculo os profissionais de saúde, como o nutricionista, podem traçar dietas e estratégias para o condicionamento físico desejado para um paciente. Essa estimativa, desenvolvida no início do século passado, é utilizada até hoje por profissionais da saúde, na hora de montar uma dieta.

3.2 Os modelos para o crescimento populacional

É comum tentarmos entender por que a população de alguns lugares cresce de maneira diferente de outros. Pensando nisso, ao longo dos anos, estudos foram realizados para explicar essas situações. Com isso, surgiram os modelos de crescimento populacional.

Um dos modelos mais conhecidos é o do economista inglês Thomas Malthus, que foi apresentado em 1978, dado por

$$\frac{dP}{dt} = kP,$$

em que k é uma constante de proporcionalidade ($k > 0$). Se uma população cresce segundo o modelo malthusiano e $P(0) = P_0$, então

$$P = P_0 e^{tk},$$

desse modo, o modelo discreto de Malthus é dado por $P(t+1) - P(t) = \alpha P(t)$. Se $P(0) = P_0$, temos

$$P(t) = (1+\alpha)^t P_0. \tag{3.1}$$

com isso, podemos determinar a taxa de crescimento demográfico em t anos a partir de (3.1), obtemos, então:

$$(\alpha+1)^t = \frac{P_t}{P_0} \Rightarrow \alpha = \sqrt[t]{\frac{P_t}{P_0}} - 1 \tag{3.2}$$

Para exemplificar, vamos calcular a taxa na qual a população do Brasil cresceu entre os anos de 1940 e 1991. Segundo o IBGE em 1940 a população era de 41.236.315 habitantes, já em 1991 era de 146.825.475, temos então:

$$\alpha = \sqrt[51]{\frac{146.825.475}{41.236.315}} - 1 = 0,02521,$$

isto é, a população do Brasil cresceu a uma taxa média de aproximadamente $2,5\%$ ao ano nesses 51 anos.

Contudo, esse modelo é utilizado para o crescimento de pequenas populações e em um intervalo curto de tempo, uma vez que ele não leva em consideração muitos fatores e isso pode influenciar a população.

Para populações maiores, com mais fatores que podem influenciar sua população e para um período maior, temos outros modelos como o modelo de Verhulst – matemático belga que introduziu a equação de crescimento logístico em que a população cresce até o limite máximo sustentável, ou seja, ela deve se estabilizar. De acordo com Tavoni e Oliveira (2013), podemos dizer, ainda, que o modelo de Verhulst é o modelo de Malthus modificado.

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = rP(1 - \frac{P}{P_\infty}) \\ P(0) = P_, \qquad\qquad r > 0 \end{cases},$$

em que a população chega a sua capacidade máxima quando $P \to P_\infty$, quando $t \to \infty$. A resolução da equação diferencial, obtida pelo método de separação de variáveis, conduz à solução,

$$P(t) = \frac{P_0 P_\infty}{(P_\infty - P_0)e^{-rt} + P_0}.$$

Exemplo: Suponha que um lago seja povoado inicialmente com 500 peixes. Estudos indicam que, devido à disponibilidade limitada de alimento e espaço, a capacidade máxima de suporte do lago é de 5000 peixes. Além disso, estima-se que a taxa intrínseca de crescimento da população seja de $0,4$ por ano. Deseja-se determinar o número de peixes após 5 anos.

Os dados do problema são

$$P_0 = 500, \qquad P_\infty = 5000, \qquad r = 0,4.$$

Substituindo esses valores na solução do modelo de Verhulst,

$$P(t) = \frac{P_0 P_\infty}{(P_\infty - P_0)e^{-rt} + P_0},$$

obtém-se

$$P(5) = \frac{500 \cdot 5000}{(5000 - 500)e^{-0,4\cdot 5} + 500}.$$

Como

$$e^{-2} \approx 0,1353,$$

segue que

$$P(5) = \frac{2\,500\,000}{4500(0,1353) + 500} = \frac{2\,500\,000}{608,85 + 500} = \frac{2\,500\,000}{1108,85} \approx 2255.$$

Portanto, após cinco anos, estima-se que a população seja de aproximadamente 2255 peixes.

Observa-se que, embora a população continue crescendo, seu crescimento torna-se cada vez mais lento à medida que se aproxima da capacidade máxima de suporte do ambiente, igual a 5000 peixes. Esse resultado ilustra como o modelo de Verhulst representa de forma mais realista o crescimento populacional quando os recursos disponíveis são limitados.

3.3 Os modelos meteorológicos

Todos os dias, na palma de nossas mãos, temos acesso a informações sobre o tempo em nossa cidade, basta acessarmos o celular. No entanto, o que talvez não seja de conhecimento de grande parte da população é que as previsões do tempo só são possíveis devido aos Modelos Matemáticos, os quais podem ser numéricos ou estatísticos.

Atualmente, os modelos numéricos são mais avançados e mais utilizados. Esses consistem na utilização de supercomputadores que resolvem equações matemáticas complexas, em que descrevem comportamentos da atmosfera. Esse modelo ainda é subdividido em dois tipos: o modelo de previsão global e o modelo de previsão regional. O primeiro serve para previsões em longa escala, cobrindo todo o planeta, e tem uma previsão a longo prazo entre 3 a 15 dias. Já o modelo de previsão regional, cobre uma área geográfica menor, porém, consegue mais detalhes e suas previsões são em média para 48 horas.

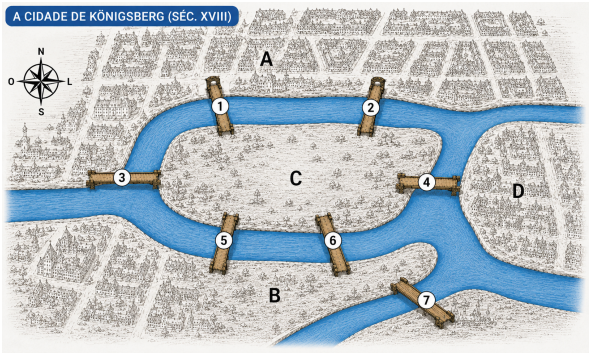
Já os modelos de previsões estatísticos consistem em utilizar dados históricos para realizar previsões. Para isso, os computadores têm acesso a um grande banco de dados históricos sobre o clima de uma determinada localidade e, com isso, podem observar padrões para o clima e a partir disso faz suas previsões.

Existem diversos modelos meteorológicos utilizados por centros de pesquisa ao redor do mundo. Entre os modelos numéricos mais utilizados destacam-se o *Global Forecast System* (GFS), o *European Centre for Medium-Range Weather Forecasts* (ECMWF) e o *Icosahedral Nonhydrostatic Model* (ICON), que, de acordo com Kalnay (2003), diferem quanto à resolução, aos métodos de assimilação de dados e ao horizonte de previsão. Cada um desenvolvido com características e finalidades específicas. O GFS, desenvolvido pelos Estados Unidos; o (ECMWF), reconhecido pela alta precisão em previsões de médio prazo; o (ICON), utilizado pelo serviço meteorológico da Alemanha. Cada um desses modelos apresenta vantagens e limitações, variando quanto à resolução espacial, ao horizonte de previsão e às técnicas de assimilação de dados. Dessa forma, para obter previsões mais confiáveis, é comum comparar os resultados de diferentes modelos ou utilizar aquele que melhor se adapta às características da região e ao objetivo da previsão.

3.4 O Problema das pontes de Königsberg

Observe a seguinte situação: Os habitantes de Königsberg na Prússia, hoje Kaliningrad, Rússia, costumavam passear atravessando as sete pontes que ligavam o Rio Pregel à cidade, como mostra a figura a seguir.

Figura 5 – Representação das pontes

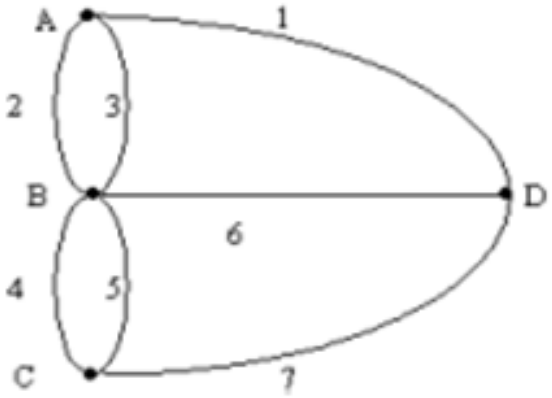


Fonte: Elaborada pelo autor com auxílio do ChatGPT (2026).

Surgiu uma dúvida a respeito dessas pontes que era a seguinte: seria possível, partindo de qualquer uma das regiões, das margens ou das ilhas, atravessar todas as 7 pontes, sem passar pela mesma ponte duas vezes e retornando ao ponto de partida? Esse problema, que por muitos é considerado uma charada matemática, ficou conhecido como o "o problema das pontes de Königsberg" e quem propôs uma solução para ela foi o grande matemático Leonhard Euler

Para resolver o problema, podemos dizer, em linguagem moderna que Euler criou um modelo matemático representado por um diagrama que se assemelha com o diagrama abaixo:

Figura 6 – Modelo Matemático para a solução do problema



Fonte: Ferreira, Silveira e Silva (2013, p. 10).

Nesse diagrama temos o seguinte: A, B, C e D representam às partes em que se tinha terra firme, de modo que B e D representam as ilhas e A e B são as duas margens. Já os números 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7 representam as sete pontes que ligam os pontos de terra firme, ou seja, ele representou cada uma das quatro regiões da cidade (as duas

ilhas e as duas margens) como um ponto (ou vértice) e cada uma das sete pontes como uma linha (ou aresta) que ligava esses pontos. Essa representação abstrata é o que hoje conhecemos como um grafo.

Agora, considerando que um vértice é par ou impar a depender se o número de arestas que estejam ligados a ele é par ou impar. A partir disso, Euler chegou as seguintes conclusões:

- Um diagrama pode ser atravessado começando e acabando num mesmo ponto sem passar duas vezes na mesma aresta se, e somente se, todos os vértices forem pares;
- Um diagrama que contém, no máximo, dois vértices ímpares também pode ser atravessado, entretanto sem voltar ao local de partida;
- Se o diagrama contém $2n$ vértices ímpares, onde n é um número inteiro qualquer, para atravessá-lo será necessário n passagens distintas por uma mesma linha.

Analisando o diagrama da Figura 6, podemos notar que todos os vértices são ímpares, consequentemente, de acordo com as informações constatadas por Euler, pode-se concluir que não é possível efetuar todo o percurso, retornando ao local de partida, sem passar mais de uma vez por cada ponte. Conforme Ferreira, Silveira e Silva (2013, p. 11), "Este resultado, formulado nos dias atuais com maior elegância, é conhecido como Teorema de Euler e considerado como marco inicial da Teoria dos Grafos."

Esse problema nos mostra um outro ponto importante da modelagem matemática: através da solução de um problema, o matemático busca generalizar a situação, não fica restrito apenas a resolver apenas o problema em questão, com isso, pode-se ampliar os resultados e desenvolver novas teorias, que nesse exemplo, a partir da solução proposta por Euler, iniciou-se a Teoria dos Grafos.

3.5 A coroa do Rei Hieron

Foi atribuída a Arquimedes a tarefa de verificar se a coroa encomendada pelo rei Hieron havia sido confeccionada inteiramente em ouro ou se o ourives havia substituído parte desse metal por prata. Como a coroa não poderia ser danificada, Arquimedes precisava encontrar um método que permitisse analisar sua composição sem destruí-la.

Ao observar que um corpo imerso em um fluido desloca um volume de líquido igual ao seu próprio volume, Arquimedes desenvolveu um procedimento baseado no empuxo, princípio que posteriormente recebeu seu nome. Esse problema pode ser descrito por meio de um modelo matemático simples.

Seja M a massa da coroa e suponha que ela seja composta por uma quantidade x de ouro e uma quantidade y de prata. Assim,

$$M = x + y.$$

Considere que a densidade do ouro seja tomada como unidade e que a densidade relativa da prata seja dada por d, com $0 < d < 1$. Nessas condições, o volume da coroa pode ser expresso por

$$V = \frac{x}{1} + \frac{y}{d}.$$

Como $d < 1$, observa-se que $\frac{y}{d} > y$. Dessa forma, para uma mesma massa total, a presença de prata aumenta o volume da coroa em relação ao volume de uma coroa constituída exclusivamente por ouro.

Considere agora um bloco maciço de ouro com a mesma massa da coroa, isto é,

$$A = M = x + y.$$

Ao mergulhar esse bloco em água, ele sofre a ação do empuxo. Seja E_1 o empuxo exercido sobre o bloco de ouro e E_2 o empuxo exercido sobre a coroa. Como o empuxo depende do volume de líquido deslocado, ele é proporcional ao volume do corpo imerso.

Assim, podem ocorrer duas situações:

1. Se a coroa fosse inteiramente de ouro, ela teria o mesmo volume do bloco de ouro. Nesse caso,

   $$E_1 = E_2,$$

   e, consequentemente, ambos apresentariam o mesmo peso aparente quando imersos na água.

2. Se parte do ouro tivesse sido substituída por prata, o volume da coroa seria maior do que o volume do bloco de ouro de mesma massa. Portanto,

   $$E_2 > E_1,$$

   fazendo com que a coroa apresentasse um peso aparente menor do que o bloco de ouro.

Comparando os pesos aparentes do bloco de ouro e da coroa quando imersos em água, Arquimedes pôde concluir se havia ocorrido fraude na fabricação da coroa. Esse raciocínio ilustra como um problema prático pode ser traduzido em um modelo matemático por meio das relações entre massa, volume e empuxo, permitindo solucionar a situação sem danificar o objeto analisado.

3.6 Orçamento Familiar

Considere uma familia na qual a renda mensal r_n é proveniente de um salário fixo r_0 mais o rendimento da caderneta de poupança p_n do mês anterior. Além disso, vamos supor que o consumo mensal c_n dessa família seja proporcional à sua renda mensal.

Para iniciar, considere a recorrência do tipo

$$\begin{cases} y_n = \alpha y_{n-1} \\ y_0 \text{ dado} \end{cases}.$$

Aplicando um processo recursivo, temos:

$$\begin{aligned} y_1 &= \alpha y_0 \\ y_2 &= \alpha y_1 = \alpha^2 y_0 \\ &\vdots \\ y_n &= \alpha y_{n-1} = \alpha^n y_0 \ , \end{aligned}$$

desse modo

$$y_n = y_0 \alpha^n. \tag{3.3}$$

Podemos verificar que a solução da recorrência linear

$$y_{n+1} = a y_n + b \tag{3.4}$$

com y_0 dado é

$$\begin{cases} y_n = y_0 + bn, \text{ se } a = 1 \\ y_n = y_0 a^n + b\frac{1-a^n}{1-a}, \text{se } a \neq 1 \end{cases}. \tag{3.5}$$

De fato, para o caso $a = 1$, a recorrência se torna

$$y_{n+1} = y_n + b,$$

ou seja, aumenta sempre b de um termo para o seguinte, logo, é uma Progressão Aritmética. Desse modo,

$$y_n = y_0 + bn.$$

Para o caso $a \neq 1$, de acordo com Morgado e Carvalho (2022) podemos verificar que a solução geral da recorrência é dada por:

$$y_n = Ca^n + \frac{b}{1-a},$$

Assim, utilizando a condição inicial y_0, temos

$$y_n = C + \frac{b}{1-a} \implies C = y_0 - \frac{b}{1-a}.$$

Substituindo, temos

$$y_n = \left(y_0 - \frac{b}{1-a}\right) a^n + \frac{b}{1-a}.$$

Reorganizando, obtemos

$$y_n = y_0 a^n + b\frac{1-a^n}{1-a}.$$

O modelo que estabelece relações entre as variáveis renda, poupança e consumo, dependentes do tempo e tomados em meses, é obtido da seguinte maneira:

Considere as notações

r_n = sendo a renda familiar;
r_0 = o salário fixo;
p_n = caderneta de poupança (mês anterior);
c_n = consumo da família.

Além disso, fixemos

i) poupança: p_{n+1} = (poupança do mês anterior n)+(sobra do mês $n+1$)

$$p_{n+1} = p_n + (r_{n+1} - c_{n+1}); \tag{3.6}$$

ii) renda: r_{n+1} = (salário) + (rendimento da poupança do mês anterior)

$$r_{n+1} = r_0 + \alpha p_n, \tag{3.7}$$

em que α é o juro da poupança;

iii) consumo

$$c_{n+1} = \beta r_{n+1}, \tag{3.8}$$

com $0 < \beta < 1$ sendo β representa a porcentagem de quanto foi consumido do mês anterior.

