



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Mestrado Profissional – PROFMAT/CCT/UFCG

Probabilidade Geométrica: Dos problemas clássicos à modelagem matemática de situações reais com uso do Geogebra e do Python

por

Almir Lando Gomes da Silva

07/2026

Campina Grande

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Mestrado Profissional – PROFMAT/CCT/UFCG

Probabilidade Geométrica: Dos problemas clássicos à modelagem matemática de situações reais com uso do Geogebra e do Python[1]

por

Almir Lando Gomes da Silva

sob a orientação da(o)

Prof. Dr. Weiller Felipe Chaves Barboza

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT/UFCG, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

07/2026

Campina Grande

[1]O presente trabalho foi realizado com apoio da CAPES, Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

Universidade Federal de Campina Grande - UFCG
Sistema de Bibliotecas - SISTEMOTECA
Catalogação de Publicação na Fonte. UFCG - Biblioteca Central

S586p Silva, Almir Lando Gomes da.

Probabilidade Geométrica: dos problemas clássicos à modelagem de situações reais com uso do Geogebra e do Python / Almir Lando Gomes da Silva. – 2026.

78 f. : il. color.

Dissertação (mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciência e Tecnologia, 2026.

"Orientação: Prof. Dr. Weiller Felipe Chaves Barboza".

Referências.

1. Ensino de Matemática. 2. Probabilidade Geométrica. 3. GeoGebra. 4. Python. 5. Modelagem Matemática. I. Barboza, Weiller Felipe Chaves. II. Título.

UFCG/BC CDU 51:37(043.3)

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECÁRIA ITAPUANA SOARES DIAS GONÇALVES CRB-15/93

Probabilidade Geométrica: Dos problemas clássicos à modelagem matemática de situações reais com uso do Geogebra e do Python

por

Almir Lando Gomes da Silva

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT/UAMat/UFCG, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Aprovada em: 18/08/2026

Documento assinado digitalmente
gov.br
ISRAEL BURITI GALVAO
Data: 08/09/2026 12:38:46-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Israel Buriti Galvão – UEPB
(Membro Externo)

Documento assinado digitalmente
gov.br
DANIEL CORDEIRO DE MORAIS FILHO
Data: 09/09/2026 15:00:16-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Daniel Cordeiro de Morais Filho – UFCG
(Membro Interno)

Documento assinado digitalmente
gov.br
WEILLER FELIPE CHAVES BARBOZA
Data: 08/09/2026 12:19:25-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Weiller Felipe Chaves Barboza – UFCG
(Orientador)

07/2026

Agradecimentos

Gostaria de agradecer primeiramente a Deus, pois sem Ele nada seria possível.

À minha amada esposa, Ívyna Lavínia, pelo apoio incondicional, amor e companhia maravilhosa de cada dia. Assim como ao meu amado filho, Heitor, que me inspira a ser um ser humano melhor.

A meus pais, Manoel e Alba, pelo incentivo à educação, pelos valores e formação de caráter proporcionados durante minha vida.

Aos meus professores de matemática, desde o ensino fundamental até os grandes mestres do Profmat. Em especial, à professora Paula, que no ensino fundamental fez com que eu me apaixonasse pela matemática; ao Me Orlando Almeida, que além de suas ótimas aulas, me ajudou pessoalmente de maneira significativa durante a graduação; por fim aos docentes do Profmat que com seu rigor ajudaram a torna-me um professor melhor.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Weiller Felipe Chaves Barboza, pela disponibilidade, dedicação e ensinamentos compartilhados durante a escrita desta dissertação.

Dedicatória

Dedico este trabalho à minha família.

Resumo

A Probabilidade Geométrica é um ramo da Teoria das Probabilidades em que as probabilidades são determinadas por meio da razão entre medidas geométricas, como comprimentos, áreas e volumes. Apesar de seu potencial para integrar conceitos de Geometria, Probabilidade e Modelagem Matemática, esse conteúdo ainda é pouco explorado na Educação Básica. Nesse contexto, esta dissertação tem como objetivo apresentar uma proposta para o ensino de Probabilidade Geométrica que articule fundamentos matemáticos, problemas clássicos, aplicações contextualizadas e tecnologias digitais. Inicialmente, são apresentados os principais conceitos de Análise Combinatória, Probabilidade e Geometria Plana necessários ao desenvolvimento do tema. Em seguida, são discutidos problemas clássicos, como o Problema do Macarrão, o Paradoxo de Bertrand e a Agulha de Buffon, destacando diferentes estratégias de resolução e suas interpretações geométricas. Posteriormente, são apresentadas aplicações, de autoria própria, utilizando o software GeoGebra e a linguagem de programação Python, explorando situações relacionadas ao futebol e evidenciando como essas ferramentas podem contribuir para a construção e análise de modelos matemáticos. Como produto educacional, é proposta uma sequência didática composta por seis aulas, estruturada com base em metodologias investigativas e no uso de tecnologias digitais. Espera-se que esta proposta contribua para tornar o ensino da Probabilidade Geométrica mais significativo, contextualizado e atrativo, oferecendo aos professores uma alternativa para abordar esse conteúdo na Educação Básica.

Palavras-chave: Probabilidade Geométrica; Ensino de Matemática; GeoGebra; Python; Modelagem Matemática.

Abstract

Geometric Probability is a branch of Probability Theory in which probabilities are determined through the ratio of geometric measures, such as lengths, areas, and volumes. Despite its potential to integrate concepts from Geometry, Probability, and Mathematical Modeling, this topic remains relatively unexplored in Basic Education. In this context, this dissertation aims to present a proposal for teaching Geometric Probability that combines mathematical foundations, classical problems, contextualized applications, and digital technologies. Initially, the main concepts of Combinatorics, Probability, and Plane Geometry necessary for the development of the topic are presented. Next, classical problems, such as the Spaghetti Problem, Bertrand's Paradox, and Buffon's Needle Problem, are discussed, highlighting different solution strategies and their geometric interpretations. Subsequently, original applications developed by the author using GeoGebra software and the Python programming language are presented, exploring situations related to soccer and demonstrating how these tools can contribute to the construction and analysis of mathematical models. As an educational product, a six-lesson teaching sequence is proposed, structured around investigative methodologies and the use of digital technologies. It is expected that this proposal will contribute to making the teaching of Geometric Probability more meaningful, contextualized, and engaging, while offering teachers an alternative approach to addressing this topic in Basic Education.

Keywords: Geometric Probability; Mathematics Education; GeoGebra; Python; Mathematical Modeling.

Sumário

Agradecimentos i

Dedicatória ii

Resumo iii

Abstract iv

1 Introdução 1

2 Fundamentos de Probabilidade e Geometria 5

2.1 Análise Combinatória . . . 5

2.1.1 Permutação . . . 6

2.1.2 Arranjo . . . 8

2.1.3 Combinação . . . 9

2.2 Probabilidade . . . 10

2.2.1 Definição de Probabilidade . . . 11

2.2.2 Probabilidade Condicional . . . 13

2.2.3 Teorema da Multiplicação . . . 14

2.2.4 Teorema da Probabilidade Total . . . 15

2.2.5 Teorema de Bayes . . . 17

2.2.6 Lei Binomial . . . 19

2.3 Áreas de Regiões Planas . . . 20

2.3.1 Área de Polígonos . . . 20

2.3.2 Área de Regiões Circulares . . . 28

3 Probabilidade Geométrica 32

3.1 Definição . . . 32

3.2 Problema do Macarrão . . . 33

3.3 Paradoxo de Bertrand . . . 36

3.4 Agulha de Buffon . . . 40

3.5 Outros Problemas . . . 45

4 Tecnologias Digitais Aplicadas à Probabilidade geométrica 50

4.1 Modelagem com GeoGebra 50
4.2 Atividades com Python 58
4.2.1 Aplicação ao Triângulo de Sierpiński 60
4.2.2 Validação computacional 66
4.2.3 Exploração em sala de aula 66
4.2.4 Aplicações ao futebol 67

5 Conclusão **73**

A Material Complementar **75**

Capítulo 1

Introdução

Um dos pioneiros no estudo das probabilidades foi *Girolamo Cardano* (1501–1576). Cardano utilizou jogos de azar como motivação para escrever o livro *De Ludo Aleae*, no qual procurava explicar estratégias para aumentar as chances de vitória em determinados jogos. Entre suas contribuições, destaca-se a análise das possibilidades obtidas no lançamento de dois dados, em particular o cálculo das chances de obter soma igual a 10. Tais estudos representam uma das primeiras tentativas sistemáticas de compreender matematicamente fenômenos aleatórios.

Diz-se que, certa vez, um cavalheiro chamado *Antoine Gombaud* (1607–1684), conhecido como *Chevalier de Méré* e famoso por participar de jogos de azar, pediu a *Blaise Pascal* (1623–1662) que calculasse suas chances de vitória em determinados jogos envolvendo dados e cartas. Apesar de o interesse humano por jogos de azar remontar a períodos muito anteriores, o pedido de Méré motivou um estudo mais aprofundado por parte de Pascal e *Pierre de Fermat* (1607–1665), dando origem ao que atualmente conhecemos como Teoria das Probabilidades.

Segundo Jesus em [5], Antoine Gombaud costumava apostar em jogos do seguinte tipo: ao lançar um dado comum, numerado de 1 a 6, quatro vezes consecutivas, venceria caso obtivesse pelo menos um resultado igual a 6. Inicialmente, Méré obteve relativo sucesso em suas apostas e acreditava ter encontrado uma estratégia vantajosa. Sua lógica era baseada em uma ideia equivocada de proporcionalidade direta. Como a chance de obter um 6 em um único lançamento é de $\frac{1}{6}$, ele concluiu que, em dois lançamentos, a chance seria o dobro; em três lançamentos, o triplo; e assim sucessivamente.

Dessa forma, Antoine acreditava que suas probabilidades de vitória seriam:

$$\frac{1}{6} \approx 16,6\%, \qquad \frac{1}{3} \approx 33,3\%, \qquad \frac{1}{2} = 50\%, \qquad \frac{2}{3} \approx 66,6\%,$$

para um, dois, três e quatro lançamentos, respectivamente. Confiante em sua estratégia e já sem muitos adversários dispostos a enfrentá-lo, o Chevalier resolveu modificar as

regras do jogo. A nova aposta consistia em obter um duplo 6 ao lançar dois dados em um total de 24 tentativas. Méré acreditava que as chances de sucesso nesse novo jogo seriam equivalentes às chances de obter ao menos um 6 em quatro lançamentos de um único dado. Contudo, para sua surpresa, passou a acumular muito mais derrotas do que vitórias.

Intrigado com o aparente fracasso de sua estratégia, Antoine pediu a Pascal que analisasse matematicamente o problema. Pascal, que mantinha frequente correspondência com Fermat sobre questões relacionadas a jogos de azar, percebeu que não era possível aplicar proporcionalidade direta em situações probabilísticas envolvendo eventos independentes. Era necessário considerar todas as possibilidades envolvidas no experimento aleatório.

A partir dessa análise, Pascal obteve os seguintes resultados para as probabilidades de sucesso no lançamento de um dado:

a) Lançando um dado.

Probabilidades	**1 lançamento**	**2 lançamentos**	**3 lançamentos**	**4 lançamentos**
Chevalier de Méré	$\frac{1}{6} \approx 16,7\%$	$\frac{1}{3} \approx 33,3\%$	$\frac{1}{2} = 50\%$	$\frac{2}{3} \approx 66,7\%$
Pascal	$\frac{1}{6} \approx 16,7\%$	$\frac{11}{36} \approx 30,6\%$	$\frac{91}{216} \approx 42,1\%$	$\frac{671}{1296} \approx 51,8\%$

b) Lançando dois dados.

No caso do lançamento de dois dados, Pascal utilizou o conceito de evento complementar. Em vez de calcular diretamente a probabilidade de obter ao menos um duplo 6 em 24 lançamentos, ele calculou a probabilidade de o duplo 6 não ocorrer em nenhuma tentativa.

Como a probabilidade de não obter um duplo 6 em um lançamento de dois dados é igual a $\frac{35}{36}$, e os lançamentos são independentes, segue que a probabilidade de o evento não ocorrer em 24 lançamentos consecutivos é dada por

$$\left(\frac{35}{36}\right)^{24}.$$

Portanto, a probabilidade de ocorrer ao menos um duplo 6 nas condições propostas é

$$P = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24},$$

o que resulta em aproximadamente $49,1\%$.

Esses resultados justificam, matematicamente, a razão das frequentes derrotas do Chevalier de Méré em sua nova modalidade de aposta. O pensamento equivocado de que as probabilidades das apostas eram diretamente proporcionais levou o Chevalier a ter mais chances de perder do que de vencer em suas apostas.

Posteriormente, outros estudiosos também contribuíram significativamente para o desenvolvimento da Teoria das Probabilidades. Entre eles destaca-se *Johannes Kepler* (1571–1630), que utilizou ideias probabilísticas em estudos astronômicos relacionados a diferentes posições de uma mesma estrela [7].

Outro importante nome foi *Galileu Galilei* (1564–1642), que investigou problemas envolvendo o lançamento de três dados, como a comparação entre as chances de se obter soma igual a 9 ou soma igual a 10. Galileu demonstrou corretamente que a soma 9 ocorre em 27 casos possíveis, enquanto a soma 10 ocorre em 25 casos.

Com o passar do tempo, a Teoria das Probabilidades mostrou-se útil em áreas muito além dos jogos de azar. Segundo Morgado [7], durante o século XVII, matemáticos perceberam a importância da probabilidade em questões envolvendo taxas de mortalidade, cálculos de seguros e problemas econômicos. Já no século XVIII, técnicas probabilísticas passaram a ser amplamente utilizadas em estudos estatísticos relacionados a impostos, doenças e crescimento populacional.

Em 1713, *Jakob Bernoulli* (1655–1705) publicou a obra *Ars Conjectandi*, considerada um marco na história da probabilidade. Nesse trabalho, Bernoulli apresentou um importante resultado conhecido atualmente como *Lei dos Grandes Números*. Por meio desse teorema, Bernoulli procurou relacionar probabilidades teóricas com frequências observadas experimentalmente, estabelecendo fundamentos que influenciaram profundamente o desenvolvimento da Estatística moderna (MORGADO,[7]).

A Teoria das Probabilidades consolidou-se, assim, como uma das áreas mais importantes da Matemática, estando presente em diversas aplicações científicas, econômicas, tecnológicas e educacionais. Dentro desse contexto, destaca-se a Probabilidade Geométrica, ramo que relaciona conceitos probabilísticos com propriedades geométricas, permitindo investigar problemas envolvendo comprimentos, áreas, volumes e distribuições espaciais.

Neste trabalho, estudaremos alguns conceitos fundamentais de Probabilidade Geométrica. A introdução apresentou aspectos históricos. O capítulo 2 aborda os fundamentos básicos de Probabilidade e Geometria, os quais servirão de base para os problemas propostos e resolvidos neste trabalho. O capítulo em questão demonstra as fórmulas de métodos de contagem até a definição de probabilidade e suas ramificações. Em relação à geometria, são apresentadas as fórmulas de calculo de áreas de polígonos comuns, assim como de regiões planas circulares. No capítulo 3 é definida a Probabilidade Geométrica e são enunciados e resolvidos tanto problemas clássicos, como problemas comuns sobre o conteúdo principal do trabalho. Entre os problemas citados, destacam-se o Paradoxo de Bertrand, a Agulha de Buffon e outros problemas clássicos que ilustram a interação entre Geometria e Probabilidade. O capítulo 4 apresenta modelagens de autoria própria relacionando o futebol com a probabilidade geométrica. São sugeridos situações-problema

que possam estimular e despertar o interesse dos alunos, seja pela curiosidade ou por se tratar de algo familiar ao cotidiano deles, como é o caso do futebol. Os problemas foram modelados usando o Software Geogebra e a linguagem computacional Python.

Capítulo 2

Fundamentos de Probabilidade e Geometria

Introdução à Probabilidade

Antes de definirmos formalmente o conceito de probabilidade e seus principais resultados, faz-se necessário apresentar algumas ferramentas matemáticas fundamentais para o desenvolvimento dos cálculos probabilísticos. Entre essas ferramentas, destaca-se a Análise Combinatória, área da Matemática responsável pelo estudo de técnicas de contagem.

Em muitos problemas probabilísticos, o cálculo da probabilidade de um evento depende diretamente da quantidade de resultados possíveis de determinado experimento aleatório. Assim, métodos de contagem tornam-se indispensáveis para organizar e quantificar tais possibilidades. Nesse contexto, iniciaremos este capítulo apresentando alguns conceitos básicos de Análise Combinatória, enfatizando três importantes métodos de contagem: permutação, arranjo e combinação. Tais conceitos serão utilizados posteriormente no estudo da Teoria das Probabilidades e, em especial, em aplicações envolvendo Probabilidade Geométrica.

2.1 Análise Combinatória

Segundo Hazzan [4], "a Análise Combinatória visa desenvolver métodos que permitam contar o número de elementos de um conjunto, sendo estes elementos agrupamentos formados sob certas condições". Em outras palavras, a Análise Combinatória busca determinar a quantidade de maneiras pelas quais determinados objetos podem ser organizados, selecionados ou distribuídos. Dependendo do problema estudado, a ordem dos elementos pode ou não ser relevante, dando origem a diferentes métodos de contagem.

Neste trabalho, serão abordados três dos principais métodos combinatórios: Permu-

tação, que trata da ordenação de elementos; Arranjo, que considera a seleção ordenada de elementos; e Combinação, que envolve a seleção de elementos independentemente da ordem.