A partir das três equações, obtemos

$$\begin{aligned}
p_{n+1} &= p_n + (r_{n+1} - c_{n+1}) \\
&= p_n + [(r_0 + \alpha p_n) - \beta r_{n+1}] \\
&= p_n + [(r_0 + \alpha p_n) - \beta(r_0 + \alpha p_n)] \\
&= p_n + (r_0 + \alpha p_n - \beta r_0 - \beta\alpha p_n] \\
&= p_n + r_0 - \beta r_0 + \alpha p_n - \beta\alpha p_n \\
&= p_n + r_0(1-\beta) + \alpha p_n(1-\beta) \\
&= r_0(1-\beta) + p_n[(1-\beta)\alpha + 1]
\end{aligned}$$

considerando $a = [(1-\beta)\alpha + 1]$ e $b = r_0(1-\beta)$, chegamos em

$$p_{n+1} = ap_n + b$$

que é da forma de (3.4), então podemos usar (3.5) para determinar as soluções

$$p_n = p_0 a^n + b\frac{1-a^n}{1-a} = [(1-\beta)\alpha + 1]^n p_0 + (1-\beta)r_0\frac{1-[(1-\beta)\alpha+1]^n}{1-[(1-\beta)\alpha+1]}. \tag{3.9}$$

Analogamente obtemos,

$$r_n = r_0 + \alpha p_0 a^{n-1} + \alpha b\frac{1-a^{n-1}}{1-a} \tag{3.10}$$

e

$$c_n = \beta r_0 + \alpha\beta p_0 a^{n-1} + \alpha\beta\frac{1-a^{n-1}}{1-a}. \tag{3.11}$$

3.7 Financiamento

Na compra de uma casa, é feito um financiamento do valor c_0, que deve ser pago em 15 anos, em parcelas mensais fixas e iguais a k. Devemos determinar o juro mensal α cobrado nesse empreendimento.

Seja c_0 a dívida inicial. Então, a dívida c_n em um mês n é dada pela dívida corrigida do mês anterior menos a parcela k paga no mês, isto é,

$$c_{n+1} = c_n + \alpha c_n - k = (1+\alpha)c_n - k. \tag{3.12}$$

Podemos encontrar a solução de (3.12) por recorrência, da forma

$$\begin{aligned}
c_1 &= (1+\alpha)c_0 - k \\
c_2 &= (1+\alpha)c_1 - k = (1+\alpha)^2 c_0 - (1+\alpha)k - k \\
c_3 &= (1+\alpha)c_2 - k = (1+\alpha)^3 c_0 - (1+\alpha)^2 k - (1+\alpha)k - k \\
&\vdots \\
c_n &= (1+\alpha^n c_0 - k[1 + (1+\alpha) + (1+\alpha)^2 + \cdots + (1+\alpha)^{n-1}]).
\end{aligned}$$

Observe que o termo dentro dos colchetes é a soma de uma progressão geométrica. Portanto,

$$c_n = (1+\alpha)^n c_0 - k\frac{1-(1+\alpha)^n}{-\alpha}. \tag{3.13}$$

Se considerarmos que a dívida estará quitada em t meses, devemos ter em (3.13) que $c_t = 0$. Desse modo,

$$(1+\alpha)^t c_0 = k\frac{1-(1+\alpha)^t}{-\alpha},$$

ou

$$\frac{\alpha c_0}{k} = \frac{(1+\alpha)^t - 1}{(1+\alpha)^t} = 1 - \frac{1}{(1+\alpha)^t}.$$

Conhecidos os valores da dívida inicial c_0, do pagamento parcelado k e do tempo necessário t para a liquidação dessa dívida, o cálculo de α pode ser feito usando algum método numérico. Considere, por exemplo, $c_0 = 30.000, k = 500$ e $t = 15$ anos (180 meses).

Portanto,

$$60\alpha = 1 - \frac{1}{(1+\alpha)^{180}}. \tag{3.14}$$

Para determinar o valor de α em (3.14), vamos utilizar o método da bisseção.

Sejam $y = 60\alpha$ e $z = 1 - \frac{1}{(1+\alpha)^{180}}$. Então, devemos encontrar α de modo que $y = z$:

$$\alpha = 0.01 \Rightarrow y = 0.6 \text{ e } z = 0.833 \Rightarrow z > y$$
$$\alpha = 0.02 \Rightarrow y = 1.2 \text{ e } z = 0.97 \Rightarrow z < y$$
$$\alpha = \frac{0.01 + 0.02}{2} = 0.015 \Rightarrow y = 0.9 \text{ e } z = 0.93 \Rightarrow z > y.$$

Então, α deve estar entre 0.015 e 0.02. Continuando o processo, obtemos $\alpha \simeq 0.0156$ ou 1.56% ao mês.

3.8 As pipas de vinho

O modelo a ser apresentado nessa seção foi um modelo desenvolvido em uma fazenda do Rio Grande do Sul. Segundo Bassanezi (2002), alunos de um curso de especialização em Matemática realizaram uma visita a uma fazenda produtora de vinho, pertencente a seu Joaquim.

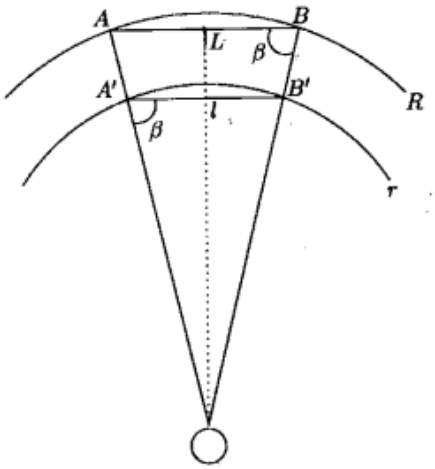
Ao chegar na fazenda, os estudantes se depararam com grandes reservatórios de vinho, que são conhecidos como pipas de vinhos. O que chamou mais atenção foi o

fato de que essas pipas eram construidas pelo próprio seu Joaquim, que não tinha um grande conhecimento em Matemática, porém, os reservatórios construidos por ele, utilizam bastantes conceitos matemáticos e foram herdados de seus ancestrais.

Dessa forma, os estudantes decidiram estudar o que seu Joaquim desenvolveu e mostrar toda a Matemática utilizada por ele. Com isso, os estudantes desenvolvem um modelo que pode auxiliar na confecção de novos reservatórios.

Para construir uma pipa com um volume preestabelecido, seu Joaquim deve cortar as ripas de modo que se encaixem perfeitamente. Vejamos a vista superior da pipa

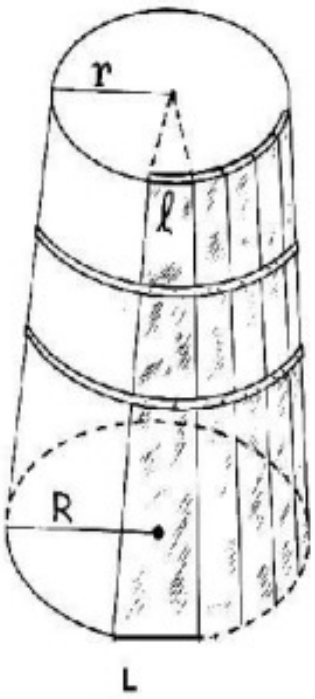
Figura 7 – Vista superior da pipa de vinho



Fonte: Bassanezi (2002, p. 47).

Na figura, a circunferência maior representa a base da pipa e, a menor, sua tampa. O reservatório terá o formato de um tronco de cone, como mostra a figura a seguir.

Figura 8 – Ilustração da pipa de vinho



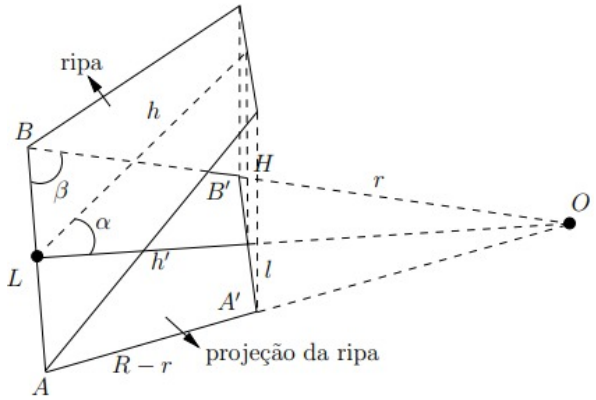
Fonte: Bassanezi (2002, p. 48).

note que a Figura 7 é uma projeção ortogonal de uma ripa da pipa da Figura 8.

O ângulo de encaixe β, entre duas ripas, é obtido considerando: R (raio da base), L (largura da ripa na base); todas as ripas justapostas devem formar, na base da pipa, uma circunferência.

Observe a seguinte figura

Figura 9 – Projeção ortogonal de uma ripa



Fonte: Bassanezi (2002, p. 49).

o triângulo OAB é isosceles, então

$$\beta = \arccos \frac{L/2}{R}. \tag{3.15}$$

Para exemplificar, se o diâmetro da base tiver $98cm$ e a largura maior de cada ripa é $7cm$, então

$$\beta = \arccos \frac{3,5}{49} = 85,9°.$$

Para determinar a forma da ripa cortada, dados R, L e β e também o raio r da tampa, devemos ter o mesmo ângulo de encaixe na tampa, isto é,

$$cos\ \beta = \frac{l/2}{r} \Rightarrow l = 2r \cos \beta.$$

Portanto,

$$\frac{l/2}{r} = \frac{L/2}{R} \Rightarrow l = \frac{rL}{R}. \tag{3.16}$$

Da Figura 9, temos

$$h' = (R - r) \cos \beta.$$

Usando as expressões (3.15) e (3.16) temos h' em função de L **e** l, ou seja,

$$h' = \frac{L - l}{2}. \tag{3.17}$$

Como H é a altura da pipa, aplicando o Teorema de Pitágoras, temos

$$h^2 = H^2 + (h')^2 \Rightarrow H = \sqrt{h^2 - (h')^2} \tag{3.18}$$

$$\Rightarrow H = \sqrt{h^2 - \frac{(L - l)^2}{4}}. \tag{3.19}$$

Sabemos, ainda, que o volume do tronco de cone é dado por

$$V = \frac{1}{3}\pi H(R^2 + rR + r^2). \tag{3.20}$$

Para entendermos melhor a utilidade do modelo, vamos ver o seguinte problema: construir uma pipa de 1000 l, com uma altura de $1,5$ m e diâmetro da base igual a 1 m.

Solução:

Suponhamos que as ripas sejam regulares (formato retangular) e tenham largura de 10 cm. Vamos converter todos os dados para a unidade dm (decímetro):

- $V = 1000\ dm^3$;

- $H = 15\ dm$;
- $R = 5\ dm$;
- $L = 1\ dm$.

Usando a expressão (3.20) do volume, obtemos o seguinte

$$r = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 - 4(R^2 - \frac{3V}{\pi H})}}{2}.$$

Sabendo que r deve ser positivo, utilizando os dados, obtemos que

$$r = 4,20\ dm.$$

Para obter o valor de l (parte superior da ripa), vamos utilizar (3.16). Então,

$$l = \frac{rL}{R} = \frac{4 \times 2}{5} = 0,84\ dm.$$

Com relação ao valor de h, de (3.18), temos

$$h = \sqrt{15^2 + \frac{(1 - 0,48)^2}{4}} = 15,0002\ dm,$$

serão utilizadas n ripas. Desse modo,

$$n \approx \frac{C}{L},$$

em que C é o comprimento da circunferência da base. Desta forma,

$$n \approx \frac{2\pi R}{L} = \frac{2\pi 5}{1} = 31,4\ \textbf{ripas}.$$

Se quisermos que todas as ripas utilizadas sejam iguais, devemos usar 32 ripas. Então,

$$32 \approx \frac{2\pi R}{L'} \Rightarrow L' = 0.98175\ dm$$

e

$$l' = \frac{rL'}{R} \Rightarrow l' = 0,82467\ dm.$$

Por fim, o ângulo de encaixe deve ser

$$\beta = \arccos\ \frac{l'/2}{r} = \arccos(0,098175) = 84,366°.$$

4 Matemática e Agricultura

O Brasil é internacionalmente conhecido por ser um grande produtor agrícola, com o cultivo de diversas culturas. O que pouco se sabe é que grande parte da produção brasileira é feita por agricultores de pequeno porte. Essas produções menores são conhecidas como agricultura familiar. Segundo o último Censo agropecuário realizado pelo IBGE em 2017, a agricultura familiar é responsável por cerca de 90% da economia dos municípios com até 20 mil habitantes.

A Matemática está presente em praticamente todas as atividades humanas, e na agricultura não é diferente. Desde o planejamento da plantação até a colheita, os cálculos e raciocínios matemáticos orientam decisões que podem garantir maior produtividade e melhor aproveitamento dos recursos disponíveis. Em grandes fazendas, em que a produção é em grande escala, todas essas etapas são realizadas com a utilização de diversos aparatos tecnológicos, o que demanda muito conhecimento e investimento financeiro, o que não é uma realidade acessível para boa parte dos produtores brasileiros.

Na agricultura familiar, é fácil enxergar esse vínculo entre Matemática e cultivo. Muitos produtores rurais, mesmo sem terem tido acesso à escola formal ou sendo analfabetos, utilizam, no dia a dia, raciocínios matemáticos de forma intuitiva. Ao medir a quantidade de sementes necessárias para um terreno, ao estimar a produção que conseguirá naquela área de cultivo, ao calcular o tempo certo de irrigação ou ao estimar o valor da venda dos produtos na feira, dentre tantas outras possibilidades. O agricultor está sempre aplicando algum conceito matemático como de proporção, divisão, porcentagem e até mesmo de geometria.

Esses conhecimentos matemáticos, ainda que informais, são fundamentais para a sobrevivência e o sucesso da agricultura familiar. Eles permitem que o agricultor otimize seus recursos, evite desperdícios e organize melhor sua produção. Além disso, quando esses saberes do campo se unem ao conhecimento escolar, o produtor ganha ainda mais autonomia, ampliando sua capacidade de planejamento e negociação.

4.1 O contexto local

São Sebastião de Lagoa de Roça (popularmente chamada apenas de Lagoa de Roça) é uma pequena cidade do interior da paraíba que está situada a uma distância de 130 km da capital paraibana, João Pessoa e a apenas 16 km de Campina Grande, fazendo parte da região metropolitana da Rainha da Borborema. Segundo o último senso do

IBGE, realizado em 2022, a cidade tem uma população de aproximadamente 11.040 habitantes, além disso tem uma área territórial de aproximadamente 50 km^2 e uma densidade demográfica de 238 hab/km^2. A cidade ainda é conhecida por ter uma grande parte de sua população ainda morando na zona rural, segundo consta nas informações oficiais do site municipal da Prefeitura Municipal de São Sebastião de Lagoa de Roça (2026), no senso do IBGE de 2010, a população rural equivalia a 57,8% da papulação total da cidade.

A cidade fica localizada nas próximidades da conhecida cidade de Campina Grande, no Brejo paraíbano. Ao observar o nome desse município, podemos notar uma palavra que remete a um tema desta dissertação, a "Roça". Como o nome já nos indica, a roça, que indica agricultura, é muito forte na cidade. Segundo a história local, antes de se formar como vilarejo e, posteriormente, cidade, Lagoa de Roça era o que literalmente o nome diz, uma lagoa que, em volta, eram feitas plantações. Com o passar dos anos, a cidade foi se formando e aumentando, graças ao crescimento da agricultura local. Atualmente, a agricultura é responsável por boa parte da economia, "A economia local baseia-se na agricultura, com destaque para as culturas de milho, feijão, mandioca, batatinha e batata doce"(Prefeitura Municipal de S.S. de Lagoa de Roça, 2026, p. 6).

Em pequenas cidades do interior, como é o caso do município, a agricultura tem um forte papel na sociedade, seja ele no desenvolvimento social como também no econômico. Em municípios desse porte, a geração de empregos ainda é pequena, as oportunidades são menores, dessa forma a agricultura se sobressai como o ramo que mais gera emprego e assim movimenta a econômia local. Além da importância econômica, a agricultura nessas localidades moldam e fortalecem a cultura. O trabalho no campo está profundamente ligado às tradições locais, ao modo de vida das comunidades e à transmissão de conhecimentos entre gerações.