2.1.1 Permutação

As permutações surgem em situações nas quais desejamos organizar todos os elementos de um conjunto, levando em consideração a ordem em que eles aparecem.

Definição 2.1 (Permutação sem repetição)**.** Seja

$$M = \{m_1, m_2, \ldots, m_n\}$$

um conjunto com n elementos distintos, isto é,

$$m_i \neq m_j, \quad \text{se } i \neq j.$$

Chamamos de *Permutação de n elementos* o número de maneiras distintas de organizar todos os elementos de M. Esse número é dado por

$$P_n = n(n-1)(n-2)\ldots 2 \cdot 1. \tag{2.1}$$

A expressão anterior corresponde exatamente ao fatorial de n. Assim, podemos escrever

$$P_n = n!. \tag{2.2}$$

Esse caso recebe o nome de *Permutação sem repetição*, pois todos os elementos do conjunto são distintos.

Utilizando permutação simples, podemos calcular o número de anagramas de uma palavra. Anagrama é uma palavra, que faz sentido ou não, gerada quando se permutam as posições das letras de uma palavra qualquer.

Exemplo 2.2. .A palavra **LUGAR** possui 5 letras distintas. Portanto, o número total de anagramas é dado por

$$P_5 = 5! = 120.$$

Assim, a palavra **LUGAR** possui 120 anagramas distintos.

Definição 2.3 (Permutação com repetição)**.** Seja

$$M = \{m_1, m_2, \ldots, m_n\}$$

um conjunto com n elementos, no qual existam elementos repetidos.

Suponhamos que determinados elementos repitam-se $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$ vezes, respectivamente. O número de permutações distintas de M é dado por

$$P_n^{\alpha,\beta,\ldots,\gamma} = \frac{n!}{\alpha!\beta!\ldots\gamma!}. \tag{2.3}$$

Esse caso recebe o nome de *Permutação com repetição.*

Exemplo 2.4. A palavra **BATATA** possui 6 letras, sendo:

- uma letra B;
- três letras A;
- duas letras T.

Logo, o número de anagramas distintos é dado por

$$P_6^{3,2} = \frac{6!}{3!\,2!} = \frac{720}{6 \cdot 2} = 60.$$

Portanto, a palavra **BATATA** possui 60 anagramas distintos.

Definição 2.5 (Permutação circular)**.** Seja

$$M = \{m_1, m_2, \ldots, m_n\}$$

um conjunto com n elementos distintos.

Quando os elementos são organizados em formato circular, consideramos equivalentes as disposições obtidas por rotação. Nesse caso, o número de permutações circulares é dado por

$$PC_n = (n-1)!. \tag{2.4}$$

Esse caso recebe o nome de *Permutação circular.*

Exemplo 2.6. Deseja-se calcular de quantas maneiras 5 integrantes de uma família podem sentar-se ao redor de uma fogueira.

Como se trata de uma disposição circular, utilizamos a fórmula da permutação circular:

$$PC_5 = (5-1)! = 4! = 24.$$

Portanto, existem 24 maneiras distintas de acomodar os integrantes ao redor da fogueira.

2.1.2 Arranjo

Os arranjos aparecem em situações nas quais escolhemos apenas parte dos elementos de um conjunto, sendo a ordem dos elementos importante. Podemos definir um arranjo como sendo uma sequência ordenada de p elementos escolhidos de um conjunto com n elementos distintos, de modo que a posição de cada elemento produz uma nova sequência. Segue a demonstração.

Seja

$$M = \{m_1, m_2, \ldots, m_n\}$$

um conjunto com n elementos. Escolhendo-se p elementos de M, com

$$0 < p \leq n,$$

vamos calcular a quantidade de agrupamentos distintos de p elementos considerando o número de possibilidades para cada posição do agrupamento. Assim, temos que:

- Para a primeira posição n possibilidades;
- Para a segunda posição $(n-1)$ possibilidades;
- Para a terceira posição $(n-2)$ possibilidades;

$\vdots$

- Para a n-ésima posição $(n-(p-1)$ possibilidades;

Pelo princípio multiplicativo, segue que

$$A_{n,p} = n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1) \tag{2.5}$$

Como $0 < p \leq n$, podemos multiplicar a equação (2.5) por

$$\frac{(n-p)!}{(n-p)!}$$

obtendo a seguinte equação

$$A_{n,p} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)(n-p)!}{(n-p)!} =$$
$$A_{n,p} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)(n-p)(n-p-1)(n-p-2)\ldots 2.1}{(n-p)!}$$

Agora, perceba que o numerador da fração na equação acima nada mais é do que $n!$. Portanto, a fórmula para se calcular o número de arranjos de n elementos tomados p a p

é dada por

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}. \tag{2.6}$$

Em problemas de arranjo, duas sequências contendo os mesmos elementos em ordens diferentes são consideradas distintas.

Exemplo 2.7. Em uma corrida com 10 participantes, deseja-se calcular de quantas maneiras diferentes o pódio pode ser formado.

Observe que alterar a posição dos competidores modifica completamente o resultado da corrida. Assim, trata-se de um problema de arranjo.

Como o pódio possui três posições distintas (primeiro, segundo e terceiro lugares), temos

$$A_{10,3} = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10!}{7!}.$$

Simplificando, obtemos

$$A_{10,3} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720.$$

Portanto, existem 720 maneiras distintas de formar o pódio dessa corrida.

2.1.3 Combinação

As combinações surgem em problemas nos quais desejamos selecionar elementos de um conjunto sem que a ordem da escolha seja relevante.

Definição 2.8. Chamamos de *Combinação* de n elementos tomados p a p o número de subconjuntos com p elementos que podem ser formados a partir de um conjunto com n elementos distintos.

Diferentemente do arranjo, na combinação sequências que possuem os mesmos elementos são consideradas iguais, independentemente da ordem em que aparecem.

Assim, para evitar contagens repetidas, dividimos o número de arranjos pela quantidade de permutações possíveis entre os p elementos escolhidos. Dessa forma,

$$C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{P_p} = \frac{\dfrac{n!}{(n-p)!}}{p!}.$$

Logo,

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}. \tag{2.7}$$

Exemplo 2.9. Deseja-se calcular de quantas maneiras pode-se formar um trio para representar uma turma com 25 alunos.

Como a ordem de escolha dos estudantes não altera o grupo formado, trata-se de um problema de combinação.

Assim,

$$C_{25,3} = \frac{25!}{3!(25-3)!} = \frac{25!}{3!\,22!}.$$

Simplificando,

$$C_{25,3} = \frac{25 \cdot 24 \cdot 23}{6} = 2300.$$

Portanto, existem 2300 maneiras distintas de formar esse trio.

2.2 Probabilidade

Após estudarmos permutação, arranjo e combinação, passaremos agora à introdução dos conceitos fundamentais da Teoria das Probabilidades, a qual está relacionada ao estudo de fenômenos aleatórios, isto é, situações nas quais não é possível prever com certeza absoluta o resultado de um experimento, mesmo quando todas as condições são conhecidas. Assim, para compreender adequadamente a definição de probabilidade, é necessário introduzir alguns conceitos básicos, como experimento aleatório, espaço amostral e evento.

Experimentos Aleatórios

Definição 2.10. Chamamos de *Experimento Aleatório* todo experimento que, mesmo podendo ter seus resultados possíveis previamente conhecidos, não permite prever com certeza absoluta qual resultado será obtido.

Exemplo 2.11. O lançamento de um dado comum de seis faces constitui um experimento aleatório, pois embora conheçamos todos os resultados possíveis, não podemos prever exatamente qual face ocorrerá em determinado lançamento.

Espaço Amostral

Definição 2.12. Chamamos de *Espaço Amostral* o conjunto formado por todos os resultados possíveis de um experimento aleatório.

O espaço amostral será denotado pela letra grega Ω.

Exemplo 2.13. Considerando o experimento aleatório de lançar um dado comum, o

espaço amostral é dado por

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Exemplo 2.14. Considerando o experimento aleatório de lançar uma moeda comum, o espaço amostral é dado por

$$\Omega = \{Cara, Coroa\}.$$

Exemplo 2.15. Considerando o experimento aleatório de escolher ao acaso um número primo menor que 10, o espaço amostral é dado por

$$\Omega = \{2, 3, 5, 7\}.$$

Evento

Definição 2.16. Chamamos de *Evento* qualquer subconjunto do espaço amostral Ω.

Os eventos geralmente são representados por letras maiúsculas.

Exemplo 2.17. No lançamento de um dado comum, considere o evento $A \in \Omega$, onde todos os elementos de A são pares. Nesse caso, $A = \{2, 4, 6\}$.

Dizemos que o evento A ocorre quando o resultado obtido no experimento pertence ao conjunto A.

Os exemplos anteriores foram escolhidos de modo a serem facilmente reconhecidos tanto por professores quanto pelos estudantes, por fazerem parte de seu cotidiano ou por serem de conhecimento geral. Entretanto, o professor precisa tomar cuidado em relação aos exemplos apresentados aos alunos, pois muitas vezes o conhecimento prévio dos estudantes não é levado em consideração.. Por exemplo, geralmente livros didáticos trazem problemas e exemplos que abordam, como espaço amostral, um baralho de 52 cartas, dividido em 4 naipes, o dito baralho comum. Deixa-se de lado o fato de que, muitos dos estudantes atuais, estão mais familiarizados com o baralho de UNO.

Os sub-tópicos a seguir apresentam as definições de probabilidade e de suas variações, trazendo consigo exemplos que podem ser abordados em sala de aula e que são de fácil entendimento por parte dos alunos. Todos levam em consideração algum conhecimento prévio que o estudante adquiriu em sua jornada educacional, como paridade de números, frações, entre outros.

2.2.1 Definição de Probabilidade

Antes de apresentarmos a definição formal de probabilidade, introduziremos a seguinte notação:

- $\#(\Omega)$ representa o número de elementos do espaço amostral;
- $\#(A)$ representa o número de elementos do evento A.

Definição 2.18. Seja Ω um espaço amostral finito e seja $A \subset \Omega$ um evento. Definimos a *probabilidade* de ocorrência do evento A como a razão

$$P(A) = \frac{\#(A)}{\#(\Omega)}.$$

Da definição anterior seguem imediatamente algumas propriedades importantes da probabilidade.

Proposição 2.19. *Para quaisquer eventos A e B, valem as seguintes propriedades:*

(i) $0 \leq P(A) \leq 1$;

(ii) $P(\Omega) = 1$;

(iii) $P(\varnothing) = 0$;

(iv) Se $A \cap B = \varnothing$, *então* $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Exemplo 2.20. Deseja-se calcular a probabilidade de obter um número par no lançamento de um dado comum. Consideremos o evento $A = \{2, 4, 6\}$. Nesse caso, $\#(A) = 3$. Como o espaço amostral é

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

temos $\#(\Omega) = 6$. Logo, a probabilidade de obter um número par no lançamento de um dado é igual

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Exemplo 2.21. No lançamento simultâneo de dois dados comuns, deseja-se calcular a probabilidade de que a soma obtida seja 8 ou 3.

O espaço amostral é dado por

$$\Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \; ; \; 1 \leq x, y \leq 6\right\}.$$

Como existem 6 possibilidades para cada dado, segue que $\#(\Omega) = 36$.

Consideremos o evento

$$A = \{\text{soma igual a } 8\}.$$

Temos

$$A = \{(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)\},$$

logo, $\#(A) = 5$. Agora, seja

$$B = \{\text{soma igual a } 3\}.$$

Então,

$$B = \{(1,2),(2,1)\},$$

e portanto $\#(B) = 2$. Como os eventos A e B são disjuntos, isto é,

$$A \cap B = \varnothing,$$

podemos utilizar a propriedade da adição de probabilidades:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{5}{36} + \frac{2}{36} = \frac{7}{36}.$$

Portanto, a probabilidade de que a soma dos dados seja 8 ou 3 é igual a $\frac{7}{36}$.

2.2.2 Probabilidade Condicional

Em muitas situações, desejamos calcular a probabilidade de ocorrência de um evento sabendo que outro evento já ocorreu. Esse tipo de problema é tratado por meio da probabilidade condicional.

Definição 2.22 (Probabilidade condicional)**.** Sejam Ω um espaço amostral e A e B dois eventos de Ω, com $P(B) > 0$. Definimos a *probabilidade condicional* de A, dado que B ocorreu, por

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

A expressão $P(A \mid B)$ deve ser lida como "probabilidade de A dado B". Intuitivamente, quando sabemos que o evento B ocorreu, passamos a considerar B como um novo espaço amostral reduzido, dentro do qual analisamos a ocorrência de A.

Exemplo 2.23. No lançamento de dois dados, um após o outro, deseja-se calcular a probabilidade de que a soma das faces seja maior que 8, sabendo que o primeiro dado apresentou resultado igual a 6.

Consideremos os eventos:

$$A = \{\text{soma maior que } 8\}$$

e

$$B = \{\text{o primeiro dado é } 6\}.$$

Temos

$$B = \{(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}.$$

Além disso, para que a soma seja maior que 8 e o primeiro dado seja 6, devemos ter

$$A \cap B = \{(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}.$$

Logo,

$$\#(B) = 6 \qquad \text{e} \qquad \#(A \cap B) = 4.$$

Assim,

$$P(A \mid B) = \frac{\#(A \cap B)}{\#(B)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

Portanto, a probabilidade de a soma ser maior que 8, sabendo que o primeiro dado foi 6, é igual a $\frac{2}{3}$.

Observação 2.24. Quando o espaço amostral é finito e todos os resultados são equiprováveis, podemos calcular a probabilidade condicional diretamente por

$$P(A \mid B) = \frac{\#(A \cap B)}{\#(B)}.$$

2.2.3 Teorema da Multiplicação

Uma consequência imediata da definição de probabilidade condicional é o chamado Teorema da Multiplicação.

Teorema 2.25 (Teorema da Multiplicação)**.** *Sejam A e B dois eventos de um espaço amostral Ω, com $P(B) > 0$. Então,*

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A \mid B).$$

De modo equivalente, se $P(A) > 0$, então

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A).$$

Demonstração. Pela definição de probabilidade condicional, temos

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Multiplicando ambos os lados da igualdade por $P(B)$, obtemos

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A \mid B).$$

A segunda igualdade é obtida de maneira análoga, utilizando a definição de $P(B \mid A)$.

□

Exemplo 2.26. Uma urna I contém 2 bolas vermelhas e 3 bolas brancas. Uma urna II contém 4 bolas vermelhas e 5 bolas brancas. Escolhe-se uma urna ao acaso e, em seguida, retira-se uma bola dessa urna. Deseja-se calcular a probabilidade de escolher a urna I e retirar uma bola vermelha.

Consideremos os eventos:

$$I = \{\text{escolher a urna I}\}$$

e

$$V = \{\text{retirar uma bola vermelha}\}.$$

Como a urna é escolhida ao acaso,

$$P(I) = \frac{1}{2}.$$

Sabendo que a urna I foi escolhida, a probabilidade de retirar uma bola vermelha é

$$P(V \mid I) = \frac{2}{5}.$$

Portanto, pelo Teorema da Multiplicação,

$$P(I \cap V) = P(I) \cdot P(V \mid I) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{5}.$$

Logo, a probabilidade de escolher a urna I e retirar uma bola vermelha é igual a $\frac{1}{5}$.

2.2.4 Teorema da Probabilidade Total

Antes de apresentarmos o Teorema da Probabilidade Total, precisamos definir o conceito de partição do espaço amostral.

Definição 2.27 (Partição do espaço amostral)**.** Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eventos de um espaço amostral Ω. Dizemos que esses eventos formam uma *partição* de Ω quando:

(i) $P(A_i) > 0$, para todo $i = 1, 2, \ldots, n$;

(ii) $A_i \cap A_j = \varnothing$, sempre que $i \neq j$;

(iii) $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$.

Assim, os eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são dois a dois disjuntos e sua união é todo o espaço amostral.

Teorema 2.28 (Teorema da Probabilidade Total)**.** *Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eventos que formam uma partição de Ω. Para qualquer evento $B \subset \Omega$, temos*

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap B).$$

Além disso, pelo Teorema da Multiplicação,

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)\, P(B \mid A_i).$$

Demonstração. Como os eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ formam uma partição de Ω, podemos escrever

$$B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \cdots \cup (A_n \cap B).$$

Como os eventos $A_i \cap B$ são dois a dois disjuntos, segue que

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \cdots + P(A_n \cap B).$$

Logo,

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap B).$$

Usando o Teorema da Multiplicação,

$$P(A_i \cap B) = P(A_i)P(B \mid A_i).$$

Portanto,

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B \mid A_i).$$

□

Exemplo 2.29. Uma urna I contém 2 bolas vermelhas e 3 bolas brancas. Uma urna II contém 1 bola vermelha e 4 bolas brancas. Uma urna III contém 3 bolas vermelhas e 5 bolas brancas. Uma urna é escolhida ao acaso e, em seguida, uma bola é retirada. Qual é a probabilidade de a bola retirada ser vermelha?

Consideremos os eventos:

$$I = \{\text{escolher a urna I}\}, \quad II = \{\text{escolher a urna II}\}, \quad III = \{\text{escolher a urna III}\}$$

e

$$V = \{\text{retirar uma bola vermelha}\}.$$

Como a escolha da urna é aleatória,

$$P(I) = P(II) = P(III) = \frac{1}{3}.$$

Além disso,

$$P(V \mid I) = \frac{2}{5}, \qquad P(V \mid II) = \frac{1}{5}, \qquad P(V \mid III) = \frac{3}{8}.$$

Pelo Teorema da Probabilidade Total,

$$\begin{aligned} P(V) &= P(I)P(V \mid I) + P(II)P(V \mid II) + P(III)P(V \mid III) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{8} \\ &= \frac{2}{15} + \frac{1}{15} + \frac{1}{8} \\ &= \frac{39}{120} = \frac{13}{40}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$P(V) = \frac{13}{40} = 32,5\%.$$

2.2.5 Teorema de Bayes

O Teorema de Bayes permite inverter uma probabilidade condicional. Em outras palavras, ele possibilita calcular a probabilidade de uma causa, sabendo que determinado efeito foi observado.

Teorema 2.30 (Teorema de Bayes)**.** *Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eventos que formam uma partição do espaço amostral Ω. Seja B um evento tal que $P(B) > 0$. Então, para cada $k = 1, 2, \ldots, n$, temos*

$$P(A_k \mid B) = \frac{P(A_k)P(B \mid A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B \mid A_i)}.$$

Demonstração. Pela definição de probabilidade condicional, temos

$$P(A_k \mid B) = \frac{P(A_k \cap B)}{P(B)}.$$

Pelo Teorema da Multiplicação,

$$P(A_k \cap B) = P(A_k)P(B \mid A_k).$$

Além disso, pelo Teorema da Probabilidade Total,

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B \mid A_i).$$

Substituindo essas expressões na fórmula da probabilidade condicional, obtemos

$$P(A_k \mid B) = \frac{P(A_k)P(B \mid A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B \mid A_i)}.$$

□

Exemplo 2.31. Considere novamente as três urnas do exemplo anterior. Uma urna é escolhida ao acaso e uma bola é retirada. Sabendo que a bola retirada foi vermelha, qual é a probabilidade de ela ter vindo da urna III?

Queremos calcular

$$P(III \mid V).$$

Pelo Teorema de Bayes,

$$P(III \mid V) = \frac{P(III)P(V \mid III)}{P(I)P(V \mid I) + P(II)P(V \mid II) + P(III)P(V \mid III)}.$$

Substituindo os valores,

$$P(III \mid V) = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{8}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{8}}.$$

Como já calculamos anteriormente que

$$P(V) = \frac{13}{40},$$

temos

$$P(III \mid V) = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{13}{40}} = \frac{1}{8} \cdot \frac{40}{13} = \frac{5}{13}.$$

Portanto, sabendo que a bola retirada foi vermelha, a probabilidade de ela ter vindo da urna III é

$$\frac{5}{13} \approx 38,46\%.$$

2.2.6 Lei Binomial

Vamos considerar um experimento composto por uma sequência de tentativas independentes, chamadas de *ensaios*. Cada ensaio possui apenas dois resultados possíveis: sucesso ou fracasso.

A probabilidade de ocorrer sucesso será denotada por p, enquanto a probabilidade de ocorrer fracasso será denotada por

$$q = 1 - p.$$

Esses ensaios são conhecidos como *ensaios de Bernoulli*. O estudo da quantidade de sucessos em uma sequência de ensaios de Bernoulli é feito por meio da *Distribuição Binomial*.

Teorema 2.32 (Lei Binomial da Probabilidade)**.** *Considere n ensaios de Bernoulli independentes, nos quais a probabilidade de sucesso é p e a probabilidade de fracasso é $q = 1 - p$.*

A probabilidade de ocorrerem exatamente k sucessos em n ensaios é dada por

$$P_k = \binom{n}{k} p^k q^{n-k},$$

onde

$$k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Demonstração. O evento "ocorrem exatamente k sucessos em n ensaios" pode acontecer de várias maneiras distintas.

Como devemos escolher em quais dos n ensaios ocorrerão os k sucessos, o número de possibilidades é dado por

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Para cada uma dessas possibilidades, a probabilidade de ocorrerem k sucessos e $n-k$ fracassos é

$$p^k q^{n-k}.$$

Como existem $\binom{n}{k}$ maneiras de escolher os ensaios em que ocorrerão os sucessos, temos

$$P_k = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

□

Exemplo 2.33. Uma urna contém 4 bolas vermelhas e 6 bolas brancas. Uma bola é extraída, sua cor é observada e, em seguida, a bola é reposta na urna. O experimento é repetido 5 vezes. Qual é a probabilidade de observar exatamente 3 bolas vermelhas?

Em cada ensaio, consideremos como sucesso o resultado "bola vermelha" e como fracasso o resultado "bola branca". Assim,

$$p = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}, \qquad q = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

e

$$n = 5, \qquad k = 3.$$

Aplicando a fórmula da distribuição binomial, temos

$$\begin{aligned} P_3 &= \binom{5}{3} \left(\frac{2}{5}\right)^3 \left(\frac{3}{5}\right)^2 \\ &= \frac{5!}{3!\,2!} \cdot \frac{8}{125} \cdot \frac{9}{25} \\ &= 10 \cdot \frac{72}{3125} \\ &= \frac{720}{3125}. \end{aligned}$$

Logo,

$$P_3 = 0,2304 = 23,04\%.$$

Portanto, a probabilidade de observar exatamente 3 bolas vermelhas nas 5 extrações é igual a $23,04\%$.

2.3 Áreas de Regiões Planas

Tendo em vista que o presente trabalho abordará, em grande parte, problemas relacionados ao cálculo de áreas de figuras planas, apresentaremos nesta seção alguns resultados fundamentais da Geometria Plana.

O conceito de área desempenha papel central em diversos problemas de Probabilidade Geométrica, especialmente naqueles em que probabilidades são obtidas por meio da razão entre áreas de regiões planas.

Inicialmente, estudaremos as áreas de alguns polígonos clássicos, como quadrados, retângulos, paralelogramos, triângulos e trapézios. Posteriormente, apresentaremos também resultados envolvendo regiões circulares.

2.3.1 Área de Polígonos

De maneira intuitiva, a área de uma região plana é um número positivo associado à quantidade de espaço ocupada por essa região no plano. Para desenvolvermos rigorosamente as fórmulas de área, adotaremos algumas propriedades fundamentais.

(i) Polígonos congruentes possuem áreas iguais;

(ii) Se um polígono convexo é particionado em um número finito de polígonos convexos, então a área do polígono original é igual à soma das áreas das partes;

(iii) Se um polígono contém outro em seu interior, então a área do polígono maior é maior que a área do menor;

(iv) A área de um quadrado de lado $1\,cm$ é igual a $1\,cm^2$.

A partir dessas propriedades, deduziremos algumas fórmulas clássicas para áreas de polígonos.

Proposição 2.34 (Área do quadrado)**.** *Um quadrado de lado l possui área igual a*

$$A = l^2.$$

Demonstração. Inicialmente, consideremos um quadrado de lado

$$n \in \mathbb{N}.$$

Particionando esse quadrado em pequenos quadrados unitários de lado 1, obtemos exatamente n^2 quadrados menores. Como cada quadrado unitário possui área igual a 1, segue, pela propriedade aditiva da área, que a área do quadrado maior é

$$A_n = n^2.$$

Agora, consideremos um quadrado de lado racional

$$\frac{m}{n}, \qquad m, n \in \mathbb{N}.$$

Organizemos n^2 cópias desse quadrado em n linhas e n colunas. O quadrado obtido terá lado

$$\frac{m}{n} \cdot n = m,$$

e portanto área

$$m^2.$$

Como o quadrado maior é formado por n^2 quadrados congruentes de lado $\dfrac{m}{n}$, temos

$$m^2 = n^2 A_{\frac{m}{n}}.$$

Logo,

$$A_{\frac{m}{n}} = \frac{m^2}{n^2} = \left(\frac{m}{n}\right)^2.$$

Finalmente, seja $l > 0$ um número real qualquer. Tomemos sequências racionais (x_k) e (y_k) tais que

$$x_k < l < y_k$$

e

$$y_k - x_k < \frac{1}{k}.$$

Construamos quadrados de lados x_k e y_k, respectivamente inscrito e circunscrito ao quadrado de lado l. Pela monotonicidade da área,

$$x_k^2 < A_l < y_k^2.$$

Como também

$$x_k^2 < l^2 < y_k^2,$$

segue que

$$|A_l - l^2| < y_k^2 - x_k^2.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} y_k^2 - x_k^2 &= (y_k - x_k)(y_k + x_k) \\ &< \frac{1}{k}(y_k + x_k). \end{aligned}$$

Como x_k e y_k convergem para l, concluímos que

$$|A_l - l^2| \to 0.$$

Portanto, $A_l = l^2$.

□

Proposição 2.35 (Área do retângulo)**.** *Um retângulo de lados a e b possui área igual a*

$$A = ab.$$

Demonstração. Inicialmente, consideremos um retângulo cujos lados sejam números naturais $m, n \in \mathbb{N}$. Particionando esse retângulo em quadrados unitários de lado 1, obtemos exatamente mn quadrados. Como cada quadrado unitário possui área igual a 1, segue que a área do retângulo é

$$A = mn.$$

Agora, consideremos um retângulo de lados racionais

$$\frac{m_1}{n_1} \qquad \text{e} \qquad \frac{m_2}{n_2},$$

com

$$m_1, m_2, n_1, n_2 \in \mathbb{N}.$$

Tomando $n_1 n_2$ cópias desse retângulo, podemos formar um retângulo maior de lados m_1 e m_2, cuja área é

$$m_1 m_2.$$

Portanto,

$$n_1 n_2 \cdot A = m_1 m_2,$$

de onde segue que

$$A = \frac{m_1 m_2}{n_1 n_2} = \frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{m_2}{n_2}.$$

Finalmente, sejam $a, b > 0$ números reais quaisquer. Tomemos sequências racionais

$$x_k < a < y_k \quad \text{e} \quad u_k < b < v_k,$$

satisfazendo

$$y_k - x_k < \frac{1}{k} \qquad \text{e} \qquad v_k - u_k < \frac{1}{k}.$$

Consideremos retângulos inscritos e circunscritos ao retângulo de lados a e b. Pela monotonicidade da área,

$$u_k x_k < A < y_k v_k.$$

Como também

$$u_k x_k < ab < y_k v_k,$$

segue que

$$|A - ab| < y_k v_k - u_k x_k.$$

Além disso,

$$y_k v_k - u_k x_k = (v_k - u_k) y_k + u_k (y_k - x_k) < \frac{1}{k}(y_k + u_k).$$

Como as sequências convergem para a e b, concluímos que

$$|A - ab| \to 0.$$

Logo, $A = ab$.

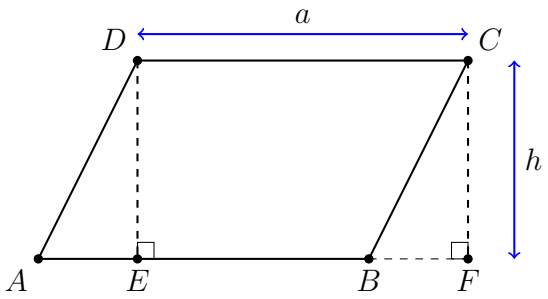
□

Proposição 2.36 (Área do Paralelogramo)**.** *Um paralelogramo de base a e altura h tem área igual a ah.*

Demonstração. Sejam, respectivamente, E e F os pés das perpendiculares baixadas de D

e C à reta $\overleftrightarrow{AB}$ e suponha, sem perda de generalidade, que $E \in \overline{AB}$, conforme a Figura 2.1.

Figura 2.1: Paralelogramo de base a e altura h.



Fonte: Elaborada pelo autor.

É imediato verificar que os triângulos ADE e BCF são congruentes. De fato, ambos são triângulos retângulos, possuem a mesma altura e lados correspondentes determinados pela inclinação do paralelogramo.

Assim, temos

$$\begin{aligned} A_{(ABCD)} &= A_{(ADE)} + A_{(BEDC)} \\ &= A_{(BCF)} + A_{(BEDC)} \\ &= A_{(EFCD)}. \end{aligned}$$

Por outro lado, $EFCD$ é um retângulo de altura h e base

$$EF = EB + BF = EB + AE = AB = a.$$

Portanto,

$$A_{(ABCD)} = A_{(EFCD)} = ah.$$

□

Proposição 2.37 (Área do Triângulo)**.** *Seja ABC um triângulo de lados $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ e alturas h_a, h_b, h_c, respectivamente relativas aos lados a, b e c. Então,*

$$A_{(ABC)} = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2}.$$

Em particular,

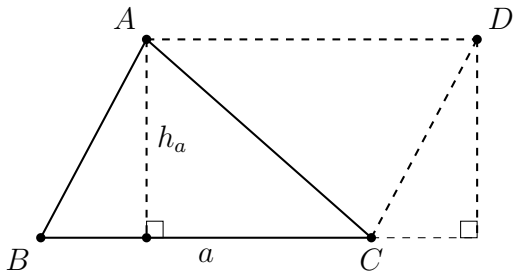
$$ah_a = bh_b = ch_c.$$

Demonstração. Seja

$$S = A_{(ABC)}.$$

Considere o ponto D obtido como a interseção da reta paralela a $\overleftrightarrow{BC}$ passando por A com a reta paralela a $\overleftrightarrow{AB}$ passando por C, conforme a Figura 2.2.

Figura 2.2: Paralelogramo construído a partir do triângulo ABC.



Fonte: Elaborada pelo autor.

É imediato verificar que $ABCD$ é um paralelogramo. Além disso, os triângulos ABC e CDA são congruentes, pois possuem lados correspondentes paralelos e compartilham a diagonal AC.

Portanto, o paralelogramo $ABCD$ é formado por dois triângulos congruentes, cada um de área S. Assim,

$$A_{(ABCD)} = 2S.$$

Como o paralelogramo $ABCD$ possui base $BC = a$ e altura h_a, pela fórmula da área do paralelogramo obtemos

$$A_{(ABCD)} = ah_a.$$

Logo,

$$2A_{(ABC)} = 2S = ah_a.$$

Consequentemente,

$$A_{(ABC)} = \frac{ah_a}{2}.$$

As igualdades

$$A_{(ABC)} = \frac{bh_b}{2} \qquad \text{e} \qquad A_{(ABC)} = \frac{ch_c}{2}$$

são obtidas de modo análogo, tomando como base os lados $AC = b$ e $AB = c$.

Portanto,

$$A_{(ABC)} = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2}.$$

Em particular,

$$ah_a = bh_b = ch_c.$$

□

Proposição 2.38 (Área do Trapézio)**.** *Se $ABCD$ é um trapézio de bases $AB = a$, $CD = b$ e altura h, então*

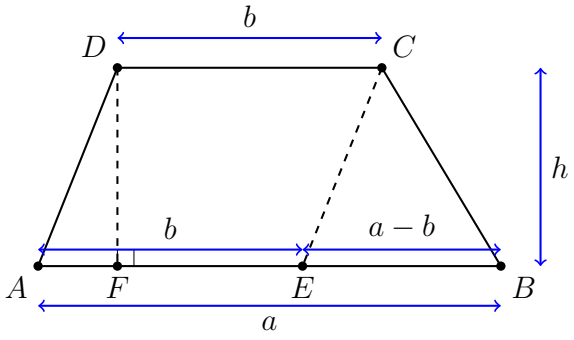
$$A_{(ABCD)} = \frac{(a+b)h}{2}.$$

Demonstração. Suponha, sem perda de generalidade, que $a > b$. Seja $E \in \overline{AB}$ tal que

$$AE = b.$$

Então, o quadrilátero $AECD$ possui dois lados opostos paralelos e congruentes. Logo, $AECD$ é um paralelogramo.

Figura 2.3: Decomposição do trapézio em um paralelogramo e um triângulo.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Como $AB = a$ e $AE = b$, temos

$$EB = a - b.$$

Além disso, o trapézio $ABCD$ fica decomposto no paralelogramo $AECD$ e no triângulo EBC.

Portanto,

$$\begin{aligned} A_{(ABCD)} &= A_{(AECD)} + A_{(EBC)} \\ &= bh + \frac{(a-b)h}{2} \\ &= \frac{2bh + (a-b)h}{2} \\ &= \frac{(a+b)h}{2}. \end{aligned}$$

Logo,

$$A_{(ABCD)} = \frac{(a+b)h}{2}.$$

□

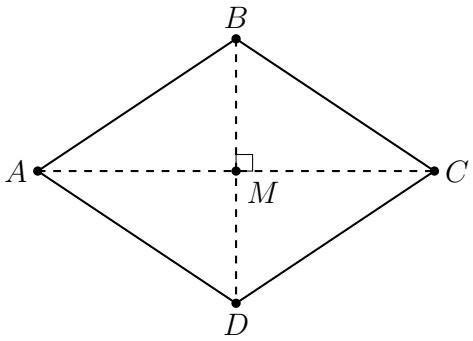
Proposição 2.39 (Área do Losango)**.** *Se $ABCD$ é um losango de diagonais AC e BD, então*

$$A_{(ABCD)} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BD}}{2}.$$

Demonstração. Seja M o ponto de interseção das diagonais AC e BD. Como $ABCD$ é um losango, suas diagonais são perpendiculares. Portanto,

$$AC \perp BD.$$

Figura 2.4: Losango com diagonais perpendiculares.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Observe que a diagonal AC divide o losango $ABCD$ em dois triângulos: ABC e ADC.

Tomando AC como base comum desses dois triângulos, suas respectivas alturas são $\overline{BM}$ e $\overline{DM}$, pois BD é perpendicular a AC.