A agricultura em cidades pequenas vão além da ajuda econômica. Ela ajuda pessoas a sobreviverem. Através de um programa federal chamado PAA (Programa de Aquisição de Alimentos). De acordo com Brasil, Ministério do Desenvolvimento e Assistência Social, Família e Combate à Fome (2026) o Programa de Aquisição de Alimentos

> Realiza a compra direta de alimentos de agricultores familiares, sem necessidade de licitação e os destina a pessoas em situação de insegurança alimentar e nutricional, bem como à rede socioassistencial, equipamentos públicos de segurança alimentar e nutricional e à rede pública e filantrópica de ensino. O PAA tem como objetivo fortalecer a agricultura familiar, gerando emprego, renda e desenvolvendo a economia local, e de promover o acesso aos alimentos, contribuindo para reduzir a insegurança alimentar e nutricional. (gov.br, 2024)

Esse programa fortalece a enonômia, pois compra o alimento dos pequenos agricultores locais e também ajuda aqueles que não possuem condições financeiras de comprar sequer os alimentos suficientes para se manterem saudáveis.

Em 2017 foi realizado o último censo agropecuário do Brasil, nele podemos obter dados e informações acerca de qualquer munícipio brasileiro. Para entender um pouco da importância da agricultura para Lagoa de Roça, vamos analisar alguns dados. Segundo o IBGE, o município dispunha de 3.586 ha de estabelecimentos agropecuários (lembrando que agropecuária engloba produção agrícola com criação animal) e esse território está dividido entre 1.376 estabelecimentos agropecuários.

Vejamos os dados colhidos e divulgados pelo IBGE. Primeiramente, vamos apresentar a tabela que apresenta as lavouras permanentes, isto é, cultivos agrícolas de longa duração (superior a um ano) que, após plantados, produzem colheitas sucessivas durante vários anos, sem a necessidade de novo plantio a cada safra.

Tabela 2 – Lavouras permanentes

Cultura	Nº de estabelecimentos com 50 pés ou mais	Qtd. produzida (t)	Nº de pés existentes (×1000)	Área nos estabelecimentos com +50 pés (ha)	Área colhida (ha)	Valor da produção (×1000 R$)
Acerola	2					
Banana	9	24	9	12	10	21,5
Cajú (castanha)	2					
Cajú (fruto)	7	1	2	6	2	2,700
Coco-da-Baía	1					
Goiaba	1					
Graviola	1					
Jabuticaba	3	12	1	4	4	5,85
Laranja	66	321	46	65	51	186,8
Limão	11	17	2	6	5	22,534
Manga	1					
Maracujá	3	3		1		6,62
Tangerina	7	64	12	38	26	24,1

Fonte: IBGE (2026)

Agora, os dados sobre as lavouras temporárias:

Tabela 3 – Lavouras temporárias

Lavoura	Número de Estabelecimentos	Quantidade produzida (t)	Área colhida (ha)	Valor da Produção (×1000R$)
Abóbora, Jerimum	260	128	20	143,45
Algodão	1			
Cana-de--açúcar	1			
Fava	919	100	171	205,64
Feijão Cor	559	101	196	186
Feijão Fradinho	698	84	202	161,59
Feijão Preto	202	26	54	46,961
Feijão Verde	313	56	132	111,33
Mandioca	257	167	67	183,49
Milho	616	201	203	227,04
Milho forrageiro	26	7	3	0,57
Tomate rasteiro	1			
Palma forrageira	53	38	3	4,33

Fonte: IBGE (2026)

Dando prosseguimento à pesquisa sobre a agricultura local, decidimos falar com especialistas da cidade sobre o tema:

- Robson Pereira de Oliveira: Secretário municipal de agricultura. Está na sua terceira passagem como secretário, tem grande experiência no ramo, é técnico em agronomia e possui graduação em agroecologia. Daqui em diante, ao citar o secretário, chamaremos apenas de "Robson";
- Cícero Pereira Cordão Terceiro Neto: Extensionista Rural II da EMPAER: Engenheiro agrônomo, Mestre em solos e nutrição de plantas e Doutor em irrigação e drenagem de plantas.

Foram realizados alguns encontros com estes, nos quais conversamos sobre o atual cenário da agricultura no município, principalmente a agricultura familiar, que é uma

realidade presente na vida da população. Além disso, buscamos saber a opinião deles sobre a relação entre a Matemática e a Agricultura.

A Secretaria Municipal de Lagoa de Roça mantém um importante papel para auxílio da manutenção das plantações locais, segundo o secretário de agricultura, eles auxiliam no preparo do solo, disponibilizando maquinário necessário, além de prestar outros serviços solicitados pelos locais. Ainda segundo Robson, a agricultura familiar presente no munícipio é muito importante para a sustentação da economia da cidade, sendo a atividade desenvolvida no sítio ainda mais importante que as atividades urbanas.

A EMPAER (Empresa Paraibana de Pesquisa, Extensão Rural e Regularização Fundiária) é uma empresa pública do governo da Paraíba, vinculada à SEDAP (Secretária do desenvolvimento da agricultura e da pesca), que visa promover o desenvolvimento sustentável da agricultura familiar. Ela oferece assistência técnica, pesquisa agropecuária e regularização fundiária. Em parceria também com a secretária de agricultura, esse órgão mantém controle do que é produzido no munícipio e ainda pode prestar uma espécie de acessoria, dando todo suporte para o agricultor.

É dever da EMPAER manter o controle da agricultura familiar, para isso eles tem o CAF (Cadastro de agricultura familiar), segundo dados obtidos da EMPAER, em 2026 existem aproximadamente 500 CAF's ativos. Para ser considerado um agricultor familiar é necessário que se cumpra algumas condições como: a área não pode ser maior que 4 módulos fiscais (em Lagoa de Roça cada módulo vale 30ha), além disso, responsável da plantação tem que residir nas imediações do terreno, e a mão de obra tem que ser majoritariamente de familiares.

Através de informações da EMPAER, podemos ter informações mais precisas sobre tudo que é produzido pela agricultura familiar no município. Atualmente, existe uma grande variedade de culturas cultivadas em todo territótio da cidade, sendo elas: milho, feijão vigna, feijão de corda, feijão preto, macaxeira, mandioca, batata doce, hortaliças e também algumas frutas como limão, tangerina, laranja e banana. Na tabela a seguir, apresentaremos os dados da área de cultivo do município, esses dados foram repassados por Cícero, através dos encontros que foram realizados para entender mais sobre a agricultura municipal.

Tabela 4 – Produção da agricultura familiar em Lagoa de Roça

Culturas	Área de Plantio (ha)
Milho	300
Feijão de corda	230
Feijão preto	20
Feijão vigna	120
Batata doce	200
Macaxeira	150
Mandioca	80
Limão	50
Tangerina	130
Laranja	50
Banana	10
Hortaliças	40

Fonte: EMPAER(2026)

Além disso, a produção de cada cultura será: :

Tabela 5 – Produção da agricultura familiar em Lagoa de Roça

Culturas	Produção por ha	Produção anual
Milho	8	2400
Feijão	0,6	72
Batata doce	9	1350
Macaxeira	9	1350
Mandioca	9	720
Limão	9	450
Tangerina	9	1170
Laranja	9	450
Banana	11	110
Hortaliças	3,5	130

Fonte: EMPAER (2026)

Com todos os dados apresentados até então, conseguimos entender a dimensão que a agricultura tem no município além da forte importância de se relacionar o tema com a Matemática.

4.2 Um modelo para otimizar o plantio de batatas

Na obra, "Ensino e aprendizagem com Modelagem Matemática", Bassanezi (2002) destaca a importância de atrair o conteúdo para realidade do aluno. Ele apresenta um exemplo de uma turma de cálculo em que se notava o desinteresse dos calouros com a disciplina. Buscando contextualizar, foi perguntado sobre temas diversos, dentre os questionamentos veio o seguinte "meu pai planta batatas, colocando cada semente a uma distância de 30 cm, queria saber porque ele faz dessa maneira".

A partir deste questionamento, podemos realizar um estudo e assim chegar em modelos que possibilitam compreender e otimizar uma produção. Para isso, precisamos de algumas informações como:

- O espaçamento entre duas linhas dever ter no mínimo 80 cm;
- Cada planta produz, em média, 8,25 batatas;
- O peso de 8 batatas, de uma mesma planta é 639 gramas;
- Os bancos de investimentos consideram como produção normal, 800 sacas de 60 kg por alqueire plantado (um alqueire paulista mede 24200 m^2).

Os dados da tabela a seguir trazem a relação entre o espaçamento de plantas da mesma linha e a quantidade média de batatas por planta:

Tabela 6 – Produtividade de acordo com o espaço entre as plantas

Espaçamento (cm)	**Produção**
25	4,5
30	6,5
35	7,5
40	8,0

Fonte: Bassanezi (2002)

A partir desses dados foi elaborado o seguinte problema: Determinar o espaçamento entre duas plantas (mesma linha) de modo que a produção de um alqueire seja máxima.

Resolução

Vamos resolver de duas maneiras. Para a primeira, precisamos preencher a seguinte tabela:

Tabela 7 – Produtividade total

Espaçamento entre as plantas (cm)	**Quant. de batata por planta**	**Plantas**	**Produção/planta**	**Produção Total (sacas)**
d	b	p	-	P
25	4,5			
30	6,5			
35	7,5			
40	8,0		0,639	800
45*	8,25*			

Fonte: Autoria própria (2026)

Observe que o terreno em questão tem formato quadrangular com uma área de 24.200 m^2. Desse modo, cada lado terá medida aproximada de 155,6 m. Com isso, o número de linhas será:

$$\frac{155,56}{0,8} = 194 \text{ ruas.}$$

Precisamos, agora, determinar o número de plantas por linha, o total de plantas, a produção por planta e a produção total. Para isso, podemos obter expressões que nos permitem modelar o comportamento da plantação:

- Número de plantas por linha (N_p) em função do distanciamento (d) em cm entre as plantas:
$$N_p = \frac{\text{Comprimento}}{\text{Espaçamento}} = \frac{155,56}{\frac{d}{100}} = \frac{15556}{d};$$
- Total de plantas (T_p) em função do distanciamento (d) entre as plantas:
$$T_p = N_p \cdot 194 = \frac{15556}{d} \cdot 194 = \frac{3.017.864}{d};$$
- Produção por plantas PR_p: é dito inicialmente que 8 batatas pesam em 639 g, então cada batata pesará $79,875$ g $= 0,079875$ kg e a produção por planta será dada por:
$$PR_p = b \cdot 0,079875;$$
- Produção total (P_t):
$$P_t = p \cdot b \cdot \frac{0,079875}{60}.$$

Observe que está sendo dividido por 60, pois queremos a produção em sacas e cada saca pesa 60 kg.

Agora, a partir das equações, podemos preencher a tabela:

Tabela 8 – Produtividade total preenchida

Espaçamento entre as plantas (cm)	**Quant. de batata por planta**	**Plantas**	**Produção/planta**	**Produção Total (sacas)**
d	b	p	-	P
25	4,5	120.995	0,359	726
30	6,5	100.829	0,519	872
35	7,5	86.425	0,599	863
40	8,0	75.622	0,639	800
45*	8,25*	67.219	0,659	738

Fonte: Autoria própria (2026)

Podemos constatar, analisando a Tabela 8, que a maior produção em sacas é obtida quando a distância entre duas plantas consecutivas de uma mesma linha é de, aproximadamente, 30 cm.

Agora, podemos fazer uma abordagem mais detalhada, utilizando outros conceitos matemáticos. A produção em sacas pode ser descrita como uma função de duas variáveis: a distância e a quantidade de batatas na mesma fila (d e b respectivamente), isto é:

$$P(d,b) = \left(\frac{0,639}{8}\, b\right)\left(\frac{155}{d}\cdot 194\right)\frac{1}{60} \approx \frac{40b}{d}.$$

Note que a produção é diretamente proporcional à quantidade de batatas por planta e é inversamente proporcional à distância entre duas plantas consecutivas da mesma linha. Observe, ainda, que as variáveis d e b são dependentes. Assim podemos expressar P em função de uma variável.

Precisamos determinar a relação entre b e d. Para isso vamos utilizar os dados da primeira tabela e vamos compará-lo com o resultado do processo feito para obter os resultados da Tabela 6. Agora consideremos

$$b_0 = f(d_0), b_1 = f(d_1), \cdots, b_n = f(d_n).$$

Queremos encontrar uma função contínua $b = f(d)$. Daí, vejamos que,

$$\begin{aligned} f(d_1) - f(d_0) &= 6,5 - 4,5 = 2 \\ f(d_2) - f(d_1) &= 7,5 - 6,5 = 1 \\ f(d_3) - f(d_2) &= 8,0 - 7,5 = \frac{1}{2} \\ f(d_4) - f(d_3) &= 8,25 - 8,0 = \frac{1}{4} \\ &\vdots \\ f(d_n) - f(d_{n-1}) &= \cdots = \frac{1}{2^{n-2}}. \end{aligned}$$

Somando ambos os lados das igualdades, obtemos

$$f(d_n) - f(d_0) = 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-2}}.$$

Note que do lado direito da igualdade temos a soma dos termos de uma PG com razão $\frac{1}{2}$, o primeiro termo 2 e com $n-2$ termos, assim

$$f(d_n) - f(d_0) = 4 - 2^{2-n},$$

como $f(d_0) = 4,5$, temos

$$b_n = f(d_n) = 8,5 - 2^{2-n}.$$

A relação entre n e d é dada pela reta: $n = 20d - 5$

Utilizando essa equação, claramente

$$b = f(d) = 8,5 - 2^{2-(20d-5)} = 8,5 - 2^{7-20d}.$$

Podemos agora substituir essa expressão em $P(d, b)$, que dá a produção em sacas, desta forma, fica claro que

$$P(d) = \frac{40}{d}(8,5 - 2^{7-20d}).$$

Essa expressão nos permite calcular a produção de um alqueire em função do espaçamento entre as plantas. A função produção obtida anteriormente é dada por:

$$P(d) = \frac{40}{d}\left(8.5 - 2^{7-20d}\right), d > 0, \tag{4.1}$$

em que d representa a distância (em metros) entre duas plantas consecutivas da mesma rua, e $P(d)$ é a produção em sacas de 60 kg. A variável $n = 20d - 5$ corresponde a um índice inteiro não negativo nos dados originais. Considerando a continuidade do modelo, temos

$$n \geq 0 \implies 20d - 5 \geq 0 \implies d \geq 0.25 \text{ m}.$$

Além disso, valores típicos da tabela original sugerem $d \leq 0,6$ m. Portanto, buscamos o máximo no intervalo $[0.25; 0.6]$.

Para maximizar $P(d)$, derivamos em relação a d. Escrevemos da seguinte forma

$$P(d) = 40 \cdot d^{-1} \cdot \left(8.5 - 2^{7-20d}\right).$$

A derivada da função exponencial 2^{7-20d} é dada por

$$\frac{d}{dd}\left(2^{7-20d}\right) = 2^{7-20d} \cdot \ln 2 \cdot (-20) = -20 \ln 2 \cdot 2^{7-20d}.$$

consequentemente, aplicando a regra do produto e a regra da cadeia, chegamos a

$$\begin{aligned} P'(d) &= 40\left[-d^{-2}\left(8.5 - 2^{7-20d}\right) + d^{-1}\left(-(-20 \ln 2) \cdot 2^{7-20d}\right)\right] \\ &= 40\left[-\frac{8.5 - 2^{7-20d}}{d^2} + \frac{20 \ln 2 \cdot 2^{7-20d}}{d}\right]. \end{aligned}$$

Igualando $P'(d) = 0$, temos

$$-\frac{8.5 - 2^{7-20d}}{d^2} + \frac{20 \ln 2 \cdot 2^{7-20d}}{d} = 0.$$

Multiplicando ambos os lados por d^2

$$-8.5 + 2^{7-20d} + 20 \ln 2 \cdot d \cdot 2^{7-20d} = 0,$$

e assim

$$2^{7-20d}\left(1 + 20 \ln 2 \cdot d\right) = 8.5. \tag{4.2}$$

A equação (4.2) pode ser reescrita como:

$$2^{7-20d} = \frac{8.5}{1 + 20 \ln 2 \cdot d},$$

daí, aplicando $\log_2$ em ambos os lados:

$$7 - 20d = \log_2\left(\frac{8.5}{1 + 20 \ln 2 \cdot d}\right)$$

Esta equação não possui solução analítica simples, necessitando de métodos numéricos.