Assim,

$$\begin{aligned} A_{(ABCD)} &= A_{(ABC)} + A_{(ADC)} \\ &= \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BM}}{2} + \frac{\overline{AC} \cdot \overline{DM}}{2} \\ &= \frac{\overline{AC} \cdot (\overline{BM} + \overline{DM})}{2} \\ &= \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BD}}{2}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$A_{(ABCD)} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BD}}{2}.$$

□

2.3.2 Área de Regiões Circulares

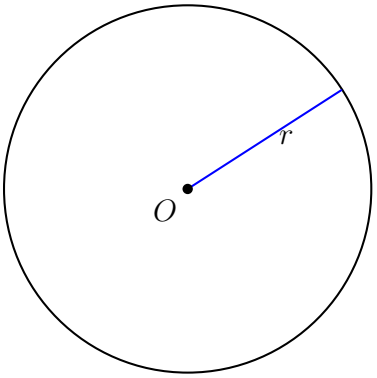
Passaremos agora ao estudo das áreas de regiões circulares, resultados fundamentais para o desenvolvimento da Probabilidade Geométrica. Em alguns dos problemas sugeridos nos próximos capítulos, o conhecimento de áreas de regiões circulares é essencial para que o aluno desenvolva o que se propõe.

Proposição 2.40 (Área do círculo)**.** *Seja λ um círculo de raio r. Então, a área de λ é dada por*

$$A_\lambda = \pi r^2.$$

Demonstração. Considere inicialmente um círculo de raio igual a r e centro O.

Figura 2.5: Círculo de raio r.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Imagine que queremos dividir o comprimento da circunferência de λ em n partes iguais, por menores que sejam suas medidas.

Note que, quanto maior for o valor de n, mais os setores circulares construídos se aproximam de triângulos retângulos de altura igual a r e de base igual a

$$\frac{2\pi r}{n}$$

. Agora, calculando a área (A_t) de um desses triângulos, teríamos

$$A_t = \frac{1}{2}.\frac{2\pi r}{n}.r = \frac{\pi r^2}{n}$$

Como a área de λ é A_t n vezes, temos que

$$A_\lambda = n.\frac{\pi r^2}{n} = \pi r^2$$

□

Observação 2.41. A fórmula

$$A_\lambda = \pi r^2$$

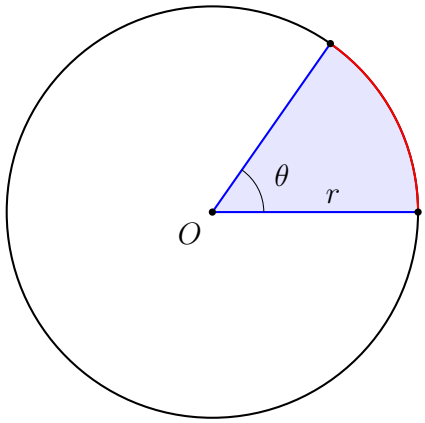
mostra que a área de um círculo cresce proporcionalmente ao quadrado do raio. Em particular, ao dobrarmos o raio de um círculo, sua área torna-se quatro vezes maior.

Proposição 2.42 (Área de um setor circular)**.** *Seja S um setor circular de raio r e ângulo central θ, medido em radianos. Então, a área de S é dada por*

$$A_S = \frac{\theta r^2}{2}.$$

Demonstração. Vamos considerar um setor circular de ângulo central θ em um círculo λ de centro O e raio r, conforme a Figura 2.6.

Figura 2.6: Setor circular de raio r e ângulo central θ.



Fonte: Elaborada pelo autor.

A área A_S do setor circular é proporcional ao ângulo central θ. Assim, existe uma constante k tal que

$$A_S = k\theta.$$

Observe que, quando

$$\theta = 2\pi,$$

o setor circular coincide com o círculo completo. Nesse caso,

$$A_S = \pi r^2.$$

Portanto,

$$\pi r^2 = k(2\pi).$$

Logo,

$$k = \frac{r^2}{2}.$$

Substituindo esse valor na expressão inicial, obtemos

$$A_S = \frac{\theta r^2}{2}.$$

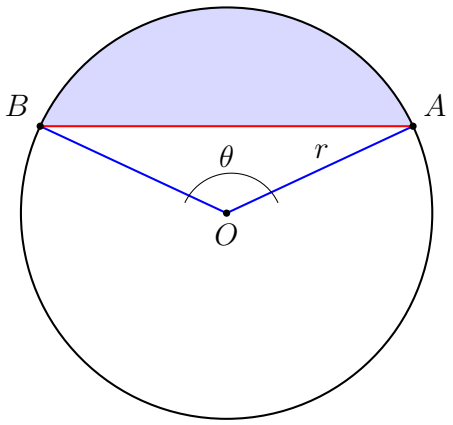
□

Proposição 2.43 (Área de um segmento circular)**.** *Seja A a área de um segmento circular determinado por uma corda AB em um círculo de raio r e ângulo central θ, medido em radianos. Então,*

$$A = \frac{r^2}{2}\left(\theta - \sin\theta\right).$$

Demonstração. Considere um círculo de centro O e raio r. Uma corda $\overline{AB}$ divide o círculo em dois segmentos circulares. Destacaremos o menor deles, conforme a Figura 2.7.

Figura 2.7: Segmento circular determinado pela corda $\overline{AB}$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Seja θ o ângulo central associado ao setor circular AOB.

A área do segmento circular destacado é obtida pela diferença entre a área do setor circular AOB e a área do triângulo AOB.

Pela proposição anterior, a área do setor circular é

$$\frac{\theta r^2}{2}.$$

Além disso, como o triângulo AOB possui lados $OA = OB = r$ e ângulo interno θ,

sua área é dada por

$$\frac{r^2}{2}\sin\theta.$$

Portanto,

$$A = \frac{\theta r^2}{2} - \frac{r^2}{2}\sin\theta \tag{2.8}$$

$$= \frac{r^2}{2}\left(\theta - \sin\theta\right). \tag{2.9}$$

Logo,

$$A = \frac{r^2}{2}\left(\theta - \sin\theta\right).$$

□

Capítulo 3

Probabilidade Geométrica

3.1 Definição

No capítulo anterior, vimos que a probabilidade de um evento pode ser calculada pela razão entre o número de casos favoráveis e o número total de casos possíveis. Essa definição, conhecida como definição clássica de probabilidade, é particularmente adequada quando o espaço amostral é finito e todos os resultados são igualmente prováveis.

Entretanto, existem diversos problemas em que não faz sentido contar elementos, mas sim medir comprimentos, áreas ou volumes. Nesses casos, a probabilidade pode ser interpretada como uma razão entre medidas geométricas. É justamente essa ideia que fundamenta a Probabilidade Geométrica.

Segundo Amorim e Mozer [2], a Probabilidade Geométrica consiste em associar probabilidades a regiões geométricas, utilizando medidas como comprimento, área ou volume. Dessa forma, a ocorrência de um evento é modelada por um subconjunto de uma região maior, e a probabilidade é obtida pela razão entre suas medidas.

Essa abordagem permite estudar problemas envolvendo pontos escolhidos aleatoriamente em segmentos, regiões planas ou sólidos geométricos, além de fornecer interpretações intuitivas para diversos resultados probabilísticos.

Definição 3.1 (Probabilidade Geométrica)**.** Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto mensurável com medida finita $\mu(\Omega) > 0$. Se $A \subset \Omega$ é um subconjunto mensurável, definimos a probabilidade de ocorrência de A por

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}.$$

Observação 3.2. Quando Ω é um conjunto finito e a medida considerada é simplesmente o número de elementos, a definição acima coincide com a definição clássica de probabilidade apresentada anteriormente.

Ao longo deste capítulo estudaremos alguns dos exemplos mais conhecidos de Probabilidade Geométrica. Entre eles destaca-se o famoso Problema de Bertrand, que evidencia a importância de especificar corretamente o mecanismo aleatório utilizado em um experimento probabilístico.

3.2 Problema do Macarrão

O chamado *Problema do Macarrão*, também conhecido como *Problema do Bastão Quebrado*, é um exemplo clássico de Probabilidade Geométrica. O problema consiste em dividir aleatoriamente um segmento em três partes e determinar a probabilidade de que essas partes possam formar um triângulo.

Podemos enunciá-lo da seguinte forma:

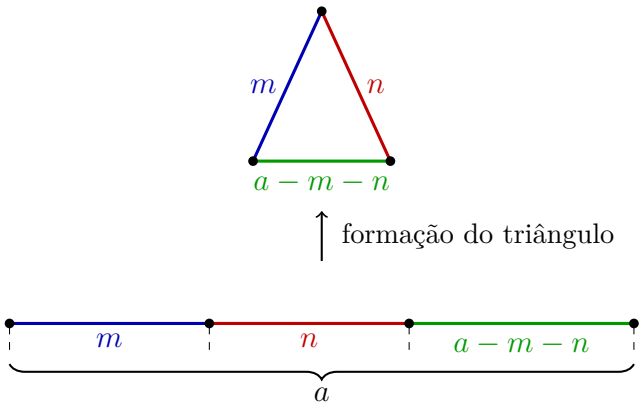
> *Ao dividir aleatoriamente um segmento, representado por um fio de espaguete cru, em três partes, qual é a probabilidade de que os três novos segmentos formem um triângulo?*

Para modelar o problema, consideremos um segmento de comprimento a. Suponhamos que esse segmento seja dividido em três partes de comprimentos

$$m, \qquad n \qquad \text{e} \qquad a - m - n.$$

A Figura 3.1 ilustra a divisão do segmento e a possível formação de um triângulo com essas três partes.

Figura 3.1: Divisão de um segmento em três partes e formação de um triângulo.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Como os três comprimentos devem ser positivos, devemos ter

$$m > 0, \qquad n > 0 \qquad \text{e} \qquad a - m - n > 0.$$

A última desigualdade equivale a $m + n < a$. Assim, cada forma possível de dividir o segmento pode ser representada por um par ordenado (m, n) pertencente ao conjunto

$$\Omega = \left\{(m, n) \in \mathbb{R}^2 \,;\, 0 < m < a,\ 0 < n < a \text{ e } m + n < a\right\}.$$

Geometricamente, o conjunto Ω corresponde à região triangular do plano limitada pelos eixos coordenados e pela reta $m + n = a$.

Na próxima etapa, determinaremos quais pontos desse espaço amostral correspondem às divisões que satisfazem a desigualdade triangular e, portanto, formam um triângulo.

Região favorável

Para que os três segmentos de comprimentos

$$m, \qquad n \qquad \text{e} \qquad a - m - n$$

formem um triângulo, é necessário e suficiente que satisfaçam a desigualdade triangular. Assim, devemos ter:

$$m < n + (a - m - n), \quad n < m + (a - m - n), \quad \text{e} \quad a - m - n < m + n.$$

Simplificando cada uma dessas desigualdades, obtemos:

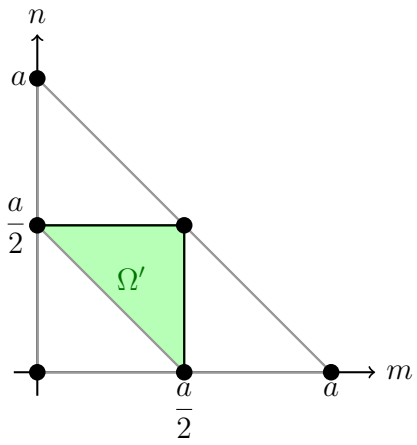
$$m < \frac{a}{2}, \quad n < \frac{a}{2}, \quad \text{e} \quad m + n > \frac{a}{2}.$$

Portanto, o conjunto favorável é dado por

$$\Omega' = \left\{(m, n) \in \Omega \,;\, m < \frac{a}{2},\ n < \frac{a}{2} \text{ e } m + n > \frac{a}{2}\right\}.$$

A Figura 3.2 representa o espaço amostral Ω e a região favorável Ω'.

Figura 3.2: Espaço amostral e região favorável para o Problema do Macarrão.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Cálculo da probabilidade

O espaço amostral Ω é o triângulo de vértices $(0,0), (a,0)$, e $(0,a)$. Portanto, sua área é

$$\mu(\Omega) = \frac{a \cdot a}{2} = \frac{a^2}{2}.$$

Por outro lado, a região favorável Ω' é um triângulo retângulo de catetos medindo $\frac{a}{2}$. Assim,

$$\mu(\Omega') = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2}{8}.$$

Logo, pela definição de Probabilidade Geométrica, temos

$$P = \frac{\mu(\Omega')}{\mu(\Omega)}.$$

Portanto,

$$P = \frac{\frac{a^2}{8}}{\frac{a^2}{2}} = \frac{1}{4}.$$

Concluímos que a probabilidade de que os três pedaços formem um triângulo é $P = \frac{1}{4}$.

Observação 3.3. Esse resultado mostra que, ao dividir aleatoriamente um segmento em três partes, apenas um quarto das divisões possíveis satisfaz a desigualdade triangular. Assim, o Problema do Macarrão ilustra de maneira simples e visual como uma questão geométrica pode ser resolvida por meio da razão entre áreas.

3.3 Paradoxo de Bertrand

Em 1889, o matemático francês Joseph Bertrand propôs o seguinte problema:

> *Escolhendo-se aleatoriamente uma corda de um círculo, qual é a probabilidade de que seu comprimento seja maior que o comprimento do lado de um triângulo equilátero inscrito nesse círculo?*

À primeira vista, a questão parece possuir uma única resposta. No entanto, diferentes interpretações da expressão "escolher uma corda aleatoriamente" conduzem a resultados distintos.

Por esse motivo, o problema ficou conhecido como *Paradoxo de Bertrand*. Na realidade, não se trata de um paradoxo no sentido matemático da palavra. O que ocorre é que o enunciado não especifica de maneira precisa o mecanismo de escolha aleatória da corda. Dependendo do procedimento adotado, obtêm-se probabilidades diferentes.

Esse exemplo é particularmente importante do ponto de vista didático, pois mostra que um modelo probabilístico somente fica completamente determinado quando o processo aleatório é descrito de forma rigorosa.

Consideremos um círculo λ de centro O e raio r, contendo um triângulo equilátero ABC inscrito. Denotemos por l o comprimento do lado desse triângulo.

Apresentaremos a seguir três métodos distintos para a escolha aleatória de uma corda, cada um produzindo uma probabilidade diferente.

Primeira solução: escolha pelo ponto de interseção com um diâmetro

Tracemos o diâmetro AM. Como o centro O coincide com o baricentro do triângulo equilátero ABC, podemos dividir o segmento AM em quatro partes iguais, cada uma medindo $\frac{r}{2}$, conforme ilustrado na Figura 3.3.

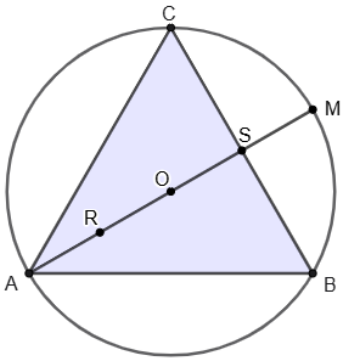


Figura 3.3: Construção utilizada na primeira solução.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Considere agora uma corda PQ perpendicular ao diâmetro AM.

Observa-se que a corda PQ possui comprimento maior que o lado l do triângulo equilátero inscrito se, e somente se, sua distância ao centro O for inferior a $\frac{r}{2}$.

Isso ocorre exatamente quando o ponto de interseção entre PQ e o diâmetro AM pertence ao intervalo aberto $]R, S[$, conforme a Figura 3.4.

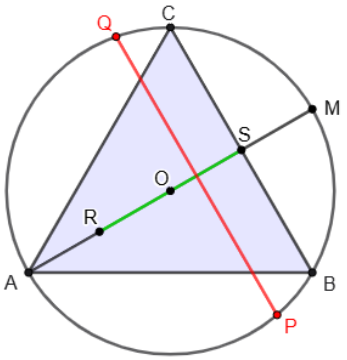


Figura 3.4: Cordas favoráveis ao problema.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Como todos os pontos do intervalo $]R, S[$ geram cordas favoráveis, a probabilidade procurada é dada pela razão entre o comprimento desse intervalo e o comprimento total do diâmetro:

$$P = \frac{\overline{RS}}{\overline{AM}} = \frac{2 \cdot \frac{r}{2}}{2r} = \frac{1}{2}.$$

Portanto, $P = \frac{1}{2}$.

Segunda solução: escolha de uma extremidade da corda

Agora fixemos um ponto A sobre a circunferência e escolhemos aleatoriamente outro ponto P pertencente à mesma circunferência. Nesse caso, a corda considerada será $\overline{AP}$.

Observa-se que a corda $\overline{AP}$ terá comprimento superior ao lado do triângulo equilátero inscrito se, e somente se, o ponto P pertencer ao arco $\widehat{BC}$, conforme ilustrado na Figura 3.5.

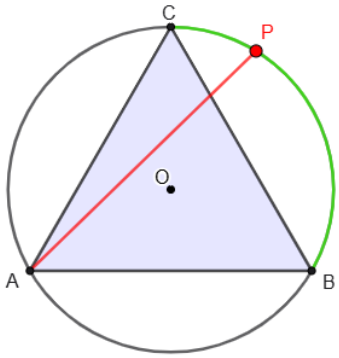


Figura 3.5: Segunda interpretação do problema.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Como o triângulo é equilátero, os três arcos determinados por seus vértices possuem o mesmo comprimento. Assim, o arco $\widehat{BC}$ corresponde a um terço do comprimento total da circunferência. Logo,

$$P = \frac{\text{comprimento do arco } \widehat{BC}}{\text{comprimento da circunferência}} = \frac{\frac{1}{3}(2\pi r)}{2\pi r} = \frac{1}{3}.$$

Portanto, $P = \dfrac{1}{3}$

Terceira solução: escolha do ponto médio da corda

Considere agora um círculo λ' inscrito no triângulo equilátero ABC, conforme ilustrado na Figura 3.6.

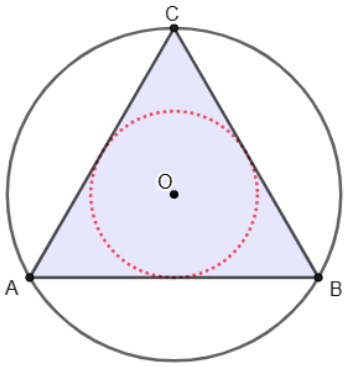


Figura 3.6: Círculo auxiliar utilizado na terceira solução.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Escolhemos aleatoriamente um ponto P no interior do círculo λ e traçamos a única corda FG que possui P como ponto médio.

A corda FG será maior que o lado do triângulo equilátero inscrito se, e somente se, o ponto médio P estiver localizado no interior do círculo λ', conforme ilustrado na Figura 3.7.

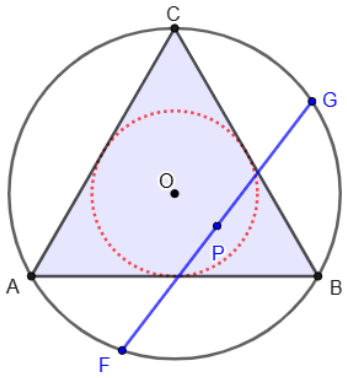


Figura 3.7: Região dos pontos médios favoráveis.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Portanto, a probabilidade procurada será dada pela razão entre a área de λ' e a área de λ. Como o raio de λ' é igual a $\frac{r}{2}$, segue que

$$P = \frac{\pi\left(\frac{r}{2}\right)^2}{\pi r^2} = \frac{r^2/4}{r^2} = \frac{1}{4}.$$

Portanto, $P = \frac{1}{4}$

Discussão

As três abordagens apresentadas produziram resultados distintos:

$$P = \frac{1}{2}, \qquad P = \frac{1}{3}, \qquad P = \frac{1}{4}.$$

À primeira vista, isso pode sugerir uma contradição. Entretanto, cada resultado corresponde a um modelo probabilístico diferente, isto é, a uma forma distinta de definir o que significa escolher uma corda "ao acaso".

O Paradoxo de Bertrand evidencia que a construção de um modelo probabilístico exige a especificação precisa do mecanismo aleatório envolvido. Sem essa informação adicional, a expressão "escolha aleatória" pode admitir múltiplas interpretações igualmente razoáveis.

Esse problema tornou-se um dos exemplos mais famosos da Probabilidade Geométrica e continua sendo amplamente utilizado em cursos de Matemática, Estatística e Teoria da Probabilidade para ilustrar a importância da modelagem matemática em situações aleatórias.

3.4 Agulha de Buffon

Um dos problemas mais famosos da Probabilidade Geométrica foi proposto pelo naturalista francês Georges-Louis Leclerc, Conde de Buffon, em 1777. O experimento, atualmente conhecido como *Agulha de Buffon*, tornou-se um marco na história da Probabilidade por estabelecer uma conexão surpreendente entre experimentos aleatórios e o número irracional π.

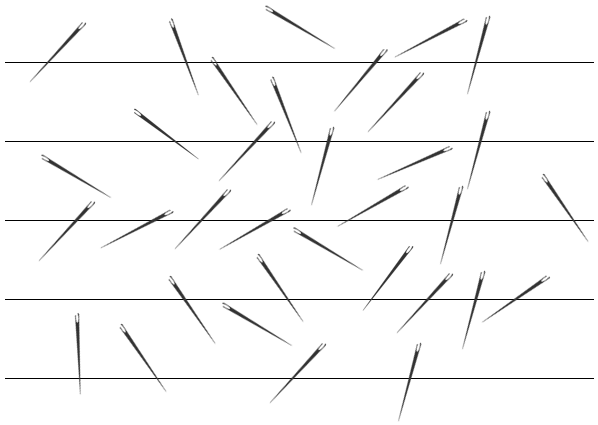
O problema consiste em lançar, de maneira aleatória, uma agulha sobre um plano contendo uma família de retas paralelas igualmente espaçadas. A partir da frequência com que a agulha intercepta uma das retas, é possível estimar experimentalmente o valor de π, tornando este um dos primeiros exemplos de um método probabilístico para aproximação de constantes matemáticas.

O problema pode ser enunciado da seguinte forma.

> *Considere uma família de retas paralelas no plano, igualmente espaçadas por uma distância d. Escolhe-se aleatoriamente uma agulha de comprimento l, com $l \leq d$, e lança-se essa agulha sobre o plano. Qual é a probabilidade de que a agulha intercepte uma das retas?*

A Figura 3.8 ilustra o experimento.

Figura 3.8: Experimento da Agulha de Buffon.



Fonte: Elaborada pelo autor.

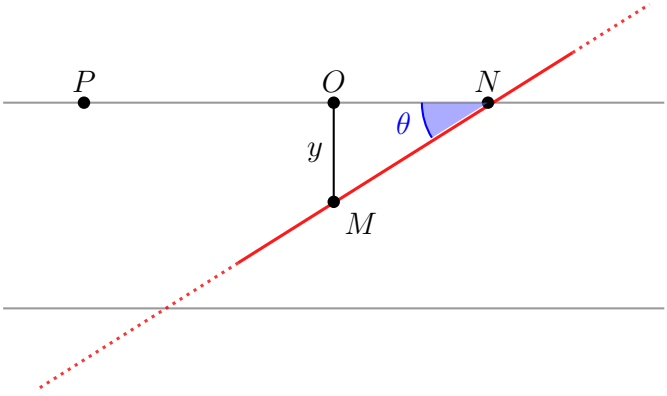
Como todas as regiões delimitadas por duas retas consecutivas são congruentes, basta estudar a posição da agulha em apenas uma dessas faixas. Dessa forma, podemos supor que o ponto médio da agulha esteja localizado entre duas retas paralelas consecutivas.

Para descrever completamente a posição da agulha, basta conhecer duas informações:

- a distância y entre o ponto médio da agulha e a reta paralela mais próxima;
- o ângulo θ formado entre a direção da agulha e a reta paralela.

A Figura 3.9 ilustra essas duas variáveis.

Figura 3.9: Agulha de Buffon.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Observemos que a variável y pode assumir qualquer valor entre 0 e $\frac{d}{2}$, pois o ponto

médio da agulha nunca estará mais distante da reta mais próxima do que metade da distância entre duas retas consecutivas.

Da mesma forma, o ângulo θ pode variar continuamente entre 0 e π, uma vez que orientações que diferem de π radianos representam a mesma posição geométrica da agulha.

Assim, cada lançamento da agulha pode ser representado pelo par ordenado (θ, y), o que permitirá descrever matematicamente o espaço amostral e o evento de interesse na próxima seção.

Espaço amostral e evento de interesse

Pela descrição anterior, cada posição possível da agulha pode ser representada por um par ordenado (θ, y), em que θ representa o ângulo formado entre a agulha e uma das retas paralelas, enquanto y representa a distância entre o ponto médio da agulha e a reta paralela mais próxima.

Como o ponto médio da agulha está localizado entre duas retas paralelas consecutivas, temos

$$0 \leq y \leq \frac{d}{2}.$$

Além disso, como a direção da agulha pode variar de 0 a π radianos, segue que

$$0 \leq \theta \leq \pi.$$

Portanto, o espaço amostral do problema é dado por

$$\Omega = \left\{ (\theta, y) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; 0 \leq \theta \leq \pi \quad \text{e} \quad 0 \leq y \leq \frac{d}{2} \right\}.$$

Geometricamente, Ω é um retângulo no plano cartesiano (θ, y), de base π e altura $\frac{d}{2}$. Assim,

$$\mu(\Omega) = \pi \cdot \frac{d}{2} = \frac{\pi d}{2}.$$

Agora, devemos determinar quais pares (θ, y) correspondem às posições em que a agulha intercepta alguma das retas paralelas.

Pela geometria do problema, a agulha intercepta a reta mais próxima se, e somente se, a distância y do seu ponto médio à reta for menor ou igual à projeção vertical da metade da agulha. Como a agulha possui comprimento l, sua metade mede $\frac{l}{2}$. A componente perpendicular às retas paralelas dessa metade é $\frac{l}{2}\sin\theta$. Assim, a condição para que ocorra interseção é

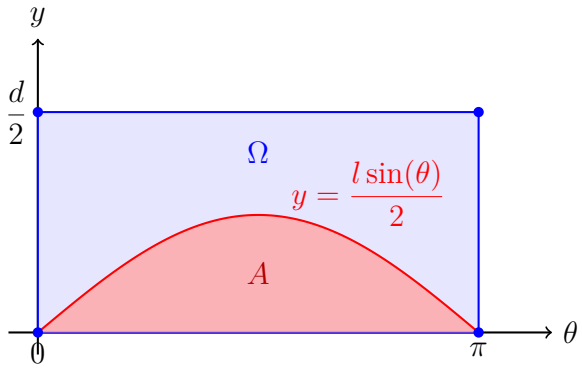
$$y \leq \frac{l \sin\theta}{2}.$$

Desse modo, o evento de interesse é dado por

$$A = \left\{ (\theta, y) \in \Omega \,;\; 0 \leq y \leq \frac{l \sin\theta}{2} \right\}.$$

A Figura 3.10 representa o espaço amostral Ω e o conjunto de interesse A.

Figura 3.10: Espaço amostral e conjunto de interesse.



Fonte: Adaptada de Amorim e Mozer [2].

Cálculo da probabilidade

A probabilidade de a agulha interceptar uma das retas paralelas é dada pela razão entre a medida do conjunto favorável A e a medida do espaço amostral Ω.

Como A é a região sob o gráfico da função

$$y = \frac{l \sin\theta}{2},$$

para $0 \leq \theta \leq \pi$, sua medida é calculada por meio da integral

$$\mu(A) = \int_0^\pi \frac{l \sin\theta}{2}\, d\theta.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \frac{l}{2} \int_0^\pi \sin\theta \, d\theta = \frac{l}{2} \left[-\cos\theta \right]_0^\pi \\ &= \frac{l}{2} \left(-\cos\pi + \cos 0 \right) = \frac{l}{2} \left(1 + 1 \right) = l. \end{aligned}$$

Como

$$\mu(\Omega) = \frac{\pi d}{2},$$

segue que

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{l}{\frac{\pi d}{2}}.$$

Portanto, a probabilidade de que a agulha intercepte uma das retas paralelas é

$$P(A) = \frac{2l}{\pi d}.$$

Aproximação de π pelo experimento de Buffon

A fórmula obtida anteriormente,

$$P(A) = \frac{2l}{\pi d},$$

mostra que o experimento da Agulha de Buffon pode ser utilizado para obter aproximações do número π.

Suponha que sejam realizados n lançamentos da agulha e que, em n_A deles, a agulha intercepte uma das retas paralelas. Para um número grande de lançamentos, a frequência relativa $\frac{n_A}{n}$ aproxima a probabilidade teórica $P(A)$. Assim,

$$\frac{n_A}{n} \simeq \frac{2l}{\pi d} \quad \Longrightarrow \quad \pi \simeq \frac{2nl}{dn_A}.$$

Portanto, conhecendo os valores de n, l, d e n_A, podemos obter uma aproximação experimental para π. A Tabela 3.1 apresenta alguns resultados obtidos por diferentes pesquisadores ao longo da história após realizarem o experimento da Agulha de Buffon [6].

Tabela 3.1: Obtenção de π com a Agulha de Buffon.

Autor	**Razão** $\frac{l}{d}$	**Nº de lançamentos** (n)	**Sucessos** (n_A)	**Aproximação**
Wolf (1850)	0,8	5000	2532	3,1596
Smith (1855)	0,6	3204	1218,5	3,1553
De Morgan (1860)	1,0	600	382,5	3,137
Fox (1864)	0,75	1030	489	3,1595
Lazzarini (1901)	0,83	3408	1808	3,1415929
Reina (1925)	0,5419	2520	859	3,1795

Observação: Smith e De Morgan consideravam meio sucesso quando não ficava bem definida a interseção da agulha com a reta.

Fonte: Adaptada de Amorim e Mozer [2].

Os dados apresentados mostram que, mesmo sendo um experimento aleatório simples, a Agulha de Buffon pode produzir aproximações razoáveis para o número π. Naturalmente, a precisão da aproximação depende de diversos fatores, como a quantidade de lançamentos realizados, o cuidado na execução do experimento e a forma como são registradas as interseções entre a agulha e as retas.

Do ponto de vista educacional, esse experimento é bastante interessante, pois conecta conceitos de Geometria, Probabilidade, Trigonometria e Estatística. Além disso, permite que os estudantes percebam como uma constante matemática pode surgir de maneira experimental em um problema probabilístico.

Por esse motivo, a Agulha de Buffon constitui um exemplo clássico e significativo da Probabilidade Geométrica, mostrando como medidas geométricas podem ser utilizadas para modelar fenômenos aleatórios.

3.5 Outros Problemas

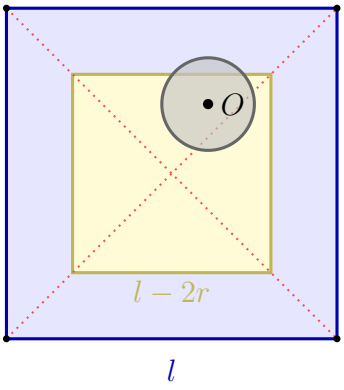
Nesta seção, apresentaremos alguns problemas de aplicação da Probabilidade Geométrica. O objetivo é mostrar como ideias envolvendo áreas podem ser utilizadas para resolver questões simples, mas bastante interessantes do ponto de vista didático.

Exemplo 3.4. Considere uma moeda de raio r e uma superfície pavimentada por ladrilhos quadrados de lado l, com $l > 2r$. Qual é a probabilidade de que a moeda caia inteiramente dentro de um ladrilho, ao ser lançada ao acaso?

Para que a moeda fique inteiramente dentro de um ladrilho, é necessário que seu centro O esteja a uma distância de pelo menos r de cada lado do quadrado. Portanto, o centro da moeda deve pertencer a um quadrado interno de lado $l - 2r$.

A Figura 3.11 ilustra essa região favorável.

Figura 3.11: Região favorável para o centro da moeda.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Como o centro da moeda pode cair em qualquer ponto do ladrilho, o espaço amostral é o quadrado de lado l, cuja área é l^2. A região favorável é o quadrado interno de lado $l-2r$, cuja área é

$$(l-2r)^2.$$

Assim, pela definição de Probabilidade Geométrica, temos

$$P = \frac{(l-2r)^2}{l^2}.$$

Portanto,

$$P = \frac{(l-2r)^2}{l^2}.$$

Exemplo 3.5. Dois estudantes caminhavam no pátio da escola durante o intervalo e perceberam que o espaço de convivência era pavimentado por cerâmicas quadradas de lado medindo $15\,cm$. Um deles jogou uma moeda para cima e a deixou cair no chão. Sabendo que a moeda tinha $3\,cm$ de diâmetro, calcule a probabilidade de que ela caia inteiramente dentro de uma cerâmica.

Como o diâmetro da moeda mede $3\,cm$, seu raio é $r = 1{,}5\,cm$. Além disso, $l = 15\,cm$. Aplicando a fórmula obtida anteriormente, temos

$$P = \frac{(15-2\cdot 1{,}5)^2}{15^2} = \frac{(15-3)^2}{225} = \frac{12^2}{225} = \frac{144}{225} = 0{,}64.$$

Logo, $P = 64\%$.

Portanto, a probabilidade de a moeda cair inteiramente dentro de uma cerâmica é de aproximadamente 64%.

Exemplo 3.6 (Proximidade do centro)**.** Selecionando aleatoriamente um ponto P em

um círculo λ, de raio r e centro C, qual é a probabilidade de que o ponto P esteja mais próximo do centro do que da circunferência?

Para que o ponto P esteja mais próximo do centro C do que da circunferência, sua distância ao centro deve ser menor que sua distância até a borda do círculo. Como a distância do centro até a circunferência é r, a condição desejada ocorre quando

$$CP < \frac{r}{2}.$$

Portanto, o ponto P deve pertencer ao círculo concêntrico λ' de raio $\frac{r}{2}$. Assim, a probabilidade será dada pela razão entre a área de λ' e a área de λ:

$$P = \frac{\pi\left(\frac{r}{2}\right)^2}{\pi r^2}.$$

Logo,

$$P = \frac{\frac{\pi r^2}{4}}{\pi r^2} = \frac{1}{4}.$$

Portanto, $P = \frac{1}{4}$.

Exemplo 3.7 (Problema do Desencontro)**.** Suponha que duas pessoas marquem de se encontrar em um determinado local entre as 19h e as 20h. Cada uma escolhe aleatoriamente seu horário de chegada nesse intervalo. Além disso, a primeira pessoa a chegar espera exatamente 20 minutos pela outra, indo embora caso ela não apareça nesse intervalo.

Qual é a probabilidade de que essas duas pessoas **não** se encontrem?