Definamos a função auxiliar

$$f(d) = 2^{7-20d}\left(1 + 20 \ln 2 \cdot d\right) - 8.5.$$

A raiz de $f(d) = 0$ corresponde ao ponto crítico. Realizamos iterações:

- Para $d = 0,30$:
  $2^{7-6} = 2^1 = 2$
  $1 + 20 \cdot 0,693147 \cdot 0,30 = 1 + 4,15888 = 5,15888$
  Produto: $2 \times 5,15888 = 10,31776$
  $f(0,30) = 10,31776 - 8,5 = 1,81776 > 0$

- Para $d = 0,40$:
  $2^{7-8} = 2^{-1} = 0,5$
  $1 + 20 \cdot 0,693147 \cdot 0,40 = 1 + 5,54518 = 6,54518$
  Produto: $0,5 \times 6,54518 = 3,27259$
  $f(0,40) = 3,27259 - 8,5 = -5,22741 < 0$

Há uma raiz no intervalo $(0.3, 0.4)$. Refinamos:

- $d = 0,31$: $f(0,31) \approx 0,722 > 0$
- $d = 0,32$: $f(0,32) \approx -0,261 < 0$
- $d = 0,315$: $f(0,315) \approx 0,218 > 0$
- $d = 0,317$: $f(0,317) \approx 0,012 \approx 0$.

Portanto, o ponto crítico é:

$$d^* \approx 0,317 \text{ m}(31,7 \text{ cm}).$$

Analisamos o sinal da derivada nas vizinhanças do ponto crítico:

- Para $d = 0,31\,\text{m}$: $P'(0,31) > 0$ (função crescente);
- Para $d = 0,32\,\text{m}$: $P'(0,32) < 0$ (função decrescente).

Como $P'(d)$ passa de positiva para negativa em d^*, este ponto é um máximo local. Para garantir que se trata do máximo global no intervalo $[0,25;\ 0,6]$, comparamos o valor da função nos extremos com o valor no ponto crítico:

$$P(0,25) = \frac{40}{0,25}\left(8,5 - 2^{7-5}\right) = 160 \times (8,5 - 4) = 720,$$
$$P(0,6) = \frac{40}{0,6}\left(8,5 - 2^{7-12}\right) \approx 66,67 \times (8,5 - 0,03125) \approx 564,58,$$
$$P(0,317) \approx 873,3.$$

Como $P(0,317) > P(0,25)$ e $P(0,317) > P(0,6)$, concluímos que $d^* \approx 0,317\,\text{m}$ (ou $31,7\,\text{cm}$) é o ponto de máximo global da produção. Portanto, a distância entre as plantas que maximiza a produção é de aproximadamente **31,7 cm**.

Logo, o espaçamento ótimo entre plantas consecutivas na mesma rua é de aproximadamente **0,317 m** (ou 31,7 cm). Nessa configuração, a produção máxima atinge cerca de **873 sacas** de 60 kg.

$$d_{\text{ótimo}} \approx 0,317 \text{ m}, P_{\text{máx}} \approx 873 \text{ sacas}$$

Observe ainda que chegamos praticamente no mesmo valor para as duas formas que calculamos. Isso nos mostra que podemos modelar problemas de maneiras distintas, algumas maneiras são mais básicas e outras são mais complicadas e podem necessitar do conhecimento de conteúdos mais avançados de Matemática. Além disso, podemos notar que é possível simplificar um problema com modelagem, o que permite uma aplicação no ensino básico também.

4.3 Matemática na irrigação

Vários fatores influenciam a produtividade de uma cultura, a qualidade do solo, os cuidados com as pragas, o manejo correto, porém, o que talvez mais interfira para uma boa colheita, seja o clima, excesso ou falta de chuva. No contexto da região nordeste, sabemos que o maior problema é justamente a falta de chuva em muitas épocas do ano,

Para dar início ao nosso estudo, precisamos entender primeiramente como funciona o caminho da água ao cair no solo através das chuvas ou de irrigação. Nem toda água que cai no solo é absorvida, uma parte escoa, outra parte é introzida ao solo. O diagrama a seguir ilustra todo o processo que ocorre

Figura 10 – Caminho da água no solo



Fonte: Elaborada pelo autor com auxílio do ChatGPT (2026)

Como podemos notar, uma parte da água não é absorvida pelo solo, ela escoa pela superficie até que encontre algo que impeça seu escoamento, como os barreiros, barragens, açudes poços, dentre outros. A outra parte da água é absorvida pelo solo e assim fica armazenada no sub-solo.

Além disso, um outro ponto que precisamos entender é a unidade de medida mais utilizada quando falamos em volume de água de preciptações, que é o milímetros. É estranho para algumas pessoas utilizar o milímetro para se referir a volume, uma vez que na escola aprendemos que as unidades de volume são denotadas, em sua maioria por cm^3 e mm^3.

Quantas vezes já assistimos noticiários e vimos informações do tipo: "A chuva esperada é de 30 mm". Mas quanto isso realmente significa? Ao utilizar o milímetro (mm) para falar sobre volume de água em uma determinada área, estamos nos referindo à lâmina d'água para medir a quantidade de água que foi despejada na área.

Dizer que choveu um milímetro de água, significa dizer que se a água estivesse caindo dentro de um reservatório cúbico com 1 m de aresta, a lâmina d'água chegaria a uma altura de 1 mm. Mas como sabemos então a quantidade exata de água? Vamos observar a solução para essa pergunda:

Resolução: Considere um cubo com aresta medindo 1 m, podemos calcular seu volume através da fórmula

$$V = A_b \times h.$$

Como temos um cubo com arestas medindo 1 m, a $A_b = 1 \times 1 = 1$ m^2. Queremos determinar o volume quando a altura da água for de 1 mm $= 0,001$ m, desse modo temos

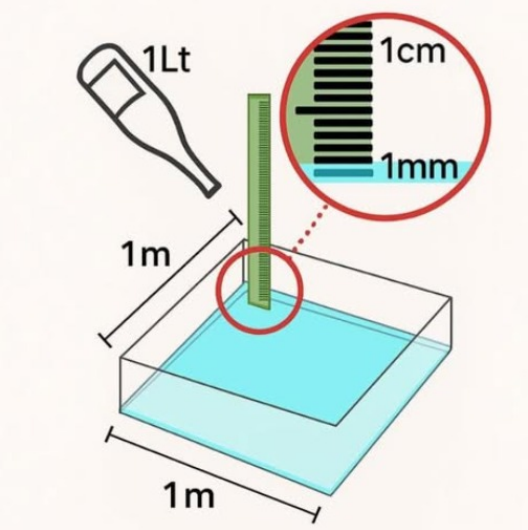
$$V = 1 \times 0,001 = 0,0001 \text{ m}^3,$$

sabendo que 1 m^3 = 1000 L, temos que

$$V = 0,0001 \text{ m}^3 = 1 \text{ L}.$$

Logo, 1 mm de chuva equivale a 1 litro de água por metro quadrado.

Figura 11 – Representação de 1mm de água



Fonte: Elaborada pelo autor com auxílio do ChatGPT (2026)

4.3.1 Disponibilidade de água no solo

Para muitos é desconhecida a Matemática por trás de um sistema de irrigação, em que alguns acreditam que basta irrigar uma ou duas vezes no dia ou então esperar a chuva e a produção será satisfatória. Porém, para um bom plantio, para ter uma produtividade eficiente é necessário que se tenha conhecimento de algumas variáveis, e estas podem ser descritas em um modelo através de algumas equações. Os modelos desenvolvidos e aplicados que serão apresentados aqui, além da Matemática terá forte uso de outras ciências como Física, Química e Biologia e são frutos de uma pesquisa bibliográfica no livro Mantovani, Bernardo e Palaretti (2009).

Primeiramente, vamos definir alguns parâmetros que utilizaremos daqui para frente:

- Densidade aparente

$$d_a = \frac{m_s}{v_s},$$

em que
d_a = densidade aparente;
m_s = massa do solo seco;
v_s = volume do solo.

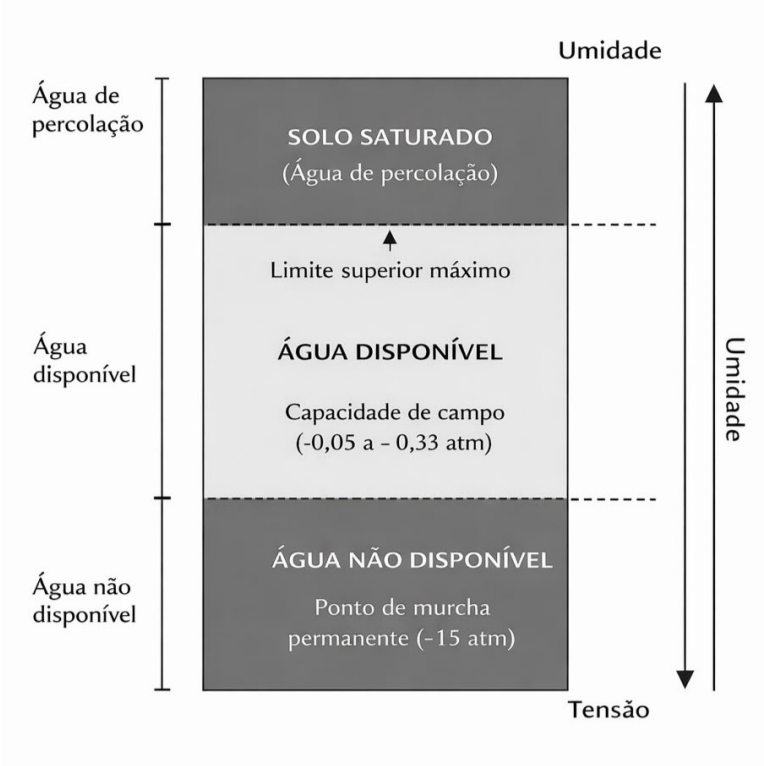
- Capacidade de campo (c_c): é o limite superior de água no solo, sendo a quantidade máxima de água que o solo vai conseguir armazenar sem causar danos ao sistema. É um parâmetro bastante importante para o fins de quantificação do armazenamento e é crucial para o manejo da irrigação e produtividade agrícola. Pode ser descrita pela equação:

$$c_c = \frac{a_s}{v_s} \times 100,$$

em que
c_c = capacidade de campo do solo, em porcentagem de volume de solo utilizado;
a_s = água retida no solo;
v_s = volume de solo na amostra .

- Ponto de murcha permanente (p_m): é definido como o limite inferior de armazenamento de água no solo. Dizemos que nesse ponto a água já não está mais disponível às plantas, pois a força de retenção que o solo exerce sobre a água é maior do que a capacidade da planta em absorvê-la.

Figura 12 – Representação da disponibilidade de água no solo



Fonte: Elaborada pelo autor com auxílio do ChatGPT (2026)

Podemos partir agora para o modelo que possibilita calcular a disponibilidade de água no solo.

- Disponibilidade Total de água no solo

É considerada a parte da água total armazenada no solo que esta disponível para as plantas e está definida entre a Capacidade do Campo e o Ponto de murcha permanente. Neste trabalho, a capacidade de campo (c_c) e o ponto de murcha permanente (p_m) são expressos em porcentagem em peso. Essa forma de representação relaciona a massa de água presente no solo com a massa de solo seco. Assim, por exemplo, um teor de água de 20% em peso significa que, para cada 100 g de solo seco, há 20 g de água retida. Essa relação é importante para a determinação da quantidade de água disponível no solo, sendo posteriormente convertida em uma lâmina de água por meio da densidade aparente do solo. Para realizar esses cálculos, contamos com a equação utilizada na engenharia agrícola

$$D_t = \frac{c_c - p_m}{10} \times d_a,$$

em que
D_t = disponibilidade total da água no solo em mm/cm;

c_c = capacidade de campo % em peso;
p_m = ponto de murcha permanente % em peso;
d_a = densidade aparente do solo, em g/cm^3.

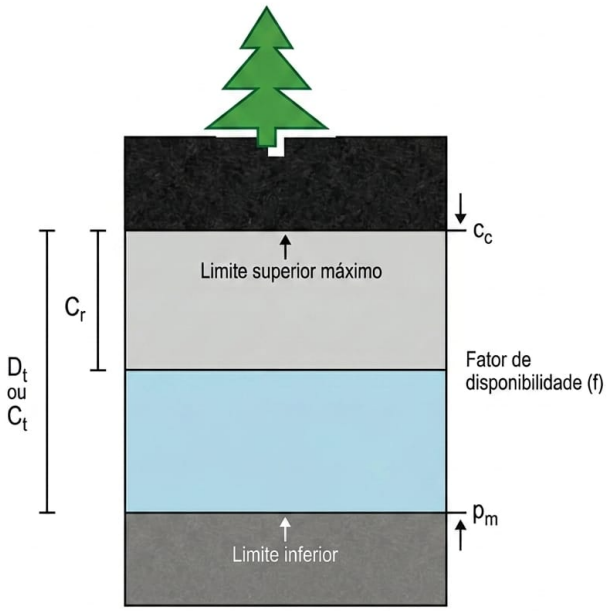
- Capacidade total de água no solo (C_t)

Chamamos de zona radicular, a zona em que a raiz da planta pode chegar (em centímetros). A CTA representa a quantidade total de água armazenada nesta zona. Daí, descrevemos o cálculo da CTA pela equação

$$C_t = D_t \times z,$$

em que z é a profundidade efetiva do sistema das raízes, em centímetros. A zona de profundidade efetiva é definida como a profundidade em que a maioria das raízes das plantas estão localizadas.

Figura 13 – Representação das camadas do solo



Fonte: Elaborada pelo autor com auxílio do ChatGPT (OpenAI, 2026)

- Capacidade real de água no solo (C_r)

Define-se um limite entre c_c e p_m, denominado ponto f, que representa quanto do valor total será utilizado. Com isso, descrevemos pela seguinte equação

$$C_r = C_t \times f.$$

- Fator de disponibilidade de água no solo (f)

Esse fator é um parâmetro que limita a parte da água disponível do solo que a planta pode utilizar, sem causar danos a produtividade.

A seguir apresentaremos uma tabela que apresenta as faixas de algumas culturas. Quando dizemos que o fator de uma cultura é $0,6$, significa que se deve utilizar 60% da água disponível.

Tabela 9 – Eficiênciade aplicação média dos sistemas de irrigação

Grupos de culturas	**Fator f - Faixa comum**
Verduras e legumes	0,2 a 0,4
Frutas e forrageiras	0,3 a 0,5
Grãos e algodão	0,4 a 0,6

fonte: Mantovani, Bernardo e Palaretti (2009)

- Irrigação Real Necessária

A irrigação real necessária indica a quantidade de água que a planta necessita para se desenvolver bem naquele determinado solo. Observamos que ela deve ser sempre menor ou igual a capacidade real de água no solo, isto é,

$$I_r \leq C_r.$$

A inequação que descreve esse parâmetro é a seguinte

$$I_r \leq \frac{c_c - p_m}{10} \times d_a \times z \times f.$$

- Irrigação total necessária I_t

A equação anterior descreve a quantidade de água necessária para a planta, porém, nela não se considera as perdas que ocorrem durante o processo, como a evaporação, escorrimento, ou outros tipos de perdas. Para compensar essa perda, precisamos acrescentar uma quantidade, desse modo, divide-se a I_r pela eficiencia de irrigação Ea, o que nos fornece a expressão:

$$I_t = \frac{I_r}{E_a}.$$

Os valores médios de E_a para os sistemas mais comuns de irrigação estão propostos na tabela a seguir.

Tabela 10 – Eficiência de aplicação média dos sistemas de irrigação

Sistema de irrigação	**Eficiência de Aplicação média %**
Irrigação localizada	90 a 95
Pivô Central	85 a 95
Aspersão convencional	80 a 90
Irrigação por sulcos	50 a 70

Fonte: Mantovani, Bernardo e Palaretti (2009)

Veremos agora exemplos que mostram a aplicação dos modelos descritos anteriormente:

Exemplo 1

Considere o plantio de feijão, a partir das informações descritas até aqui, determine D_t, C_t, C_r, I_r e I_t

Resolução: para a cultura escolhida, nós temos:

$$\begin{aligned} c_c &= 33\% \\ p_m &= 16\% \\ d_a &= 1,2 \text{ g/cm}^3 \\ f &= 0,5 \\ E_a &= 85\% \end{aligned}$$

A partir das equações apresentadas, temos

$$\begin{aligned} D_t &= \frac{33-16}{10} \times 1,2 = 2,04 \text{ mm/cm solo} \\ \Rightarrow C_t &= 2,04 \times 40 = 81,6 \text{ mm} \\ \Rightarrow C_r &= 81,6 \times 0,5 = 40,8 \text{ mm.} \end{aligned}$$

Fazendo $I_r = C_r$

$$\begin{aligned} I_r &= 40,80 \text{ mm} \\ I_t &= \frac{40,8}{0,85} = 48 \text{ mm.} \end{aligned}$$

A partir dos cálculos realizados, verificou-se que a capacidade total de água no solo (C_t) é de 81,6 mm, representando o volume máximo de água disponível entre

a capacidade de campo e o ponto de murcha permanente ao longo da profundidade radicular considerada.