Sejam $m, n \in [0, 60]$ os instantes (em minutos após as 19h) em que a primeira e a segunda pessoa chegam ao local do encontro. Como ambos podem chegar em qualquer instante entre 19h e 20h, o espaço amostral é dado por

$$\Omega = \left\{(m, n) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq m \leq 60,\ 0 \leq n \leq 60\right\},$$

que corresponde ao quadrado de lado 60 no plano cartesiano. As duas pessoas conseguem se encontrar quando a diferença entre seus horários de chegada não ultrapassa 20 minutos, isto é,

$$|m - n| \leq 20.$$

Equivalentemente,

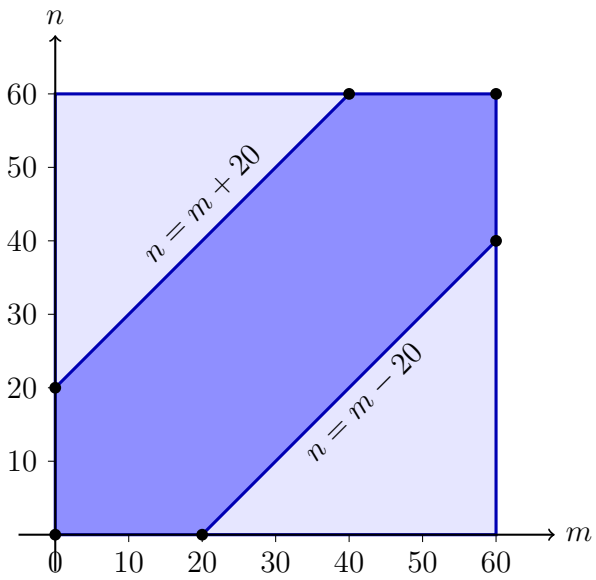
$$-20 \leq m - n \leq 20, \Longrightarrow m - 20 \leq n \leq m + 20.$$

Assim, a região correspondente ao encontro é a faixa compreendida entre as retas

$$n = m + 20 \qquad \text{e} \qquad n = m - 20,$$

conforme ilustrado na Figura 3.12.

Figura 3.12: Região correspondente ao encontro das duas pessoas.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Observa-se que a região destacada representa todos os pares ordenados (m, n) para os quais as duas pessoas conseguem se encontrar. Consequentemente, as regiões triangulares localizadas acima e abaixo dessa faixa correspondem aos horários em que o encontro não ocorre.

Agora calcularemos a probabilidade de que as duas pessoas não se encontrem.

O espaço amostral Ω é o quadrado de lado 60, portanto sua área é

$$\mu(\Omega) = 60 \cdot 60 = 3600.$$

A região de desencontro corresponde às duas regiões triangulares que ficam fora da faixa destacada na Figura 3.12. Cada um desses triângulos é retângulo e possui catetos medindo 40, pois a diferença máxima permitida para que haja encontro é de 20 minutos. Assim, restam $60 - 20 = 40$ minutos em cada direção para a região de desencontro. Logo, a área de cada triângulo é $\dfrac{40 \cdot 40}{2}$. Como existem dois triângulos congruentes, a área total da

região de desencontro é

$$2 \cdot \frac{40 \cdot 40}{2} = 40 \cdot 40 = 1600.$$

Portanto, pela definição de Probabilidade Geométrica, temos

$$\begin{aligned} P &= \frac{\text{área da região de desencontro}}{\text{área do espaço amostral}} \\ &= \frac{1600}{3600} \\ &= \frac{16}{36} \\ &= \frac{4}{9}. \end{aligned}$$

Assim, $P = \frac{4}{9}$. Em termos percentuais, $P \simeq 44{,}4\%$. Portanto, a probabilidade de que as duas pessoas não se encontrem é aproximadamente 44,4%.

Observação 3.8. O Problema do Desencontro é um exemplo bastante intuitivo de Probabilidade Geométrica, pois transforma uma situação cotidiana em um problema de áreas no plano cartesiano. Nesse caso, o quadrado representa todos os horários possíveis de chegada, enquanto a faixa central representa os casos em que o encontro ocorre.

Capítulo 4

Tecnologias Digitais Aplicadas à Probabilidade geométrica

Nos capítulos anteriores foram apresentados os principais conceitos de Probabilidade Geométrica, bem como alguns de seus problemas clássicos. Entretanto, um dos grandes desafios do ensino de Matemática consiste em aproximar esses conteúdos da realidade vivenciada pelos estudantes, tornando a aprendizagem mais significativa e motivadora.

Nesse contexto, este capítulo apresenta uma sequência de atividades que podem ser desenvolvidas em sala de aula utilizando recursos tecnológicos. O objetivo não é apenas aplicar os conceitos estudados, mas também incentivar a investigação matemática, a formulação de hipóteses e a interpretação dos resultados obtidos.

As atividades foram elaboradas a partir de situações inspiradas no futebol, esporte amplamente presente no cotidiano dos estudantes brasileiros. A escolha desse tema busca despertar o interesse da turma por meio de problemas que envolvem eventos reais e que podem ser analisados sob a ótica da Probabilidade Geométrica.

Para o desenvolvimento das atividades serão utilizadas duas ferramentas computacionais bastante difundidas no ensino de Matemática: o *Software GeoGebra* e a linguagem de programação *Python*. O GeoGebra permitirá representar geometricamente situações reais e realizar medições de forma dinâmica, enquanto o Python será empregado na realização de simulações computacionais capazes de validar experimentalmente os resultados teóricos obtidos.

4.1 Modelagem com GeoGebra

O GeoGebra é um software de matemática dinâmica que reúne ferramentas de Geometria, Álgebra, Cálculo e Estatística em um único ambiente. Sua utilização permite representar situações reais de maneira aproximada, favorecendo a visualização geométrica

dos problemas e tornando os conceitos mais acessíveis aos estudantes.

Nesta proposta, o software será utilizado para modelar lances de futebol e investigar probabilidades associadas a situações reais de jogo. O professor poderá incentivar os alunos a formular hipóteses antes da realização dos cálculos, promovendo discussões sobre estratégias, posicionamento dos jogadores e tomada de decisão.

Como atividade inicial, será analisado um dos lances mais marcantes da história recente das Copas do Mundo. Trata-se da oportunidade desperdiçada pelo atacante francês Randal Kolo Muani na final da Copa do Mundo FIFA de 2022, disputada entre Argentina e França.

Nos minutos finais da prorrogação, com a partida empatada em 3×3, Kolo Muani recebeu um lançamento em profundidade e ficou frente a frente com o goleiro argentino Emiliano Martínez. A defesa realizada pelo goleiro impediu o gol que provavelmente daria o tricampeonato mundial à seleção francesa e tornou-se um dos momentos mais emblemáticos da decisão.

Figura 4.1: Lance entre Kolo Muani e Emiliano Martínez na final da Copa do Mundo de 2022.



Fonte: Adaptado de transmissão oficial da FIFA.

Após o lance, diversas análises esportivas afirmaram que o atacante havia perdido um "gol feito". Surge então uma questão bastante interessante do ponto de vista matemático:

> *Será que as chances de marcar realmente eram tão grandes quanto sugerem os comentários esportivos?*

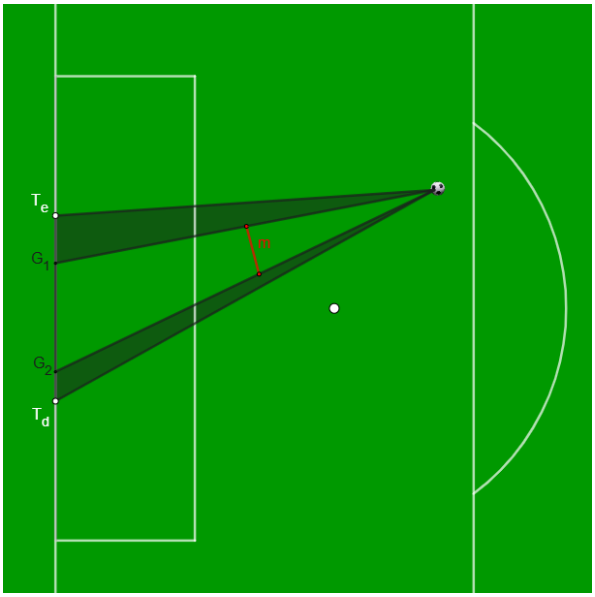
Responder precisamente a essa pergunta exigiria a consideração de diversos fatores, tais

como velocidade da bola, tempo de reação do goleiro, direção do chute, efeito da bola, posição do corpo dos jogadores e inúmeras outras variáveis.

Entretanto, é possível construir um modelo geométrico simplificado capaz de fornecer uma estimativa bastante interessante para essa probabilidade. Essa simplificação é suficiente para gerar discussões matemáticas relevantes em sala de aula, além de permitir que os estudantes compreendam como modelos matemáticos podem ser utilizados para analisar situações do cotidiano.

Para isso, foram analisadas imagens do lance sob diferentes perspectivas, permitindo reconstruir aproximadamente a posição da bola, do goleiro e da linha do gol no GeoGebra. Como primeira aproximação, será considerado apenas um chute rasteiro, reduzindo o problema para uma análise bidimensional.

Figura 4.2: Modelagem geométrica do lance construída no GeoGebra.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Na Figura 4.2, o segmento $\overline{T_eT_d}$ representa a linha do gol (segmento de reta entre as duas traves), enquanto o segmento $\overline{G_1G_2}$ representa a porção da meta efetivamente protegida pelo goleiro em função de sua posição no campo e de sua envergadura.

Sob essa modelagem, admite-se que qualquer chute direcionado ao segmento $\overline{G_1G_2}$ será defendido pelo goleiro, enquanto os demais resultarão em gol. Dessa forma, a probabilidade de defesa pode ser estimada pela razão entre o comprimento do segmento protegido e o comprimento total da linha do gol.

$$P_D = \frac{\overline{G_1G_2}}{\overline{T_eT_d}}.$$

Como o modelo foi construído preservando as proporções oficiais de um campo de futebol, o GeoGebra fornece

$$\overline{G_1G_2} \approx 4,28\,m \quad e \quad \overline{T_eT_d} = 7,32\,m.$$

Logo,

$$P_D = \frac{4,28}{7,32} \approx 0,5846.$$

Portanto, $P_D \approx 58,46\%$. Consequentemente, a probabilidade estimada de o atacante marcar o gol é dada pelo evento complementar, $P_G = 1 - P_D$, isto é,

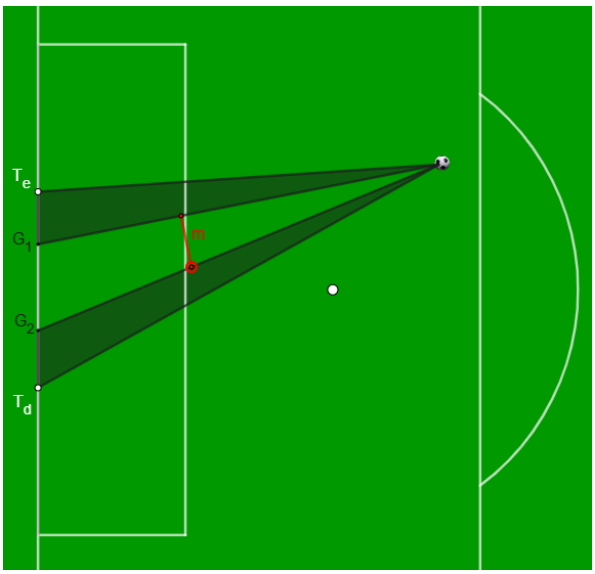
$$P_G = 1 - 0,5846 = 0,4154,$$

ou aproximadamente, $P_G \approx 41,54\%$.

Ainda fazendo uso do Geogebra, podemos mostrar aos alunos a importância do goleiro que se adianta perante um atacante que corre em direção ao gol. Vamos analisar o lance visto anteriormente, mas alterando a distância do goleiro para a linha do gol e verificando as probabilidades que surgem.

a) Goleiro na entrada da pequena área

Figura 4.3: Representação do lance



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

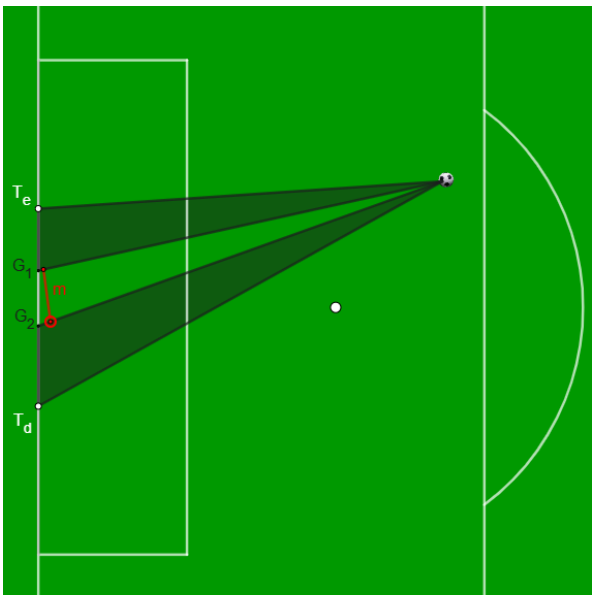
Para essa situação, o comprimento do segmento G_1G_2 é reduzido para $3,22m$, o que nos

dá uma probabilidade de

$$P_D = \frac{3,22}{7,32} = 0,439 \quad \Longrightarrow \quad P_D = 43,9\%$$

b) Goleiro na linha do gol

Figura 4.4: Representação do lance



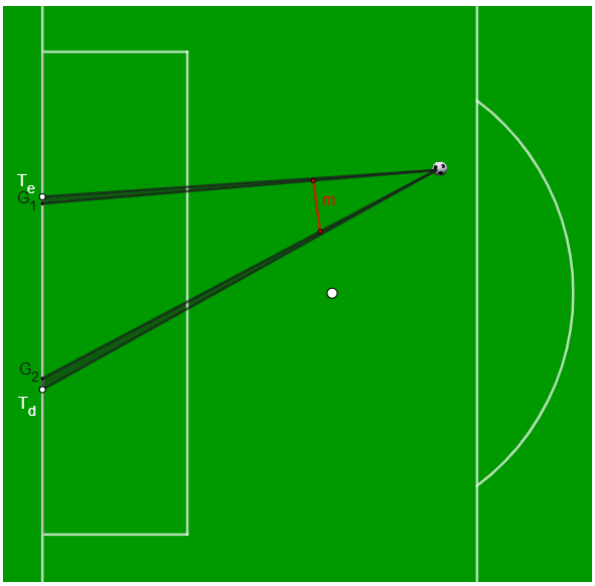
Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Nesse exemplo, caso o goleiro não se adiante, a chance de se defender um chute diminui drasticamente. O segmento G_1G_2 teria apenas $2,05m$, muito próximo à envergadura do goleiro, o que resulta em uma probabilidade de

$$P_D = \frac{2,05}{7,32} = 0,28 \quad \Longrightarrow \quad P_D = 28\%$$

c) Goleiro próximo à marca do penalti

Figura 4.5: Representação do lance



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

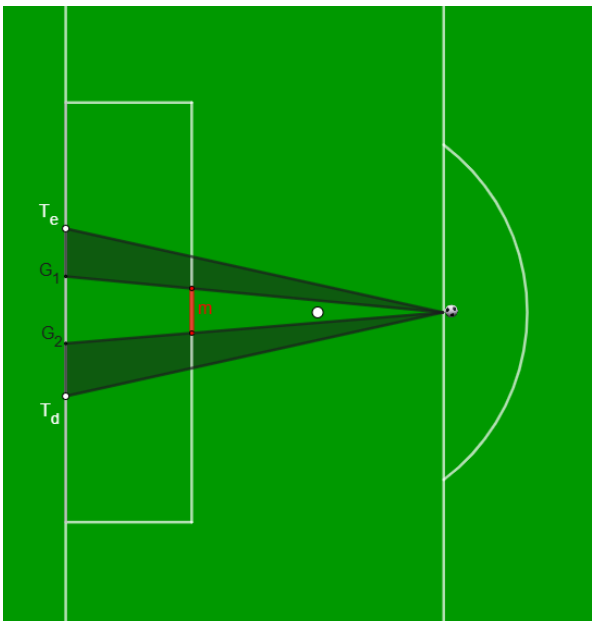
Agora, em contra partida aos itens anteriores, caso o goleiro se adiante o suficiente, reduziria significativamente a chance de tomar gol. Na figura 4.5, o segmento G_1G_2 possui $6,69m$, possibilitanto uma probabilidade de

$$P_D = \frac{6,69}{7,32} = 0,9139 \quad \Longrightarrow \quad P_D = 91,39\%$$

Podemos ainda alterar a posição do chute usando o Geogebra. Alterando as coordenadas do ponto que representa a bola obtemos ângulos diferentes do chute, dando a oportunidade de explorar o fato da probabilidade mudar, apesar da distância para o goleiro se manter inalterada. Vejamos a diferença de um chute frontal para um chute mais lateralizado.

a) Chute frontal com goleiro na linha da pequena área

Figura 4.6: Representação do lance



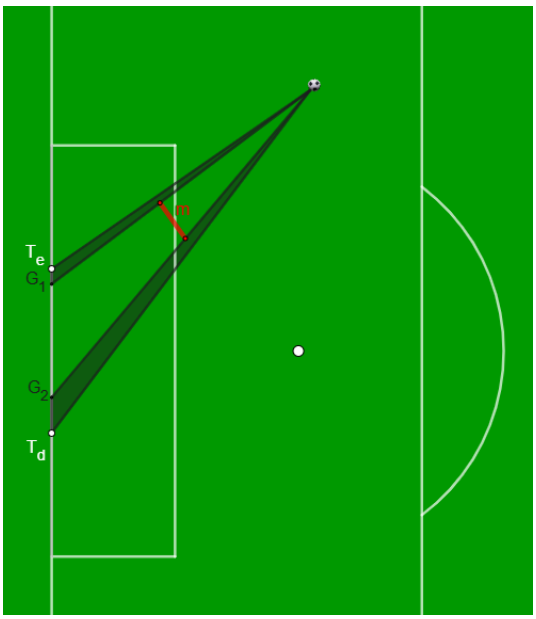
Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Nesse exemplo, o segmento G_1G_2 tem $2,92m$, assim a probabilidade do goleiro defender será de

$$P_D = \frac{2,92}{7,32} = 0,3989 \quad \Longrightarrow \quad P_D = 39,89\%$$

b) Chute lateral com goleiro na linha da pequena área

Figura 4.7: Representação do lance



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Aqui, apesar da distância da bola pro gol ser a mesma do exemplo a), a probabilidade será diferente. O segmento G_1G_2 mede $2,92m$, então a probabilidade do goleiro defender será

$$P_D = \frac{5,04}{7,32} = 0,6885$$
$$P_D = 68,85\%$$

Embora esse modelo desconsidere diversos fatores presentes em uma partida real, ele constitui uma excelente oportunidade para discutir com os estudantes a construção de modelos matemáticos, as limitações de uma modelagem e a interpretação dos resultados obtidos.