Entretanto, nem toda essa água é efetivamente utilizada pela cultura, sendo adotado um fator de disponibilidade ($f = 0{,}5$), o que resulta em uma capacidade real de água (C_r) de 40,8 mm. Esse valor corresponde à quantidade de água que pode ser consumida pela planta sem que haja prejuízo ao seu desenvolvimento.

Assim, a lâmina líquida de irrigação (I_r) foi considerada igual à CRA, isto é, 40,8 mm, indicando que a irrigação deve ser realizada quando esse volume de água for consumido pelo sistema solo-planta.

Considerando a eficiência do sistema de irrigação por aspersão (85%), determinou-se uma lâmina bruta de irrigação (I_t) de aproximadamente 48 mm, valor necessário para compensar as perdas durante a aplicação e garantir que a lâmina líquida requerida seja efetivamente disponibilizada à cultura.

Dessa forma, conclui-se que o manejo da irrigação deve ser realizado de modo a repor 40,8 mm de água no solo, mediante a aplicação de 48 mm, assegurando o uso eficiente da água e o adequado desenvolvimento da cultura.

Exemplo 2

Considere o plantio de milho. A partir das informações descritas até aqui, determine D_t, C_t, C_r, I_r e I_t

Resolução: Considerando o plantio de milho, temos as informações:

$$\begin{aligned} &c_c = 36,1\%; \\ &p_m = 21\% \\ &d_a = 1,25 \text{ g/cm}^3; \\ &f = 0,6; \\ &E_a = 80\%. \end{aligned}$$

Utilizando as equações, obtemos os resultados:

$$\begin{aligned} D_t &= \frac{36,1 - 21}{10} = 1,51 \text{ mm/cm solo}; \\ C_t &= 1,51 \times 50 = 75,50 \text{ mm}; \\ C_r &= 75,50 \times 0,6 = 45,30 \text{ mm}. \end{aligned}$$

Consequentemente $I_r = 45,3$ mm.

- Evapotranspiração

  Evapotranspiração é a soma de dois processos naturais que fazem com que a água retorne para a atmosfera, a **evaporação** que é a água que sai diretamente do solo (ou da água na superfície) e a **transpiração** que é a água liberada pelas plantas através das folhas. A determinação desse valor é muito importante para um sistema de irrigação pois, a partir dele, será conhecida a quantidade de água perdida pela plantação e assim será possível saber a quantidade de água necessária a ser aplicada. Temos ainda dois casos de evapotranspiração:

$$\begin{cases} ET_o = \text{evaporação de referência (mm/dia);} \\ ET_c = \text{evapotranspiração da cultura (mm/dia).} \end{cases}$$

  A evaporação de referência representa um valor mais "padrão"que varia de acordo com cada região, ela depende das condições climáticas do local.

  Existem alguns modelos que podem ser utilizados para o calculo da ET_o que podem ser encontrados em Mantovani, Bernardo e Palaretti (2009). O modelo a seguir é conhecido por *Equação de Hargreaves* e é descrito por

$$ET_o = 0,0023 R_a (T_{max} - T_{min})^{0,5} (T_{med} + 17,8),$$

  sendo,

  ET_o é a evapotranspiração de referência, (mm/d);

  R_a é a radiação solar incidente no topo da atmosfera, expressa em equivalente de lâmina de á

  T_{max} é a temperatura máxima (°C);

  T_{min} é a temperatura mínima (°C);

  T_{med} é a temperatura média diária (°C).

  Os dados sobre radiação podem ser encontrados para cada localidade através de sites especializados como o INMET.

  Já a evapotranspiração da cultura é o valor específico para uma determinada cultura, e é obtida a partir da evapotranspiração de referência multiplicado pelo coeficiente da cultura,

$$ET_c = K_c \times ET_o.$$

  Os valores para esse coeficiente são disponibilizados em tabelas de acordo com o tipo de planta e a sua fase de crescimento. kc_1 representa o início do ciclo, kc_2 é quando a planta está no meio do ciclo e o kc_3 representa o período mais próximo da colheita. como na tabela a seguir de Albuquerque e Coelho (2021).

Tabela 11 – Coeficientes de cultura (Kc) e altura máxima

Cultura	Kc1	Kc3	Kc5	Altura (m)
Amendoim		1,15	0,60	0,4
Ervilha		1,15	1,10–0,30	0,5
Feijão	0,40	1,05–1,15	0,90–0,35	0,4
Feijão-caupi		1,05	0,60–0,35	0,4
Grão-de-bico		1,00	0,35	0,4
Lentilha		1,10	0,30	0,5
Soja		1,15	0,50	0,5–1,0
Algodão		1,15–1,20	0,70–0,50	1,2–1,5
Girassol		1,00–1,15	0,35	2,0
Mamona		1,15	0,55	2,0
Arroz	1,05	1,20	0,90–0,60	1,0
Aveia		1,15	0,25	1,0
Cevada		1,15	0,25	1,0
Milheto		1,00	0,30	1,5
Milho		1,20	0,60–0,35	2,0
Sorgo		1,00–1,10	0,55	1,0–2,0
Trigo		1,15	0,25–0,40	1,0
Cana-de-açúcar	0,40	1,25	0,75	3,0

Fonte: Albuquerque e Coelho (2021)

Exemplo 3

Calcular a evapotranspiração da cultura (ETc) para uma plantação de feijão, utilizando a equação de Hargreaves para estimar a evapotranspiração de referência (ETo).

Considerando um dia típico em Campina Grande - PB:

- Temperatura máxima (T_{max}): 30°C
- Temperatura mínima (T_{min}): 20°C

Calculando a temperatura média, temos: :

$$T_m = \frac{T_{max} + T_{min}}{2} = \frac{30 + 20}{2} = 25°C.$$

Os valores de radiação extraterrestre (R_a) podem ser obtidos a partir de tabelas da FAO, conforme Allen (1998), ajustadas para as coordenadas de Campina Grande - PB.

$$R_a = 15,2 \text{ mm/dia}.$$

Agora, fazendo o Cálculo da Evapotranspiração de Referência (ETo) pela Equação de Hargreaves, temos

$$ET_o = 0,0023 \cdot (T_m + 17,8) \cdot (T_{max} - T_{min})^{0,5} \cdot R_a.$$

Substituindo os valores, chegamos que

$$\begin{aligned} ET_o &= 0,0023 \cdot (25 + 17,8) \cdot (30 - 20)^{0,5} \cdot 15,2 \\ ET_o &= 0,0023 \cdot 42,8 \cdot 3,16 \cdot 15,2 \\ ET_o &\approx 4,8 \text{ mm/dia.} \end{aligned}$$

Considerando a cultura do Feijão sabemos que o coeficiente de cultura na fase de desenvolvimento é $K_c = 1,05$.

Por fim, cálculando da evapotranspiração da cultura

$$ET_c = K_c \cdot ET_o \implies ET_c = 1,05 \cdot 4,8 \implies ET_c \approx 5,04 \text{ mm/dia.}$$

Com isso, concluímos que a cultura perde aproximadamente 5,04 litros de água por metro quadrado por dia. Supondo que essa plantação seria em uma área de 1 hectare, obteríamos

$$1 \text{ hectare} = 10.000\, m^2 \implies 5,04 \times 10.000 = 50.400 \text{ litros/dia.}$$

4.3.2 Irrigação por aspersão

Existem diferentes maneiras de se irrigar, segundo Mantovani, Bernardo e Palaretti (2009) alguns exemplos são:

- Superfície: nesse método a água é aplicada diretamente na superfície do solo e pode cobrir todo o solo ou uma parte dele e a gravidade fará o papel de espalhar a água pelo restante da área plantada. Esse método de irrigação tem como principal exemplo o arroz, em que todo o plantio fica submerso.

Figura 14 – Plantação de arroz



Fonte:(AGRO em DIA, 2024)

- Localizada: para esse método, a água é aplicada em uma área limitda da superficie, não mais espalhada por toda área cultivada e preferencialmente próximo as raízes da planta. Esse método é conhecido pelo sistema de gotejamento e ele proporciona economia de água.

Figura 15 – Irrigação por gotejamento



Fonte: (Agristar do Brasil, 2019)

- Subterrânea: como o nome sugere, para esse sistema de irrigação, a água é espalhada abaixo da superfície, diretamente na zona das raízes (radicular).

Figura 16 – Irrigação subterrânea



Fonte: Elaborada pelo autor com auxílio do ChatGPT (2026)

Todos esses modelos de irrigação tem suas pecularidades, e uma forte importância da Matemática para melhor eficiência. Porém, além destes, existe um outro método de irrigação, talvez o mais conhecido e o primeiro que vem à mente quando pensamos em irrigação, é a irrigação por aspersão. Escolhemos aqui descrever um pouco melhor como funciona esse método e descrever uma parte da Matemática que possibilita a sua aplicação.

Antes de mostrarmos como a Matemática auxilia nesse método de irrigação, vamos conhecê-lo melhor. Irrigar pelo método da aspersão é, na verdade, simular uma chuva e é o método mais utilizado na atualidade. Segundo Mantovani, Bernardo e Palaretti (2009, p. 111)

> os sistemas de irrigação por aspersão convencional permitem muitas possibilidades de adaptações, visando à economia no uso de mão de obra, melhoria na eficiencia de irrigação e adequação às distintas situações de campo.

Além disso, podemos classificar os sistemas mais comuns segundo a sua movimentação, como:

1. Pórtatil: toda tubulação é móvel;
2. Semiportátil: a linha principal é fixa e as laterais são móveis;
3. Fixo: semelhante ao semiportátil, em que a rede de tubulação é fixa (pode ser enterrada ou não);
4. Malha: Sistema fixo e enterrado, com um aspersor por malha;
5. Canhão hidráulico: sistema semiportátil, com aspersores de grande alcance;

6. Mangueira: sistema semifixo, em que os aspersores são instalados em tripés e conectados com mangueiras à linha lateral.

Figura 17 – Exemplos de irrigação por aspersão



Fonte: Elaborada pelo autor com auxílio do ChatGPT (OpenAI, 2026)

Mas como podemos identificar a Matemática por trás desse sistema de irrigação? A resposta é, de várias maneiras. É necessário saber calcular áreas, volumes, dentre outros dados. Por exemplo, pela forma que funciona um aspersor, a água é distribuída em uma região circular, com isso, é necessário ter um conhecimento de área do círculo, e assim distribuir uma quantidade certa de equipamentos de acordo com a área total do terreno ou mesmo criar uma estratégia de manejo correto para os casos em que o sistema é móvel. Além disso, é necessário calcular a vazão de água que sai do equipamento para saber o tempo que deve deixá-lo ligado.

Além dos cálculos descritos anteriormente, podemos ir mais além, existem equações que modelam diversas situações da irrigação por aspersão:

- **Itensidade de Aplicação**: A intensidade de aplicação (I_a) na irrigação por aspersão é a taxa com que a água é aplicada ao solo, medida em milímetros por hora, e pode ser calculada por:

$$I_a = \frac{Q}{E_{LL} \times E_A} \times 1000$$

em que,

I_a = intensidade de aplicação, mm/h;
Q = vazão, m^3/h;
E_{LL} = espaçamento entre linhas laterais em metros;
E_A = espaçamento entre aspersores, em metros.

A vazão Q pode ser calculada por:

$$Q = C_d \times A \times V,$$

em que,
Q = vazão em m^3/s;
C_d = o coeficiente de descarga (adimensional);
A = área de saída de água m^2;
V = velocidade de saída do jado, m/s.

O valor de C_d varia dependendo das características do aspersor. Quanto melhor for o dimensionamento, mais ele se aproxima de 1, sendo o mais comum encontrar aspersores com valor na faixa de $0,65$ à $0,9$. Sabendo ainda que A pode ser determinada medindo o diâmetro de cada um dos bocais e assim calculando a área da seção circular e que a velocidade pode ser determinada em função da pressão de serviço do aspersor, podemos obter uma nova expressão para o cáculo da vazão, que será:

$$Q = C_d \times \frac{\pi D^2}{4} \times \sqrt{2gP_s}, \tag{4.3}$$

em que,
Q = vazão em m^3/s;
C_d = coeficiente de descarga (adimensional);
D = diâmetro de saída do bocal;
g = aceleração da gravidade $(9,87m/s^2)$
P_s = pressão de serviço (mca).

Se tivermos mais de um bocal, devemos repetir o cálculo para cada um deles e somá-los. Para esse modelo, temos:

$$Q = K \times D^2 \times \sqrt{P_s},$$

com,
Q a vazão em m^3/s;
K é o coeficiente que envolve C_d, π, g e constantes D é o diâmetro de saída do bocal;
P_s é a pressão de serviço (mca).

Por fim, para relacionar a vazão entre dois aspersores em uma linha lateral, partimos das equação de vazão de cada aspersor, e depois de simplificada chegamos em:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{\sqrt{PS_1}}{\sqrt{PS_2}},$$

em que,
Q_1 = vazão do aspersor 1;
Q_2 = vazão do aspersor 2;
PS_1 = pressão de serviço do aspersor 1;
PS_2 = pressão de serviço do aspersor 2;

Vamos agora ver como seria a aplicação dessas equações.

Exemplo 3:

Considere dois aspersores descritos na tabela a seguir. Analise-os e conclua qual dos dois pode ser utilizado em um solo no qual possui uma Velocidade de Infiltração Básica (VIB) de 10 mm/h.

Tabela 12 – Descrição dos aspersores

Características	**Aspersor 1**	**Aspersor 2**
Bocals (mm)	14 x 6	5 x 5
Pressão (mca)	30	20
Vazão (m^3/h)	10,6	2,10
Espaçamento	30 x 30	18 x 18

Fonte: Mantovani, Bernardo e Palaretti (2009)

Resolução: Note que precisamos calcular a intensidade de aplicação de cada aspersor.

Para o aspersor 1, temos

$$I_a = \frac{10,6}{30 \times 30} \times 1.000 = 11,8 \text{ mm/h}.$$

E, para o aspersor 2, temos

$$I_a = \frac{2,10}{18 \times 18} \times 1.000 = 6,48 \text{ mm/h}.$$

Analisando os resultados, observemos que o único aspersor que pode ser utilizado é o aspersor 2, pois sua intensidade de aplicação é menor que o valor de infiltração do

solo na área a ser ser irrigada, já o aspersor 1 tem a intensidade maior que o valor de infiltração.

Exemplo 4:

Considere um aspersor com as seguintes condições:

$$Q = 2 \text{ m}^3/h = 0,0006 \text{ m}^3/s, D = 6 \text{ mm e } P_s = 30 \text{ mca}.$$

Determine a nova vazão, considerando a troca do diâmetro do bocal de 6 para 8 mm e que o C_d não se modifique.

Resolução
Utilizando a equação 1, temos:

$$0,0006 = C_d \times \frac{\pi(6 \times 10^{-3})^2}{4} \times \sqrt{2 \times 9,81 \times 30} \Rightarrow C_d = 0,81.$$

Desse modo, teremos

$$Q = 0,81 \times \frac{3,1416(8 \times 10^{-3})^2}{4} \times \sqrt{2 \times 9,81 \times 30} \Rightarrow Q = 0,00098 \text{ m}^3/\text{s} = 3,56\text{m}^3/\text{h}.$$

Vimos nesse capítulo o tamamho da importância da Matemática na agricultura, ela surge como uma forte aliada a uma boa produção possibilitando a otimização dos recursos, a projeção de produtividade, maximizando assim a produção e até mesmo amenizando danos.

5 Produto Educacional

5.1 Uma proposta de aplicação em sala de aula de acordo com a realidade local

A decisão de estudar essa temática surgiu da vontade de aproximar o conteúdo da realidade das pessoas, uma vez que é algo presente no contexto local e que não somente de pessoas com conhecimento matemático conseguem entender. Para tanto, buscamos entender qual seria um tema considerado forte para a região, algo que está na cultura local e que atraísse a atenção das pessoas.

Nessa perspectiva, observamos que uma possibilidade relevante seria a aplicação da Modelagem Matemática à agricultura, uma vez que esta é uma realidade bastante presente na vida da grande maioria dos estudantes do município de São Sebastião de Lagoa de Roça - PB. Não seria exagero dizer que toda população local tem algum contato com a agricultura, seja diretamente, por meio dos familiares, ou mesmo por algum conhecido que vive nesse meio.

Desse modo, desenvolvemos esse Produto Educacional visando aplicar uma atividade de Modelagem Matemática, e, assim, promover a interdisciplinaridade, a resolução de problemas, a análise de dados aliados ao estudo e o conhecimento local. Vale salientar que, esse produto foi desenvolvido para uma realidade local, porém, é possível sua aplicação em outros contextos. Para isso, basta adequar os dados.

Seguindo os procedimentos sugeridos por Bassanezi (2002), vamos apresentar, neste Produto Educacional, uma proposta de atividade de aplicação da Modelagem Matemática em sala de aula (para o ensino básico) seguindo os cinco passos descritos por ele:

- experimentação;
- abstração;
- resolução do problema;
- avaliação dos resultados;
- modificação.

Esse Produto Educacional está elaborado em uma proposta com 12 aulas, sendo cada aula com duração de 50 minutos. A seguir vamos apresentar a sequência didática recomendada para a sua aplicação. A atividade de modelagem consiste em modelar

o plantio de feijão em uma determinada área agrícola, considerando o terreno a ser utilizado, dados históricos da cultura obtidos a partir do site da EMBRAPA e dados locais relevantes. Além disso, serão utilizados *softwares* para visualização e cálculo de áreas, contribuindo para a análise e o desenvolvimento do modelo matemático.

A proposta que foi desenvolvida para esta atividade pode ser aplicada em qualquer série do Ensino Fundamental 2 ou do Ensino Médio, desde que adaptada ao conteúdo matemático que a BNCC propõe para a série, por exemplo, para o caso do 6º ano do Ensino Fundamental, recomendamos a utilização de áreas com medidas inteiras, pois nesse ano estuda-se o conjunto nos números naturais e suas operações. Desse modo, pensamos essa atividade voltada para ser aplicada no 8º ano do Ensino Fundamental. Nessa série estuda-se o conjunto dos números racionais isso contribui para que possamos utilizar as medidas mais precisas, considerando as casas decimais, obtendo assim resultados mais fieis.

A sequência didática que desenvolvemos está amplamente ligada à BNCC. A seguir listaremos as habilidades utilizadas e as competências que espera-se que sejam alcançadas:

Tabela 13 – Competências da BNCC contempladas pelo Produto Educacional

Competências Gerais da BNCC	
Competência Geral 1	Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos para compreender e explicar a realidade, colaborando para a construção de uma sociedade justa e sustentável.
Competência Geral 2	Exercitar a curiosidade intelectual e utilizar a investigação, a reflexão e a análise crítica para compreender e resolver problemas.
Competência Geral 4	Utilizar diferentes linguagens verbal, matemática, gráfica, digital e científica para expressar e compartilhar informações.
Competência Geral 5	Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de forma crítica, significativa e ética.
Competência Geral 7	Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis para formular e defender ideias e decisões.
Competências Específicas de Matemática	
Competência Específica 1	Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas.
Competência Específica 2	Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos consistentes.
Competência Específica 4	Fazer observações sistemáticas, investigações e construir modelos para resolver problemas em diferentes contextos.
Competência Específica 5	Utilizar processos e ferramentas matemáticas para modelar e resolver problemas.
Competência Específica 6	Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, aplicando conhecimentos matemáticos na tomada de decisões.

Tabela 14 – Habilidades da BNCC relacionadas à proposta didática.

Habilidades de Matemática (8º Ano)		
Álgebra	EF08MA06	Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculo de porcentagens.
Álgebra	EF08MA07	Associar situações-problema a expressões algébricas e representá-las matematicamente.
Álgebra	EF08MA09	Resolver e elaborar problemas que possam ser representados por expressões algébricas.
Geometria	EF08MA18	Resolver e elaborar problemas envolvendo cálculo de área de figuras planas.
Geometria	EF08MA19	Resolver problemas envolvendo medidas de superfícies em contextos reais.
Grandezas e Medidas	EF08MA20	Resolver problemas envolvendo medidas de comprimento, área e outras grandezas.
Probabilidade e Estatística	EF08MA23	Coletar, organizar e interpretar dados provenientes de pesquisas e levantamentos.
Probabilidade e Estatística	EF08MA25	Interpretar e analisar informações apresentadas em tabelas, gráficos e outras representações.

5.2 Sequência didática

5.2.1 Aula 1

Segundo Zabala (1998), as Sequências Didáticas podem ser entendidas como "um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos". Nessa perspectiva, a Sequência Didática configura-se como uma estratégia pedagógica organizada de forma que cada atividade desempenha um papel específico no processo de ensino e aprendizagem.

Dessa forma, é importante reservar um momento para investigar as percepções dos estudantes. Conhecer suas opiniões acerca do ensino de Matemática e compreender, sob sua perspectiva, o problema de enfrentarmos tantas dificuldades na aprendizagem da Matemática durante o Ensino Básico. Para esse momento, recomenda-se a aplicação de um questionário a ser respondido pelos estudantes. É fundamental que as respostas sejam anônimas, de modo que os participantes possam expressar livremente suas opiniões, sem receio de julgamentos ou advertências.

Questionário Diagnóstico

Instruções: Este questionário é anônimo. Não é necessário informar seu nome. Responda às questões com sinceridade, expressando livremente suas opiniões e experiências.

1. Dizer que a Matemática é abstrata significa dizer que ela não existe fisicamente no mundo real. Você acredita que isso de fato é verdade?

2. Você acredita que a Matemática é apenas uma disciplina da escola e não tem outras utilidades?

3. Qual sua opinião sobre frases do tipo: "Eu não vou usar essas contas para nada na minha vida"?

4. Na sua realidade, você enxerga a utilização da Matemática para algo seu ou de seus familiares?

5. Em uma escala de 0 a 10, você diria que seu interesse pela Matemática está em qual número?

6. Na sua opinião, o que poderia ser feito para que seu interesse na Matemática aumentasse?

7. Se o professor conseguisse dar aulas dos conteúdos aplicados a temas conhecidos como esporte, música, agricultura ou situações do cotidiano, você se sentiria mais estimulado(a) a participar e estudar Matemática? Justifique sua resposta.

Após a aplicação desse questionário, é importante que o professor analise as respostas. Para isso, o professor deve dedicar um tempo para a leitura e compreensão das opiniões expostas pelos alunos. É de se esperar que as respostas dos alunos remetam a uma abstração da Matemática que a afaste da realidade, o que dificulta a sua compreensão e até mesmo não desenvolva o interesse em aprender.

5.2.2 Aulas 2, 3 e 4

Para essas aulas, devemos preparar dois momentos. Primeiramente, precisamos apresentar o que seria a Modelagem Matemática para eles, vale a pena destacar a importância dos modelos para a evolução da sociedade, tudo que foi desenvolvido através de modelos e tudo que ainda pode ser desenvolvido. Para isso, o professor deve desenvolver uma apresentação, com resursos visuais que possa apresentar exemplos de modelos conhecidos e ilustrações que possibilitem uma boa compreensão. A partir dessa apresentação, os alunos verão a importência de desenvolver modelos, e com isso, podem desenvolver ainda mais interesse pela atividade.

Para o segundo momento, já damos início a atividade de modelagem, pois devemos mostrar o motivo da escolha do tema, essa etapa é a etapa da experimentação. Para esse momento, devemos contexualizar a motivação para a escolha da agricultura para ser estudada, vamos apresentar dados concretos sobre a cidade, como os apresentados na Tabela 1 e também podemos realizar o estudo dos dados do site oficial do IBGE, que traz um grande detalhamento de tudo que é produzido na cidade

Figura 18 – Site do censo agro de 2027

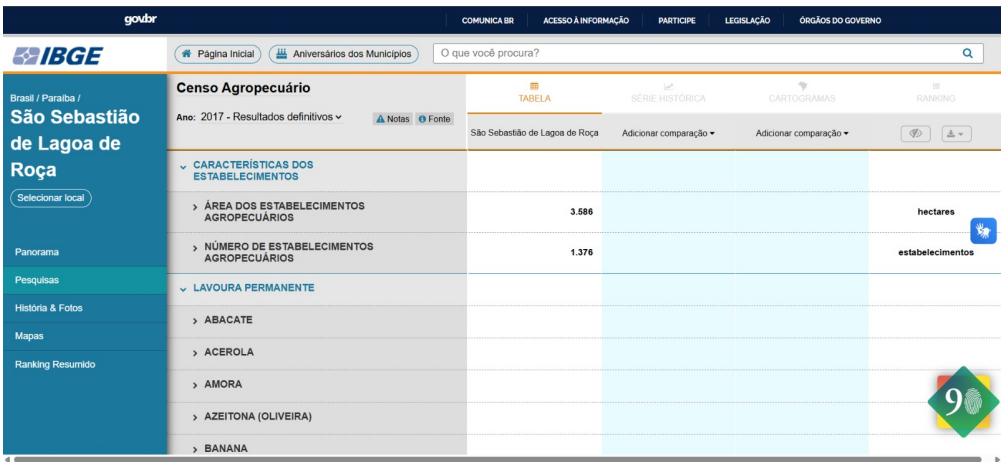


Figura 19 – Fonte: Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (2026)

Com isso, devemos mostrar a importância da agricultura para a cidade e também para regiões do interior, em que a agricultura surge com a principal atividade econômica. Para finalizar essa etapa, devemos mostrar como podemos relacionar a Matemática com a agricultura, mostrando em que ela é diretamente utilizada e também indiretamente, ressaltando também o saber popular dos agricultores, os quais muitas vezes são capazes de realizar cálculos mesmo quando não tiveram a oportunidade de estudar ao longo da vida.

5.2.3 Aula 5

Ainda dentro da etapa da experimentação, nessa aula precisamos ressaltar conteúdos ou tópicos que serão importantes para o desenvolvimento da atividade, como cálculo de áreas, operações básicas, porcentagem, se necessário, o professor deve dedicar uma aula de revisão dos tópicos citados ou de quaisquer outros que venham a ser importantes para desenvolvimento da atividade.

Para iniciar, precisamos apresentar terrenos para que os estudantes possam, em um primeiro momento, calcular as suas áreas, além disso, os terrenos apresentados não devem ser necessáriamente retangulos perfeitos, é importante que os estudantes desenvolvam o raciocínio e possam entender que, em caso de terrenos sem um formato retangular, é possível dividir a região em áreas menores com o cálculo mais simples e após isso, basta somar os resultados para obter o resultado total.

Vamos mostrar um terreno como exemplo, esse terreno se trata do sítio que pertence ao autor e fica localizado na zona rural do município de São Sebastião de Lagoa de Roça, na Paraíba.

Figura 20 – Vista aérea do terreno



Fonte: Google Earth (2026)

Faremos os seguintes questionamentos para os alunos:

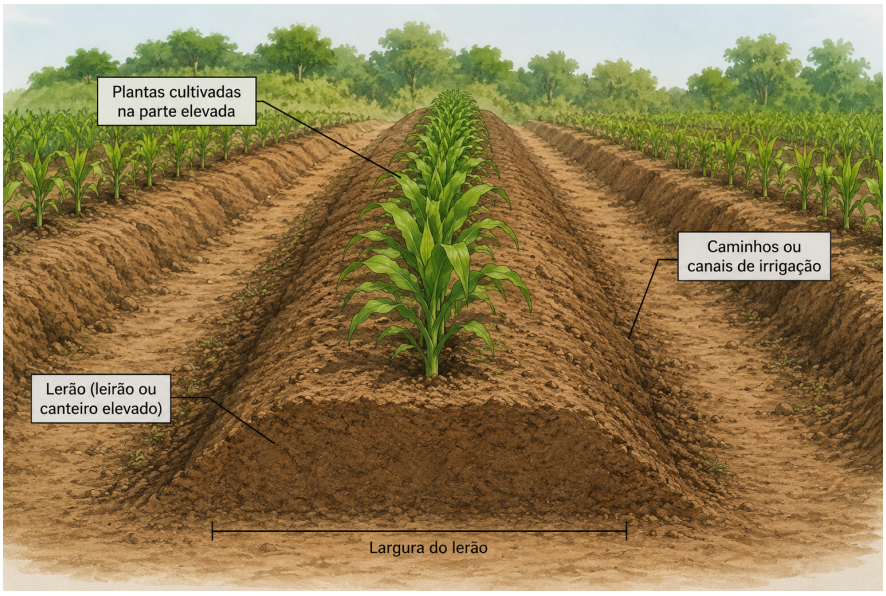
- Qual vai ser a área plantada?

- Quanto vamos colher?
- Quanto vamos gastar?
- De onde foi tirada essa imagem?

Para finalizar a aula, precisamos deixar claro alguns dados e informações que serão utilizados ao longo do trabalho, como:

- **lerão**: como é bastante conhecido entre a população do interior, chamaremos de lerão o canteiro elevado em que se é plantado as sementes.

Figura 21 – Lerão



Fonte: Gerada por IA. Plataforma Chat GPT (2026)

- **Produtividade:** Vamos considerar que um "pé de feijão"produz, em média, 15 vagens e que isso gera cerca de 25 gramas de feijão.

Figura 22 – Pé de feijão plantado



Fonte: Gerada por IA. Plataforma Chat GPT (2026)

- **Rendimento:** espera-se que para cada quilo plantado, isso renderá cerca de 10 kg de feijão.

Por fim, deixamos os seguintes desafios para os alunos:

(a) Em um lerão com 50 m de extensão, se distanciarmos os pés de feijão em 30 cm, qual é a produtividade esperada? .

(b) E se tivermos mais 20 lerões iguais a esse, quanto será colhido?

Com a resolução ou discussão dos estudantes acerca das perguntas, concluímos essa aula. Após respondidas essas perguntas, é esperado que surjam na mente dos estudantes maneiras de se calcular a colheita em uma quantidade qualquer de lerões.

5.2.4 Aulas 6 e 7

Nessa aula, vamos entrar em mais uma etapa do processo de Modelagem Matemática, a abstração, isto é, precisamos transformar o que temos em uma linguagem matemática para que assim possamos resolver os problemas.

Dado um terreno, para os nossos fins, será necessário calcular a sua área, para isso, denotaremos a área total por A. Porém, nem sempre teremos um terreno com

formato retangular, nesses casos vamos dividir o terreno em áreas menores, as quais denotaremos por $A_1, A_2, \ldots, A_n$, desse modo,

$$A = A_1 + A_2 + \cdots + A_n.$$

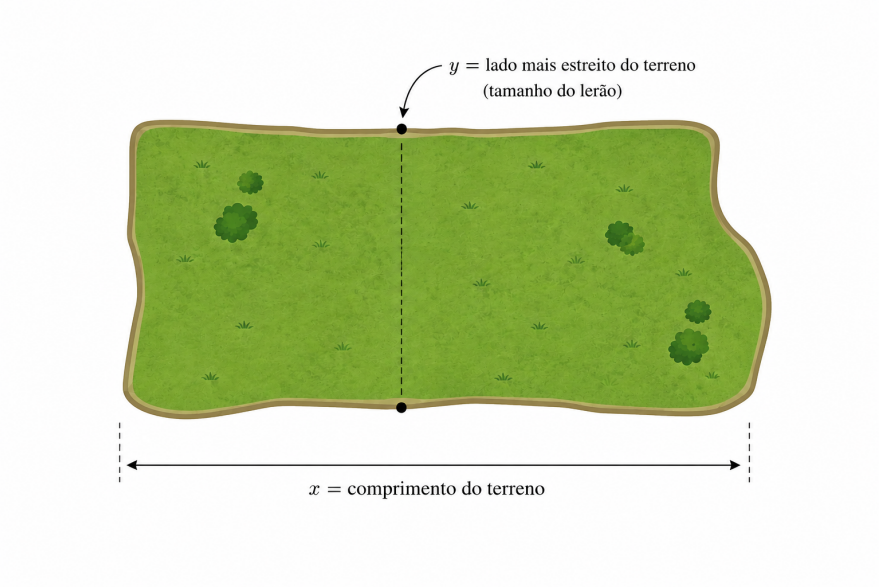
Nem toda área de um terreno deverá ser utilizada para o plantio, então, devemos desconsiderar partes do terreno como casas, reservatórios ou outros espaços que serão destinados a outras finalidades.