Ao final da atividade, o professor pode promover uma discussão com a turma por meio de perguntas como:

- Você imaginava que a probabilidade de defesa seria maior que a de gol?
- O lance pode realmente ser considerado um “gol perdido”?
- Quais variáveis foram desprezadas nesse modelo?
- Como poderíamos construir um modelo ainda mais realista?

4.2 Atividades com Python

A utilização de linguagens de programação no ensino de Matemática tem se tornado cada vez mais frequente, principalmente devido à possibilidade de realizar simulações, automatizar cálculos e explorar problemas que seriam difíceis de resolver apenas por meio de procedimentos manuais. Nesse contexto, a linguagem *Python* destaca-se por sua simplicidade sintática, ampla documentação e grande quantidade de bibliotecas voltadas para aplicações científicas e educacionais.

Nesta seção, apresentaremos uma proposta de atividade utilizando Python para explorar conceitos de Probabilidade Geométrica por meio do processamento de imagens. A ideia central consiste em utilizar uma imagem digital como espaço amostral e estimar probabilidades a partir da proporção entre regiões de diferentes cores. Dessa forma, problemas geométricos podem ser investigados utilizando apenas a contagem de pixels da imagem.

Para a implementação da atividade foi utilizado o ambiente *Google Colab*, que permite executar códigos em Python diretamente no navegador, dispensando a instalação de programas adicionais. O código desenvolvido recebe como entrada uma imagem em formato PNG, preferencialmente composta apenas por pixels pretos e brancos. Após o carregamento da imagem, o algoritmo realiza automaticamente as seguintes etapas:

1. contabiliza o número total de pixels da imagem;
2. identifica a quantidade de pixels pertencentes a cada região (preta e branca);
3. calcula a porcentagem que cada região representa em relação ao total;
4. interpreta essas porcentagens como probabilidades geométricas.

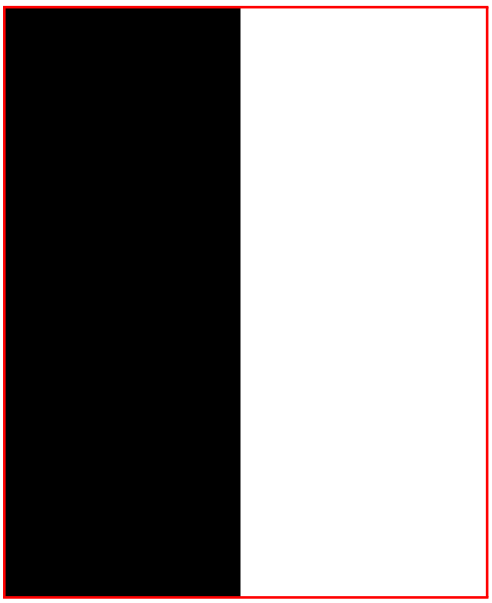
Sob essa perspectiva, escolher aleatoriamente um pixel da imagem equivale a escolher aleatoriamente um ponto da região representada pela figura. Assim, a probabilidade de selecionar um ponto pertencente a uma determinada região é estimada pela razão entre o número de pixels dessa região e o número total de pixels da imagem.

Embora essa abordagem produza apenas uma aproximação da área real das figuras, a precisão obtida é bastante elevada quando são utilizadas imagens de alta resolução, tornando o método adequado tanto para fins didáticos quanto para experimentação computacional.

Nos exemplos apresentados a seguir, as imagens possuem um contorno vermelho apenas para facilitar sua visualização ao longo do texto. Esse contorno não é considerado pelo algoritmo durante o processamento, de modo que apenas as regiões internas da figura são utilizadas nos cálculos.

Exemplo 4.1. Calcular a probabilidade de selecionar um ponto pertencente à região preta da Figura 4.8.

Figura 4.8: Imagem utilizada no primeiro exemplo.



Fonte: Elaborada pelo autor (2026).

Neste primeiro exemplo foi escolhida uma imagem particularmente simples, composta exatamente por duas regiões de mesma área: uma preta e outra branca. Espera-se, portanto, que a probabilidade de selecionar um ponto pertencente a qualquer uma das duas regiões seja igual a 50%.

Após o processamento da imagem, o algoritmo fornece as informações apresentadas no quadro a seguir.

Total de pixels da região total: 364500
Total de pixels da região maior: 182250
Total de pixels da região menor: 182250
A região menor ocupa 50,00% da área da região.
A região maior ocupa 50,00% da área da região.

Os resultados obtidos confirmam exatamente o esperado, indicando que ambas as regiões ocupam metade da área total da imagem. Consequentemente, a probabilidade de selecionar aleatoriamente um ponto pertencente à região preta é dada por

$$P = \frac{182250}{364500} = 0,5 \quad \Longrightarrow \quad P = 50\%.$$

Apesar de simples, esse primeiro exemplo permite ao professor apresentar o funcionamento da calculadora desenvolvida em Python e discutir com os estudantes a relação entre área, contagem de pixels e Probabilidade Geométrica. Além disso, serve como uma validação inicial do algoritmo, uma vez que o resultado obtido coincide exatamente com o valor esperado.

Nos exemplos seguintes, utilizaremos figuras geométricas mais sofisticadas para mostrar que essa mesma metodologia pode ser aplicada em problemas cuja determinação da área é significativamente mais complexa, como ocorre em figuras fractais.

4.2.1 Aplicação ao Triângulo de Sierpiński

Uma vez compreendido o funcionamento da calculadora desenvolvida em Python, podemos utilizá-la para investigar figuras geométricas cuja determinação da área não é imediata. Um exemplo bastante interessante é o *Triângulo de Sierpiński*, um dos fractais mais conhecidos da Matemática.

Exemplo 4.2. Determinar experimentalmente a probabilidade de selecionar um ponto pertencente às fases de construção do Triângulo de Sierpiński após um dado número de iterações.

O Triângulo de Sierpiński é obtido a partir de um triângulo equilátero. Inicialmente, unem-se os pontos médios de seus lados, formando quatro triângulos equiláteros congruentes. Em seguida, remove-se o triângulo central e o mesmo procedimento é repetido em cada um dos três triângulos restantes (ABLE,[1]). Esse processo pode ser realizado indefinidamente, produzindo uma figura fractal de grande interesse matemático.

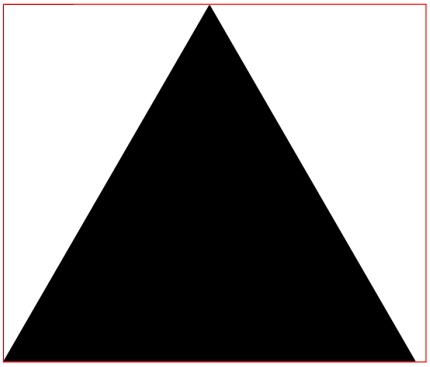
Figura 4.9: Construção do Triângulo de Sierpiński.



Fonte: https://www2.ufjf.br/fractalize/2021/05/22/triangulo-de-sierpinski/.

Antes de iniciar as iterações, utilizaremos uma imagem em que o triângulo ocupa exatamente metade da área total da figura. Essa escolha facilita a interpretação dos resultados produzidos pelo algoritmo e permite comparar as probabilidades obtidas a cada etapa da construção do fractal.

Figura 4.10: Imagem utilizada para a etapa inicial (0 iterações).



Fonte: Elaborada pelo autor (2026).

Ao processar essa imagem, o algoritmo retorna os resultados apresentados na Figura 4.11.

Figura 4.11: Resultado fornecido pelo algoritmo para nenhuma iteração.

```
A região menor ocupa 50.00% da área da região.
A região maior ocupa 50.00% da área da região.
```

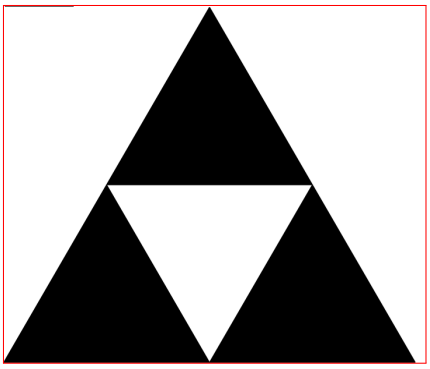
Fonte: Elaborada pelo autor (2026).

Como esperado, a probabilidade de selecionar aleatoriamente um ponto pertencente ao triângulo é de aproximadamente $P_0 = 50\%$.

A partir desse resultado inicial, propõe-se aos estudantes repetir o procedimento após uma, duas e três iterações do Triângulo de Sierpiński. O objetivo é observar como a probabilidade varia à medida que novas regiões são removidas.

Uma iteração

Figura 4.12: Imagem correspondente a uma iteração do Triângulo de Sierpiński.



Fonte: Elaborada pelo autor (2026).

Figura 4.13: Resultado fornecido pelo algoritmo para uma iteração.

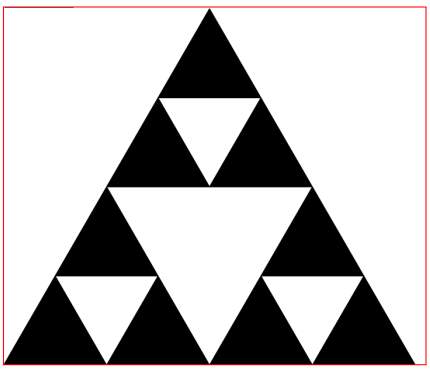
```
A região menor ocupa 37.80% da área da região.
A região maior ocupa 62.20% da área da região.
```

Fonte: Elaborada pelo autor (2026).

O algoritmo indica que a probabilidade de selecionar um ponto pertencente ao fractal passa a ser aproximadamente $P_1 = 37,8\%$.

Duas iterações

Figura 4.14: Imagem correspondente a duas iterações do Triângulo de Sierpiński.



Fonte: Elaborada pelo autor (2026).

Figura 4.15: Resultado fornecido pelo algoritmo para duas iterações.

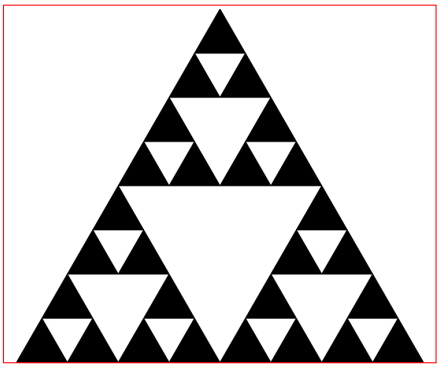
```
A região menor ocupa 28.56% da área da região.
A região maior ocupa 71.44% da área da região.
```

Fonte: Elaborada pelo autor (2026).

Nesse caso, o algoritmo fornece $P_2 = 28,5\%$.

Três iterações

Figura 4.16: Imagem correspondente a três iterações do Triângulo de Sierpiński.



Fonte: Elaborada pelo autor (2026).

Figura 4.17: Resultado fornecido pelo algoritmo para três iterações.

```
A região menor ocupa 21.69% da área da região.
A região maior ocupa 78.31% da área da região.
```

Fonte: Elaborada pelo autor (2026).

Após três iterações, obtém-se $P_3 = 21,6\%$.

Em vez de fornecer imediatamente uma fórmula para a probabilidade após n iterações, o professor pode solicitar que os estudantes organizem os resultados em uma tabela e procurem identificar um padrão de comportamento.

Número de iterações	Probabilidade (%)
0	$50,0$
1	$37,8$
2	$28,5$
3	$21,6$

Essa etapa constitui um excelente momento para incentivar a formulação de conjecturas, desenvolvendo nos estudantes habilidades relacionadas à investigação matemática e ao reconhecimento de padrões.

Na próxima etapa da atividade, analisaremos a razão entre probabilidades consecutivas e mostraremos como esse comportamento permite obter uma expressão geral para a probabilidade após qualquer número de iterações.

Generalização para um número arbitrário de iterações

Os resultados obtidos nas primeiras iterações sugerem que existe um padrão na redução da área do Triângulo de Sierpiński. Em vez de apresentar imediatamente uma expressão geral, o professor pode incentivar os estudantes a investigar esse comportamento a partir dos valores experimentais produzidos pelo algoritmo.

Para facilitar essa análise, organizamos os resultados obtidos na Tabela 4.1.

Tabela 4.1: Probabilidade de selecionar um ponto pertencente ao Triângulo de Sierpiński.

Número de iterações	Probabilidade	Razão entre probabilidades
0	$0,5000$	–
1	$0,3780$	$0,756$
2	$0,2850$	$0,754$
3	$0,2160$	$0,758$

1. Observa-se que a razão entre probabilidades consecutivas permanece aproximadamente constante e muito próxima de $\frac{3}{4}$.
2. Esse comportamento sugere que, a cada nova iteração, aproximadamente um quarto da área remanescente é removido. Consequentemente, permanece apenas $\frac{3}{4}$ da área da etapa anterior.

Essa constatação conduz naturalmente à seguinte conjectura:

> *A probabilidade obtida após cada iteração é igual à probabilidade da etapa anterior multiplicada por* $\frac{3}{4}$.

Em linguagem matemática,

$$P_n = \frac{3}{4} P_{n-1},$$

onde P_n representa a probabilidade após n iterações. Como na etapa inicial temos

$$P_0 = \frac{1}{2},$$

segue que

$$P_1 = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2},$$

$$P_2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \frac{1}{2},$$

$$P_3 = \left(\frac{3}{4}\right)^3 \frac{1}{2},$$

e assim sucessivamente. Dessa forma, os estudantes podem conjecturar a seguinte expressão para um número arbitrário de iterações.

Proposição 4.3. *Após n iterações do Triângulo de Sierpiński, a probabilidade de selecionar aleatoriamente um ponto pertencente ao fractal é dada por*

$$P_n = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

Demonstração. Inicialmente, a região preta ocupa exatamente metade da área da imagem, de modo que

$$P_0 = \frac{1}{2}.$$

Em cada nova iteração remove-se exatamente um quarto da área restante do fractal. Assim, permanece apenas $\frac{3}{4}$. da área obtida na etapa anterior. Logo,

$$P_n = \frac{3}{4} P_{n-1}.$$

Aplicando essa relação recursivamente,

$$P_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n P_0.$$

Como

$$P_0 = \frac{1}{2},$$

obtemos

$$P_n = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^n,$$

como queríamos demonstrar.

□

4.2.2 Validação computacional

Uma característica interessante dessa atividade consiste em comparar os resultados previstos pela expressão matemática com aqueles obtidos experimentalmente pelo algoritmo desenvolvido em Python. A Tabela 4.2 apresenta essa comparação.

Tabela 4.2: Comparação entre os resultados experimentais e teóricos.

Iteração	Python	Modelo Matemático
0	$50,00\%$	$50,00\%$
1	$37,80\%$	$37,50\%$
2	$28,50\%$	$28,13\%$
3	$21,60\%$	$21,09\%$

Observa-se que os valores produzidos pelo algoritmo são extremamente próximos daqueles previstos pelo modelo matemático. As pequenas diferenças decorrem da discretização da imagem em pixels, já que a calculadora trabalha com aproximações numéricas e não com áreas contínuas.

Essa comparação constitui uma excelente oportunidade para discutir com os estudantes a diferença entre modelos contínuos e discretos, bem como o papel das aproximações computacionais na resolução de problemas matemáticos.

4.2.3 Exploração em sala de aula

Além de ilustrar conceitos de Probabilidade Geométrica, essa atividade permite desenvolver diversas competências previstas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), tais como investigação, modelagem matemática e pensamento computacional.

Durante a realização da atividade, o professor pode propor questões como:

- O que acontece com a probabilidade quando aumentamos o número de iterações?
- A sequência de probabilidades possui algum padrão?

- É possível prever o resultado da próxima iteração sem utilizar o algoritmo?
- Qual será a probabilidade após 10 iterações?
- O que acontece quando o número de iterações tende ao infinito?

Essas questões incentivam os estudantes a formular conjecturas, identificar regularidades e construir modelos matemáticos, transformando uma simples atividade computacional em uma rica experiência de investigação matemática.

Além disso, o uso do Python permite que os próprios estudantes modifiquem as imagens utilizadas como entrada do algoritmo, investigando novas figuras e verificando experimentalmente propriedades relacionadas à Probabilidade Geométrica. Dessa forma, a atividade deixa de ser apenas um exercício de aplicação e passa a constituir um ambiente favorável à experimentação, à descoberta e à construção do conhecimento matemático.

4.2.4 Aplicações ao futebol

Retornando às aplicações da Probabilidade Geométrica em situações esportivas, analisaremos agora como a calculadora desenvolvida em Python pode ser utilizada para estimar a probabilidade de um goleiro defender uma cobrança de pênalti.

É importante destacar que o modelo adotado desconsidera diversas variáveis presentes em uma situação real de jogo, tais como a velocidade do chute, o tempo de reação do goleiro, o efeito da bola, a altura do chute, o diâmetro da bola e a possibilidade de a bola tocar a trave antes de entrar no gol. Apesar dessas simplificações, a atividade possui grande potencial didático, pois permite discutir com os alunos como modelos matemáticos podem ser construídos a partir de situações reais.

Nos exemplos seguintes, o objetivo será calcular a porcentagem que a área ocupada pela silhueta de um goleiro representa em relação à área total de um gol de futebol. Assim, interpretaremos essa razão como uma estimativa da probabilidade de defesa.

Exemplo 4.4. Calcular a probabilidade de o goleiro defender uma cobrança de pênalti permanecendo no centro do gol.

Figura 4.18: Goleiro posicionado no centro do gol.



Fonte: Elaborada pelo autor (2026).

A Figura 4.18 é composta por um retângulo que representa o gol de futebol e por uma silhueta que representa o goleiro. Nesse modelo, a área da silhueta corresponde à região da meta que estaria protegida pelo goleiro.

Ao processar a imagem na calculadora desenvolvida em Python, obtivemos os seguintes dados:

Total de pixels da região total: 179340
Total de pixels da região maior: 170821
Total de pixels da região menor: 8519
A região menor ocupa 4,75% da área da região.
A região maior ocupa 95,25% da área da região.

As informações acima podem ser interpretadas da seguinte forma:

- o total de pixels da região total corresponde à soma dos pixels pretos e brancos que compõem a imagem;
- a região maior corresponde à quantidade de pixels brancos;
- a região menor corresponde à quantidade de pixels pretos, isto é, à área ocupada pela silhueta do goleiro;
- as duas últimas informações indicam as porcentagens que cada uma dessas regiões representa em relação ao total.

Assim, nesse primeiro modelo, a silhueta do goleiro ocupa aproximadamente $4,75\%$ da área total do gol. Portanto, a probabilidade estimada de defesa é

$$P_D = 4,75\%.$$

Exemplo 4.5. Calcular a probabilidade de o goleiro defender uma cobrança de pênalti quando acerta o lado da cobrança.

Figura 4.19: Silhueta do goleiro em movimento lateral.



Fonte: Elaborada pelo autor (2026).

A Figura 4.19 ilustra a silhueta de um goleiro tentando defender uma cobrança de pênalti. Como verificação inicial, observa-se que a proporção entre a área da silhueta do goleiro e a área total do gol é de aproximadamente $4,61\%$, valor muito próximo ao obtido na Figura 4.18. Isso indica que as proporções da silhueta foram mantidas.

No entanto, neste exemplo supomos que o goleiro acertou o lado da cobrança. Nesse caso, é razoável restringir o espaço amostral a apenas metade da área total do gol, como ilustra a Figura 4.20.

Figura 4.20: Região considerada quando o goleiro acerta o lado da cobrança.



Fonte: Elaborada pelo autor (2026).

Processando essa imagem na calculadora em Python, obtivemos o resultado apresentado na Figura 4.21.

Figura 4.21: Resultado da calculadora para o goleiro acertando o lado da cobrança.

```
Total de pixels da região total: 293040
Total de pixels da região maior: 266034
Total de pixels da região menor: 27006
A região menor ocupa 9.22% da área da região.
A região maior ocupa 90.78% da área da região.
```

Fonte: Elaborada pelo autor (2026).

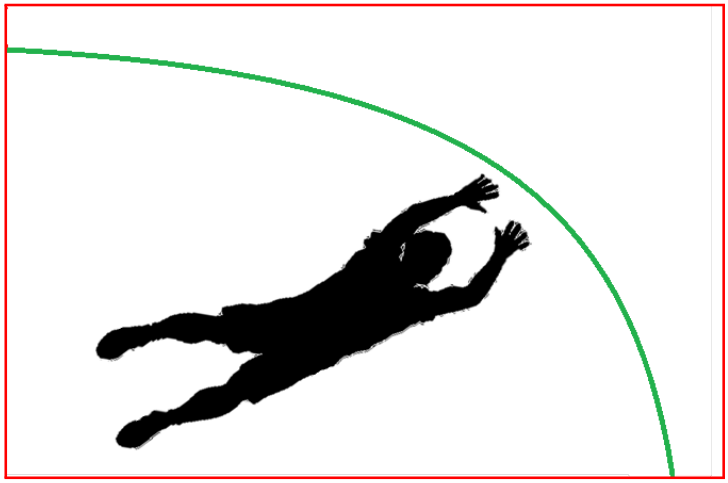
Como esperado, a probabilidade estimada de defesa praticamente dobra, pois a área ocupada pela silhueta do goleiro permanece aproximadamente a mesma, enquanto a região considerada do gol é reduzida pela metade.

Ainda assim, observa-se que a probabilidade de defesa permanece relativamente pequena, o que contribui para uma discussão interessante em sala de aula sobre a dificuldade de defender uma cobrança de pênalti.

Região defensável

Podemos tornar o modelo um pouco mais realista restringindo ainda mais a região a ser considerada. Em uma cobrança de pênalti, nem toda a área do gol é igualmente alcançável pelo goleiro. Fatores como velocidade do chute, altura da bola, impulsão e tempo de reação fazem com que certas regiões da meta sejam praticamente indefensáveis. Dessa forma, consideraremos uma região chamada de *região defensável*, isto é, a parte do gol em que o goleiro teria condições reais de alcançar a bola.

Figura 4.22: Representação da região defensável.

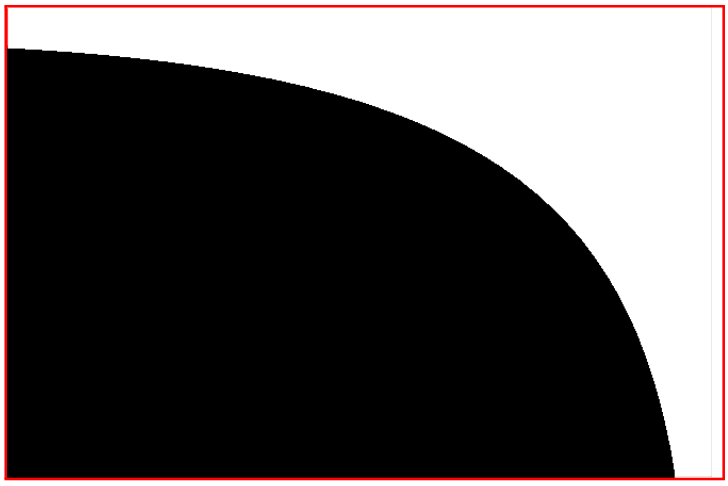


Fonte: Elaborada pelo autor (2026).

Na Figura 4.22, a região defensável é representada pela área abaixo da curva em verde. Para calcular a probabilidade de defesa nesse novo modelo, precisamos primeiro estimar a área dessa região.

Para isso, utilizamos a imagem da Figura 4.23 na calculadora em Python.

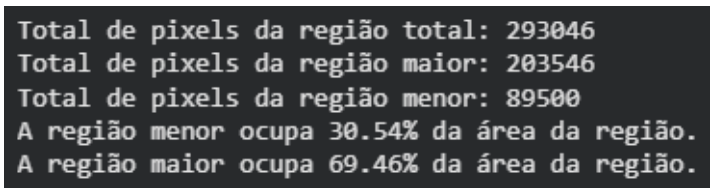
Figura 4.23: Imagem utilizada para o cálculo da área defensável.



Fonte: Elaborada pelo autor (2026).

As informações obtidas pelo algoritmo são apresentadas na Figura 4.24.

Figura 4.24: Resultado da calculadora para a região defensável.



Fonte: Elaborada pelo autor (2026).

De acordo com o resultado obtido, a região defensável possui 203546 pixels. Além disso, pela Figura 4.21, sabemos que a silhueta do goleiro ocupa 27006 pixels.

Portanto, a probabilidade estimada de defesa, considerando apenas a região defensável, é dada por

$$P_D = \frac{27006}{203546}.$$

Logo,

$$P_D = 0,1326,$$

isto é,

$$P_D = 13,26\%.$$

Esse resultado mostra que, ao restringirmos o espaço amostral à região realmente defensável, a probabilidade de defesa aumenta em relação ao modelo anterior. Ainda assim, a porcentagem obtida evidencia a dificuldade de defender uma cobrança de pênalti, mesmo quando o goleiro escolhe corretamente o lado do chute.

Do ponto de vista pedagógico, essa atividade permite discutir com os estudantes a importância da escolha do espaço amostral em um problema de Probabilidade Geométrica. Dependendo da região considerada como referência, a probabilidade obtida pode variar significativamente, o que reforça a necessidade de explicitar claramente as hipóteses adotadas em qualquer modelo matemático.

Capítulo 5

Conclusão

O presente trabalho teve como objetivo apresentar uma proposta para o ensino de Probabilidade Geométrica, articulando fundamentos matemáticos, problemas clássicos, aplicações contextualizadas e o uso de tecnologias digitais. Ao longo da dissertação, buscou-se mostrar que esse conteúdo pode ser explorado de maneira mais investigativa e significativa, favorecendo a participação ativa dos estudantes na construção do conhecimento.

Inicialmente, foram apresentados os conceitos básicos de Probabilidade, Análise Combinatória e Geometria Plana, fornecendo os conhecimentos necessários para a compreensão da Probabilidade Geométrica. Em seguida, foram discutidos alguns dos problemas mais conhecidos dessa teoria, como o Paradoxo de Bertrand, a Agulha de Buffon, o Problema do Macarrão e outros exemplos clássicos, evidenciando diferentes estratégias de resolução e destacando a riqueza matemática presente nesses problemas.

Posteriormente, procurou-se aproximar esses conceitos da realidade dos estudantes por meio de aplicações envolvendo o software GeoGebra e a linguagem de programação Python. O GeoGebra mostrou-se uma ferramenta eficiente para a construção de modelos geométricos dinâmicos, enquanto o Python permitiu automatizar estimativas de probabilidades por meio do processamento de imagens. Além disso, a utilização de situações relacionadas ao futebol demonstrou que a Probabilidade Geométrica pode ser empregada para investigar problemas presentes no cotidiano dos alunos, tornando o processo de aprendizagem mais atrativo e contextualizado.

Como principal contribuição do trabalho, foi elaborada uma sequência didática que organiza os conteúdos desenvolvidos ao longo da dissertação em uma proposta de ensino estruturada, contemplando objetivos, atividades, estratégias metodológicas e formas de avaliação. Espera-se que esse material possa servir de apoio a professores da Educação Básica interessados em abordar a Probabilidade Geométrica de maneira diferenciada, utilizando recursos tecnológicos e metodologias investigativas.

É importante ressaltar que os modelos apresentados possuem caráter didático e, por-

tanto, envolvem simplificações da realidade. Aspectos como velocidade, tempo de reação, efeitos físicos e outras variáveis foram desconsiderados em algumas aplicações, uma vez que o objetivo principal consistiu em destacar os conceitos matemáticos envolvidos e não reproduzir fielmente os fenômenos analisados. Ainda assim, essas simplificações mostram-se adequadas para o contexto escolar e podem, inclusive, servir como ponto de partida para discussões sobre modelagem matemática e suas limitações.

Por fim, espera-se que esta dissertação contribua para ampliar as possibilidades de ensino da Probabilidade Geométrica na Educação Básica, mostrando que esse conteúdo pode ser desenvolvido de forma dinâmica, investigativa e contextualizada. Acredita-se que a integração entre Matemática, tecnologia e situações do cotidiano favorece uma aprendizagem mais significativa, despertando o interesse dos estudantes e incentivando uma postura mais crítica e investigativa diante dos problemas matemáticos.

Como perspectivas para trabalhos futuros, sugere-se ampliar as aplicações apresentadas para outros contextos, desenvolver novas atividades utilizando diferentes recursos computacionais e investigar, por meio da aplicação da sequência didática em sala de aula, suas contribuições para o processo de ensino e aprendizagem da Probabilidade Geométrica.

Apêndice A

Material Complementar

1. Código em Python usado nos cálculos de áreas.

```
import cv2
import numpy as np

def calcular_porcentagem_area(caminho_imagem):
    # 1. Carregar a imagem
    imagem = cv2.imread(caminho_imagem)
    if imagem is None:
        print("Erro: N o foi poss vel carregar a imagem.")
        return

    # 2. Converter para escala de cinza para facilitar a
       separa  o
    # Se a imagem s  tem duas cores, ela ter  apenas dois picos
       de intensidade
    cinza = cv2.cvtColor(imagem, cv2.COLOR_BGR2GRAY)

    # 3. Aplicar uma limiariza  o (Threshold)
    # Isso transforma a imagem em preto e branco puro (0 e 255)
    _, binaria = cv2.threshold(cinza, 127, 255, cv2.THRESH_BINARY
       )

    # 4. Contar os pixels
    total_pixels = binaria.size
    pixels_brancos = cv2.countNonZero(binaria)
    pixels_pretos = total_pixels - pixels_brancos

    # Identificar qual    a menor regi o
```

```
    area_menor = min(pixels_brancos, pixels_pretos)
    area_maior = max(pixels_brancos, pixels_pretos)
    area_total = area_menor + area_maior

    # 5. Calcular a porcentagem
    porcentagem_menor = (area_menor / area_total) * 100
    porcentagem_maior = (area_maior / area_total) * 100

    print(f"Total de pixels da regi o total: {area_total}")
    print(f"Total de pixels da regi o maior: {area_maior}")
    print(f"Total de pixels da regi o menor: {area_menor}")
    print(f"A regi o menor ocupa {porcentagem_menor:.2f}% da
        rea  da regi o.")
    print(f"A regi o maior ocupa {porcentagem_maior:.2f}% da
        rea  da regi o.")

calcular_porcentagem_area('/content/1.png')
```

2. Código usado para construção do Triângulo de Sierpinski

```
import matplotlib.pyplot as plt

def sierpinski(ax, p1, p2, p3, ordem):
    if ordem == 0:
        ax.fill(
            [p1[0], p2[0], p3[0]],
            [p1[1], p2[1], p3[1]],
            color='black'
        )
    else:
        m12 = ((p1[0]+p2[0])/2, (p1[1]+p2[1])/2)
        m23 = ((p2[0]+p3[0])/2, (p2[1]+p3[1])/2)
        m31 = ((p3[0]+p1[0])/2, (p3[1]+p1[1])/2)

        sierpinski(ax, p1, m12, m31, ordem-1)
        sierpinski(ax, m12, p2, m23, ordem-1)
        sierpinski(ax, m31, m23, p3, ordem-1)

fig, ax = plt.subplots(figsize=(10,10))

p1 = (0,0)
p2 = (1,0)
```

```
23 p3 = (0.5,0.866)
24
25 sierpinski(ax, p1, p2, p3, ordem=3)
26
27 ax.set_aspect('equal')
28 ax.axis('off')
29
30 # Mostra a imagem
31 plt.show()
32
33 # Salva em PNG transparente
34 fig.savefig(
35     "sierpinski.png",
36     dpi=600,
37     transparent=True,
38     bbox_inches='tight',
39     pad_inches=0
40 )
```

Referências Bibliográficas

[1] ABLE, S. L. R. *A Geometria Fractal no Processo de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Probabilidade Geométrica*. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Pato Branco. 2021. 60

[2] AMORIM, Vitor. MOZER, Graziele. *Probabilidade além da combinatória: Tópicos e problemas reais com foco no raciocínio probabilístico*. Rio de Janeiro: ANPMAT, 2020. 32, 43, 44

[3] BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: Ministério da Educação, 2018. http://basenacionalcomum.mec.gov.br/

[4] HAZZAN, S. *Fundamentos de matemática elementar, 5: Combinatória, probabilidade*. São Paulo: Atual, 2013. 5

[5] JESUS, Marcos Antônio de. *Probabilidade Geométrica com abordagem na esperança matemática*. Universidade Federal do Tocantins. Arrais. 2018. 1

[6] LIMA, J. J. F. *Probabilidade Geométrica: Estudo de Problemas e Aplicações*. Universidade Estadual do Ceará. Quixadá. 2023. 44

[7] MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. P.; CARVALHO, P. C.; FERNANDEZ, P. *Análise Combinatória e Probabilidade*. Rio de Janeiro: SBM, 1991. 3

[8] NETO, A. C. M. *Geometria*. Rio de Janeiro: SBM, 2022.

[9] ROSS, S. *Probabilidade: Um Curso Moderno com Aplicações*. Porto Alegre: Bookman, 2010.

[10] SILVA, A. R. *Motivações Matemáticas por meio de resolução de problemas de Probabilidade Geométrica*. Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Natal. 2017.

[11] SILVA, F. H. GARCIA, A. R. G. RODRIGUES, W. M. *Formas, espaços e acasos: Probabilidade Geométrica na Educação Básica*. Curitiba: CRV, 2021.

[12] VIANA, F. C. A. *Estudo e Aplicações de Probabilidade Geométrica e Paradoxos*. Universidade Federal da Paraíba. João Pessoa. 2013.