Vamos definir as notações que utilizaremos:

- P_l = Produção por lerão;
- y = Comprimento do lerão;
- Q_l = Quantidade de lerão em cada terreno;
- E_p = Espaçamento entre as plantas;
- E_l = Espaçamento entre os lerões;
- l = Largura de cada lerão;
- Q_p = Quantidade de pés de feijão em um lerão;
- Q_t = Quantidade total de pés de feijão na área;
- P = Produção de feijão em kg.

Vamos considerar que um lerão vai de uma extremidade a outra do lado mais estreito do terreno, denotaremos o tamanho do lerão por y e o comprimento do terreno por x.

Figura 23 – Formato do terreno



Fonte: Gerada por IA. Plataforma Chat GPT (2026).

A partir das informações dadas e com as notações definidas, podemos modelar algumas situações que nos fornecerão a estimativa que queremos: estimar a produção da colheita em uma área de plantação qualquer.

Quantidade de plantas por lerão

Para determinar a quantidade de plantas em um lerão, precisamos dividir o tamanho do lerão pelo espaçamento entre as plantas. Dessa maneira, a quantidade de plantas será determinada por:

$$Q_f = \frac{y}{E_p}. \tag{5.1}$$

Quantidade de lerões no terreno

A quantidade de lerões em um terreno dependerá do comprimento do terreno, do espaçamento entre os lerões e da largura dos lerões. Assim:

$$Q_l = \frac{x}{E_l + l}. \tag{5.2}$$

Produção

A quantidade total de plantas no terreno será dada pela quantidade de plantas de um lerão multiplicada pela quantidade de lerões, isto é:

$$Q_t = Q_p \cdot Q_l = \frac{y}{E_p} \cdot \frac{x}{(E_l + l)}. \tag{5.3}$$

Esse valor será a quantidade de plantas, queremos a quantidade em quilogramas de feijão, como foi dado no início, a produção média de cada planta é de 25g de feijão e 25g equivale a 0,025 kg, desse modo, para obter a produção em kg, teremos:

$$P = \frac{y}{E_p} \cdot \frac{x}{(E_l + l)} \cdot 0,025. \tag{5.4}$$

Sendo assim

$$P = \frac{xy}{40E_p \cdot (E_l + l)}. \tag{5.5}$$

Observe que a equação (5.5) é uma expressão que nos possibilita estimar a produção no terreno sabendo as medidas da largura e do comprimento, uma vez que o espaçamento e a largura de cada lerão normalmente é pré-definido.

5.2.5 Aulas 8 e 9 - A utilização do Google Earth para obtenção de áreas e perímetros

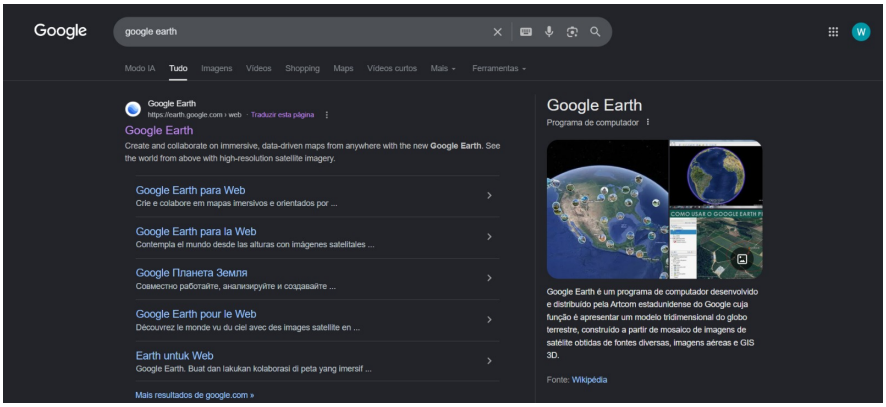
Para fins de exemplificar essa aplicação, utilizaremos o terreno citado anteriormente, porém, essa atividade pode ser desenvolvida como uma atividade de ensino digital associado ao ensino de Matemática. Sugerimos a seguir uma aula que apresenta e ensina os estudantes a utilizarem ferramentas de GPS, que são tão utilizadas atualmente. Para isso, o professor deve dedicar algumas aulas, de preferencia em uma sala de informática ou em computadores disponibilizados pela escola para realizar um minicurso sobre essas ferramentas. A utilização dessa tecnologia associado ao tema pode gerar um interesse ainda maior dos estudantes, de modo que os estudantes terão a chance de modelar e estimar uma produção em um terreno que eles próprios conhecem, seja de um familiar, de algum amigo ou mesmo de algum local que já tenha passado.

Para saber as medidas de qualquer terreno, podemos utilizar uma ferramenta bem conhecida e que pode estar presente em qualquer smartphone, o Google Earth. A partir dele, conseguimos ter uma visão aérea, por meio dos satélites, dos terrenos e daí conseguimos obter as medidas dos lados desse terreno e assim obtemos o perímetro e a área.

A seguir, os passos a serem seguidos:

Passo 1: No navegador do computador digite "Google Earth";

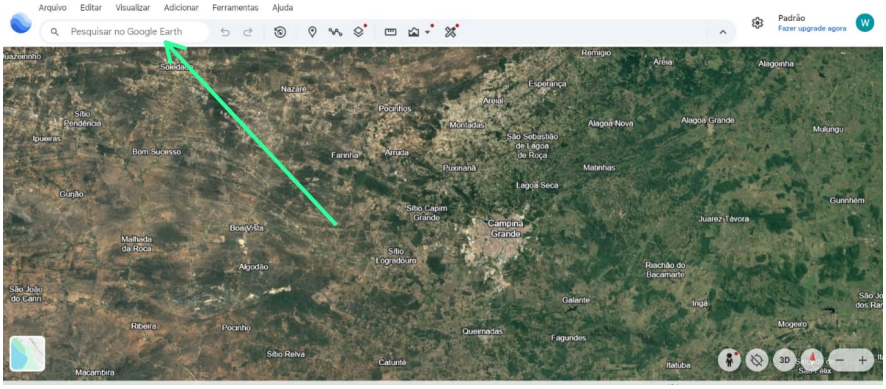
Figura 24 – Print screen do Google Earth



Fonte: Google Earth (2026).

Passo 2: localize o munícipio do terreno que deseja utilizar e em seguida encontre o local desejado;

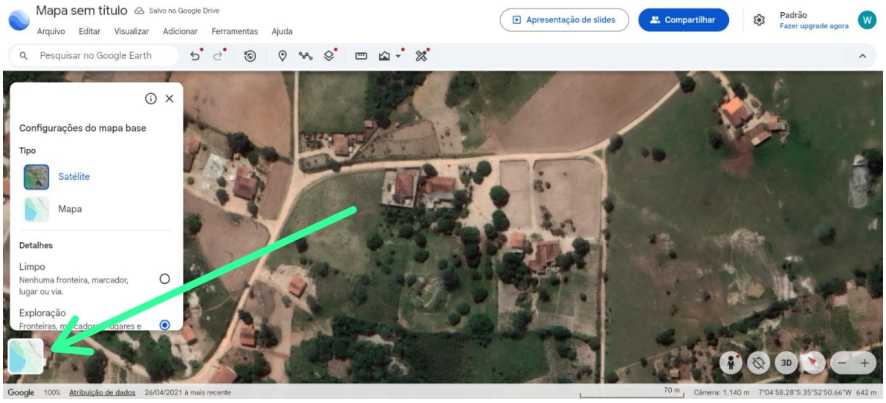
Figura 25 – Print screen do Google Earth



Fonte: Google Earth (2026).

Passo 3: Mude a visualização do mapa para o modo satélite;

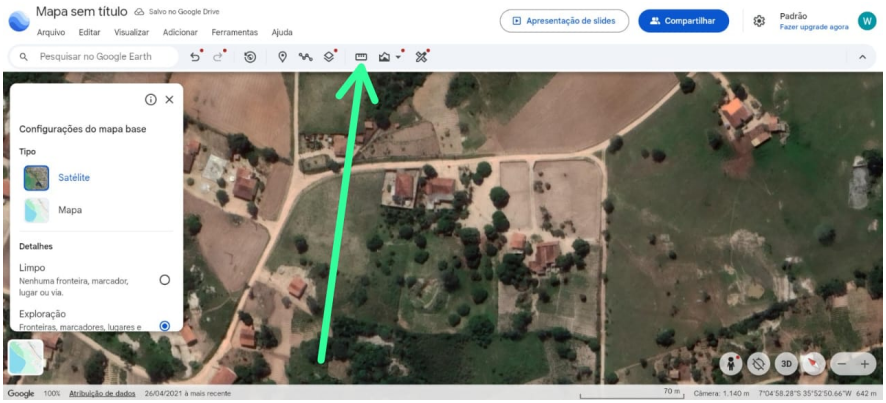
Figura 26 – Print screen do Google Earth



Fonte: Google Earth(2026).

Passo 4: Na parte superior da tela, selecione o ícone de régua;

Figura 27 – Print screen do Google Earth



Fonte: Google Earth (2026).

Passo 5: Clique nos vértices do terreno até fechar a área.

Figura 28 – Print screen do Google Earth



Fonte: Google Earth (2026).

Ao concluir esses passos, o próprio programa nos dará o valor do perímetro e a área do terreno. Com os alunos sabendo utilizar o programa e já tendo os conhecimentos passados nas aulas anteriores, podemos partir para a etapa da resolução.

5.2.6 Aulas 10, 11 e 12

Relembrando o que desejamos: vamos determinar um estimativa do que seria colhido em uma plantação de feijão no terreno a seguir (pertencente ao professor), utilizando o que foi estudado nas aulas anteriores. Antes de iniciar, precisamos definir algumas medidas que tomaremos como padrão, Consideremos o espaçamento entre as plantas sendo de 15 cm e o espaçamento entre os lerões sendo 40 cm como sugere a EMBRAPA (2026) e a largura de cada lerão será de 40 cm. Dessa forma, a equação (5.5), nas condições pré-definidas, será:

$$P = \frac{xy}{40E_p \cdot (E_l + l)}$$
$$P = \frac{xy}{40 \cdot 15 \cdot (40 + 40)}$$
$$P = \frac{xy}{48.000} \text{ kg.}$$

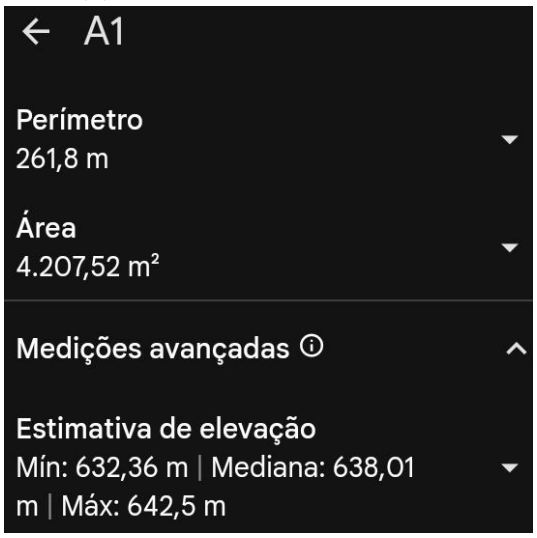
Vamos seguir alguns passos:

Passo 1 - Delimitando a área de plantio: Como foi dito, nem todo terreno será utilizado unicamente para o plantio, existem construções no meio do sítio que ocupam uma boa parte da área. A figura a seguir realça os espaços que serão utilizados para a plantação. Observe que dividimos o terreno em 3 áreas retangulares, então chamaremos de A_1, A_2 e A_3. Dessa forma a nossa área total será dada por

$$A = A_1 + A_2 + A_3. \tag{5.6}$$

Realizando o procedimento no Google Earth descrito anteriormente chegamos nas informações:

(a) Dados do primeiro terreno



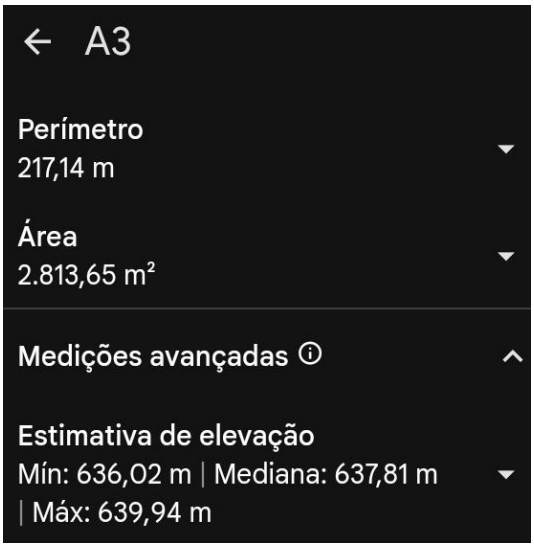
Fonte: Google Earth (2026).

(b) Dados do segundo terreno



Fonte: Google Earth (2026).

(c) Dados do terceiro terreno



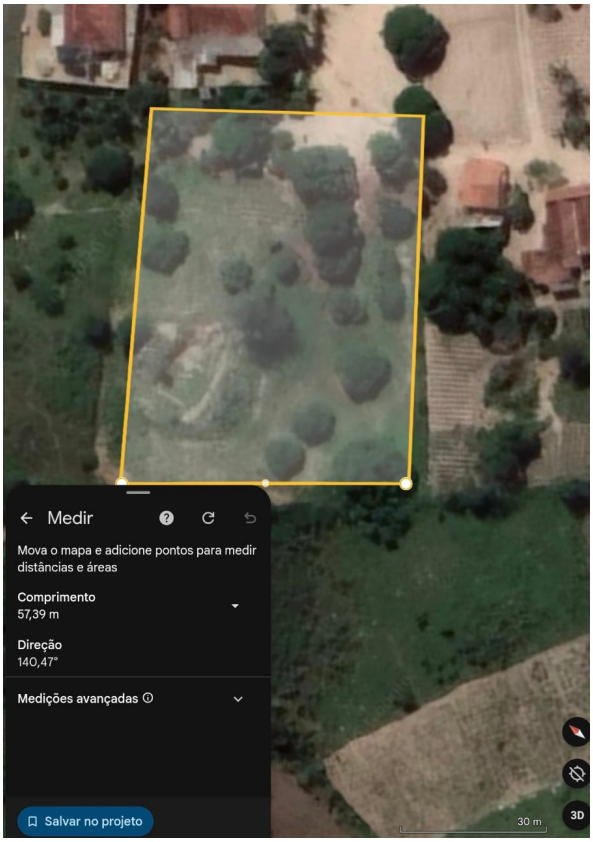
Fonte: Google Earth (2026).

Partindo agora para os cálculos que nos levarão a estimativa da produção no sítio, teremos:

Para A_1

Considere o terreno com os dados medidos a partir do GPS

Figura 30 – Imagem aérea do terreno A_1



Fonte: Google Earth (2026).

Analisando os dados obtidos e os dados no início, como o espaçamento entre as plantas (E_p) e o espaçamento entre os lerões (E_l), obtemos os dados:

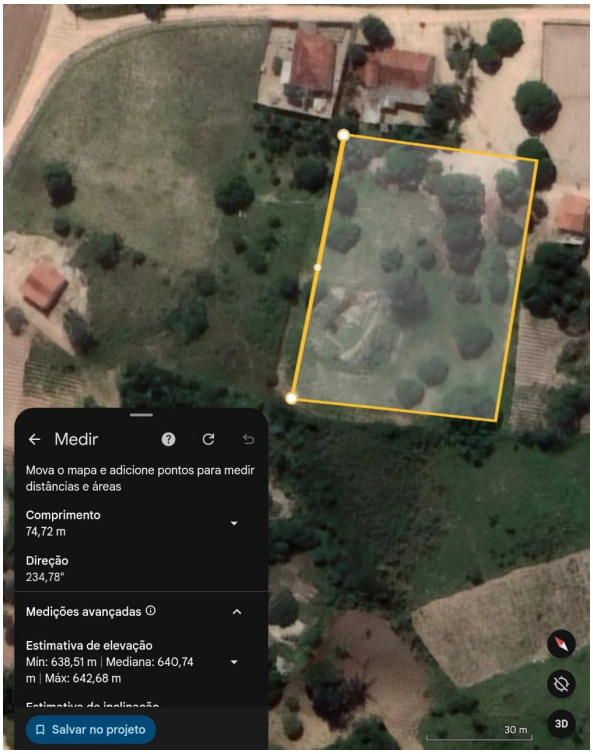
$$y = 57,39 \text{ m};\ E_p = 15 \text{ cm};\ E_l = 40 \text{ cm}.; l = 40 \text{ cm}$$

Desse modo, a partir da equação (5.1), calculamos a quantidade de plantas por lerão, isto é

$$Q_p = \frac{5.739}{15} = 382 \text{ plantas}.$$

A quantidade de lerões será de acordo com o tamanho do terreno. Observemos a imagem a seguir

Figura 31 – Imagem aérea do terreno A_1



Fonte: Google Earth (2026).

Nesse caso, temos $x = 74,72$ m, que, convertendo para centímetros, temos $x = 7.472$ cm. A partir de (5.2), temos

$$Q_l = \frac{7.472}{80} = 93 \text{ lerões},$$

podemos calcular então o valor esperado, em kg, para a produção através de (**??**)

$$P = \frac{5.737 \cdot 7.472}{48.000} = 893,37 \text{ kg}.$$

Para A_2

Seguindo a mesma linha de raciocínio calculemos a produção esperada para A_2

Figura 32 – Imagem aérea do terreno A_2



Fonte: Google Earth (2026).

Desse modo, $y = 3.707$ cm, então a quantidade de plantas será de

$$Q_p = \frac{3.701}{15} = 246 \text{ plantas},$$

Observando as dimensões expostas na figura a seguir, podemos determinar a quantidade de lerões.

Figura 33 – Imagem aérea do terreno A_2



Fonte: Google Earth (2026)

Observando que $x = 6.504$, a quantidade de locais de plantação será

$$Q_l = \frac{6.504}{80} = 81 \text{ lerões.}$$

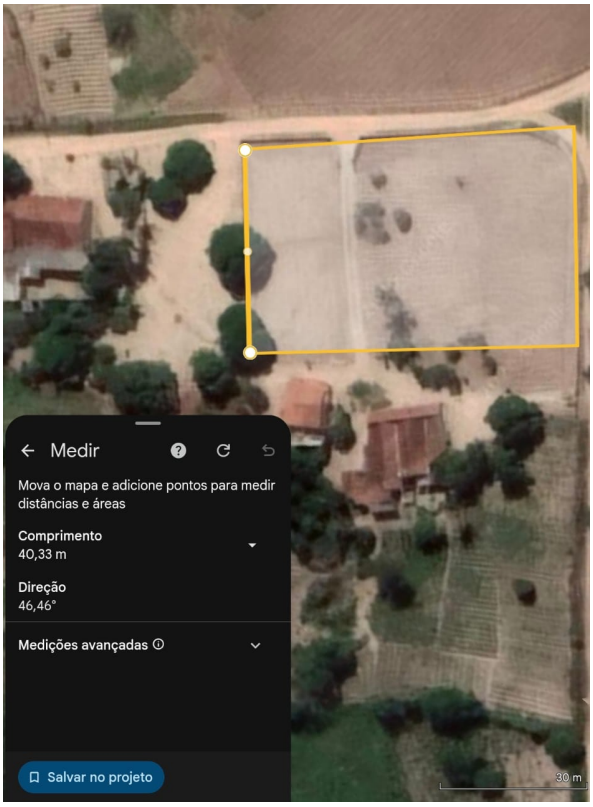
A produção será

$$P = \frac{6.504 \cdot 3.707}{48.000} = 502,3 \text{ kg.}$$

Para A_3

Na terceira área, temos os seguintes dados

Figura 34 – Imagem aérea do terreno A_3

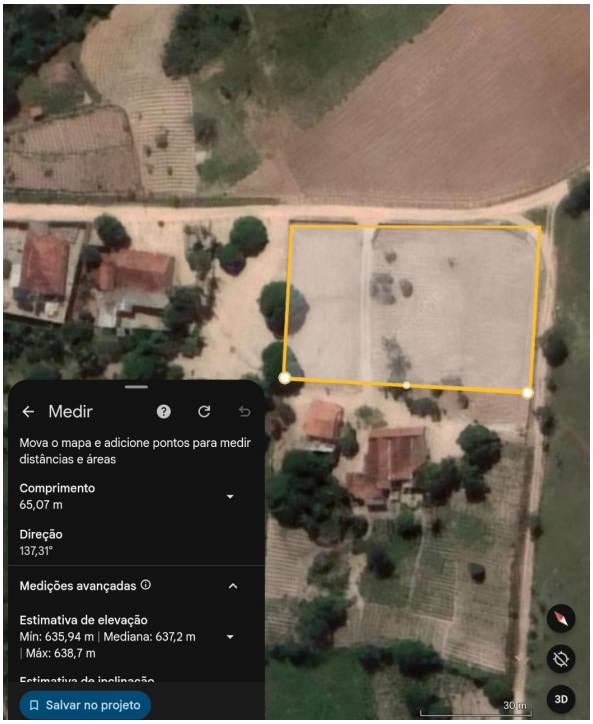


Fonte: Google Earth (2026)

o que nos dá $y = 4.033$ cm. Então

$$Q_p = \frac{4033}{15} = 268 \text{ plantas.}$$

Figura 35 – Imagem aérea do terreno A_3



Fonte: Google Earth (2026)

Sendo $x = 6.507$,

$$Q_l = \frac{6.507}{80} = 81 \text{ lerões},$$

o que nos leva a uma produção de

$$P = \frac{6.507 \cdot 4.033}{48.000} = 546,72 \text{ kg}.$$

Obtemos os valores individuais de cada terreno, porém queremos o valor total, desse modo, somamos os valores e obtemos toda a produção esperada

$$Q_t = 893,37 + 502,3 + 546,72 = 1,942,39 \text{ kg}.$$

Vale ressaltar que a partir desses dados obtidos ainda é possível seguir outras abordagens como por exemplo calcular as despesas e os lucros, porcentagem de aproveitamento, a precificação para comercializar, ou podemos utilizar a mesma estratégia para desenvolver outros tipos de modelos como realizar um projeto de irrigação utilizando conceitos descritos ao longo da dissertação, enfim a modelagem abre um leque muito grande de possibilidades e se torna um grande aliado do professor que busca tornar o seu ensino cada vez mais próximo dos estudantes.

Por fim, para concluir a atividade de modelagem descrita no início, devemos avaliar os resultados, observar se a atividade foi eficiente para o ensino, ver o que deu certo

e principalmente o que deu errado para realizar as modificações necessárias e assim poder reaplicar com maior eficiência.

Em suma, chegamos ao fim desta proposta, com ela esperamos que os estudantes se interessem e sintam-se motivados para estudar a Matemática envolvida, e mais, esperamos que os alunos desenvolvam o senso crítico para avaliar e analisar dados concretos e possivelmente aplicar em situações cotidianas de familiares ou amigos além de ver a importância que a Matemática pode ter em situações mais diversas.

Figura 36 – Plantação própria



Fonte: Autoria própria (2026).

Figura 37 – Plantação própria



Fonte: Autoria própria (2026).

Figura 38 – Plantação própria



Fonte: Autoria própria (2026).

Figura 39 – Plantação própria



Fonte: Autoria própria (2026).

6 Conclusão

Ao longo desta pesquisa, buscou-se compreender as contribuições da Modelagem Matemática para o ensino de Matemática no Ensino Básico, foi abordado de maneira geral o que é a modelagem, trazendo diversos exemplos das mais diversas áreas, mas para tornar o trabalho mais próximo do público estudantil, foi escolhido aprofundar os estudos em algo próximo da realidade local, desse modo, foi realizado um estudo sobre modelos que auxiliam na produção agrícola. Apresentamos aqui a Modelagem Matemática como um método científico e, além disso, como uma ferramenta de ensino-aprendizagem possibilitando a relação entre conceitos matemáticos a outras áreas do conhecimento como Química, Física e Biologia, ou seja, graças a Modelagem Matemática, conseguimos desenvolver uma interdisciplinaridade..

Ao longo do trabalho, a modelagem foi sendo mostrada de diversas maneiras, algumas vezes com conceitos mais avançados, exigindo conhecimento mais avançados de Matemática, outras vezes foram apresentadas maneiras de se modelar com conceitos básicos, o que mostra a possibilidade de desenvolver atividades de modelagem em todos os níveis

As pesquisas feitas para a escrita desta dissertação evidenciaram o tamanho da importância da Matemática para a agricultura. Diversas equações que modelam uma plantação foram descritas aqui, com os conhecimentos necessários, os cálculos são, muitas vezes, simples, podendo ser aplicado em plantações de agricultura familiar. Ressaltamos aqui a importância do saber histórico dos agricultores, que muitas vezes desenvolvem seus próprios métodos para cultivarem e acabam utilizando conceitos matemáticos de maneira indireta.

Buscou-se também desenvolver uma proposta de aplicação, por meio do Produto Educacional, envolvendo um pouco de tudo que foi apresentado. Ressaltamos que, desde o início, a ideia para este trabalho foi fazer algo que fosse dentro da realidade local, algo que não fosse tão abstrato para quem não fosse da área e a Modelagem Matemática possibilitou conseguirmos alcançar essa meta. Vale salientar que o Produto foi desenvolvido dentro das especifidades locais, dentro de uma cultura muito produzida no município que é o feijão, porém ele pode ser adaptado para outras realidades, outras culturas, tudo a depender da realidade e do bioma local. Este trabalho pode servir como um guia para novas aplicações uma vez que podemos modelar diversos fatores em uma produção como a precificação dos cultivos, o gasto de água, a forma de plantar para que o cultivo seja máximo dentre tantos outros.

Por fim, esperamos que os leitores deste trabalho possam se interessar e se aprofundar acerca da Modelagem Matemática, vendo a sua ampla possibilidade de aplicação.

Sobretudo os professores de Matemática que o lerem, que possam aliar a Modelagem à sua prática docente, tornando seu ensino mais significativo para os estudantes.

Referências

Agristar do Brasil. *Hidroponia e gotejamento: técnicas otimizam a utilização da água*. 2019. Publicado em 26 ago. 2019. Disponível em: <https://agristar.com.br/topseed-premium/noticias/detalhe/hidroponia-e-gotejamento-tecnicas-otimizam-a-utilizacao-da-agua-1>. Citado na página 66.

AGRO em DIA. *Cenário é favorável para o plantio de arroz irrigado em Tocantins*. 2024. Disponível em: <https://agroemdia.com.br/2024/07/16/cenario-e-favoravel-para-o-plantio-de-arroz-irrigado-em-tocantins/>. Citado na página 66.

ALBUQUERQUE, P. E. P.; COELHO, E. C. Planilha para obtenção de coeficiente de cultura (kc) para culturas de ciclo anual, segundo método fao, para as condições climáticas brasileiras. *Embrapa*, 2021. Citado 2 vezes nas páginas 63 e 64.

ALLEN, R. G. e. a. *Evapotranspiração da cultura: diretrizes para calcular as necessidades hídricas das culturas*. Roma: FAO, 1998. 326 p. Citado na página 64.

BÁEZ-SÁNCHEZ, A. D.; BOBKO, N. On equilibria stability in an epidemiological sir model with recovery-dependent infection rate. *Tendências em Matemática Aplicada e Computacional*, Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional, v. 21, n. 3, p. 409–424, 2020. Disponível em: <https://www.scielo.br/tema>. Citado na página 26.

BARBOSA, J. C. A modelagem matemática na sala de aula. *VIII Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM)*, Anais do ENEM, 2004. Citado na página 20.

BASSANEZI, R. C. *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática*. São Paulo: Editora Contexto, 2002. 188 p. Citado 9 vezes nas páginas 12, 14, 19, 20, 37, 38, 39, 48 e 72.

BERTONE, A. M.; BASSANEZI, R. C.; JAFELICE, R. S. M. *Modelagem Matemática*. Uberlândia: Universidade Federal de Uberlândia, 2014. 187 p. Citado na página 13.

Brasil. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, DF: MEC, 2018. Disponível em: <https://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 18.

Brasil, Ministério do Desenvolvimento e Assistência Social, Família e Combate à Fome. *Programa de Aquisição de Alimentos*. 2026. Disponível em: <https://www.gov.br/mds/pt-br/acoes-e-programas/acesso-a-alimentos-e-a-agua/programa-de-aquisicao-de-alimentos>. Citado na página 43.

BURAK, D. Modelagem matemática e a sala de aula. *I Encontro Paranaense de Modelagem Matemática*, 2004. Citado na página 19.

EMBRAPA, E. B. de P. A. *Cultivos*. 2026. Acesso em: 19 jun. 2026. Disponível em: <https://www.embrapa.br/web/ageitec/arvores-de-conhecimento/cultivos>. Citado na página 85.

FERREIRA, G. P.; SILVEIRA, A.; SILVA, L. A. A modelagem matemática ao longo da história e o surgimento da modelação matemática no brasil. *XI Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM)*, Anais do ENEM, 2013. Citado 4 vezes nas páginas 12, 14, 31 e 32.

IMPA. *Isolamento pode salvar um brasileiro a cada 4 minutos, diz estudo*. 2020. Disponível em: <https://impa.br/notices/isolamento-pode-salvar-um-brasileir-a-cada-4-minutos-diz-estudo/>. Acesso em: 20 jun. 2026. Citado na página 26.

Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. *Produção Agrícola Municipal: São Sebastião de Lagoa de Roça (PB)*. Rio de Janeiro, 2026. Acesso em: 19 jun. 2026. Disponível em: <https://cidades.ibge.gov.br/brasil/pb/sao-sebastiao-de-lagoa-de-roca/pesquisa/24/76693>. Citado 2 vezes nas páginas 7 e 77.

KALNAY, E. *Atmospheric Modeling, Data Assimilation and Predictability*. 1. ed. [S.l.]: Cambridge University Press, 2003. Citado na página 30.

MANTOVANI, E. C.; BERNARDO, S.; PALARETTI. *Irrigação: princípios e métodos*. Viçosa: UFV, 2009. 187 p. Citado 7 vezes nas páginas 56, 60, 61, 63, 65, 67 e 70.

MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. P. *Matemática Discreta*. 3. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2022. v. 12. (Coleção PROFMAT, v. 12). ISBN 978-85-8337-178-6. Citado na página 34.

Prefeitura Municipal de São Sebastião de Lagoa de Roça. *História*. 2026. Disponível em: <https://lagoaderoca.pb.gov.br/municipio/historia/>. Citado na página 43.

ROQUE, T.; CARVALHO, J. P. *Tópicos de História da Matemática*. Rio de Janeiro: SBM, 2012. 452 p. Citado na página 14.

ROSA, R. L. da. *Nutrição Humana*. Indaial: UNIASSELVI, 2020. 209 p. Citado na página 26.

Sociedade Brasileira de Matemática. *Dissertações e Recursos Educacionais do PROFMAT*. 2026. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/busca_tcc.php>. Citado na página 12.

TAVONI, R.; OLIVEIRA, R. Z. Os modelos de crescimento populacional de malthus e verhulst - uma motivação para o ensino de logarítmos e exponenciais. *C.Q.D - Revista Eletrônica Paulista de Matemática*, 2013. Citado na página 28.

VIEIRA, R. *Equação de vida: como a matemática modela a pandemia?* 2020. Acesso em: 19 jun. 2026. Disponível em: <https://jornal.usp.br/universidade/equacao-de-vida-como-a-matematica-modela-a-pandemia/>. Citado na página 26.

ZABALA, A. *A prática educativa: como ensinar*. Porto Alegre: Artmed, 1998. 224 p. Citado na página 75.

Universidade Federal de Campina Grande - UFCG
Sistema de Bibliotecas - SISTEMOTECA
Catalogação de Publicação na Fonte. UFCG - Biblioteca Central

S237e Santos, Wilton dos.
Ensinando Matemática através da terra: modelando matematicamente problemas do cotidiano agrícola / Wilton dos Santos. – 2026.
101 f. : il. color.

Dissertação (mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2026.
"Orientação: Prof. Dr. Romildo Nascimento de Lima".
Referências.

1. Modelagem Matemática. 2. Matemática - Ensino Básico. 3. Agricultura Familiar. 4. Ensino Fundamental. I. Lima, Romildo Nascimento de Lima. II. Título.

UFCG/BC CDU 51(043.3)

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELO BIBLIOTECÁRIO GUSTAVO DINIZ DO NASCIMENTO CRB-15/515